

## **P. Franek: Several Dirac operators in parabolic geometries**

Doktorská disertační práce P. Franeka je věnována studiu invariantních operátorů a jejich komplexů na varietách se zvolenou geometrickou strukturou. Řada obecných výsledků je již k dispozici pro případ operátorů, které patří k orbitám s regulárním infinitesimálním charakterem. Velmi málo je naopak známo v případech, který infinitesimální charakter je singulární.

Případy studované v práci jsou inspirovány problémy z Cliffordovy analýzy ve více proměnných. Dirakův operátor pro víc Cliffordových proměnných je zobecněním Cauchy-Riemannova operátoru pro víc komplexních proměnných. Oba tyto operátory jsou přeuredněny. C-R operátor je prvním operátorem v Dolbeaultově komplexu, který tvoří jeho rezolventu. Analogie Dolbeaultova komplexu pro Dirakův operátor je podstatně komplikovanější (obsahuje typicky také operátory druhého řádu) a je známa jen v některých případech.

Standardní symetrie pro tyto známé komplexy nejsou parabolického typu. Přesto je možné najít vhodnou parabolickou geometrii s vlastností, že Dirakův operátor ve víc proměnných je možné získat vhodnou redukcí invariantního diferenciálního operátoru v této parabolické geometrii. Je pak přirozené hledat rezolventu Dirakova operátoru složenou z operátorů invariantních vůči této rozšířené symetrii. Je ale zřejmé, že pak příslušný komplex bude patřit k orbitám se singulárním infinitesimálním charakterem. Předkládaná práce P. Franeka je věnována právě takovéto konstrukci rezolventy pro Dirakův operátor.

Převážná většina druhé kapitoly je věnována shrnutí pojmů a výsledků potřebných v další části práce. obsahuje základní informace o polojednoduchých Lieových algebrách, o jejich parabolických podalgebrách, V druhé kapitole jsou shrnuty základní pojmy a výsledky o  $|k|$ -gradovaných Lieových algebrách, o Verma modulech a zobecněných Verma modulech, o souvislosti homomorfismů Verma modulů a invariantních diferenciálních operátorů a o klasickém Dirakově operátoru v jedné proměnné na rovném prostoru.

Třetí kapitola je věnována je věnována vlastnostem zobecněných Verma modulů. Obsahuje shrnutí výsledků, které našli Bernstein-Gelfand-Gelfanda a které zobecnil Lepowski. Výsledky v této části jsou převzaty z originálních článků, jejich důkazy jsou podrobnější a zmíněné výsledky jsou částečně zobecněny. Jsou zavedeny pojmy singulárního Hasseova grafu a BGG grafu.

Ve čtvrté kapitole je sestaven homomorfismus zobecněných Verma modulů, který odpovídá Dirakovu operátoru ve víc proměnných. Je popsán podrobně způsob, jak se invariantní operátor pro tento homomorfismus redukuje na Dirakův operátor, pokud se operátory používají pro řezy příslušných vektorových fibrovaných prostorů, které nezávisí na proměnných z druhé gradované komponenty.

V páté kapitole je popsána afinní orbita, obsahující nejvyšší váhy representací, popisující vzor a obraz Dirakova operátoru. V sudé dimenzi jsou výsledky úplné ve stabilní oblasti, v liché dimenzi je orbita sestavena pro všechny případy. Je ukázáno také, že v případě liché dimenze jsou příslušné operátory standardní (pokud existují), zatímco v dimenzi sudé je operátory druhého řádu nestandardní.

Poslední šestá kapitola obsahuje výsledky o komplexech invariantních operátorů, dokázané pomocí konstrukce extrémálních vektorů. Tyto vektory jednoznačně určují příslušný homomorfismus, a tedy i příslušný invariantní diferenciální operátor. V této kapitole je sestavena celá posloupnost pro případ dvou proměnných a je dokázáno, že tvoří komplex.

Práce obsahuje řadu nových a zajímavých výsledků. Drobné inovace jsou již ve třetí kapitole. Ve čtvrté kapitole je pečlivě rozebrána souvislost invariantních operátorů v příslušné parabolické geometrii s Dirakovým operátorem ve víc Cliffordových proměnných. Podrobný popis singulárních orbit v páté kapitole je velmi podstatný. Výpočet extrémálních vektorů v poslední kapitole je technicky velmi náročný. Výsledkem je pak konstrukce celého komplexu, složeného z invariantních operátorů dané parabolické geometrie.

Přes řadu výsledků, obsažených v práci, je zkoumané téma ještě daleko od uzavření. Nejen obecný problém konstrukce BGG komplexů pro případ singulárního charakteru, ale i tento speciální případ jisté parabolické geometrie pro ortogonální grupu ještě vyžaduje mnoho dalšího úsilí. Práce v tomto směru přináší podstatný pokrok.

Práce je zpracována přesně, srozumitelně a přináší zajímavé nové výsledky. Doporučuji ji tedy k obhajobě.

V Praze, 4.10.2006



prof. Vladimír Souček, DrSc.