

Posouzení doktorské disertační práce „Several Dirac operators in Parabolic Geometries“ autora Petera Franeka.

Předložená práce je motivována rozsáhlou teorií tzv. Cliffordovy analýzy, která v minulých desetiletích zásadním způsobem rozšířila pohled na komplexní teorii funkcí a propojila klasické otázky vlastností holomorfních funkcí s mnoha oblastmi analýzy, geometrie a matematické fyziky. Autor vychází z role přeурčených systémů parciálních diferenciálních rovnic, které se v Cliffordově analýze objevují jako zobecnění Dolbeaultových komplexů, a geometrických vlastností diferenciálních operátorů, které tyto komplexy tvoří. Zároveň autor využívá své dobré znalosti ryze algebraické podstaty těchto operátorů, která se opírá o moderní teorii reprezentací Lieových algeber a to zejména o mohutné nástroje reprezentované Verma moduly a strukturou jejich homomorfismů. V práci se tak snoubí poznatky z nově se rodící teorie tzv. parabolických geometrií s hlubokým pochopením dnes již klasických teorií Cliffordovy analýzy a Verma modulů.

Přístup Petera Franeka opřený o geometrický popis scény, ve které žijí operátory zajímavé z pohledu Cliffordovy analýzy, umožňuje překvapivé a elegantní zobecnění vlastností a nástrojů známých z konformní Riemannovy geometrie a matematické fyziky, kde byly odpovídající Diracovy operátory studovány po několik desetiletí. Tzv. Diracovy operátory v k proměnných byly dříve studovány jako $Sl(k) \times Spin(n)$ invariantní operátory. Předložená práce zdánlivě snadno ukazuje, že stejně jako u klasických Diracových operátorů v jedné proměnné je celá grupa symetrií podstatně větší a že jí je opět celá spinová (ortogonální) grupa G , ve které je výše uvedená grupa G_θ polojednoduchou komponentou reduktivní části ve vhodné parabolické podgrupě. Cesta k tomuto poznatku vede přes vnímání tzv. monogenních funkcí jako řezů homogenních bandlů nad Kleinovou geometrií G/P , odpovídajících spinovým reprezentacím, a důsledné využití algebraických nástrojů teorie Verma modulů pro práci s nimi. Rozvoj těchto algebraických nástrojů je samotnou věcnou podstatou předložené práce. Její výsledky jsou proto nejenom zajímavé samy o sobě (jako příspěvek k teorii orbit singulárních vah a morfismů jisté třídy zobecněných Verma modulů), ale patrně povedou k dalšímu zásadnímu pokroku v pochopení vlastností monogenních funkcí a rozvoji Cliffordovy analýzy. Je možné, že práce Petera Franeka otevírá novou zajímavou kapitolu v této zajímavé oblasti matematického výzkumu na pomezí geometrie, algebry a analýzy.

Po podrobné úvodní rozvaze o východiscích a možných dopadech práce přechází autor k výkladu pojmů a vlastností potřebných ve zbytku práce, která je již ryze algebraické povahy (s náznaky, jak předkládat formule pro extrémální vektory ve Verma modulech do podoby formulí pro diferenciální operátory). Nejprve jsou přehledně připomenuty zobecněné Verma moduly s vyzdvihnutím postřehů užitečných pro diskusi diferenciálních operátorů. V další kapitole jsou podrobně popsány nástroje pro studium struktury všech morfismů, tj. zejména tzv. Hasseho grafy a BGG grafy. Následuje již cílené studium struktury morfismů pro výše uvedené grupy a jejich parabolické podgrupy a výsledkem jsou podrobné popisy morfismů, které odpovídají právě Diracovým operátorům v k proměnných. Poslední dvě kapitoly pak přináší hlavní výsledky práce, které již byly naznačeny výše.

Originálnost práce spočívá z technického pohledu hlavně v tom, že právě Diracovy operátory vždy působí mezi moduly s tzv. singulárními vahami. Klasická teorie Verma modulů popisuje velice dobře všechny regulární váhy, singulární případy však zpravidla zůstávaly na okraji zájmu a předloženou práci považují za podstatný přínos v tomto směru.

Celá práce je velice pečlivě a přehledně koncipována a je příjemné ji číst, přestože se vesměs jedná o velice technické úvahy. Autor se soustředěně věnuje vytčeným cílům. Rozsahem i dopadem výsledků je jistě práce více než dostatečná pro obhajobu titulu Ph.D, zároveň je ale možné očekávat a doporučit další rozpracování. Zejména by mě zajímaly souvislosti s translačním principem pro morfismy Verma modulů a jeho dopady na existenci a vlastnosti operátorů vyšších řádů a jejich rozšíření pro celou kategorii příslušných parabolických geometrií.

S ohledem na výše řečené vřele doporučuji udělení titulu Ph.D panu Peteru Franekovi na základě předložené práce.

V Praze, dne 6. října 2006



Prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.