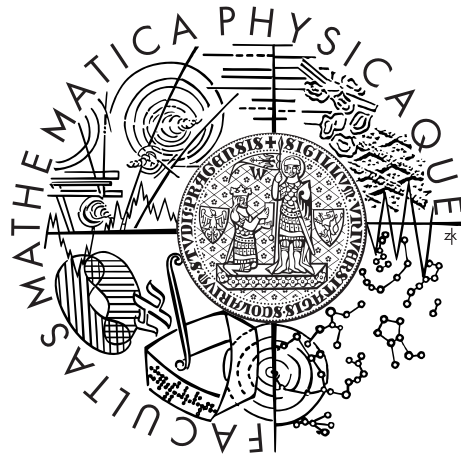


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavel Irinkov

Symetrie anti-de Sitterova vesmíru a prostory získané identifikací podél těchto symetrií

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Studijní program: Fyzika (B1701)

Studijní obor: obecná fyzika

Praha 2013

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce, doc. RNDr. Pavlovi Krtoušovi, PhD. za dlouholeté konzultace, pomoc při studiu a také za vstřícnost, přátelský přístup a nesčetné cenné rady v průběhu psaní bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Symetrie anti-de Sitterova vesmíru a prostory získané identifikací podél těchto symetrií

Autor: Pavel Irinkov

Katedra: Ústav teoretické fyziky, MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D., Ústav teoretické fyziky MFF UK

Abstrakt:

Problematika topologických černých děr v 2+1 dimenzionálním AdS prostoročasu se v průběhu posledních 20 let stala jedním z vhodných jednoduchých modelů pro zkoumání koncepčních otázek kvantové gravitace. V této práci jsou rozříděny izometrie 2 + 1-dimenzionálního anti-de Sitterova prostoročasu a klasifikována řešení Einsteinových rovnic vzniklá identifikací podél souřadnic, přizpůsobených k jednotlivým izometriím. Důraz je při tom kladen na Poincarého souřadnice a extrémní černé díry. Podrobně je popsán fázový přechod kónických singularit k černým díram.

Klíčová slova: obecná teorie relativity, anti-de Sitterův prostoročas, kónická singularita, extrémní černá díra, BTZ černá díra

Title: Symmetries of anti-de Sitter universe and spaces obtained by identification along these symmetries

Author: Pavel Irinkov

Department: Institute of Theoretical Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D., Institute of Theoretical Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University

Abstract:

Topological black holes in 2 + 1-dimensional AdS spacetime have seen a gradual increase in popularity over the last 20 years by their virtue of being one of the appropriate models to tackle the conceptual issues of quantum gravity in relatively simple setting. This work develops the classification of isometries of 2 + 1-dimensional anti-de Sitter spacetime and subsequently gives account of the solutions of the Einstein equations obtained by identifications along particular adapted coordinates. Special attention is paid to the Poincaré coordinates and extremal black holes and to a detailed description of phase transition between conical singularities and black holes.

Keywords: general theory of relativity, anti-de Sitter spacetime, conical singularity, extremal black holes, BTZ black holes

Obsah

Úvod	2
1 Základní poznatky	4
1.1 Obecná relativita v 2+1 dimenzích	4
1.2 Anti-de Sitterův prostoročas	5
1.3 Prostoročasové singularity	7
1.4 Černé díry	8
2 Symetrie anti-de Sitterova prostoročasu	10
2.1 Symetrie 2+1-dimenzionálního AdS prostoročasu	11
2.1.1 Symetrie spjaté se statickými souřadnicemi typu I	11
2.1.2 Symetrie spjaté se statickými souřadnicemi typu II	11
2.1.3 Poincarého symetrie	16
2.2 Symetrie 1+1-dimenzionálního AdS prostoročasu	17
3 Struktura Lieovy algebry Killingových vektorů AdS	25
3.1 2+1-dimenzionální AdS prostoročas	25
3.2 1+1-dimenzionální AdS prostoročas	29
4 Řešení získaná identifikací podél symetrií AdS prostoročasu	30
4.1 Identifikace v Poincarého souřadnicích	31
4.2 Identifikace v statických souřadnicích typu I	31
4.3 Identifikace v statických souřadnicích typu II	32
5 Sféricky symetrická řešení v 2+1 dimenzích	33
5.1 Obecný tvar sféricky symetrických řešení Einsteinových rovnic ve 2+1 dimenzích	33
5.2 Lokální energie a hmotnost v OTR	33
5.3 Anti-de Sitterův prostoročas	34
5.4 Bodová částice v AdS prostoročasu	35
5.5 Extrémní černá díra	36
5.6 BTZ černá díra	37
6 Limita kónické singularity k extrémní černé díře	38
Závěr	42
Seznam použité literatury	43

Úvod

Maximálně symetrické prostoročasy zaujímají výsadní postavení nejen v rámci obecné teorie relativity především díky koncepční jednoduchosti, kterou tyto prostoročasy oplývají. Nacházejí uplatnění v dnes velice populárním proudu teoretického výzkumu, tzv. AdS/CFT korespondenci, popsané v článku Juana Maldaceny [13], kde se dávají do souvislosti konformní teorie pole na konformní hranici asymptoticky anti-de Sitterova prostoročasu se supergravitační teorií uvnitř tohoto prostoročasu. Zájem o tato řešení Einsteinových rovnic se ovšem zdaleka nekonzcentruje jen do jednoho směru fyzikálního bádání [2].

S trochou nadsázky lze říci, že nezanedbatelná část výzkumu v teoretické fyzice má nějakou bližší, či vzdálenější spojitost s faktem, že naše znalost o fundamentálních interakcích, kterými se řídí svět kolem nás, není formulována v jednotném matematickém jazyce. Na jedné straně, poměrně spolehlivě vymezené malými měřítky, se uplatňují nederministické zákony kvantového popisu reality. Kulminací tohoto směru je standardní model částic, který popisuje tři ze čtyř známých interakcí pomocí aparátu perturbativní (poruchové) kvantové teorie pole. Tento přístup je v rámci svých mezí aplikovatelnosti velmi úspěšný. Na straně druhé, vymezené velkými vzdálenostmi a energiemi, se uplatňuje obecná teorie relativity jako konzistentní teorie gravitační interakce. Na rozdíl od svých kvantových protějšků se jedná o teorii klasickou ve smyslu, že neuvažuje popis v rámci vlnových funkcí a Hilbertových prostorů a jedná se o teorii deterministickou (přestože tento pojem má své meze, dané systémy s vývojem daným sice deterministickými rovnicemi, ale vzhledem k velké závislosti na počátečních podmínkách na větších časových škálách nepředpověditelným). Teorie je vyjádřena pomocí deterministických evolučních rovnic pro měřitelné entity a samotný proces měření nemá na tento vývoj žádný vliv.

Konsenzuálně přijatým řešením tohoto rozporu v předpokladech a východiscích obou směrů uvažování je, že obecná relativita je pouze klasické přiblížení k fundamentální kvantové teorii této interakce. Třemi hlavními oblastmi, kde by se plná kvantová teorie měla uplatňovat a kde tedy oba dosavadní směry popisu selhávají, jsou fyzika vysokých energií, raný vesmír a konečná stádia černých děr. Prozatím, vzhledem k technickým možnostem žádné kvantově gravitační efekty přímo naměřeny nebyly, přestože se objevují názory, že i za současných podmínek to je možné [1]. Historicky se tak teoretická fyzika nachází v nepříliš sobě známé situaci, kdy teoretický vývoj nemůže být veden empirickými daty, nebo nemůže jimi být alespoň v principu v popperovském smyslu vyvrácen. Stojí za připomenutí, že taková situace je v historii fyziky vskutku ojedinělá. Newtonovy zákony byly podepřeny každodenní zkušeností, stejně tak jako experimenty mnoha Newtonových předchůdců. Stejně tak Maxwellovy rovnice, které poskytly sjednocení elektrických a magnetických jevů byly založeny na experimentech Faradaye a Ampéra z počátku devatenáctého století. Einsteinova speciální teorie relativity se opírala o zjištění Michelsona a Morleyho, že světlo se šíří ve všech vztažných soustavách stejnou rychlostí a hlavně na nesouladu Maxwellových rovnic a Galileovy transformace. Konečně, vývoj a formulace experimentálně velmi úspěšného standardního modelu byla vedena bohatým zázemím experi-

mentálních dat z urychlovačů CERN a Fermilab. Současná situace tedy nevyhnutelně vede k spoléhání se na spekulaci a instinktivních tušení o tom, jak by tomu mělo být ve skutečnosti. Zde právě leží hlavní význam zjednodušených modelů, jako je např. gravitace ve 2+1 dimenzích, které jsou jedno z mála vodítek pro intuici a kvalifikované odhady, stejně tak jako hřiště pro prozkoumávání koncepčních otázek nových teoretických celků [3, 5].

Tato práce je organizována následujícím způsobem: v první kapitole jsou stručným způsobem zopakovány a podány základní poznatky, které budou potřeba v dalších kapitolách. V první části kapitoly jsou tak zrekapitulovány poznatky o obecné teorii relativity v 2+1 dimenzích a její odlišnosti od gravitace v 3+1 dimenzích. Dále je věnována pozornost anti-de Sitterovu prostoročasu na úrovni základních, především geometrických a kauzálních vlastností. Nejsou uvažovány symetrie a vyjádření metrického tenzoru v různých souřadných systémech, těmto otázkám je vyhrazena druhá kapitola. V další části kapitoly jsou zopakovány některé poznatky o singularitách a černých dírách. Ani v jednom z těchto témat není a ani nemůže být kladen důraz na úplnost výkladu, protože zcela rigorózní přístup by si vyžádal mnohonásobně více místa a šel by za rámec toho, co je nezbytně nutné z hlediska dalších kapitol.

V druhé kapitole je podán výklad symetrií anti-de Sitterova prostoročasu ve $2 + 1$ a $1 + 1$ dimenzích a těmto symetriím přizpůsobených souřadnic. Třetí kapitola se zabývá strukturou Lieovy algebry Killingových vektorů AdS prostoročasu, jsou zde odvozeny strukturní konstanty pro případ $2 + 1$ - i $1 + 1$ -dimenzionálního anti-de Sitterova prostoročasu. Čtvrtá kapitola se zabývá prostory vzniklými identifikací podél jednotlivých symetrií. V kapitole páté je ukázána vzájemná korespondence faktorprostorů AdS prostoročasu a sféricky symetrických řešení Einsteinových rovnic se zápornou kosmologickou konstantou u nichž je známa fyzikální interpretace. Šestá kapitola je věnuje limitnímu přechodu kónické singularity v extrémní černou díru.

1. Základní poznatky

Základním cílem této kapitoly je vytyčení fyzikálních pojmů, které budou v dalších kapitolách používány. V první části jsou tak shrnuty základní poznatky o obecné relativitě ve 2+1 dimenzích, stejně tak jako základní poznatky o anti-de Sitterově prostoročasu jako jejich maximálně symetrickém řešení. Druhá část této kapitoly se definuje a vyjasňuje pojem singularity, tak, jak je s ním možné se setkat při studiu partikulárních řešení Einsteinových rovnic. Třetím pojmem, pro nějž je vyhrazena závěrečná část této kapitoly je černá díra. Z hlediska této práce plyne jeho důležitost z klasifikace faktorprostorů anti-de Sitterova prostoročasu vzhledem k akci jednotlivých grup izometrií.

1.1 Obecná relativita v 2+1 dimenzích

Mezi jednu ze základních vlastností oblasti reality, jejíž popis si klademe za úkol při diskuzi kvalitativních a kvantitativních aspektů struktury prostoru, jenž nás obklopuje je konstantnost šíření světla ve všech inerciálních soustavách. Již to samo o sobě vylučuje platnost klasických před-einsteinovských představ o uspořádání prostoru a času jako součást fundamentálního popisu reality. Jsme tak vedeni přímým empirickým vzhledem k principu lorenzovské kovariance fyzikálních zákonů, tedy principu, který je matematicky vyjádřen invariancí fyzikálních zákonů vůči boostovým transformacím souřadnicové soustavy. Ke stejnému závěru dojdeme, uvědomíme-li si charakter transformací, při nichž nemění svůj tvar Maxwellovy rovnice. Teorií, která dává výše uvedené vhledy do jednoho koherentního celku je Einsteinova speciální teorie relativity. Ukazuje se [8, 16], že rozšířením třídy transformací, vůči nimž mají být výsledky fyzikálních experimentů invariantní, lze získat teorii gravitace: obecnou teorii relativity. Ta je daná akcí ve tvaru

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^N x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + I_{\text{hmota}}. \quad (1.1)$$

Polní rovnice mají v tomto případě tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

kde připomeňme, že $g_{\mu\nu}$ je metrický tenzor, $R_{\mu\nu}$ je Ricciho tenzor, kontrakce Riemannova tenzoru v prvním a třetím indexu $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$, R je skalární křivost $R = R^{\alpha}_{\alpha}$, Λ je kosmologická konstanta, G je gravitační konstanta a $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie a hybnosti, pro nějž zákon lokálního zachování energie a hybnosti požaduje

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (1.3)$$

Hlavním rozdílem, která odlišuje čtyř- a trojdimenzionální obecnou relativitu je fakt, že ve třech dimenzích Riemannův tenzor křivosti lze vyjádřit pomocí Ricciho tenzoru:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R. \quad (1.4)$$

Nejdůležitějším důsledkem, který z toho plyne je, že každé vakuové řešení Einsteinových rovnic s nulovou kosmologickou konstantou Λ je nutně ploché a každé řešení s nenulovou konstantou má konstantní křivost. Fyzikálně tedy gravitace v 2+1 dimenzích nemá žádné lokální stupně volnosti, o čemž se můžeme přesvědčit i následující úvahou. Fázový prostor obecné relativity je dán $N(N-1)/2$ prostorovými složkami metrického tenzoru a jejich $N(N-1)/2$ časovými derivacemi. Mezi Einsteinovými rovnicemi je však N vazeb na počáteční podmínky (podobně jako je tomu u Maxwellových rovnic) a dalších N proměnných lze eliminovat vhodnou souřadnicovou transformací. Celkově tedy zůstává $N(N-1)/2 + N(N-1)/2 - 2N = N(N-3)$ kanonických proměnných, tj. $\frac{N(N-3)}{2}$ lokálních stupňů volnosti. To pro případ $N=3$ dává požadovaný výsledek: absenci jakýchkoli stupňů volnosti. Připomeňme pro úplnost, že pro $N=4$ odpovídají stupně volnosti dvěma možnostem polarizace gravitační vlny. S absencí lokálních stupňů volnosti souvisí poněkud nezvyklá newtonovská limita — částice v 2 + 1 dimenzionálním prostoročase necítí vůbec newtonovskou sílu. Pro detailní diskuzi a odvození viz [4].

1.2 Anti-de Sitterův prostoročas

Obraťme nyní pozornost na řešení rovnic (1.2), která se vyznačují maximální mírou symetrie. Tyto prostoročasy jsou lokálně charakterizovány podmínkou

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{12}R(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}). \quad (1.5)$$

Tato řešení odpovídají po řadě záporné, nulové a kladné kosmologické konstantě Λ a nazývají se po řadě anti-de Sitterův, Minkowského a de Sitterův prostoročas. Kontrakcí rovnic (1.2) a položením $T_{\mu\nu} = 0$ lze snadno nahlédnout, že pro tato řešení platí ve třech, resp. ve čtyřech dimenzích

$$R = 6\Lambda, \quad R = 4\Lambda, \quad (1.6)$$

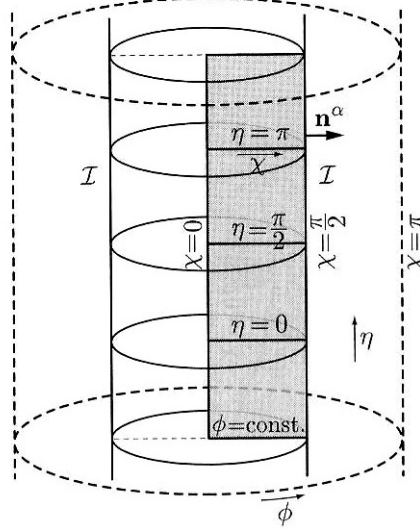
tedy skalární křivost je přímo úměrná kosmologické konstantě Λ a je v celém prostoročase konstantní. Pro podrobnou diskuzi těchto řešení viz [6]. Zde se omezíme na anti-de Sitterův prostoročas odpovídající případu $\Lambda < 0$. Standardním způsobem, jak reprezentovat N -dimenzionální AdS prostoročas je pomocí vnoření do $N+1$ -dimenzionálního plochého prostoru se signaturou $(-, -, +, \dots)$. V čtyřdimenzionálním případě konkrétně je anti-de Sitterův prostoročas dán plochou

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (1.7)$$

v pětidimenzionálním plochém prostoru \mathbb{R}^5 s metrikou

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.8)$$

Obecně platí, že takto definovaný anti-de Sitterův prostor bude mít topologii $S^1 \times \mathbb{R}^{N-1}$ a bude obsahovat uzavřené časupodobné křivky. Této nepříjemnosti se zbavíme, budeme-li uvažovat univerzální nakrytí anti-de Sitterova prostoru (“rozmotání časové souřadnice”), které má topologii \mathbb{R}^4 . Je proto obvyklé ve výše uvedené konstrukci mínit pojmem AdS právě toto univerzální nakrytí.



Obrázek 1.1: Konformní diagram anti-de Sitterova prostoročasu. Vertikální směr odpovídá času, horizontálně je vynášen prostor. Vnitřek vnějšího válce odpovídá celému Einsteinovu prostoročasu o topologii $\mathbb{R} \times S^3$, kruh $\eta = \text{konst.}$ odpovídá sféře S^3 , s jedním prostorovým směrem nezobrazovaným. Okraj kruhu reprezentuje jeden bod – pól antipodální k pólu uprostřed kruhu. Oblast $\chi \leq \frac{\pi}{2}$ je konformně zobrazený AdS prostoročas, plášť vnitřního válce $\chi = \frac{\pi}{2}$ odpovídá jeho konformnímu nekonečnu. Převzato z [6].

Užitečným nástrojem ke zkoumání globálních kauzálních vlastností řešení Einsteinových rovnic jsou tzv. konformní transformace. O dvou metrikách g_1 a g_2 řekneme, že jsou konformně ekvivalentní, pokud lze psát

$$g_1 = \Omega^2 g_2, \quad (1.9)$$

kde Ω^2 je tzv. konformní faktor. Přejít od jedné strany rovnosti ke druhé se tedy nazývá konformní transformací. Její základní vlastností motivující její použití je, že zachovává kauzální strukturu prostoročasu, tedy je-li čtyřvektor v^α časupodobný, prostorupodobný nebo světelný v jedné metrice, má stejný charakter v konformně ekvivalentní metrice.

V případě anti-de Sitterova prostoročasu lze vhodnou záměnou souřadnic nahlédnout (viz příští kapitola), že celý AdS prostoročas je konformně svázan s polovinou Einsteinova statického vesmíru, daného metrikou

$$g_{\text{Ein}} = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.10)$$

v tom smyslu, že konformní transformace AdS je izomorfní s oblastí danou (1.10) pouze pro radiální souřadnici $\chi \leq \frac{\pi}{2}$. Metrický tenzor anti-de Sitterova prostoročasu má pak tvar

$$g_{\text{AdS}} = \frac{1}{\cos^2 \chi} (-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (1.11)$$

Grafickou reprezentací vzájemného vztahu obou prostoročasů je konformní diagram (viz obr. 1.1).

Důležitým faktem, který je z tohoto diagramu patrný a souvisí i se zajímavostí AdS v aplikacích, je časupodobný charakter konformního nekonečna AdS, na

rozdíl od případu Minkowského a de Sitterova prostoročasu, v nichž má konformní nekonečno světelný, resp. prostorupodobný charakter. To mimo jiné s sebou nese důsledek, že anti-de-Sitterův prostoročas není globalně hyperbolický, tj. neexistuje v něm Cauchyho plocha, na které by znalost rozmístění hmoty umožnila určit její celý další vývoj. K dobře definované Cauchyho úloze je třeba specifikovat také data na konformním nekonečnu (v obrázku 1.1 plocha vymezená $\chi = \frac{\pi}{2}$).

Prostory vzniklé identifikováním bodů anti-de Sitterova prostoru podél různých symetrií, poněkud vznešěji řečeno faktorprostory AdS prostoru vůči akci diskrétní grupy symetrií, si vždy lokálně zachovávají vlastnosti původního prostoročasu. V čem se od původního prostoročasu liší jsou globální topologické a kauzální vlastnosti. Jednou možností, která může oba typy vlastnosti změnit je, že v nějakém bodě nového prostoru vznikne prostoročasová singularita. V praxi se s takovým případem setkáme často, základní poznatky o singularitách jsou proto uvedeny v následujícím odstavci.

1.3 Prostoročasové singularity

Intuitivní chápání pojmu singularita, jak se s ním setkáváme např. v elektromagnetismu, spočívá v divergenci jisté veličiny v jistém pevně daném místě prostoru. Toto vymezení ovšem, jak se ukazuje, se není přenositelné do rámce obecné teorie relativity. Důvodem tohoto faktu je to, že v jiných fyzikálních teoriích se problém redukuje na sadu rovnic, jejímž řešením je, alespoň v ideálním případě, funkcionální, nebo distribuční rozmístění jisté intenzivní veličiny v prostoru a času a singularita odpovídá případu, že tato veličina v jistém místě roste nade všechny meze. V obecné teorii relativity je ovšem onou hledanou veličinou samotná struktura prostoročasu — metrický tenzor — a výše uvedená specifikace je tedy problematická. Řešením tohoto problému je poněkud protiintuitivní definice: řekneme, že prostoročas M je singulární, pokud obsahuje geodetiky, které se nedají prodloužit podél svého afinního parametru a zároveň M nelze triviálně zúplnit. Požadavek na afinní parametr je v této definici podstatný, pokud bychom jej uvolnili, mohlo by se stát, že by se jeho běh v určitém místě “nekonečně zahušťoval” i bez přítomnosti singularity. Druhý požadavek, aby prostoročas nešel triviálně zúplnit, se stará o případ, že by neprodloužitelnost geodetiky vznikla např. v důsledku vyjmutí bodů z jinak regulárního prostoročasu. V obou případech nechceme, aby se jednalo o singularitu.

V závislosti na chování křivosti podél nekompletní geodetiky rozlišujeme singularity charakterizované skalárními invarianty křivosti (scalar curvature invariants singularity) – v tomto případě diverguje podél geodetiky nějaký skalár vytvořený z Riemannova tenzoru a jeho kovariantních derivací – a singularity charakterizované divergencí složky Riemannova tenzoru v paralelně přenášené tetradě (parallelly propagated curvature singularity). Pokud nenastává ani jedna z těchto možností, hovoří se o nekřivostní (např. kónické) singularitě (non-curvature singularity). Tento poslední typ singularity je možné vytvořit vhodnou identifikací v příslušném časoprostoru, elementárním názorným příkladem je list papíru s vyjmutým polárním úhlem a příslušným ztotožněním, dávajícím kuželovou plochu se singularitou ve vrcholu.

Vzhledem k složitosti Einsteinových rovnic není příliš překvapivé, že obecná relativita nebyla dlouho schopna něco podstatného k fyzice singularit říci. Situace

se změnila s pracemi Hawkinga a Penrose, a zavedením globálních geometrických metod analýzy řešení (blíže viz [8]). Jedním z velkých úspěchů tohoto přístupu jsou i takzvané teorémy o singularitách. Jejich systematický výklad vyžaduje dosti pokročilý technický aparát a tak není na tomto zmíněn. Čtenář jej nalezne např. v [16]. Pro náznak jejich elegance a hloubky jen zmiňme, že jedním z jejich důsledků je důkaz existence velkého třesku za podmínek, které se zdají být v našem vesmíru splněny.

1.4 Černé díry

Černá díra jako objekt je jedním z ústředních oblastí zájmu obecné teorie relativity. Intuitivně jsme vedeni k tomu, aby pojem černé díry odpovídal takové oblasti prostoročasu, “ze které se nedá uniknout”. Naivním pokusem o formalizaci této představy je tvrzení, že černá díra je taková oblast prostoročasu A , že pro všechna $p \in A$ je $J^+(p) \subset A$, kde $J^+(p)$ značí kauzální budoucnost bodu p (množina všech událostí, které mohou být s bodem p spojeny časupodobnou, nebo světelnou do budoucnosti orientovanou křivkou). Takto formulovaný pokus o definici ovšem naráží na problémy: samotná kauzální budoucnost jakékoli množiny v prostoročasu by byla k nerozeznání od černé díry. Řešením je lehká změna ve formulaci: prostoročas bude obsahovat černou díru, pokud v něm existuje oblast, ze které se nedá uniknout do budoucího světelného nekonečna (pro asymptoticky ploché prostoročasy), nebo do budoucího nekonečna (pro neploché prostoročasy, v nichž budoucí nekonečno je možné definovat). Samotná černá díra je pak definována jako doplněk kauzální minulosti budoucího světelného nekonečna

$$B = M - J^-(\mathcal{I}^+), \quad (1.12)$$

hranice této množiny

$$H = \partial J^-(\mathcal{I}^+) \quad (1.13)$$

se nazývá horizont událostí. H tedy odděluje vnitřek černé díry od pozorovatelů vně, kteří mohou uniknout do nekonečna a co se děje za horizontem událostí nevidí. Patologický případ, kdy černoděrová singularita není zakryta horizontem událostí se v literatuře označuje termínem nahá singularita (naked singularity). Vyústěním a formalizací přirozeného požadavku na to, aby taková varianta v našem vesmíru nenastávala, tedy aby kolaps hvězdy vždy vyústil v černoděrovou singularitu neviditelnou zvenčí je princip kosmické cenzury.

Černé díry v našem vesmíru vznikají kolapsem velmi složitých objektů. Je proto překvapivé, že závěrečným stadiem takového kolapsu je objekt velmi symetrický. Platí dokonce tvrzení, že každá černá díra vzniklá v gravitačním kolapsu je charakterizována pouze třemi parametry: hmotností M , momentem hybnosti J a elektrickým nábojem Q . To je obsahem tzv. No Hair teorému. Informace o kolabující hmotě se vyzařuje do nekonečna v podobě gravitačních vln. Uvedme jen na okraj a pro úplnost, že ve čtyřech dimenzích jsou základní černoděrová řešení, odpovídající nulovosti, či nenulovosti momentu hybnosti J a elektrického náboje Q popsána Schwarzschildovou ($J = 0$, $Q = 0$), Kerrovou ($J \neq 0$, $Q = 0$), Reissner-Nordstromovou ($J = 0$, $Q \neq 0$) a Kerr-Newmannovou metrikou ($J \neq 0$, $Q \neq 0$).

Ukazuje se, že lze formulovat tzv. zákony termodynamiky černých děr. Stěžejním okamžikem v tomto ohledu byl Hawkingův důkaz z roku 1972, že plocha horizontu událostí se nemůže žádným fyzikálním procesem zmenšit, v analogii s druhým zákonem termodynamiky. Nemá-li tedy celková entropie systému, který padá do černé díry klesnout, je třeba přiřadit entropii samotné černé díře. To provedl v Jacob Bekenstein ještě v témž roce a výsledek má tvar

$$S_{BH} = \frac{kA}{4l_p^2}, \quad (1.14)$$

kde k je Boltzmannova konstanta, A je obsah horizontu událostí a l_p je Planckova délka. Pro podrobné odvození a diskuzi zákonů viz [16].

2. Symetrie anti-de Sitterova prostoročasu

V této kapitole je podán přehled symetrií anti-de Sitterova prostoročasu a s nimi spjatých přizpůsobených souřadnic. Pojem symetrie je dobře známý a intuitivně snadno pochopitelný z klasické a kvantové fyziky i každodenní zkušenosti. Objekt, nebo systém má symetrii, pokud se po provedení určité operace (transformace) nezmění. V kontextu obecné teorie relativity je oním objektem prostoročas, operace má podobu izometrie a to, že se nezmění je obsaženo v zachovávající se metrické struktuře. Množina všech symetrických transformací tvoří grupu. Jednotlivé transformace je tak možné mezi sebou skládat, existuje identická transformace a ke každé transformaci existuje transformace inverzní. Nás bude zajímat situace, kdy izometrií je nekonečně mnoho. Grupa symetrií pak má kromě své algebraické struktury ještě strukturu hladké variety. Ukazuje se, že v tomto případě lze symetrie rozdělit na třídy ekvivalence jednoparametrických podgrup transformací, které jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci se svými generátory.

Podobná konstrukce je známá z lineární algebry, kde např. každou ortogonální matici lze zapsat ve tvaru e^{At} , kde A je horní trojúhelníková matice a t je parametr, přičemž množina všech matic A je v jistém smyslu tečný prostor k varietě všech ortogonálních matic v jednotce. Tvrzení z tohoto příkladu lze zobecnit na všechny Lieovy grupy a množina všech infinitezimálních transformací v jednotce se nazývá Lieova algebra. Teorie Lieových grup a algeber je široké odvětví matematiky a jakýkoli pokus o její výklad musí být nutně nekompletní. Násťin je uveden v kapitole 4, podrobný výklad lze nalézt v knihách [10] a [7].

Spokojme se na tomto místě se strohým tvrzením, že prvkům Lieovy algebry izometrií se v obecné teorii relativity říká Killingovy vektory. Vektor ξ je Killingův vektor, pokud platí

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.1)$$

což je, díky vyjádření Lieovy derivace pomocí metrické kovariantní derivace ∇

$$\mathcal{L}_\xi T_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k} = \xi^c \nabla_c T_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k} - \sum_{i=1}^k T_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, c, \dots, a_k} \nabla_c \xi^{a_i} + \sum_{j=1}^l T_{b_1, \dots, c, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k} \nabla_{b_j} \xi^c \quad (2.2)$$

ekvivalentní podmínce

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (2.3)$$

Rovnice (2.3) jde využít pro důkaz maximálního počtu izometrií N -dimenzionální variety, který je $\frac{N(N+1)}{2}$ (podrobně viz [16]). Pro případ $N = 2$ a $N = 3$ tedy maximálně symetrické prostoročasy mají 3, resp. 6 nezávislých izometrií.

V našem případě nebude třeba přímo ověřovat podmínku (2.3). Využijeme faktu, že je-li Killingův vektor vyjádřen v přizpůsobených souřadnicích, tedy

$$\xi^\mu = \frac{\partial^\mu}{\partial x^1} \quad (2.4)$$

Lieova derivace metriky se redukuje na tvar

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1}. \quad (2.5)$$

Naší obecnou strategií tedy bude najít takové souřadnice, v nichž koeficienty metrického tenzoru nebudou záviset na některé ze souřadnic a metrika tak bude invariantní vůči difeomorfismům indukovanými těmito souřadnicovými vektory. Zajímat nás budou symetrie dvou- a trojdimenzionálního AdS prostoročasu.

2.1 Symetrie 2+1-dimenzionálního AdS prostoročasu

2.1.1 Symetrie spjaté se statickými souřadnicemi typu I

Jak bylo zmíněno v první kapitole, celý anti-de-Sitterův prostoročas lze konformně zobrazit na část Einsteinova statického vesmíru. Souřadnice, které anti-de-Sitterův prostoročas tímto způsobem zdědí se nazývají statické (nebo též kosmologické) souřadnice typu I. Všechny mají stejné orbity (integrální křivky), pro naše účely jsou nejvíce užitečné souřadnice \tilde{t} , \tilde{r} a θ . AdS prostoročas pokrývají v rozsahu $\tilde{t} \in (-\infty, \infty)$, $\tilde{r} \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $\theta \in (-\pi, \pi)$ a metrický tenzor v nich nabývá tvaru

$$g_{AdS} = \frac{l^2}{\cos^2 \tilde{r}} (-d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + \sin^2 \tilde{r} d\theta^2), \quad (2.6)$$

kde l je konstanta o rozměru délky, daná kosmologickou konstantou. Je zřejmé, že ani jeden z metrických koeficientů ve (2.6) nezávisí na \tilde{t} a na θ . Vektory $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial \theta}$ jsou tedy oba generátory izometrie. Orbitami $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ jsou křivky dané rovnicí $\tilde{r} = \text{konst.}$, $\theta = \text{konst.}$, které mají v celém svém průběhu časupodobný charakter (v obrázku 2.4 vertikální přímky). Vektor $\frac{\partial}{\partial \theta}$ míří "kolmo" na plochu $\theta = \text{konst.}$ a je na celém AdS prostoročasu prostorupodobný. Jeho orbity jsou kružnice $\tilde{r} = \text{konst.}$, $\tilde{t} = \text{konst.}$ Povšimněme si, že prostorová část metriky (2.6) má bez konformního faktoru tvar $d\tilde{r}^2 + \sin^2 \tilde{r} d\theta^2$. To je stejný tvar, jako metrika povrchu dvoudimenzionální sféry, která má ve sférických souřadnicích χ , θ tvar $d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2$. Souřadnice $\tilde{r} \equiv \chi$ tedy měří úhel od severního pólu (doplňek zeměpisné výšky), kdežto souřadnice θ měří úhel podél kružnice $\tilde{r} = \text{konst.}$ (zeměpisná délka). Hodnotě $\tilde{r} = \frac{\pi}{2}$ odpovídá konformní nekonečno anti-de Sitterova vesmíru. Vzhledem k rozsahu souřadnic odpovídá pokrytá oblast jedné polovině povrchu sféry. Tohoto faktu lze elegantně využít při přechodu k axisymetrickým souřadnicím a poté k statickým souřadnicím typu II, který je učiněn v následující části.

2.1.2 Symetrie spjaté se statickými souřadnicemi typu II

Zavedení kosmologických souřadnic typu II, R_{II} , T_{II} , Θ_{II} , lze rozložit do dvou kroků. V prvním z nich souřadnice \tilde{r} a θ nahrazujeme $\bar{\chi}$ a $\bar{\theta}$ danými implicitními vztahy

$$\sin \tilde{r} \sin \theta = \sin \bar{\chi} \sin \bar{\theta}, \quad (2.7)$$

$$\cos \tilde{r} = \sin \bar{\chi} \cos \bar{\theta}, \quad (2.8)$$

$$\cos \tilde{r} \cot \theta = \cos \bar{\chi} \cot \bar{\theta}, \quad (2.9)$$

$$\cos \bar{\chi} = -\sin \tilde{r} \cos \theta. \quad (2.10)$$

Tyto rovnice lze geometricky interpretovat jako vztahy dávající do souvislosti dvě sady sférických souřadnic na povrchu koule, kde počátek souřadnic $\bar{\chi}$, $\bar{\theta}$ je vůči \tilde{r} , θ otočen o $\frac{\pi}{2}$. Bodu $\bar{\chi} = 0$ tedy odpovídá $\tilde{r} = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$. Metrika (2.6) v těchto souřadnicích nabývá tvar

$$g_{\text{AdS}} = \frac{l^2}{\sin^2 \bar{\chi} \cos^2 \bar{\theta}} (-d\tilde{t}^2 + d\bar{\chi}^2 + \sin^2 \bar{\chi} d\bar{\theta}^2), \quad (2.11)$$

který nesvědčí o žádném novém Killingově vektoru, provedeme tedy druhý krok transformace v souřadnicích \tilde{t} a $\bar{\chi}$:

$$\frac{R_{II}}{l} = \frac{\sin \bar{\chi}}{\sin \tilde{t}}, \quad (2.12)$$

$$\frac{T_{II}}{l} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos \tilde{t} - \cos \bar{\chi}}{\cos \tilde{t} + \cos \bar{\chi}} \right|. \quad (2.13)$$

Spolu s přeznačením $\Theta_{II} = \bar{\theta}$ tak získáváme sadu souřadnic T_{II} , R_{II} , Θ_{II} . Jejich vyjádření v rámci kosmologických souřadnic typu I \tilde{t} , \tilde{r} a θ získáme dosazením vztahů (2.7)–(2.10) do transformací (2.12) a (2.13):

$$\frac{T_{II}}{l} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin \tilde{r} \cos \theta + \cos \tilde{t}}{\sin \tilde{r} \cos \theta - \cos \tilde{t}} \right|, \quad (2.14)$$

$$\frac{R_{II}}{l} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \tilde{r} \cos^2 \theta}}{\sin \tilde{t}}, \quad (2.15)$$

$$\tan \Theta_{II} = \tan \tilde{r} \sin \theta, \quad (2.16)$$

Tyto vztahy lze invertovat a výsledek se bude lišit v závislosti na tom, je-li výraz v absolutní hodnotě v (2.14) kladný, nebo záporný. To se dá ekvivalentně vyjádřit jako $\frac{R_{II}^2}{l^2} < 1$, nebo $\frac{R_{II}^2}{l^2} > 1$. V prvním případě mají inverzní vzorce tvar

$$\sin \tilde{t} = \frac{1}{\frac{R_{II}}{l} \sqrt{\frac{l^2}{R_{II}^2} \cosh^2 \frac{T_{II}}{l} - \sinh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.17)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}}{l} \right| \cos \Theta_{II}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{R_{II}^2}{l^2}\right) \sinh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.18)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \Theta_{II}}{\sqrt{\sin^2 \Theta_{II} + \left(\frac{R_{II}^2}{l^2} - 1\right) \cosh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.19)$$

V případě $\frac{R_{II}^2}{l^2} > 1$ inverzí vztahů (2.14)–(2.16) získáváme

$$\sin \tilde{t} = \frac{1}{\frac{R_{II}}{l} \sqrt{\cosh^2 \frac{T_{II}}{l} - \frac{l^2}{R_{II}^2} \sinh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.20)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{|R_{II}| \cos \Theta_{II}}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_{II}^2}{l^2} - 1\right) \cosh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.21)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \Theta_{II}}{\sqrt{\sin^2 \Theta_{II} + \left(1 - \frac{R_{II}^2}{l^2}\right) \sinh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.22)$$

Dosazením vztahů (2.14)–(2.22) a příslušných diferenciálů do metriky (2.6) získáme pro tvar metriky v souřadnicích R_{II} , T_{II} , Θ_{II} tvar

$$g_{\text{AdS}} = \frac{l^2}{R_{II}^2 \cos^2 \Theta_{II}} \left(- \left(1 - \frac{R_{II}^2}{l^2}\right) dT_{II}^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_{II}^2}{l^2}} dR_{II}^2 + R_{II}^2 d\Theta_{II}^2 \right). \quad (2.23)$$

Z rovnice (2.23) je okamžitě zřejmé, že vektor $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ generuje izometrii v trojdimenzionálním AdS prostoročasu a konstrukce předešlých řádků je tedy ospravedlněná. Podařilo se nám najít tři Killingovy vektory: $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$. K nalezení kompletní množiny generátorů izometrií 2 + 1-dimenzionálního AdS prostoročasu nyní užijeme elegantního triku: protože vzorec (2.5) dává pro koeficienty metriky (2.6) a $x^1 = \tilde{t}$ a $x^2 = \theta$ nulu, je tato metrika invariantní vůči záměně typu $\tilde{t} \rightarrow \tilde{t} + \alpha$ a $\theta \rightarrow \theta + \beta$. Jiným způsobem řečení téhož je, že necháme-li působit izometrii indukovanou vektorem $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, resp. $\frac{\partial}{\partial \theta}$ na vektor $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ a v těchto nových souřadnicích vyjádříme metriku (2.23), její tvar se nezmění. Aplikujeme tedy transformace (2.16)–(2.19) na obě sady souřadnic s posunutým počátkem \tilde{t} , resp. θ a získáme tak časově posunuté, resp. zrotované souřadnice R_{II}^P , T_{II}^P , Θ_{II}^P , resp. R_{II}^R , T_{II}^R , Θ_{II}^R , v nichž má metrika stejnou strukturu jako v (2.23), pouze s příslušným přeznačením. Protože složením dvou symetrií je opět symetrie, jsou třetí sadou souřadnic časově posunuté zrotované souřadnice R_{II}^{PR} , T_{II}^{PR} , Θ_{II}^{PR} (můžeme zároveň posunout počátek \tilde{t} , resp. θ a struktura metriky (2.23) zůstane stejná). Volba α a β je arbitrární, učiníme ji ale tak, aby jednotlivé izometrie byly v jistém smyslu ortogonální. Jak uvidíme v další kapitole, to bude platit právě tehdy, když Killingova metrika bude mít v bázi těchto vektorů diagonalizovaný tvar. Prozatím se tedy spokojme s tvrzením, které bude dokázáno v kapitole 3, že to lze splnit např. pro $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$, dále $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{\pi}{2}$ a $\alpha = \beta = -\frac{\pi}{2}$. Těmto třem možnostem odpovídají po řadě časově posunuté souřadnice R_{II}^P , T_{II}^P , Θ_{II}^P , úhlově otočené souřadnice R_{II}^R , T_{II}^R , Θ_{II}^R a časově i úhlově posunuté souřadnice R_{II}^{PR} , T_{II}^{PR} , Θ_{II}^{PR} . Vztahy mezi nimi a původními neposunutými souřadnicemi typu I získáme substitucí vztahů

$$\tilde{t}_P = \tilde{t} - \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{\theta}_R = \tilde{\theta} - \frac{\pi}{2}, \quad (2.24)$$

$$\cos \tilde{t}_P = \sin \tilde{t}, \quad \cos \theta_R = \sin \theta, \quad (2.25)$$

$$\sin \tilde{t}_B = -\cos \tilde{t}, \quad \sin \theta_R = -\cos \theta \quad (2.26)$$

do rovnic (2.14)–(2.16) a (2.17)–(2.22). Konkrétně tak pro časově posunuté souřadnice R_{II}^P , T_{II}^P , Θ_{II}^P platí vztahy

$$\frac{T_{II}^P}{l} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin \tilde{r} \cos \theta + \sin \tilde{t}}{\sin \tilde{r} \cos \theta - \sin \tilde{t}} \right|, \quad (2.27)$$

$$\frac{R_{II}^P}{l} = -\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \tilde{r} \cos^2 \theta}}{\cos \tilde{t}}, \quad (2.28)$$

$$\tan \Theta_{II}^P = \tan \tilde{r} \sin \theta \quad (2.29)$$

a pro vztahy inverzní

$$\cos \tilde{t} = -\frac{1}{\frac{R_{II}^P}{l} \sqrt{\frac{l^2}{R_{II}^{P2}} \cosh^2 \frac{T_{II}^P}{l} - \sinh^2 \frac{T_{II}^P}{l}}}, \quad (2.30)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}^P}{l} \right| \cos \Theta_{II}^P}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{R_{II}^{P2}}{l^2}\right) \sinh^2 \frac{T_{II}^P}{l}}}, \quad (2.31)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \Theta_{II}^P}{\sqrt{\sin^2 \Theta_{II}^P + \left(\frac{R_{II}^{P2}}{l^2} - 1\right) \cosh^2 \frac{T_{II}^P}{l}}}, \quad (2.32)$$

pro $\frac{(R_{II}^P)^2}{l^2} < 1$ a

$$\cos \tilde{t} = -\frac{1}{\frac{R_{II}^P}{l} \sqrt{\cosh^2 \frac{T_{II}^P}{l} - \frac{l^2}{R_{II}^{P2}} \sinh^2 \frac{T_{II}^P}{l}}}, \quad (2.33)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}^P}{l} \right| \cos \Theta_{II}^P}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_{II}^{P2}}{l^2} - 1\right) \cosh^2 \frac{T_{II}^P}{l}}}, \quad (2.34)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \Theta_{II}^P}{\sqrt{\sin^2 \Theta_{II}^P + \left(1 - \frac{R_{II}^{P2}}{l^2}\right) \sinh^2 \frac{T_{II}^P}{l}}}, \quad (2.35)$$

pro $\frac{(R_{II}^P)^2}{l^2} > 1$. Pro zrotované souřadnice R_{II}^R , T_{II}^R , Θ_{II}^R získáváme ze vztahů (2.24)–(2.26) a (2.14)–(2.22)

$$\frac{T_{II}^R}{l} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin \tilde{r} \sin \theta + \cos \tilde{t}}{\sin \tilde{r} \sin \theta - \cos \tilde{t}} \right|, \quad (2.36)$$

$$\frac{R_{II}^R}{l} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \tilde{r} \sin^2 \theta}}{\sin \tilde{t}}, \quad (2.37)$$

$$\tan \Theta_{II}^R = -\tan \tilde{r} \cos \theta, \quad (2.38)$$

Inverzními vztahy k (2.36)–(2.38) jsou pro $\frac{(R_{II}^R)^2}{l^2} < 1$

$$\sin \tilde{t} = \frac{1}{\frac{R_{II}^R}{l} \sqrt{\frac{l^2}{R_{II}^{R2}} \cosh^2 \frac{T_{II}^R}{l} - \sinh^2 \frac{T_{II}^R}{l}}}, \quad (2.39)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}^R}{l} \right| \cos \Theta_{II}^R}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{R_{II}^{R2}}{l^2}\right) \sinh^2 \frac{T_{II}^R}{l}}}, \quad (2.40)$$

$$\cos \theta = -\frac{\sin \Theta_{II}^R}{\sqrt{\sin^2 \Theta_{II}^R + \left(\frac{R_{II}^{R2}}{l^2} - 1\right) \cosh^2 \frac{T_{II}^R}{l}}}, \quad (2.41)$$

a pro $\frac{(R_{II}^R)^2}{l^2} > 1$

$$\sin \tilde{t} = \frac{1}{\frac{R_{II}^R}{l} \sqrt{\cosh^2 \frac{T_{II}^R}{l} - \frac{l^2}{R_{II}^{R2}} \sinh^2 \frac{T_{II}^R}{l}}}, \quad (2.42)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}^R}{l} \right| \cos \Theta_{II}^R}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_{II}^{R2}}{l^2} - 1\right) \cosh^2 \frac{T_{II}^R}{l}}}, \quad (2.43)$$

$$\cos \theta = -\frac{\sin \Theta_{II}^R}{\sqrt{\sin^2 \Theta_{II}^R + \left(1 - \frac{R_{II}^{R2}}{l^2}\right) \sinh^2 \frac{T_{II}^R}{l}}}. \quad (2.44)$$

Konečně pro zrotované časově posunuté souřadnice R_{II}^{PR} , T_{II}^{PR} , Θ_{II}^{PR} uvážením obou rovností v (2.24)–(2.26) platí

$$\frac{T_{II}^{PR}}{l} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin \tilde{r} \sin \theta + \sin \tilde{t}}{\sin \tilde{r} \sin \theta - \sin \tilde{t}} \right|, \quad (2.45)$$

$$\frac{R_{II}^{PR}}{l} = -\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \tilde{r} \sin^2 \theta}}{\cos \tilde{t}}, \quad (2.46)$$

$$\tan \Theta_{II}^{PR} = -\tan \tilde{r} \cos \theta \quad (2.47)$$

a pro inverzní vztahy k (2.45)–(2.47)

$$\cos \tilde{t} = -\frac{1}{\frac{R_{II}^{PR}}{l} \sqrt{\frac{l^2}{R_{II}^{PR2}} \cosh^2 \frac{T_{II}^{PR}}{l} - \sinh^2 \frac{T_{II}^{PR}}{l}}}, \quad (2.48)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}^{PR}}{l} \right| \cos \Theta_{II}^{PR}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{R_{II}^{PR2}}{l^2}\right) \sinh^2 \frac{T_{II}^{PR}}{l}}}, \quad (2.49)$$

$$\cos \theta = -\frac{\sin \Theta_{II}^{PR}}{\sqrt{\sin^2 \Theta_{II}^{PR} + \left(\frac{R_{II}^{PR2}}{l^2} - 1\right) \cosh^2 \frac{T_{II}^{PR}}{l}}}, \quad (2.50)$$

pro $\frac{(R_{II}^{PR})^2}{l^2} < 1$ a

$$\cos \tilde{t} = -\frac{1}{\frac{R_{II}^{PR}}{l} \sqrt{\cosh^2 \frac{T_{II}^{PR}}{l} - \frac{l^2}{R_{II}^{PR2}} \sinh^2 \frac{T_{II}^{PR}}{l}}}, \quad (2.51)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}^{PR}}{l} \right| \cos \Theta_{II}^{PR}}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_{II}^{PR2}}{l^2} - 1 \right) \cosh^2 \frac{T_{II}^{PR}}{l}}}, \quad (2.52)$$

$$\cos \theta = - \frac{\sin \Theta_{II}^{PR}}{\sqrt{\sin^2 \Theta_{II}^{PR} + \left(1 - \frac{R_{II}^{PR2}}{l^2} \right) \sinh^2 \frac{T_{II}^{PR}}{l}}}, \quad (2.53)$$

pro $\frac{(R_{II}^{PR})^2}{l^2} < 1$.

Podářilo se nám tedy nalézt maximální množinu lineárně nezávislých Killingových vektorů pro trojdimenzionální anti-de Sitterův prostoročas $(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}, \frac{\partial}{\partial T_{II}}, \frac{\partial}{\partial T_{II}^P}, \frac{\partial}{\partial T_{II}^R}, \frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}})$. Integroální křivky souřadnicového vektoru $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ mají v obou oblastech, kde se liší inverzní vztahy (2.17)–(2.22) odlišný charakter, jak je patrné z obrázku 2.5. V oblasti $\frac{R_{II}^2}{l^2} > 1$ jsou orbity vektoru $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ prostorupodobné, reprezentují tedy analogii prostorové translační symetrie. V oblasti $\frac{R_{II}^2}{l^2} < 1$ jsou orbity časupodobné a reprezentovaná symetrie má charakter časového posunu. Kolem bifurkačního bodu $R_{II} = \pm l$ má Killingův vektor $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ strukturu analogickou boostovému Killingovu vektoru z Minkowského prostoročasu, tedy Killingova vektoru generujícího změny rychlosti inerciální soustavy.

2.1.3 Poincarého symetrie

Maximální množina lineárně nezávislých Killingových vektorů nalezených v předchozím odstavci reprezentuje izometrie 2 + 1-dimenzionálního AdS prostoročasu, které jsou na sobě nezávislé v tom smyslu, že “malé” izometrie generované těmito Killingovými vektory nelze složit z ostatních. Ukazuje se ale, že tyto izometrie generované bází v Lieově algebře Killingových vektorů nejsou jedinými zajímavými se kterými se můžeme setkat. Stejně jako jsme při hledání maximální lineárně nezávislé množiny Killingových vektorů nechali zapůsobit izometrii indukovanou vektory $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}$, abychom získali nové lineárně nezávislé Killingovy vektory $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$ a $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$, necháme-li působit izometrii indukovanou $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ na vektor kosmologických souřadnic typu I $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ vytvoříme nový Killingův vektor. V případě zrotovaných a časově posunutých souřadnic jsme museli volit speciální hodnoty $\Delta \tilde{t}$ a $\Delta \theta$, aby výsledné vektory byly ortogonální v Lieově algebře, to zde nebude platit pro libovolnou hodnotu posunu ΔT_{II} , přestože vhodnou záměnou (např. za vektor $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$) lze docílit, aby i množina obsahující takový typ vektoru byla lineárně nezávislá. Pro ΔT_{II} rostoucí nade všechny meze působení izometrie indukované $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$ generuje po vhodném přeskálování tzv. Poincarého souřadnice \bar{t} , \bar{z} , \bar{x} reprezentující “poincaréovské” symetrie AdS. Záměnou $T_{II} \rightarrow T_{II} + \Delta T_{II}$, kde $\Delta T_{II} \rightarrow \infty$ do vzorců (2.17)–(2.22), převedením do souřadnic \tilde{t} , \tilde{r} , θ a přeskálováním pro ně získáváme vyjádření

$$\bar{t} = \frac{l \sin \tilde{t}}{\cos \tilde{t} - \sin \tilde{r} \cos \theta}, \quad (2.54)$$

$$\bar{z} = \frac{l \cos \tilde{r}}{\cos \tilde{t} - \sin \tilde{r} \cos \theta}, \quad (2.55)$$

$$\bar{x} = \frac{l \sin \tilde{r} \sin \theta}{\cos \tilde{t} - \sin \tilde{r} \cos \theta}. \quad (2.56)$$

Inverzními vztahy k (2.54)–(2.56) jsou

$$\tan \tilde{t} = \frac{2l\bar{t}}{l^2 - \bar{t}^2 + \bar{x}^2 + \bar{z}^2}, \quad (2.57)$$

$$\tan \tilde{r} \sin \theta = \frac{\bar{x}}{\bar{z}}, \quad (2.58)$$

$$\tan^2 \tilde{r} = \frac{(l^2 + \bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2)^2 + 4l^2\bar{x}^2}{4l^2\bar{z}^2}, \quad (2.59)$$

$$\tan \theta = -\frac{2l\bar{x}}{l^2 + \bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{z}^2} \quad (2.60)$$

Z těchto vzorců je zřejmé, uvážíme-li, jakých hodnot nabývají \tilde{t} , \tilde{r} a θ , že souřadnice \bar{t} a \bar{x} probíhají interval $(-\infty, \infty)$, kdežto souřadnice $\bar{z} \in (0, \infty)$. Dosazením diferenciálů (2.54)–(2.56) se lze snadno přesvědčit, že metrický tenzor (2.6) přejde na

$$g_{\text{AdS}} = \frac{l^2}{\bar{z}^2}(-d\bar{t}^2 + d\bar{z}^2 + d\bar{x}^2) \quad (2.61)$$

Nacházíme též nové Killingovy vektory $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$, generující izometrie anti-de Sitterova prostoročasu. Jak uvidíme ve třetí kapitole, oba tyto vektory jsou lineární kombinací vektorů báze v Lieově algebře. Plochy konstantního \bar{t} , \bar{z} a \bar{x} jsou vyneseny na obrázcích 2.1, 2.2 a 2.3.

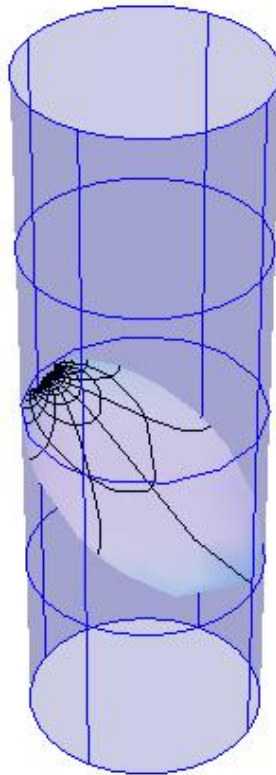
Z rovnice (2.61) je patrné, že metrika bez konformního faktoru odpovídá polovině trojdimenzionálního Minkowského prostoročasu. To je v souladu s obrázkem 3.1, kdy plochy konstantního \bar{t} pro hodnoty $\bar{t} \rightarrow \pm\infty$ získávají charakter budoucího, resp. minulého světelného nekonečna.

2.2 Symetrie 1+1-dimenzionálního AdS prostoročasu

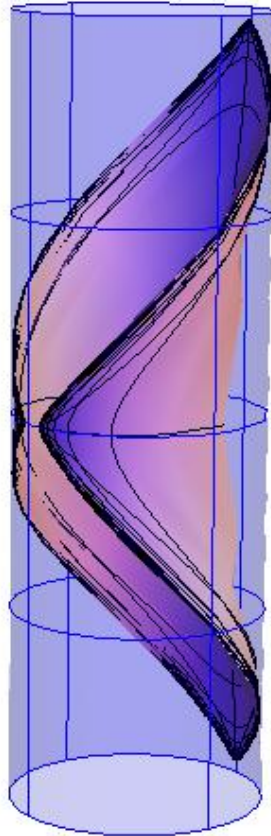
Jak lze očekávat, symetrie 1 + 1-dimenzionálního anti-de Sitterova prostoročasu budou přímočaře odvoditelné ze symetrií 2 + 1-dimenzionálního případu. Stačí se totiž omezit na rovinu $\theta = 0$, π , přičemž polorovinu $\theta = \pi$ budeme parametrizovat pomocí $\tilde{r} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Z celkové množiny šesti lineárně nezávislých Killingových vektorů trojdimenzionálního anti-de Sitterova prostoročasu $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$ zahrnují tři úhlové souřadnice θ , kterou pro sestup do dvojdimenzionálního AdS prostoročasu pokládáme rovnou konstantě. Lze tedy očekávat, že zbývající vektory $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$ tvoří maximální množinu nezávislých generátorů izometrie. Přesvědčme se z rovnice (2.6), že je tomu skutečně tak. Položíme-li $d\theta = 0$, přechází na tvar

$$g_{\text{AdS}} = \frac{l^2}{\cos^2 \tilde{r}}(-d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2), \quad (2.62)$$

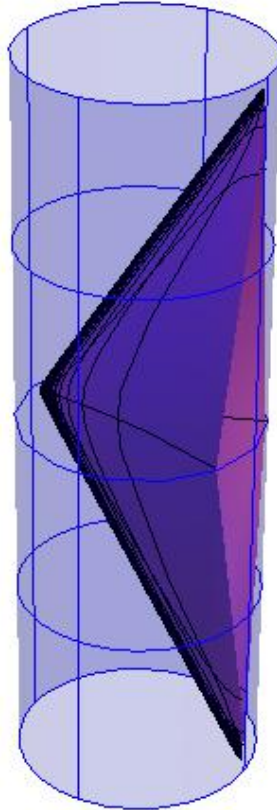
odkud je patrné, že vektor $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ skutečně zůstává generátorem izometrie. Čáry konstantního \tilde{t} a \tilde{r} jsou vykresleny na obrázku 2.4.



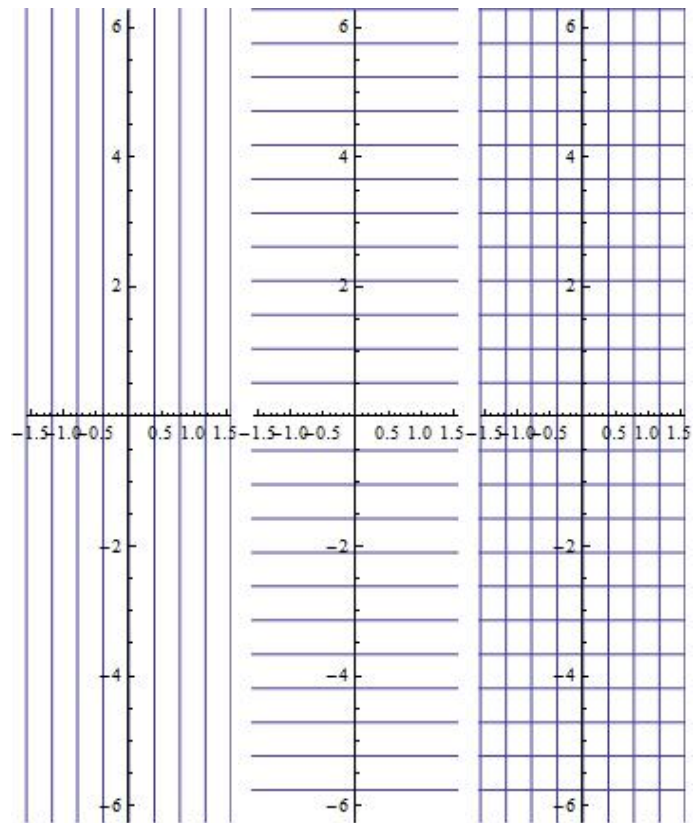
Obrázek 2.1: Plocha konstantního \bar{t} – plášť válce odpovídá konformnímu nekonečnu anti-de Sitterova prostoročasu, plocha $\bar{t} = \text{konst.}$ je parametrizována souřadnicí radiálního typu \bar{z} , které na obrázku odpovídají soustředné uzavřené křivky a souřadnicí úhlového typu \bar{x} , znázorněnou svazkem polopřímek.



Obrázek 2.2: Plocha konstantního \bar{z} – plášť válce odpovídá konformnímu nekonečnu anti-de Sitterova prostoročasu, plocha $\bar{z} = \text{konst.}$ je parametrizována časovou souřadnicí \bar{t} , které na obrázku odpovídají neuzavřené křivky probíhající celý obvod plochy $\bar{z} = \text{konst.}$ a souřadnicí úhlového typu \bar{x} , znázorněnou uzavírajícími se křivkami.



Obrázek 2.3: Plochy konstantního \bar{x} – plášť válce odpovídá konformnímu nekonečnu anti-de Sitterova prostoročasu, plocha $\bar{x} = \text{konst.}$ je parametrizována časovou souřadnicí \bar{t} , které na obrázku odpovídají protínající se polopřímky a souřadnicí úhlového typu \bar{x} , znázorněnou vertikálními křivkami, vykresleny jsou dvě plochy $\bar{x} = \pm \text{konst.}$



Obrázek 2.4: Orbyty vektorů kosmologických souřadnic typu I - první graf zachycuje orbyty vektoru $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, dané rovnicí $\tilde{r} = \text{konst.}$, druhý graf orbyty vektoru $\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}$, dané rovnicí $\tilde{t} = \text{konst.}$, třetí oboje orbyty zároveň, souřadnicové osy znázorňují hodnoty obou souřadnic v rozsahu $\tilde{t} \in (-\pi, \pi)$, $\tilde{r} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Dosazení $\theta = 0$ do vztahů mezi statickými souřadnicemi typu I a II ve trojdimenzionálním AdS prostoročase (2.14)–(2.16) redukuje tyto rovnice ve dvou dimenzích na

$$\frac{T_{II}}{l} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin \tilde{r} + \cos \tilde{t}}{\sin \tilde{r} - \cos \tilde{t}} \right|, \quad (2.63)$$

$$\frac{R_{II}}{l} = \frac{\cos \tilde{r}}{\sin \tilde{t}}, \quad (2.64)$$

přičemž inverzní vztahy k (2.63)–(2.64) jsou dány analogicky dosazením $\Theta_{II} = 0$ do (2.17)–(2.22):

$$\sin \tilde{t} = \frac{1}{\frac{R_{II}}{l} \sqrt{\frac{l^2}{R_{II}^2} \cosh^2 \frac{T_{II}}{l} - \sinh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.65)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}}{l} \right|}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{R_{II}^2}{l^2}\right) \sinh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.66)$$

pro $\frac{R_{II}^2}{l^2} < 1$ a

$$\sin \tilde{t} = \frac{1}{\frac{R_{II}}{l} \sqrt{\cosh^2 \frac{T_{II}}{l} - \frac{l^2}{R_{II}^2} \sinh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.67)$$

$$\cos \tilde{r} = \frac{\left| \frac{R_{II}}{l} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_{II}^2}{l^2} - 1\right) \cosh^2 \frac{T_{II}}{l}}}, \quad (2.68)$$

pro $\frac{R_{II}^2}{l^2} > 1$. Čáry konstantního T_{II} a R_{II} jsou znázorněny na obrázku 2.5. Metrický tenzor (2.23) přechází na

$$g_{AdS} = \frac{l^2}{R_{II}^2} \left(- \left(1 - \frac{R_{II}^2}{l^2}\right) dT_{II}^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_{II}^2}{l^2}} dR_{II}^2 \right), \quad (2.69)$$

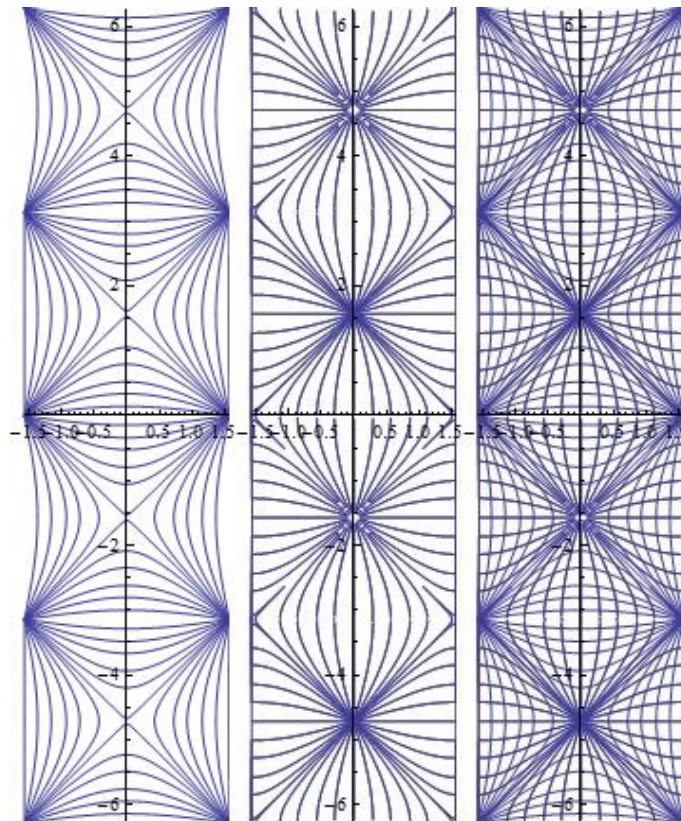
odkud je opět zřejmé, že vektor $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ je i v 1 + 1-dimenzionálním AdS prostoročase generátorem izometrie. Poněvadž metrika (2.62) je invariantní vůči posunu $\tilde{t} \rightarrow \tilde{t} + \alpha$, zůstává v platnosti argument o invarianci metriky vůči izomorfismům indukovaným časově posunutému vektoru $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$ a tedy i tento vektor je Killingovým vektorem 1 + 1-dimenzionálního anti-de Sitterova prostoročasu. Potvrdil se tak intuitivní předpoklad z počátku podkapitoly. Úplná množina generátorů izometrie je tak $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ a $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$.

Pro Poincarého souřadnice implikuje sestup o dimenzi níže dosazením $\theta = 0$ do (2.54)–(2.56) vztahy

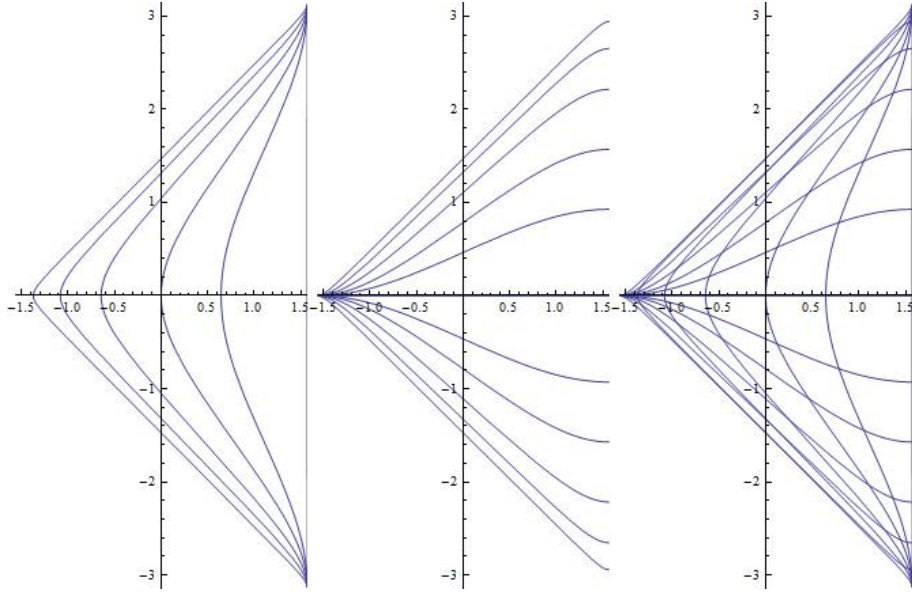
$$\bar{t} = \frac{l \sin \tilde{t}}{\cos \tilde{t} - \sin \tilde{r}}, \quad (2.70)$$

$$\bar{z} = \frac{l \cos \tilde{r}}{\cos \tilde{t} - \sin \tilde{r}}, \quad (2.71)$$

k nimž jsou inverzní



Obrázek 2.5: Orbity vektorů kosmologických souřadnic typu II - první graf zachycuje orbity vektoru $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$, dané rovnicí $R_{II} = \text{konst.}$, druhý graf orbity vektoru $\frac{\partial}{\partial R_{II}}$, dané rovnicí $T_{II} = \text{konst.}$, třetí oboje orbity zároveň, souřadnicové osy odpovídají kosmologickým souřadnicím typu I



Obrázek 2.6: Orbity vektorů Poincarého souřadnic \bar{t} – první graf zachycuje orbity vektoru $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$ dané rovnicí $\bar{z} = \text{konst.}$, druhý graf orbity vektoru $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ danými rovnicí $\bar{t} = \text{konst.}$, třetí oboje orbity zároveň, souřadnicové osy odpovídají kosmologickým souřadnicím typu I

$$\tan \tilde{t} = \frac{2\bar{t}}{l^2 - \bar{t}^2 + \bar{z}^2}, \quad (2.72)$$

$$\tan^2 \tilde{r} = \frac{(l^2 + \bar{t}^2 - \bar{z}^2)^2}{4l^2 \bar{z}^2}. \quad (2.73)$$

Orbity vektorů $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ jsou vyneseny na obrázku 2.6.

3. Struktura Lieovy algebry Killingových vektorů AdS

Cílem této kapitoly je odvodit strukturní konstanty Lieovy algebry Killingových vektorů nalezených v předešlé kapitole a prozkoumat souvislosti binární operace skládání v Lieově grupě a Lieovy závorky v Lieově algebře.

Strukturní konstanty Lieovy algebry v sobě nesou strukturu symetrií daného prostoročasu. Jsou dány vztahem definitoricky vztahem

$$[\xi_a, \xi_b] = c^c_{ab} \xi_c, \quad (3.1)$$

kde indexy a, b, c číslijí bázi Killingových vektorů v Lieově algebře a zároveň používáme reálné konvence, převládající v matematických textech (lze se setkat i s definicí (3.1) s imaginární jednotkou na pravé straně). Hranaté závorky na levé straně rovnice (3.1) označují Lieovu závorku vektorových polí ξ_a a ξ_b . Tato operace je bilineární, antisymetrická a vyhovuje Jacobiho identitě, splňuje tedy všechny požavky kladené na “algebraickou” Lieovu závorku: na množině Killingových vektorů tak generuje strukturu Lieovy algebry. Pro Lieovu závorku platí vztah

$$[X, fY] = f[X, Y] + X[f]Y, \quad (3.2)$$

který spolu s faktem, že Lieovy závorky souřadnicových polí jsou nulové, dává dostatečný aparát pro výpočty v další části této kapitoly. Na veličiny c_{ab}^c na pravé straně (3.1) lze nahlížet jako na složky tenzoru třetí řady nad Lieovou algebrou. Ukazuje se ovšem, že z nich lze sestavit i jednodušší objekty. Nejvýznamějším příkladem takového objektu je tzv. Killingova forma

$$K_{ab} = \frac{1}{2} c_{am}^n c_{bn}^m, \quad (3.3)$$

která je symetrická (patrné z definice) a bilineární (plyne z linearit c_{ab}^c). Její význam tkví v tom, že na ni lze nahlížet jako na metrický tenzor v Lieově algebře. Jak se ukáže, tyto metrické tenzory v případě, že budeme uvažovat Killingovy vektory AdS prostoročasu, budou mít zajímavé signatury, což bude mít netriviální důsledky pro geometrickou interpretaci skládání izometrií.

3.1 2+1-dimenzionální AdS prostoročas

Postupujme analogicky jako v předešlé kapitole, tedy spočteme nejprve obecnější 2+1-dimenzionální případ a poté ověříme, že takto získané výsledky se přenášejí i do dvojdimenzionální verze. Plán výpočtu je takový, že nejprve všechny Killingovy vektory vyjádříme v jedné sadě souřadnic, k čemuž uijeme vzorce

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad (3.4)$$

pak pomocí vzorce (3.2) spočteme koeficienty c_{ab}^c a z nich odvodíme podle (3.3) K_{ab} .

V případě 2+1-dimenzionálního AdS máme šest nezávislých generátorů izometrie: $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$. Volíme jako základní souřadnice typu I \tilde{t} , \tilde{r} , θ . První a druhý vektor v nich mají triviální vyjádření

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (3.6)$$

Vektor $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ vyjádříme spočtením parciálních derivací podle vzorce (2.5) ze vztahů (2.17)–(2.22) a jejich převedením do souřadnic \tilde{t} , \tilde{r} , θ pomocí vztahů (2.14)–(2.16). Příslušné vyjádření má tvar

$$\frac{\partial}{\partial T_{II}} = \frac{1}{l} \left(-\sin \tilde{t} \sin \tilde{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \cos \tilde{t} \cos \tilde{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \cos \tilde{t} \frac{\sin \theta}{\sin \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.7)$$

Podobně složky vektoru $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$ spočteme parciálním derivováním vztahů (2.30)–(2.35) (obě oblasti $\frac{(R_{II}^P)^2}{l^2} < 1$ i $\frac{(R_{II}^P)^2}{l^2} > 1$ jsou v tomto ohledu ekvivalentní) a jejich převedením do kosmologických souřadnic typu I pomocí (2.27)–(2.29). Vektor tak nabývá tvar

$$\frac{\partial}{\partial T_{II}^P} = \frac{1}{l} \left(\cos \tilde{t} \sin \tilde{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \sin \tilde{t} \cos \tilde{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \sin \tilde{t} \frac{\sin \theta}{\sin \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.8)$$

Plně analogicky užitím vzorců (2.36)–(2.44) pro $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$ a (2.45)–(2.53) pro $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$ získáváme jejich vyjádření

$$\frac{\partial}{\partial T_{II}^R} = \frac{1}{l} \left(-\sin \tilde{t} \sin \tilde{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \cos \tilde{t} \cos \tilde{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \cos \tilde{t} \frac{\cos \theta}{\sin \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}} = \frac{1}{l} \left(\cos \tilde{t} \sin \tilde{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \sin \tilde{t} \cos \tilde{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \sin \tilde{t} \frac{\cos \theta}{\sin \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.10)$$

Bázi v Lieově algebře složíme z bezrozměrných vektorů, vektory $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial \theta}$ tedy pomecháme beze změny a vektory $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$ přenásobíme l . Z vyjádření (3.5)–(3.10) získáváme pomocí vzorce (3.2) pro Lieovy závorky, zahrnující vektory $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial \theta}$ a přímým výpočtem pro ostatní Lieovy závorky komutační relace, uvedené v Tabulce 1, kde vektor v prvním sloupci odpovídá prvnímu argumentu Lieovy závorky a vektor v prvním řádku odpovídá argumentu druhému.

	$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^P}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^R}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^{PR}}$
$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$	0	0	$-\frac{\partial l}{\partial T_{II}^P}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}}$	$-\frac{\partial l}{\partial T_{II}^{PR}}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^R}$
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	0	0	$-\frac{\partial l}{\partial T_{II}^R}$	$-\frac{\partial l}{\partial T_{II}^{PR}}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^P}$
$\frac{\partial l}{\partial T_{II}}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^P}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^R}$	0	$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	0
$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^P}$	$-\frac{\partial l}{\partial T_{II}}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^{PR}}$	$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$	0	0	$\frac{\partial}{\partial \theta}$
$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^R}$	$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^{PR}}$	$-\frac{\partial l}{\partial T_{II}}$	$-\frac{\partial}{\partial \theta}$	0	0	$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$
$\frac{\partial l}{\partial T_{II}^{PR}}$	$-\frac{\partial l}{\partial T_{II}^R}$	$-\frac{\partial l}{\partial T_{II}^P}$	0	$-\frac{\partial}{\partial \theta}$	$-\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$	0

Tabulka 1: Komutační relace Killingových vektorů 2+1-dimenzionálního AdS, vektor v prvním sloupci odpovídá prvnímu argumentu Lieovy závorky, vektor v prvním řádku odpovídá druhému argumentu Lieovy závorky

Zavedeme-li značení $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \equiv \xi_1$, $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv \xi_2$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}} \equiv \xi_3$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P} \equiv \xi_4$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R} \equiv \xi_5$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}} \equiv \xi_6$, jediné nenulové strukturní konstanty jsou

$$c_{13}^4 = -1, c_{14}^3 = 1, c_{15}^6 = -1, c_{16}^5 = 1, \quad (3.11)$$

$$c_{23}^5 = -1, c_{24}^6 = -1, c_{25}^3 = 1, c_{26}^4 = 1, \quad (3.12)$$

$$c_{34}^1 = 1, c_{35}^2 = 1, \quad (3.13)$$

$$c_{46}^2 = 1 \quad (3.14)$$

a konstanty k nim antisymetrické. Jim odpovídající nenulové složky Killingovy formy K jsou dle (3.3)

$$K_{11} = K_{22} = -1, \quad (3.15)$$

$$K_{33} = K_{44} = K_{55} = K_{66} = 1. \quad (3.16)$$

Vidíme, že metrika má ortogonální tvar a má signaturu $(-, -, +, +, +, +)$. Spočtěme nyní souřadnice generátorů Poincarého izometrií v bázi vektorů kosmologických souřadnic typu I. Ze vztahů (2.54)–(2.60) postupem analogickým případům (3.7)–(3.10) nacházíme

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{l} \left((1 - \cos \tilde{t} \sin \tilde{r} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - \sin \tilde{t} \cos \tilde{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \sin \tilde{t} \frac{\sin \theta}{\sin \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{l} \left(-\sin \tilde{t} \sin \tilde{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \cos \tilde{t} \cos \tilde{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \left(1 - \cos \tilde{t} \frac{\cos \theta}{\sin \tilde{r}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.18)$$

Z vyjádření (3.17) a (3.18) lze nehlédnout, že tyto vektory nejsou lineárně nezávislé na bázi $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$, pro koeficienty rozvoje do ní porovnáním s (3.5)–(3.11) zjišťujeme

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial}{\partial T_{II}^P}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = -\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial T_{II}^R}. \quad (3.20)$$

Tyto vektory mají vůči metrice (3.15)–(3.16) nulovou normu.

Vidíme, že důvod, proč preferovat bázi obsahující vektory $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$ oproti bázi obsahující poincaréovské vektory, je důvodem preferování ortogonální báze vůči neortogonální vzhledem ke Killingově metrice. Obě sady vektorů jsou maximální lineárně nezávislé množiny generátorů a jejich lineární obalem je prostor všech generátorů izometrie. Pro výpočty a z praktického hlediska je po všech stránkách výhodnější užívat bázi ortogonální. Tabulka 1 v sobě nese ještě jeden

důležitý poznatek: vzájemné komutování vektorů $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}$ ospravedlňuje konstrukci vektoru $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$, v případě, že by tyto dva vektory spolu nekomutovali, vektor $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$ by nebyl dobře definovaný.

Jak vektory $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$, tak vektory $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$ vznikají působením izometrií jednoho vektoru báze na druhý. V případě časově posunutých a zrotovaných vektorů $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$, $\frac{\partial}{\partial T_{II}^{PR}}$ je to působení izometrií, odpovídajících $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}$ na vektor $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$, případě $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$ působí limitně izometrie odpovídající vektoru typu statických souřadnic typu II na vektor $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$. To vede přirozeně k otázce, co se při tom děje v algebře Killingových vektorů a jaká je souvislost se strukturními koeficienty z Tabulky 1.

Dosadíme-li obecný posun $\Delta \tilde{t}$ do vyjádření vektoru $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_{II}'} &= \frac{1}{l} \left(-\sin(\tilde{t} + \Delta \tilde{t}) \sin \tilde{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \cos(\tilde{t} + \Delta \tilde{t}) \cos \tilde{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right. \\ &\quad \left. - \cos(\tilde{t} + \Delta \tilde{t}) \frac{\sin \theta}{\sin \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

zjistíme, že díky součtovým vzorcům goniometrických funkcí je $\frac{\partial}{\partial T_{II}'}$ lineární kombinací vektorů báze:

$$\frac{\partial}{\partial T_{II}'} = \cos \Delta \tilde{t} \frac{\partial}{\partial T_{II}} - \sin \Delta \tilde{t} \frac{\partial}{\partial T_{II}^P}. \quad (3.22)$$

Vidíme tedy, že akci izometrie indukované vektorem $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ na vektor $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ odpovídá rotace v Lieově algebře s Killingovou metrikou v rovině dané vektory $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ a $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$. Odpovídajícím strukturním koeficientem v Tabulce 1 je $c_{34}^1 = 1$, příslušející k Lieově závorce $\left[\frac{\partial}{\partial T_{II}}, \frac{\partial}{\partial T_{II}^P} \right] = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$.

Analogicky působením izometrie indukované vektorem $\frac{\partial}{\partial T_{II}'}$ na souřadnicový vektor $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ pro obecný posun ΔT_{II} zjišťujeme, že hyperbolickým koeficientům a součtovým vzorcům pro hyperbolický sinus a kosinus je výsledek dán lineární kombinací

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} = \cosh \Delta T_{II} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \sinh \Delta T_{II} \frac{\partial}{\partial T_{II}^P}. \quad (3.23)$$

Akcí izometrie indukované vektorem $\frac{\partial}{\partial T_{II}'}$ na souřadnicový vektor $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ je tedy lorentzovská transformace v rovině dané vektory $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ a $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$. Tomu odpovídající Lieova závorka je $\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial}{\partial T_{II}^P} \right] = \frac{\partial}{\partial T_{II}'}$.

Tyto výsledky nám dovolují vyvodit závěry ohledně geometrické interpretace strukturních koeficientů (3.11)–(3.14). Akcí vektoru, odpovídající kontravariantnímu indexu strukturního koeficientu na vektor odpovídající kovariantnímu indexu je rotace, nebo Lorentzova transformace v rovině určené oběma vektory odpovídajícím kovariantním indexům v závislosti na tom, má-li tento vektor zápornou, nebo kladnou normu v metrice (3.15)–(3.16). Tato varianta se realizuje právě tehdy, je-li právě jeden z trojice indexů v strukturním koeficientu příslušný vektoru se zápornou normou. Je-li závorka mezi dvěma vektory nulová,

je příslušný koeficient rovněž roven nule a obě vektorová pole spolu komutují a jsou tedy invariantní vůči akci jednoho z nich na druhé. Tento případ nastává, mají-li dva vektory ve strukturním koeficientu v Killingově metrice zápornou normu, nebo mezi vektory $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ a $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$ a $\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$ a $\frac{\partial}{\partial T_{II}^R}$. Nulovost poslední zmíněných závorek má důležité důsledky pro konstrukci BTZ černých děr, pro podrobný rozbor viz [11].

3.2 1+1-dimenzionální AdS prostoročas

2 + 1-dimenzionální anti-de Sitterův prostoročas se na 1 + 1-dimenzionální AdS prostoročas redukuje na každé ploše $\theta = \text{konst.}$ Jelikož tato plocha je plocha symetrie, lze očekávat, že takový sestup o dimenzi níže bude mít v Lieově algebře Killingových vektorů podobu omezení se na podprostor vymezený vektory, nezahrnující vektory odpovídající úhlovým izometriím a zrotovaným souřadnicím, při zachování komutačních relací. Ukažme, že je tomu opravdu tak.

Vzorec (3.4) aplikovaného na transformační vztahy (2.65) a (2.66), resp. (2.24)–(2.26), spolu s vyjádřením příslušných koeficientů ve statických souřadnicích typu I pomocí vzorců (2.65) a (2.64) dává složky Killingových vektorů

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_{II}} = \frac{1}{l} \left(-\sin \tilde{t} \sin \chi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \cos \tilde{t} \cos \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_{II}^P} = \frac{1}{l} \left(\cos \tilde{t} \sin \chi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \sin \tilde{t} \cos \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right). \quad (3.26)$$

Tyto složky se shodují s těmi získanými položením $\theta = 0, \pi$ ve vztazích (3.7)–(3.10). Analogickým výpočtem, jako v předešlém případě získáváme Tabulku 2 strukturních konstant 1 + 1-dimenzionálního prostoročasu.

	$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$	$\frac{\partial}{\partial T_{II}}$	$\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$
$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$	0	$-\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$	$\frac{\partial}{\partial T_{II}}$
$\frac{\partial}{\partial T_{II}}$	$\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$	0	$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$
$\frac{\partial}{\partial T_{II}^P}$	$-\frac{\partial}{\partial T_{II}}$	$-\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$	0

Tabulka 2: Komutační relace Killingových vektorů 1 + 1-dimenzionálního AdS, vektor v prvním sloupci odpovídá prvnímu argumentu Lieovy závorky, vektor v prvním řádku odpovídá druhému argumentu Lieovy závorky

Z tabulky 2 je patrné, že struktura komutačních relací Killingových vektorů 1 + 1-dimenzionálního AdS prostoročasu je vskutku shodná se strukturou komutačních relací těchto Killingových vektorů v 2 + 1-dimenzionálním prostoročasu. Také koeficienty Killingovy metriky nabývají ve značení užitém v (3.15)–(3.16) téhož tvaru

$$K_{11} = -1, \quad (3.27)$$

$$K_{33} = K_{44} = 1. \quad (3.28)$$

4. Řešení získaná identifikací podél symetrií AdS prostoročasu

V této kapitole prozkoumáme řešení Einsteinových rovnic, která lze získat identifikací bodů v anti-de Sitterově prostoročasu podél symetrií, které byly vyloženy v druhé kapitole. Skutečností, kterou tato konstrukce dává vyplout na povrch je rozlišení mezi lokálními a globálními vlastnostmi prostoročasu. Je intuitivně zřejmé, že lokální vlastnosti zůstanou nezměněny, na rozdíl od vlastností, které zachycují vlastnosti prostoročasu, jako celku. Vhodným nástrojem pro popis druhého typu vlastností je obecná a algebraická topologie. My zde ovšem od této problematiky odhlédneme a omezíme na popis geometrických vlastností takto získaných řešení. Držíme se přitom konvence druhé kapitoly. Oproti druhé a třetí kapitole budeme provádět identifikace pouze v $2 + 1$ -dimenzionálním AdS prostoročasu.

Mluvíme-li o identifikaci v prostoročasu, máme na mysli ztotožňování bodů na plochách, které se v tomto prostoročasu nacházejí. V souladu s terminologickou konvencí pak říkáme, že identifikaci provádíme podél těchto ploch. Při vhodně zavedených souřadnicích x^μ mohou být tyto plochy dány např. dvěma hodnotami souřadnice x^1 . Alternativně říkáme, že ztotožňujeme podél souřadnicových čar x^μ , spojují-li tyto souřadnicové čáry navzájem identifikované body na příslušných plochách. V obecném případě budou při identifikování existovat dvě možnosti: ponechat v jistém smyslu “vnitřek”, anebo jeho komplement.

Podmínkou toho, aby podél souřadnicových čar x^μ šla provést lokální geometrickou strukturu zachovávající identifikace je, že se geometrie podvariety $x^1 = \text{konst.}$ a její vnoření do prostoročasu nesmí změnit při změně hodnoty souřadnice x^1 . To lze zajistit požadavkem, aby vektor $\frac{\partial}{\partial x^1}$ byl generátor izometrie. Všechny typy izometrií jsme našli v kapitole 3. Navíc, v případě trojdimenzionálního anti-de Sitterova prostoročasu, jako variety s lorentzovskou signaturou, máme možnost množinu všech možných takových identifikací rozdělit na ty, které jsou prováděny skrze časupodobné plochy a ty, které jsou využívají prostorupodobné plochy.

Naším cílem je prozkoumat identifikace, které v prostoru způsobí existenci neprodloužitelných geodetik, tedy v souladu s definicí z první kapitoly ekvivalentní vyprodukování singularity. Zamysleme se nad tím, jaká omezení takový požadavek dává na vlastnosti ploch, podél níž provádíme identifikaci. Společnou vlastností všech souřadných systémů, které jsme v druhé kapitole zavedli je to, že anti-de Sitterův prostoročas pokrývají pomocí trojice souřadnic, z nichž jedna lze vždy interpretovat jako časová souřadnice, jedna lze interpretovat jako radiální souřadnice (jejími souřadnicovými čarami jsou svazky geodetik) a jedna má intuitivní význam úhlové souřadnice (intuitivní proto, že přirozené kritérium uzavřenosti souřadnicových čar Poincarého souřadnice \bar{x} nespĺňuje, ale přesto má smysl tvrdit, že má v jistém smyslu úhlový charakter, viz [12]). Generátory izometrie jsou pouze souřadnice časové a úhlové, konkrétně v případě statických souřadnic typu I $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, v případě statických souřadnic typu II $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ a v případě Poincarého souřadnic $\frac{\partial}{\partial t}$ a $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$. Ekvivalentní formulací požadavku na existenci neprodloužitelné geodetiky je, že souřadnicové plochy, podél nichž je prováděna

identifikace musí v jistých bodech protínat. To splňují úhlové souřadnice, v bodech s radiální souřadnicí rovnou nule, nebo časová bifurkující souřadnice v oblasti, kde jsou její souřadnicové čáry prostorupodobné. V obou případech mají plochy, podél nichž nové řešení lokálně izometrické AdS prostoročasu slepíme, časupodobný charakter.

Identifikací AdS prostoročasu podél prostorupodobných ploch o konstantní časové souřadnici a ponechání oblasti mezi oběma plochami bychom dostali prostoročas obsahující uzavřené časupodobné křivky. Vzhledem k nefyzikálnosti takového prostoročasu se touto variantou nebudeme zabývat.

Prozkoumejme tedy po řadě tři možnosti ztotožnění, v Poincarého souřadnicích, v statických souřadnicích typu I a v statických souřadnicích typu II. Samotná identifikace se ve všech případech redukuje na omezení rozsahu jedné ze souřadnic.

4.1 Identifikace v Poincarého souřadnicích

Metrika AdS prostoročasu v Poincarého souřadnicích má tvar

$$g_{\text{AdS}} = \frac{l^2}{\bar{z}^2}(-d\bar{t}^2 + d\bar{z}^2 + d\bar{x}^2), \quad (4.1)$$

kde všechny souřadnice mají rozměr $[l]$, \bar{t} i \bar{x} nabývají hodnot v $(-\infty, \infty)$ a \bar{z} v $(0, \infty)$. Provedme substituci k souřadnicím T, R, Φ

$$T = \bar{t}, \quad (4.2)$$

$$R = \frac{l^2}{\bar{z}}, \quad (4.3)$$

$$\Phi = \frac{\bar{x}}{l}, \quad (4.4)$$

kde Φ je bezrozměrné a nabývá hodnot v intervalu $(-\phi_0, \phi_0)$. Body s hodnotou souřadnice $\Phi = \phi_0$ a $\Phi = -\phi_0$ a shodnými souřadnicemi T a R považujeme za shodné díky provedenému ztotožnění. Metrika (4.1) v těchto souřadnicích přechází na tvar

$$g_{\text{AdS}} = -\frac{R^2}{l^2}dT^2 + \frac{l^2}{R^2}dR^2 + R^2d\Phi^2. \quad (4.5)$$

4.2 Identifikace v statických souřadnicích typu I

V souřadnicích \tilde{t}, \tilde{r} a θ má metrický tenzor AdS prostoročasu tvar

$$g_{\text{AdS}} = \frac{l^2}{\cos^2 \tilde{r}}(-d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + \sin^2 \tilde{r}d\theta^2), \quad (4.6)$$

kde všechny souřadnice jsou bezrozměrné a nabývají hodnot $\tilde{t} \in (-\infty, \infty)$, $\tilde{r} \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Substitucí

$$T_I = l\tilde{t}, \quad (4.7)$$

$$R_I = l \tan \tilde{r}, \quad (4.8)$$

$$\Theta_I = \theta, \quad (4.9)$$

kde $\Theta_I \in (-\Theta_0, \Theta_0)$, nabývá metrický tenzor (4.6) tvaru

$$g_{\text{AdS}} = - \left(1 + \frac{R_I^2}{l^2} \right) dT_I^2 + \frac{1}{1 + \frac{R_I^2}{l^2}} dR_I^2 + R_I^2 d\Theta_I^2. \quad (4.10)$$

Ztotožnění bylo provedeno na plochách $\Theta_I = \pm\Theta_0$, body se souřadnicí $\{T, R, \Theta_0\}$ a $\{T, R, -\Theta_0\}$ jsou totožné. Nepřirozený interval úhlové souřadnice $(-\Theta_0, \Theta_0)$ lze napravit například lineární přeskálováním

$$T = \alpha T_I, \quad (4.11)$$

$$R = \frac{R_I}{\alpha}, \quad (4.12)$$

$$\Phi = \alpha \Theta_I, \quad (4.13)$$

kde $\alpha = \frac{\pi}{\Theta_0}$. Metrika (4.10) tak získává tvar

$$g_{\text{AdS}} = - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{R^2}{l^2} \right) dT^2 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{R^2}{l^2}} dR^2 + R^2 d\Phi^2 \quad (4.14)$$

a souřadnice probíhají hodnoty $T \in (-\infty, \infty)$, $R \in (0, \infty)$, $\Phi \in (-\pi, \pi)$.

4.3 Identifikace v statických souřadnicích typu II

Ztotožněním podél souřadnicového vektoru typu $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ a netriviálními algebraickými úpravami lze získat metriku ve tvaru (viz [14])

$$g_{\text{AdS}} = - \left(1 - \mu + \frac{R^2}{l^2} \right) dT^2 + \frac{dR^2}{1 - \mu + \frac{R^2}{l^2}} + R^2 d\theta^2. \quad (4.15)$$

Podrobná diskuze konstrukce souřadnic T, R, θ není předmětem této práce a lze ji nalézt v [11].

5. Sfěricky symetrická řešení v 2+1 dimenzích

V této kapitole budeme zkoumat charakter sfěricky symetrických řešení obecné relativity ve 2+1 dimenzích. Ukáže se, že tato řešení budou v přirozené korespondenci s třídami identifikací, nalezených ve čtvrté kapitole. Konkrétně tak známý charakter sfěricky symetrických řešení umožní fyzikální interpretaci ztotožnění podél statických souřadnic typu I a II a podél Poincarého souřadnic.

5.1 Obecný tvar sfěricky symetrických řešení Einsteinových rovnic ve 2+1 dimenzích

Jak je uvedeno v [4], obecný tvar stacionárního, rotačně symetrického řešení Einsteinových rovnic ve 2 + 1 dimenzích se zápornou kosmologickou konstantou je

$$g = - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{J}{2r^2} dt \right)^2. \quad (5.1)$$

Konstanty M a J mají význam generátorů asymptotické invariance vůči rotacím a časovým posunutím a fyzikálně se dají interpretovat jako hmotnost a moment hybnosti. Přesnější diskuze k této interpretaci je uvedena odstavci 5.2. Položíme-li nyní moment hybnosti $J = 0$, metrika (5.1) přechází na tvar

$$g = - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{1}{-M + \frac{r^2}{l^2}} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (5.2)$$

Zavedeme navíc konstantu μ vztahem

$$\mu = M + 1. \quad (5.3)$$

Získáváme tak metriku, která má tvar

$$g = - \left(1 - \mu + \frac{R^2}{l^2} \right) dT^2 + \frac{1}{1 - \mu + \frac{R^2}{l^2}} dR^2 + R^2 d\phi^2 \quad (5.4)$$

a která pro různé hodnoty parametru μ pokrývá všechny metriky čtvrté kapitoly. Jedná se tak v podstatě o fázový přechod mezi různými typy sfěricky symetrických řešení. Věnujme však nejprve určité místo diskuzi lokální energie a hmotnosti v obecné teorii relativity.

5.2 Lokální energie a hmotnost v OTR

Problémem energie a hmotnosti gravitačního pole v obecné relativitě je, že tyto pojmy nelze definovat kovariantně. Tenzor energie a hybnosti neobsahuje žádnou část, která by odpovídala hustotě gravitační energie. To odpovídá faktu, že lze díky obecné kovarianci vždy přejít do lokální inerciální soustavy, kde platí lokálně

speciální teorie relativity a mnohé efekty gravitačního působení tak lze v okolí daného bodu odtransformovat (nicméně nelze odtransformovat např. křivost a s tím související slapové jevy). Ukazuje se (viz podrobně např. [9]), že způsoby, jak zavést veličinu, kterou bychom chtěli interpretovat jako hmotnost, závisí na konkrétních vlastnostech prostoročasů, které uvažujeme. Například, pro $N = 4$, pokud má prostoročas časupodobný Killingův vektor k^μ , lze definovat tzv. Komarovu hmotnost

$$M_K = -\frac{1}{8\pi} \oint_S \nabla^\mu k^\nu dS_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

kde S je prostorupodobná uzavřená plocha. Navíc, pokud je prostoročas axisymetrický, tedy disponuje prostorupodobným Killingovým vektorem s uzavřenými orbitami ϕ^μ , lze definovat i tzv. Komarův moment hybnosti

$$J_K = -\frac{1}{16\pi} \oint_S \nabla^\mu \phi^\nu dS_{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Pro asymptoticky ploché prostoročasy lze definovat tzv. Arnowittovy-Deserovy-Misnerovy veličiny (dále ADM veličiny). Základní myšlenkou zde je, že veličiny, charakterizující dané řešení se na jisté uzavřené prostorupodobné ploše v nekonečnu blíží k hodnotám veličin, charakterizující plochý prostoročas v pozadí. Rychlost této konvergence je dána jistými rovnicemi typu

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (V_{\text{prostoročas}}(r) - V_{\text{pozadí}}(r)) \cdot f(r) = 0, \quad (5.7)$$

kde V je veličina charakterizující prostoročas, r je radiální souřadnice a $f(r)$ je radiálně symetrická funkce. Generátory izomorfizmů, vůči nimž jsou tyto rovnice invariantní odpovídají na základě teorému Noetherové zachovávajícím se veličinám. Těmi jsou pro časové translace ADM energie E_{ADM} , pro prostorové translace ADM hybnost P_{ADM} a pro prostorové rotace ADM moment hybnosti J_{ADM} . Všechny tyto veličiny lze vyčíslit pomocí plošného intergrálu přes okraj prostoročasu v časupodobném nekonečnu.

Podobné konstrukce lze využít i pokud je prostoročas asymptoticky AdS. Na rozdíl od asymptoticky plochých prostoročasů ve čtyřech dimenzích je však v 2+1 dimenzích pro asymptoticky AdS prostoročasy asymptotických symetrií méně – pouze časový posun a rotace. Odpovídající generátory jsou hmotnost a moment hybnosti. Hodnoty těchto veličin lze spočítat pomocí asymptotických integrálů. V případě hmotnosti je však nutno čelit skutečnosti, že naivně definovaný integrál obecně diverguje. Energie je definovaná až na konstantu a je potřeba zvolit vhodná nulová hladina - renormalizovat integrál odečtením hodnoty pro vhodně zvolené triviální řešení.

Lze ukázat, že pro obecně sféricky symetrická řešení (5.1) se hodnoty generátorů energie a momentu hybnosti shodují přímo s parametry M a J .

5.3 Anti-de Sitterův prostoročas

Díky lineární závislosti (5.3) mohou oba parametry M i μ v (5.2) či (5.4) hrát roli asymptotického generátoru izometrie. Při výběru správné zobecněné ADM hmotnosti je potřeba identifikovat nulovou hladinu, tj. vybrat řešení odpovídající

nulové gravitační energii. Přírozeným kandidátem je prázdný AdS prostoročas. Ten získáme, položíme-li v rovnici (5.4) $\mu = 0$:

$$g = \left(1 + \frac{R^2}{l^2}\right) dT^2 + \frac{1}{1 + \frac{R^2}{l^2}} dR^2 + R^2 d\phi^2. \quad (5.8)$$

Obdržíme stejný tvar metriky, jako položíme-li v rovnici (4.14) parametr α roven jedné. Toto řešení popisuje AdS prostoročas, s nulovým vyjmutým úhlem ϕ , neboli globální prázdný AdS vesmír. Proto za zobecněnou ADM hmotnost pro sféricky symetrické řešení budeme považovat parametr μ v metrice (5.4).

5.4 Bodová částice v AdS prostoročasu

Uvažujme nyní $\mu \in (0, 1)$. Výraz $1 - \mu$ v metrice (5.4) je kladný, lze tedy položit $1 - \mu = \frac{1}{\alpha^2}$. Metrika tak lze vyjádřit ve dvou ekvivalentních tvarech (5.4) a (4.14).

Na základě diskuze z předchozí kapitoly víme, že se jedná o AdS prostoročas identifikovaný podél úhlové symetrie – prostoročas obsahující tzv. kónickou singularitu. Vskutku, geometrie v jednom čase $T = \text{konst.}$ má charakter Lobačevské roviny s vyjmutým polárním úhlem, tj. Lobačevského analogii kuželu. Ukazuje se, že toto řešení lze interpretovat jako bodovou částici v anti-de Sitterově prostoročasu.

Prozkoumejme prostorovou geometrii této metriky podrobněji. Protože prostorový řez je dvojdimenzionální a naše řešení je sféricky symetrické, můžeme k tomuto účelu použít tzv. vnořovacího diagramu, ve kterém sestrojíme plochu vnořenou do třídimeznionálního euklidovského prostoru \mathbb{E}^3 , jejíž indukovaná geometrie je shodná s geometrií zkoumaného prostorového řezu.

Konstrukce vnořovacího diagramu k sféricky symetrické metrice se zakládá na těchto krocích:

- Znalost indukované metriky rotačně symetrické plochy v \mathbb{E}^3 : označíme-li R radiální souřadnici, ϕ úhlovou souřadnici, která je normována na rozsah $(-\pi, \pi)$ a z souřadnici, kolem jejíž osy uvažujeme rotaci, je metrický tenzor plochy, vzniklé rotací křivky $z = z(R)$

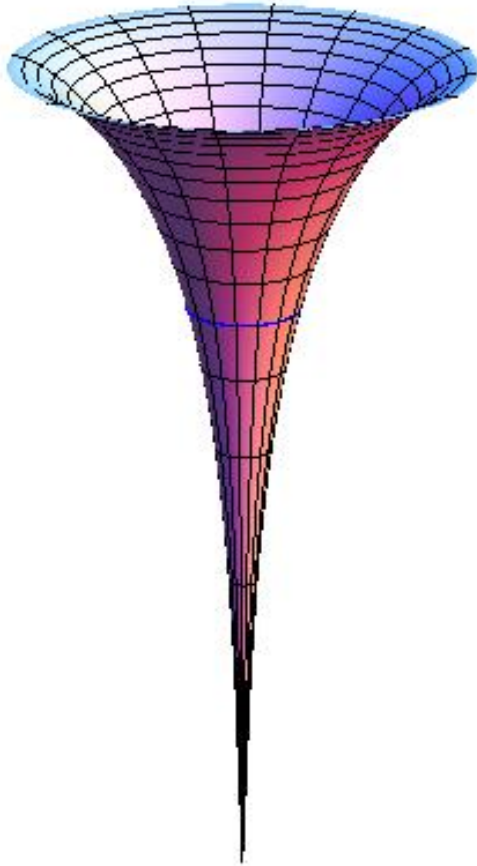
$$g = \left(1 + \left(\frac{dz}{dR}\right)^2\right) dR^2 + R^2 d\phi^2 \quad (5.9)$$

- Porovnání koeficientů prostorové části zkoumané metriky (5.8) s metrikou (5.9)
- Řešení příslušné obyčejné diferenciální rovnice udávající závislost z na R .

V konkrétním případě metriky (5.4) má obyčejná diferenciální rovnice, udávající závislost z na R tvar

$$\frac{dz}{dR} = \sqrt{\frac{1}{1 - \mu + R^2} - 1}, \quad (5.10)$$

jejímž řešením je funkce [15]



Obrázek 5.1: Prostorová geometrie metriky popisující bodovou částici o hmotnosti $\mu = 0,999$

$$z(R) = -i\sqrt{\mu}E\left(\arcsin i\frac{R}{\sqrt{1-\mu}}; \frac{\mu-1}{\mu}\right), \quad (5.11)$$

kde $E(\cdot; \cdot)$ je úplný eliptický integrál druhého druhu s příslušnými parametry.

Porovnání metrik (5.4) a (4.14) nám umožňuje odvodit vztah mezi hmotností částice μ a parametrem α udávajícím deficit úhlu ϕ . Tento vztah má podobu

$$1 - \mu = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (5.12)$$

Prostorová geometrie plochy odpovídající $\mu = 0,999$, $\alpha = \sqrt{1000}$ je znázorněna na obrázku 5.2.

5.5 Extrémní černá díra

Z tvaru funkce (5.11) a podmínky (5.12) je patrné, že s rostoucí hmotností bodové částice se kónická singularita pro pozorovatele, sedícího na ekvidistantě o kon-

stantním poloměru vzdaluje stále do větší vzdálenosti. V limitním případě, kdy $\mu = 1$ je singularita nekonečně daleko a metrika (5.4) nabývá tvar

$$g = -\frac{R^2}{l^2}dT^2 + \frac{l^2}{R^2}dR^2 + R^2\phi^2, \quad (5.13)$$

Ten je shodný s rovnicí (4.5) a fyzikálně toto řešení odpovídá tzv. extrémní černé díře. Extrémnost v tomto kontextu znamená, že černá díra má za daných podmínek nejmenší možnou hmotnost. Kauzální struktura tohoto řešení též neodpovídá běžné černé díře. Singularita vzniklá protnutím identifikovaných ploch má nulových charakter v intuitivním smyslu lze říci, že leží přímo na horizontu extrémní černé díry.

Všimněme si, že dle vzorce (5.12) odpovídá limitě $\mu \rightarrow 1-$ tj. $\alpha \rightarrow \infty$. Extrémní černá díra je tedy dána identifikací podél úhlu “nekonečně” menšího, než π . Nedegenerovanost takto vzniklého objektu je důsledkem toho, že pro $\mu \rightarrow 1-$ diverguje $z(0)$ do záporného nekonečna a již zmíněné podmínky (5.12), svazující deficit úhlu a hmotnost μ . Limitní přechod od kónické singularity k extrémní černé díře je popsán v následující kapitole.

5.6 BTZ černá díra

Pro hmotnost $\mu > 1$ lze metricku (5.4) přepsat ve tvaru

$$g = -\left(-M + \frac{R^2}{l^2}\right)dT^2 + \frac{1}{-M + \frac{R^2}{l^2}}dR^2 + R^2\phi^2, \quad (5.14)$$

kde $M = \mu - 1$, která popisuje BTZ černou díru [2] a vzhledem ke shodě s rovnicí (4.15) ji lze získat identifikací AdS prostoročasu podél souřadnicových čar statických souřadnic typu II. Vnořovací diagram se v tomto případě se vzrůstajícím μ začíná otevírat do druhé asymptotické oblasti, prostorová geometrie metriky (5.14) tak znázorňuje červí díru. Narozdíl od extrémní černé díry je singularita skryta pod horizontem událostí. Pro podrobnější výklad viz [11].

6. Limita kónické singularity k extrémní černé díře

Cílem této kapitoly je prozkoumat geometrické aspekty limitního přechodu od kónické singularity k extrémní černé díře. Jak bylo řečeno v předchozí kapitole, oba případy jsou pokryty metrikou (5.4), kónická singularita odpovídá hodnotám parametru $\mu \in (0, 1)$, zatímco extrémní černá díra odpovídá rovnosti $\mu = 1$, kdy metrika přechází na zjednodušený tvar (5.13). Ze vzájemné korespondence sféricky symetrických řešení v 2+1 dimenzích a identifikací v statických souřadnicích typu I, statických souřadnicích typu II a Poincarého souřadnicích víme, že kónická singularita odpovídá identifikaci ve statických souřadnicích typu I (vzorec (4.14)), kdežto extrémní černá díra identifikaci v Poincarého souřadnicích (vzorec (4.5)).

Prozkoumejme, jaké důsledky má vztah (5.12) na geometrický tvar ploch, podél nichž se provádí identifikace. Předně je zřejmé, že spojitě množství hodnot parametru μ v intervalu $(0, 1)$ není pokryto jedním souřadným systémem statických souřadnic typu I, jejichž souřadnicové čáry jsou pro 1 + 1-dimenzionální případ zachyceny na obrázku 2.4. Z toho, že pro $\mu \rightarrow 1-$ se parametr α zvětšuje jako

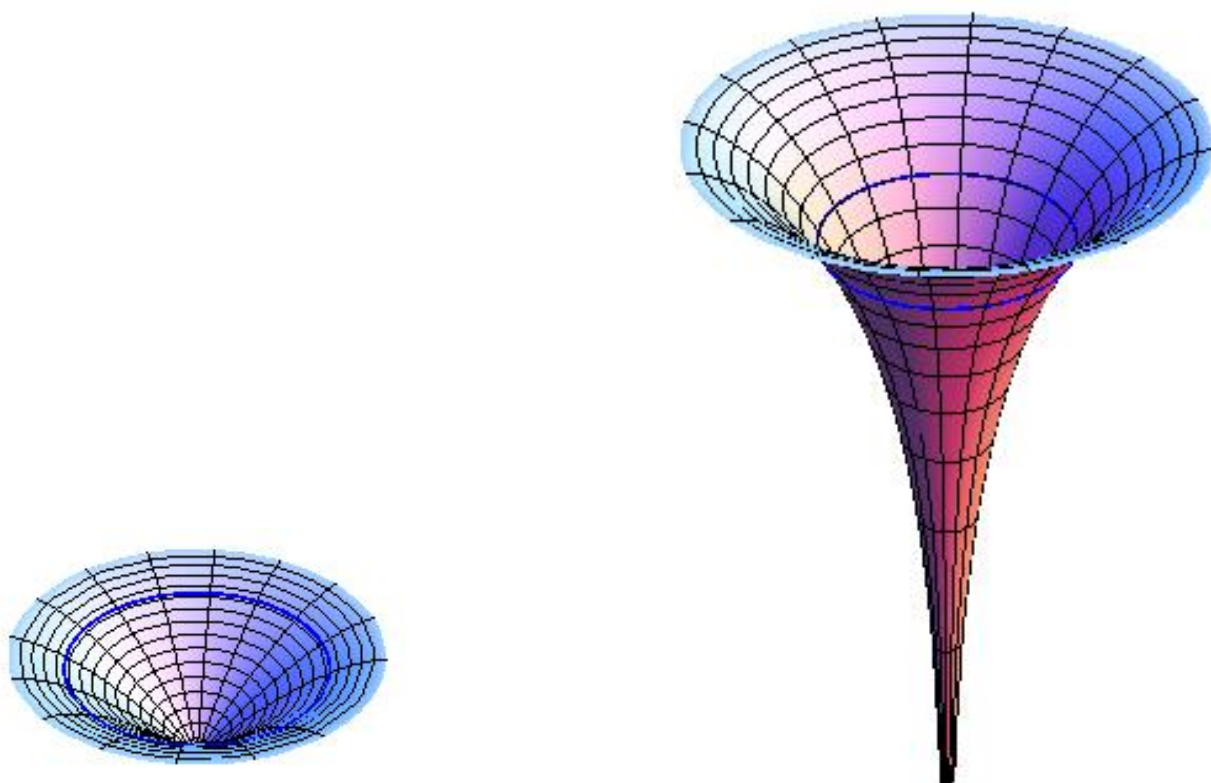
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu}} \quad (6.1)$$

a díky tvaru funkce (5.11) prostorová geometrie kónické singularity nikde nede-generuje, vyplývá, že identifikace je prováděna podél souřadnic přizpůsobeným k jednoparametrické grupě izometrií, která se pro $\mu \rightarrow 1-$ blíží k Poincarého izometriím.

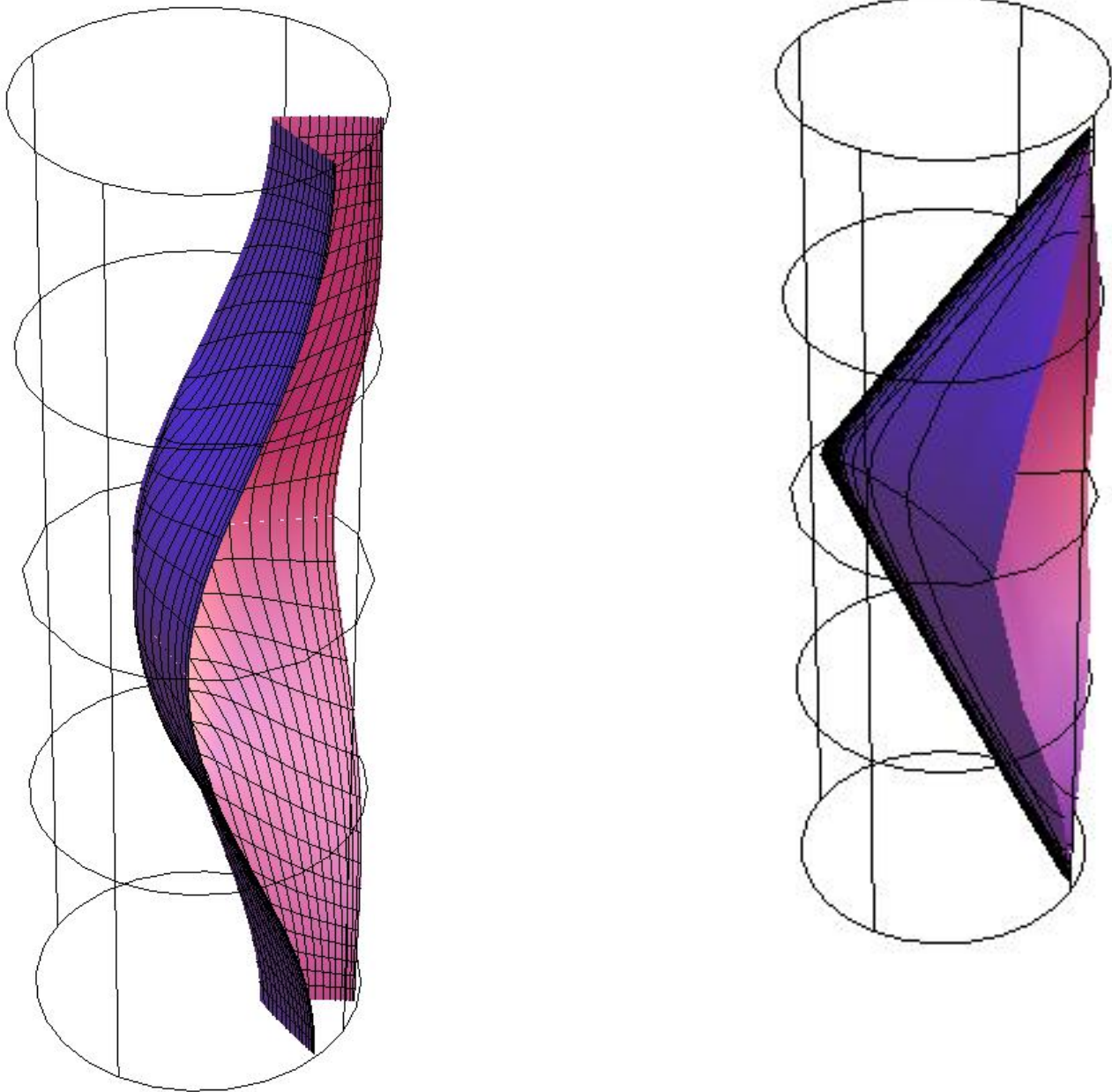
Takovou jednoparametrickou grupu izometrií jsme ovšem našli ve 3. kapitole. Je jí působení časového vektoru statických souřadnic typu II $\frac{\partial}{\partial T_{II}}$ na vektor statických souřadnic typu I $\frac{\partial}{\partial t}$, dané vzorcem (3.23), které odpovídá lorentzovské transformaci v Lieově algebře Killingových vektorů. Z kapitoly 2 víme, že s vhodným přenormováním jsou limitou této procedury vektory Poincarého souřadnic $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Jaká je fyzikální interpretace tohoto faktu? Pozorovatel sedící na ekvidistantě o konstantním poloměru s narůstající hmotností kónické singularity μ pozoruje její postupné vzdalování do prostorového nekonečna a zvětšování ořezávacího parametru α . Monotónně s α roste i časový posun ΔT_{II} (viz obrázek 6.2), přičemž hodnotě $\Delta T_{II} = 0$ (souřadnice na obrázku 2.4) odpovídá $\alpha = 1$, tedy nulový vyjmutý úhel θ a hodnotě $\Delta T_{II} = \infty$ (Poincarého souřadnice, obrázky 2.1, 2.2, 2.3, 2.6) odpovídá $\alpha = \infty$, tedy identifikace podél nulového úhlu θ' .

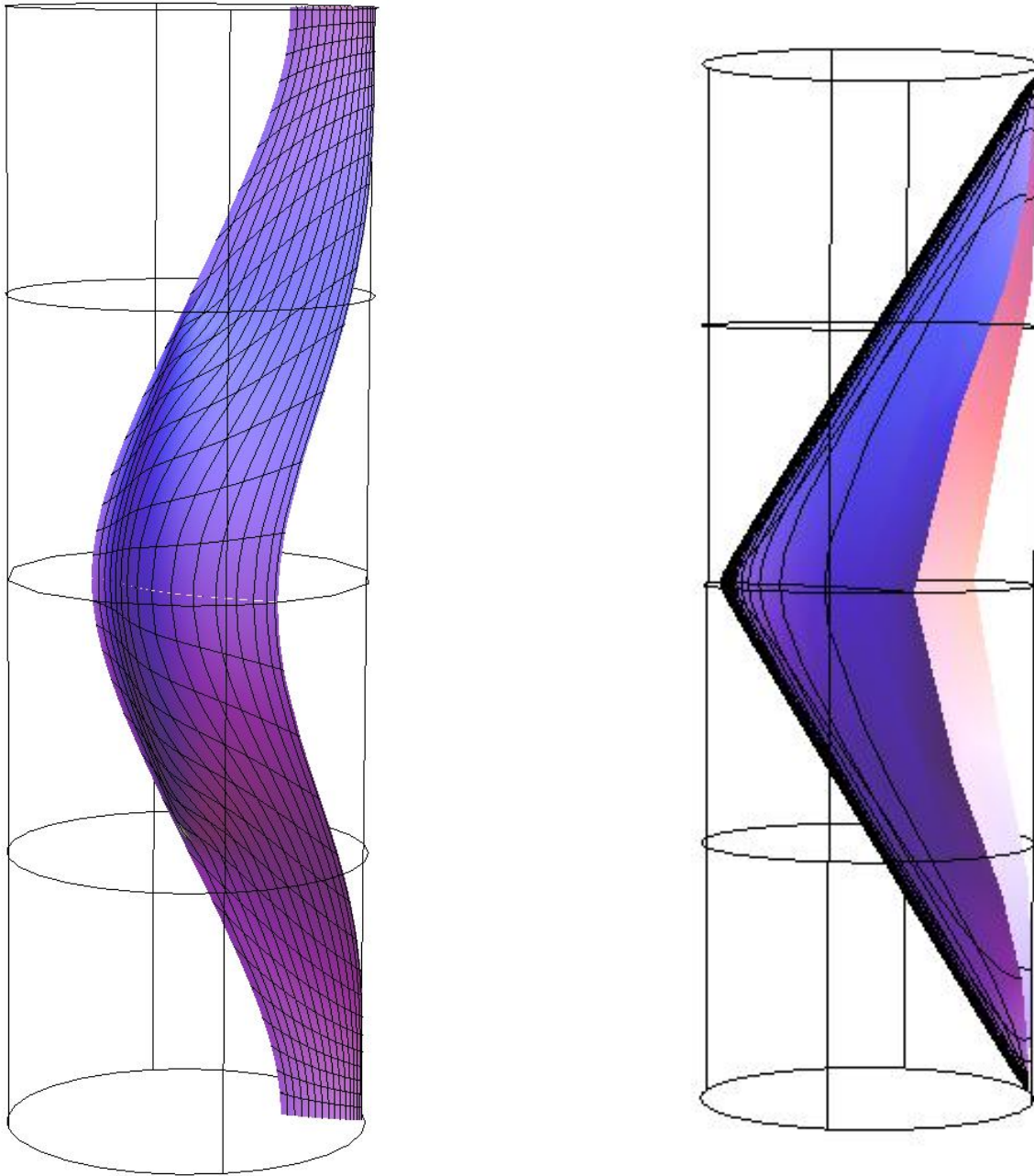
Vnořovací diagram kónické singularity o hmotnosti $\mu = 0.5$ a kónické singularity “blízké” extrémní černé díře je na obrázku 6.1. Prostorčasový diagram kónické singularity a extrémní černé díry je na obrázku 6.2. Bližší srovnání ploch $\theta_{\Delta T_{II}} = \text{konst.}$ a $\bar{x} = \text{konst.}$, podél nichž je provedena identifikace je na obrázku 6.3.



Obrázek 6.1: Srovnání vnořovacích diagramů kónické singularity pro $\mu = 0.5$ a $\mu = 0.9999$ s patrnou ekvidistantou o konstantním poloměru



Obrázek 6.2: Prostorčasový diagram kónické singularity a extrémní černé díry, podél vyobrazených ploch je provedena identifikace. Ze srovnání obou grafů je patrné, že kónická singularita nalevo odpovídající nižšímu $\mu < 1$ odpovídá nižší hodnotě ΔT_{II} , pro extrémní černou díru $\mu < 1$ na grafu napravo platí $\Delta T_{II} = \infty$.



Obrázek 6.3: Srovnání ploch $\theta_{\Delta T_{II}} = \text{konst.}$ a $\bar{x} = \text{konst.}$

Závěr

V této práci jsme studovali některé faktorprostory anti-de Sitterova prostoročasu vůči diskrétním grupám symetrií. Speciálně jsme se přitom soustředili na řešení, mající význam extrémní černé díry, vzhledem k tomu, že právě tento případ nabyl značné popularity při zkoumání termodynamických vlastností.

První kapitola shrnula nezbytný pojmový aparát, potřebný ke zkoumání černých děr v dalších částech práce. V druhé kapitole jsme shrnuli výsledky zkoumání různých souřadných systémů, jimiž lze AdS prostoročas pokrýt. To umožnilo nalezení úplné množiny generátorů izometrie anti-de Sitterova prostoročasu. Struktura této úplné množiny generátorů izometrie byla shrnuta ve třetí kapitole s použitím znalosti vyjádření jednotlivých Killingových vektorů v souřadnicovém systému. Konkrétně se ukázalo, že generátory Poincarého izometrií nejsou na od ostatních vektorů lineárně nezávislé a že Lieova algebra izometrií $1 + 1$ -dimenzionálního AdS prostoročasu je přirozeným způsobem vnořena do Lieovy algebry $2 + 1$ -dimenzionálního AdS prostoru. Tyto znalosti umožnily dobře formulovat problém k řešení v dalších třech kapitolách: klasifikace řešení Einsteinových rovnic vzniklých periodickou identifikací v anti-de Sitterově prostoročasu a interpretaci jejich fyzikálních vlastností. Ve čtvrté kapitole bylo provedeno odvození tvaru metrického tenzoru pro identifikace ve třech typech souřadnicových systémů. Pozornost jsme přitom omezili na takové případy, které povedou k netriviálním fyzikálním závěrům. Byly tak opomenuty identifikace podél prostoropodobných ploch vedoucí k prostoročasům s uzavřenými časopodobnými geodetikami. Zároveň nebyla do hloubky věnována pozornost identifikacím ve statických souřadnicích typu II, vedoucí k řešením typu BTZ černé díry. Rozbor této problematiky lze nalézt v [11]. Pátá kapitola ustanovila korespondenci mezi nalezenými faktorprostory a sféricky symetrickými řešeními Einsteinových rovnic ve $2 + 1$ dimenzích se zápornou kosmologickou konstantou. Šestá kapitola se podrobněji věnovala geometrickým aspektům přechodu od kónické singularity k extrémní černé díře. Konkrétně byla názorně ukázána, změna geometrie prostorových částí metrik a ploch, podél nichž se provádí identifikace pro hodnotu hmotnostního parametru μ blížící se kritické hodnotě $\mu = 1$.

V některé z dalších prací bychom se rádi věnovali zobecněním výše zmíněné konstrukce pro případ rotujících černých děr, případně zkoumání termodynamických vlastností nalezených černoděrových řešení.

Seznam použité literatury

- [1] G. Amelino-Camelia, Quantum-gravity phenomenology with gamma rays and UHE cosmic rays, arXiv:astro-ph/0201047v1.
- [2] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, The Black Hole in Three Dimensional Space Time, arXiv:hep-th/9204099v3.
- [3] D. Birmingham, I. Sachs, S. Sen, Entropy of Three-Dimensional Black Holes in String Theory, arXiv:hep-th/9801019v2.
- [4] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2 + 1 Dimensions* (Cambridge University Press, 2003).
- [5] J. M. Garcia-Islas, BTZ Black Hole Entropy in Loop Quantum Gravity and in Spin Foam Models, arXiv:1303.2773v2.
- [6] J. B. Griffiths and J. Podolský, *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity* (Cambridge University Press, 2009).
- [7] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction* (Springer-Verlag, 2003).
- [8] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, 1973).
- [9] J. L. Jaramillo and E.ourgoulhon, Mass and angular momentum in general relativity, arXiv:1001.5429v2.
- [10] A. A. Kirillov, *An introduction to Lie groups and Lie algebras* (Cambridge University Press, 2008).
- [11] E. Klozová, *Geometrie 2+1 dimenzionálních černých děr* (Bakalářská práce, MFF UK, 2013).
- [12] T. Luber, *Lobačevského geometrie v anti-de Sitterově vesmíru* (Bakalářská práce, MFF UK, 2008).
- [13] J. Maldacena, The Large N Limit of Superconformal field theories and supergravity, arXiv:hep-th/9711200v3.
- [14] Y. S. Myung, Phase transition between the BTZ black hole and AdS space, arXiv:gr-qc/0603051.
- [15] Software Wolfram Mathematica
- [16] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).