Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martina Vaváčková

Souvislé kompaktifikace

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2013

Na tomto místě bych ráda poděkovala prof. RNDr. Petru Simonovi, DrSc. za ochotu a trpělivost při vedení mé práce.

Dále děkuji mamince za podporu v průběhu celého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2. 8. 2013 Martina Vaváčková

Název práce: Souvislé kompaktifikace

Autor: Martina Vaváčková

Katedra: Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc., Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Abstrakt: Tato práce se věnuje studiu souvislých kompaktifikací vybraných Tichonovových prostorů. Předmětem zájmu jsou především maximální prvky v relaci částečného uspořádání, definované na množině všech souvislých kompaktifikací daného prostoru. Nejprve charakterizujeme maximální souvislé kompaktifikace prostorů s konečně mnoha komponentami a zmiňujeme některé, zejména zobecněné uspořádané prostory, které nemají žádnou souvislou kompaktifikaci. Dále se zabýváme souvislými kompaktifikacemi prostoru racionálních čísel. Popisujeme konstrukci kompaktifikace tohoto prostoru analogickou ke konstrukci Čechovy-Stoneovy kompaktifikace a ukazujeme nutnou a postačující podmínku souvislosti a maximality takové kompaktifikace.

Klíčová slova: souvislý prostor, kompaktní prostor, konektifikace, kompaktifikace

Title: Connected compactifications

Author: Martina Vaváčková

Department: Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Supervisor: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc., Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Abstract: This thesis deals with connected compactifications of specific Tychonoff spaces. In particular, we are interested in the maximal elements with respect to the partial order over the set of all connected compactifications of a space. First we characterize maximal connected compactifications of spaces containing only finitely many components. We mention examples of spaces which have no connected compactification. Further we study connected compactifications of the rational numbers. We give a construction of a compactification analogical to the construction of the Čech-Stone compactification and we show a necessary and sufficient condition for its connectedness and maximality.

Keywords: connected space, compact space, connectification, compactification

Obsah

Úvod

V této práci se zabýváme studiem souvislých kompaktifikací Tichonovových prostorů. Je známo, že každý T_0-prostor lze vnořit na hustou část souvislého T_0-prostoru a každý T_1-prostor bez izolovaných bodů lze vnořit na hustou část souvislého T_1-prostoru (viz [10]). Problematika začíná být obtížná v okamžiku, kdy požadujeme vyšší oddělovací axiomy.

Každý Tichonovův prostor lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru. V celé práci uvažujeme pouze ty kompaktní prostory, které jsou zároveň Hausdorffovy. Věnujeme se především charakterizaci maximálních souvislých kompaktifikací některých prostorů vzhledem k zavedené relaci částečného uspořádání.

V první kapitole zavádíme základní pojmy, s nimiž budeme pracovat, a zmiňujeme některá důležitá tvrzení. Práce se tak stává přístupnou i čtenáři s minimálními znalostmi v této oblasti. Pojmy, které nedefinujeme, lze najít v knize [3].

Druhá kapitola je rozdělena na pět částí. V první části zavádíme na množině všech kompaktifikací daného Tichonovova prostoru relaci částečného uspořádání. Ve druhé a třetí části se věnujeme prostorům s konečně mnoha komponentami – ukazujeme nutnou podmínku existence souvislé kompaktifikace těchto prostorů a charakterizujeme maximální prvky při zavedeném uspořádání. Ve čtvrté části rozebíráme Pelantův důkaz neexistence souvislé kompaktifikace nespočetného podprostoru Sorgenfreyovy přímky. Poslední část je věnována studiu souvislých kompaktifikací prostoru racionálních čísel. Nejprve uvádíme konstrukci souvislé kompaktifikace, založenou na principu konstrukce Čechovy-Stoneovy kompaktifikace. Poté ukazujeme nutnou a postačující podmínku souvislosti a na příkladu ilustrujeme, že tuto podmínku nelze zesílit. Na závěr formulujeme větu shrnující dosažené poznatky.

Na konci práce lze nalézt seznam použitého značení.

Kapitola 1

Základní pojmy

Předmětem této kapitoly je zavedení základních pojmů, s nimiž budeme dále pracovat. Některá tvrzení zde uvádíme bez důkazu – jejich důkazy lze najít v knize [3].

Definice. *Topologický prostor* je dvojice $(X, \mathcal{O})$, kde X je množina a $\mathcal{O}$ je soubor podmnožin X splňující následující podmínky:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,

(ii) jestliže $A, B \in \mathcal{O}$, pak také $A \cap B \in \mathcal{O}$,

(iii) jestliže $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$, pak $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$.

Soubor $\mathcal{O}$ se nazývá *topologie* na X, jeho prvky se nazývají *otevřené množiny*.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathcal{O}')$ jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ nazveme *spojitým zobrazením*, jestliže pro každou $U \in \mathcal{O}'$ je $f^{-1}[U] \in \mathcal{O}$.

1.1 Diagonální součin souboru zobrazení

Definice. Nechť $(X, \mathcal{O})$ je topologický prostor, $\{(X_\alpha, \mathcal{O}_\alpha);\ \alpha \in A\}$ soubor topologických prostorů a $\{f_\alpha\colon X \to X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ soubor zobrazení. Řekneme, že topologie $\mathcal{O}$ je *projektivně generovaná* souborem $\{f_\alpha;\ \alpha \in A\}$, jestliže $\mathcal{O}$ je nejhrubší topologie na X taková, že $f_\alpha\colon (X, \mathcal{O}) \to (X_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$ je spojité pro každé $\alpha \in A$.

Definice. Nechť $\{X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ je soubor množin. Množinu

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f\colon A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha;\ (\forall \alpha \in A)\, f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

nazveme *kartézským součinem* tohoto souboru. Dále definujme *α-tou projekci* $\pi_\alpha\colon X \twoheadrightarrow X_\alpha$ předpisem $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

Místo $f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ budeme často psát $\langle f(\alpha);\ \alpha \in A\rangle$. Pokud $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, budeme pro $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ používat také označení $X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2}$. Jestliže $X_\alpha = Y$ pro všechna $\alpha \in A$, budeme místo $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ psát jen Y^A.

Definice. Nechť $\{(X_\alpha, \mathcal{O}_\alpha);\ \alpha \in A\}$ je soubor topologických prostorů. *Součinem* tohoto souboru rozumíme prostor $(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{O})$, jehož topologie $\mathcal{O}$ je projektivně generovaná souborem projekcí $\{\pi_\alpha;\ \alpha \in A\}$.

V situacích, kdy nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo $(X, \mathcal{O})$ psát zpravidla pouze X. Napíšeme-li $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, automaticky předpokládáme, že tento prostor je vybaven topologií z předchozí definice.

Definice. Nechť X je topologický prostor, $\{X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ soubor topologických prostorů a $\{f_\alpha\colon X \to X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ soubor zobrazení. Zobrazení

$$\mathop{\triangle}_{\alpha\in A} f_\alpha\colon\ X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha,$$

které je definováno předpisem $(\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha)(x) = \langle f_\alpha(x);\ \alpha \in A\rangle$, nazveme *diagonálním součinem* souboru $\{f_\alpha;\ \alpha \in A\}$.

Místo $\triangle_{f\in\mathcal{F}} f$ budeme někdy psát jen $\triangle\mathcal{F}$. V případě, že $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, budeme místo $\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha$ psát $f_{\alpha_1} \triangle f_{\alpha_2}$.

Definice. Nechť X je topologický prostor, $\{X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ soubor topologických prostorů a $\mathcal{F} = \{f_\alpha\colon X \to X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ soubor zobrazení. Řekneme, že soubor $\mathcal{F}$ *odděluje body*, jestliže pro každé dva body $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje $\alpha \in A$ takové, že $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Řekneme, že soubor $\mathcal{F}$ *odděluje body a uzavřené množiny*, jestliže pro každý bod $x \in X$ a každou uzavřenou množinu $C \subseteq X$, $x \notin C$, existuje $\alpha \in A$ takové, že $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha[C]}^{X_\alpha}$.

Následující lemma bude mít pro naše účely zásadní význam, a proto jej uvedeme včetně důkazu.

Lemma 1.1.1. (O vnoření) *Nechť X je topologický prostor, $\{X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ soubor topologických prostorů a $\{f_\alpha\colon X \to X_\alpha;\ \alpha \in A\}$ soubor spojitých zobrazení. Jestliže soubor $\{f_\alpha;\ \alpha \in A\}$ odděluje body a současně odděluje body a uzavřené množiny, pak $\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha\colon X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ je vnoření.*

Důkaz. Zobrazení $\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha$ je součinem spojitých zobrazení, a tedy je spojité. Jelikož soubor $\{f_\alpha;\ \alpha \in A\}$ odděluje body, je $\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha$ prosté. Označme

$$Y = \Big(\mathop{\triangle}_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)[X] \subseteq \prod_{\alpha\in A} X_\alpha.$$

Je třeba ukázat, že $(\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha)^{-1}\colon Y \to X$ je spojité zobrazení. Buď $x \in X$, $V \subseteq X$ otevřená, $x \in V$. Pak $X\backslash V$ je uzavřená a $x \notin X\backslash V$. Protože soubor $\{f_\alpha;\ \alpha \in A\}$ odděluje body a uzavřené množiny, existuje $\alpha_0 \in A$ takové, že $f_{\alpha_0}(x) \notin \overline{f_{\alpha_0}[X\backslash V]}^X$. Položme

$$U = \prod_{\alpha\in A\backslash\{\alpha_0\}} X_\alpha \times \Big(X_{\alpha_0} \backslash \overline{f_{\alpha_0}[X\backslash V]}^X\Big).$$

Tedy U je otevřená v $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ a $U \cap Y$ je otevřená v Y. Přitom $(\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha)^{-1}[U \cap Y] \subseteq V$, tedy $\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha$ je vskutku vnoření. □

1.2 Kompaktifikace

Definice. Topologický prostor se nazývá *Tichonovův*, jestliže je úplně regulární a Hausdorffův.

Tvrzení 1.2.1. *Podprostor Tichonovova prostoru je Tichonovův, součin Tichonovových prostorů je Tichonovův.*

Definice. Topologický prostor X je *kompaktní*, jestliže je Hausdorffův a z každého otevřeného pokrytí X lze vybrat konečné podpokrytí.

Tvrzení 1.2.2. *Každý uzavřený podprostor kompaktního prostoru je kompaktní.*

Věta 1.2.3. (Tichonov) *Součin kompaktních prostorů je kompaktní.*

Následující ekvivalence dává do souvislosti dvě předchozí definice, a osvětluje tak význam studia Tichonovových prostorů.

Věta 1.2.4. *Topologický prostor je Tichonovův, právě když jej lze vnořit do kompaktního prostoru.*

Definice. Nechť X je Tichonovův prostor. *Kompaktifikací* prostoru X rozumíme kompaktní prostor bX spolu s identickým vnořením $id\colon X \hookrightarrow bX$ takovým, že $id[X]$ je hustá podmnožina bX.

Různých kompaktifikací jednoho prostoru může být celá řada, avšak mezi všemi je pro nás význačná ta následující.

Definice. Kompaktifikaci prostoru X nazveme *Čechovou-Stoneovou kompaktifikací* (a značíme βX), jestliže ke každé spojité funkci $f\colon X \to [0,1]$ existuje spojitá funkce $\tilde{f}\colon \beta X \to [0,1]$ taková, že $\tilde{f}$ rozšiřuje f.

Každý Tichonovův prostor X má kompaktifikaci βX. Tuto větu zde dokážeme, neboť konstrukci, která se v důkazu objevuje, později využijeme.

Věta 1.2.5. *Nechť X je Tichonovův prostor. Pak X má kompaktifikaci βX, přičemž tato kompaktifikace je až na homeomorfismus jediná.*

Důkaz. Označme $\mathcal{C}(X) = \{f\colon X \to [0,1];\ f \text{ spojitá}\}$ a položme

$$\varphi = \triangle \mathcal{C}(X)\colon X \to [0,1]^{\mathcal{C}(X)}.$$

Protože X je Tichonovův, odděluje soubor $\mathcal{C}(X)$ jak body, tak body a uzavřené množiny, a dle lemmatu 1.1.1 o vnoření je φ vnoření. Je-li tedy $Y = \varphi[X] \subseteq [0,1]^{\mathcal{C}(X)}$, pak Y je homeomorfní s X. Buď nyní

$$\beta Y = \overline{Y}^{[0,1]^{\mathcal{C}(X)}}.$$

Zřejmě je βY kompaktní a Y je hustá podmnožina βY.

Uvažujme spojité zobrazení $h\colon Y \to [0,1]$. Pak $g = h \circ \varphi\colon X \to [0,1]$ je rovněž spojité, tedy $g \in \mathcal{C}(X)$. Označme $\pi_g\colon [0,1]^{\mathcal{C}(X)} \twoheadrightarrow [0,1]$ g-tou projekci, $\pi_g(\langle f(x);\ f \in \mathcal{C}(X)\rangle) = g(x)$, a položme $\tilde{h} = \pi_g|_{\beta Y}$. Ukážeme, že $\tilde{h}$ rozšiřuje h. Protože φ je vnoření, existuje ke každému $y \in Y$ právě jedno $x \in X$ takové, že $y = \varphi(x)$. Pro toto x je $g(x) = h \circ \phi(x) = h(y)$, ale také $g(x) = \pi_g(\varphi(x)) = \pi_g(y)$. Tedy pro každé $y \in Y$ je $h(y) = \pi_g(y)$ a $\tilde{h}$ vskutku spojitě rozšiřuje h.

Nyní ukážeme jednoznačnost. Nechť $K \supseteq X$ je kompaktní, X hustá v K, a nechť každé zobrazení $f \in \mathcal{C}(X)$ má spojité rozšíření $\tilde{f}$ na K. Chceme ukázat, že K je homeomorfní s βX. Položme

$$\tilde{\varphi} = \mathop{\triangle}_{f \in \mathcal{C}(X)} \tilde{f}\colon K \to [0,1]^{\mathcal{C}(X)}.$$

Pak $\tilde{\varphi}\colon K \to \tilde{\varphi}[K]$ je homeomorfismus a platí $\tilde{\varphi} \supseteq \varphi$, $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$, tedy $\tilde{\varphi}[X] = \varphi[X] \subseteq \tilde{\varphi}[K]$. Jelikož $\tilde{\varphi}[K]$ je uzavřená v $[0,1]^{\mathcal{C}(X)}$, je rovněž kompaktní. Navíc platí

$$\tilde{\varphi}[K] \;=\; \overline{\tilde{\varphi}[X]}^{[0,1]^{\mathcal{C}(X)}} = \;\overline{\varphi[K]}^{[0,1]^{\mathcal{C}(X)}} = \;\beta Y.$$

Zobrazení $\tilde{\varphi}\colon K \to \beta Y$ je tedy homeomorfismus. $\square$

Na závěr uvedeme pro úplnost několik definic týkajících se souvislosti.

Definice. Řekneme, že topologický prostor X je *souvislý*, jestliže je neprázdný a jedinými jeho obojetnými (tj. současně otevřenými a uzavřenými) podmnožinami jsou $\emptyset$ a X.

Tvrzení 1.2.6. *Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý.*

Definice. Nechť $(X, \mathcal{O})$ je topologický prostor, $Y \subseteq X$. Množinu Y nazveme *komponentou* prostoru X, jestliže Y je maximální souvislá podmnožina X při relaci $\subseteq$.

Definice. Nechť X je topologický prostor, $x \in X$. Řekneme, že bod x je *izolovaný*, jestliže $\{x\}$ je otevřená množina v X.

Kapitola 2

Souvislé kompaktifikace

V této kapitole se budeme zabývat souvislými kompaktifikacemi vybraných Tichonovových prostorů. Na množině všech souvislých kompaktifikací daného prostoru zavedeme uspořádání a pokusíme se charakterizovat jeho maximální prvky.

Nejprve zmíníme prostory s izolovanými body a rozebereme prostory s konečně mnoha komponentami. Poté uvedeme důkaz neexistence souvislé, a tedy i maximální souvislé kompaktifikace nespočetného podprostoru Sorgenfreyovy přímky. Nakonec se budeme věnovat studiu souvislých kompaktifikací prostoru racionálních čísel.

Existenci – nikoli však maximalitě – souvislých kompaktifikací některých dalších prostorů se věnuje práce [4], kapitola 2.

2.1 Porovnávání kompaktifikací

Buď X Tichonovův prostor, bX jeho libovolná kompaktifikace. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $X \subseteq bX$. Položme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X) &= \{f\colon X \to [0,1];\ f \text{ spojitá}\}, \\ \mathsf{E}(bX) &= \{f\colon X \to [0,1];\ \exists \tilde{f}\colon bX \to [0,1],\ \tilde{f} \text{ spojitá},\ f = \tilde{f}|_X\}. \end{aligned}$$

Každé zobrazení z X do $[0,1]$, které lze spojitě rozšířit na βX, je už nutně spojité na X. Vždy proto platí inkluze $\mathsf{E}(bX) \subseteq \mathcal{C}(X)$. Podle věty 1.2.5 je $\mathsf{E}(bX) = \mathcal{C}(X)$, právě když $bX = \beta X$. Kompaktifikace βX je tedy „největší“ v tom smyslu, že na ni lze rozšířit nejvíce spojitých zobrazení.

Definice. Nechť X je Tichonovův prostor a bX, cX dvě jeho kompaktifikace. Pak píšeme $bX \leq cX$, pokud platí, že identické zobrazení $i\colon X \to X$ lze spojitě rozšířit na $\tilde{i}\colon cX \to bX$.

Tímto způsobem definujeme na množině všech kompaktifikací prostoru X relaci částečného uspořádání. Je-li $bX \leq cX$ a $f \in \mathsf{E}(bX)$, pak také $f \in \mathsf{E}(cX)$. Zobrazení $\tilde{f} \circ \tilde{i}\colon cX \to [0,1]$, kde $\tilde{f}$ spojitě rozšiřuje funkci f na bX, je totiž složením dvou spojitých zobrazení, přičemž pro $x \in X$ platí $(\tilde{f} \circ \tilde{i})(x) = f(x)$. Zobrazení $\tilde{f} \circ \tilde{i}$ je tedy spojitým rozšířením f na cX.

Definice. Maximální, respektive největší prvek množiny všech (souvislých) kompaktifikací prostoru X vzhledem k relaci $\leq$ nazveme *maximální*, respektive *největší* (souvislou) kompaktifikací X.

Existenci (a konstrukci) největší kompaktifikace jsme ukázali ve větě 1.2.5. Tato věta však nehovoří o největší souvislé kompaktifikaci – ta samozřejmě vůbec existovat nemusí. Ukážeme si prostory, které mají několik maximálních souvislých kompaktifikací, ale i prostory, které žádnou souvislou kompaktifikaci nemají.

2.2 Souvislé prostory

Čechova-Stoneova kompaktifikace βX prostoru X je dle předchozího odstavce největší kompaktifikací. Je-li prostor X souvislý, pak je βX rovněž souvislá, a tedy je to zároveň největší souvislá kompaktifikace X. Následující věta ukazuje opačnou implikaci.

Věta 2.2.1. *Nechť X je Tichonovův prostor, jehož kompaktifikace βX je souvislá. Pak je X rovněž souvislý.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Jestliže X není souvislý, pak existují otevřené množiny $U, V \subseteq X$ splňující $U \cup V = X$ a $U \cap V = \emptyset$. Definujme zobrazení $f\colon X \to [0,1]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in U, \\ 1 & \text{pro } x \in V. \end{cases}$$

Zobrazení f je zřejmě spojité, a tedy existuje jeho spojité rozšíření $\tilde{f}\colon \beta X \to [0,1]$. Je-li $x \in \overline{U}^{\beta X}$, pak jistě $f(x) = 0$. Podobně pro $x \in \overline{V}^{\beta X}$ je $f(x) = 1$. Ovšem $\beta X = \overline{U}^{\beta X} \cup \overline{V}^{\beta X}$, kde $\overline{U}^{\beta X} = \tilde{f}^{-1}(0)$, $\overline{V}^{\beta X} = \tilde{f}^{-1}(1)$. Tedy βX je sjednocením dvou disjunktních uzavřených množin, neboli βX není souvislá. □

2.3 Prostory s konečně mnoha komponentami, izolované body

Jestliže prostor X není souvislý, pak podle věty 2.2.1 není ani βX souvislá. V takové situaci má proto smysl se zabývat hledáním maximálních souvislých kompaktifikací.

Je ihned vidět, že prostor obsahující izolované body žádnou souvislou kompaktifikaci mít nemůže.

Tvrzení 2.3.1. *Nechť X je Tichonovův prostor, který není souvislý. Pokud X obsahuje izolovaný bod, pak nemá žádnou souvislou kompaktifikaci.*

Důkaz. Buď $x \in X$ izolovaný bod, bX kompaktifikace X. Množiny $\{x\}$ a $X \setminus \{x\}$ jsou disjunktní neprázdné otevřené v X. Kdyby ovšem existoval bod $a \in \overline{\{x\}}^{bX} \cap \overline{X \setminus \{x\}}^{bX}$, znamenalo by to, že x se nachází v každém okolí bodu a. To je spor s tím, že bX je Hausdorffův. □

V následujících dvou tvrzeních rozebereme případ, kdy má prostor X jen konečně mnoho komponent.

Tvrzení 2.3.2. *Nechť X je Tichonovův prostor, který není souvislý a má pouze konečně mnoho komponent. Je-li alespoň jedna komponenta prostoru X kompaktní, pak X nemá žádnou souvislou kompaktifikaci.*

Důkaz. Buď bX libovolná kompaktifikace prostoru X, K jeho kompaktní komponenta. Všechny komponenty X jsou zřejmě uzavřené, tedy $X \backslash K$ je uzavřená jakožto sjednocení konečně mnoha uzavřených množin. Tedy K je obojetná v X. Pak je K kompaktní v bX a platí:

$$\begin{aligned}\overline{K}^{bX} \cap \overline{X \backslash K}^{bX} &= K \cap \overline{X \backslash K}^{bX} = K \cap X \cap \overline{X \backslash K}^{bX} = \\ &= K \cap \overline{X \backslash K}^{X} = K \cap (X \backslash K) = \emptyset.\end{aligned}$$

Tedy $\overline{K}^{bX}$ a $\overline{X \backslash K}^{bX}$ jsou disjunktní neprázdné uzavřené množiny, jejichž sjednocením je bX. Proto bX není souvislá. □

Má-li prostor X konečně mnoho komponent, z nichž žádná není kompaktní, můžeme „zkompaktifikovat“ každou zvlášť a poté ztotožnit některé body tak, abychom získali souvislou kompaktifikaci X. Na stejné myšlence založíme i konstrukci maximálních souvislých kompaktifikací. Tu popisuje následující věta.

Věta 2.3.3. *Nechť X je Tichonovův prostor, jenž má konečně mnoho komponent, z nichž žádná není kompaktní – označme je $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 2$. Pak maximální souvislou kompaktifikaci prostoru X získáme spojením $\beta X_1, \dots, \beta X_n$ do stromu takového, že pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, je $|X_i \cap X_j| = 0$ a $|\beta X_i \cap \beta X_j| \leq 1$.*

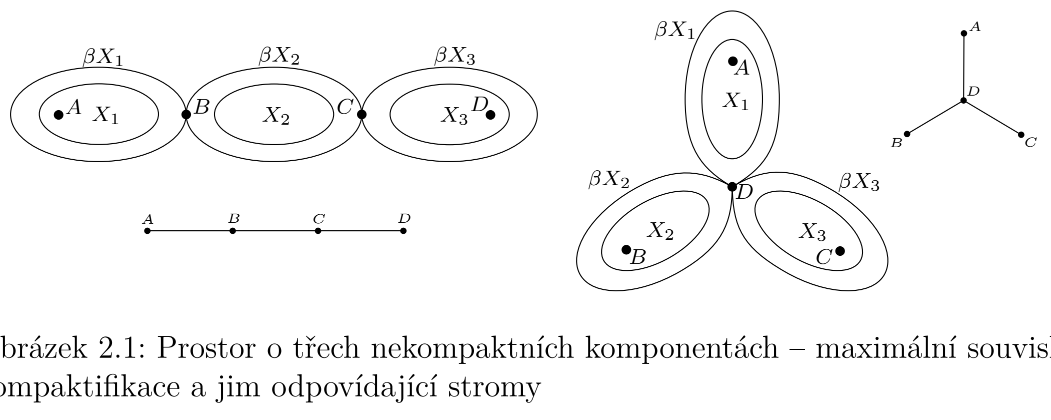
Poznámka. Stromem zde rozumíme souvislý graf bez kružnic,[1] v němž:

(i) vrcholy stupně s ($s \geq 2$) odpovídají společným bodům právě s prvků množiny $\{\beta X_1, \dots, \beta X_n\}$,

(ii) pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $|\beta X_j \cap (\bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}, i \neq j} \beta X_i)| = 1$, existuje právě jeden vrchol stupně 1, kterým nechť je libovolný bod v X_j,

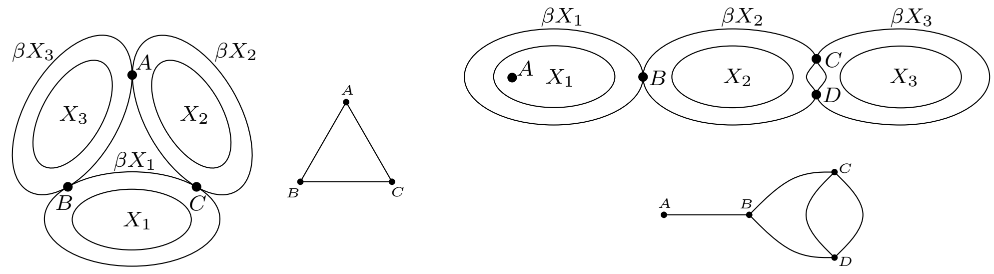
(iii) hrany jsou realizovány prvky množiny $\{\beta X_1, \dots, \beta X_n\}$, a to tak, že βX_j tvoří hranu mezi takovými dvěma vrcholy, jimž odpovídající body jsou v ní obsaženy.

Pro názornost uvedeme několik příkladů pro $n = 3$.



Obrázek 2.1: Prostor o třech nekompaktních komponentách – maximální souvislé kompaktifikace a jim odpovídající stromy

[1] Formální definice pojmů *graf*, *vrchol*, *hrana*, *kružnice*, *strom* či *stupeň vrcholu* zde neuvádíme. Lze je najít například v knize [7] v kapitolách 4 a 5.



Obrázek 2.2: Prostor o třech nekompaktních komponentách – příklady souvislých kompaktifikací, které nejsou maximální

Nyní již můžeme přejít k důkazu věty 2.3.3. Zabýváme se v něm pouze vrcholy definovanými v bodě (i). Vrcholy z bodu (ii) zavádíme pouze k tomu, abychom mohli hovořit o grafu.

Důkaz. Nechť má nejprve X dvě nekompaktní komponenty X_1, X_2. Pak $\beta X_1 \backslash X_1 \neq \emptyset$, $\beta X_2 \backslash X_2 \neq \emptyset$. Ztotožníme-li body $x_1 \in \beta X_1 \backslash X_1$ a $x_2 \in \beta X_2 \backslash X_2$, dostaneme kompaktifikaci $m_{x_1,x_2}X$ prostoru X takovou, že $m_{x_1,x_2}X = \beta X_1 \cup \beta X_2$, přičemž $|\beta X_1 \cap \beta X_2| = 1$. Jelikož X_1 a X_2 jsou souvislé, jsou také βX_1, βX_2 souvislé. Kompaktifikace $m_{x_1,x_2}X$ je tedy souvislá, neboť je sjednocením dvou souvislých množin βX_1 a βX_2, které mají neprázdný průnik. Kompaktifikace βX_1 a βX_2 byly maximální, tedy

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(m_{x_1,x_2}X) = \{f\colon X \to [0,1]; f \text{ spojitá}, \tilde{f}\colon \beta X_1 \cup \beta X_2 \to [0,1],\\ \tilde{f}|_X = f, \tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)\}.\end{aligned}$$

Kdykoli je bX maximální souvislá kompaktifikace X, pak $\mathsf{E}(bX) \subsetneq \mathcal{C}(X)$, a tedy nutně $\mathsf{E}(bX) \subseteq \mathsf{E}(m_{x_1,x_2}X)$ pro vhodná $x_i \in \beta X_i \backslash X_i$, $i \in \{1,2\}$.

Pro $n > 2$ postupujme indukcí. Buď X prostor, jenž má nekompaktní komponenty $X_1, \dots, X_n$. Nechť mX je maximální souvislá kompaktifikace prostoru $X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}$. Pak existují body $x \in mX \backslash (X_1 \cup \dots \cup X_{n-1})$ a $y \in \beta X_n \backslash X_n$. Jejich ztotožněním dostaneme kompaktifikaci $m'X = mX \cup \beta X_n$, přičemž $|mX \cap \beta X_n| = 1$. Protože mX a βX byly maximální souvislé kompaktifikace prostorů $X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}$ a X_n, je podle první části důkazu $m'X$ maximální souvislá kompaktifikace prostoru X. $\square$

2.4 Sorgenfreyova přímka

Definice. Množina $\mathbb{R}$ reálných čísel spolu s topologií danou bazí $\mathcal{S} = \{[a,b)\colon a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ se nazývá *Sorgenfreyova přímka*.

Protože každý otevřený interval se dá zapsat jako sjednocení polouzavřených, je takto definovaná topologie jemnější než standardní topologie na $\mathbb{R}$. Základní poznatky o Sorgenfreyově přímce jsou přehledně shrnuty v knize [2].

V této části uvedeme důkaz věty o neexistenci souvislé kompaktifikace Sorgenfreyovy přímky. Tuto větu poprvé dokázali Adam Emeryk a Władysław Kulpa roku 1977 v článku [2]. V roce 1983 uvedl Jan Pelant v článku [8] jiný přístup, který dokazuje obecnější tvrzení – žádný nespočetný podprostor Sorgenfreyovy přímky nemá souvislou kompaktifikaci.

My zde uvedeme právě výsledky článku Jana Pelanta. Původní důkaz doplníme o podrobnější vysvětlení některých pasáží.

Definice. Nechť $(X, <)$ je lineárně uspořádaná množina a $\mathcal{B} = \{(a, b);\, a, b \in X, a < b\}$. Pak $\mathcal{B}$ tvoří bázi nějaké topologie na X – označme ji $\mathcal{O}_<$. Prostor $(X, \mathcal{O}_<)$ se nazývá *lineárně uspořádaný prostor*.

Nechť $(X, \mathcal{O}_<)$ je lineárně uspořádaný prostor, $M \subseteq X$ a $M^+, M^- \subseteq M$. Na M definujme topologii $\mathcal{O}(M^+, M^-)$, jejíž subbázi tvoří následující množiny:

(i) $(x, \rightarrow) \cap M$, $(\leftarrow, x) \cap M$ pro každé $x \in X$,

(ii) $[x, \rightarrow)$ pro každé $x \in M^+$,

(iii) $(\leftarrow, x]$ pro každé $x \in M^-$.

Pro $x \in M^+$ je tedy množina $[x, \rightarrow) = M \setminus (\leftarrow, x)$ obojetná a podobně pro $x \in M^-$ je množina $(\leftarrow, x] = M \setminus (x, \rightarrow)$ obojetná.

Prostor $(M, \mathcal{O}(M^+, M^-))$ je příkladem zobecněného uspořádaného prostoru. Více o těchto prostorech se lze dočíst například v [1] či [6].

V následujícím textu se vyskytnou výrazy typu „M-obojetná množina“, „K-okolí bodu“, „X-izolovaný bod množiny“. Tyto výrazy zdůrazňují, v jakém topologickém prostoru se pohybujeme. Budeme je používat všude tam, kde není z kontextu zřejmé, kterou topologii uvažujeme. Dále budeme užívat značení $\min X = 0$, $\max X = 1$ a místo $(M, \mathcal{O}(M^+, M^-))$ budeme psát často jen M.

Lemma 2.4.1. *Nechť X je kompaktní, souvislý, lineárně uspořádaný prostor, $M \subseteq X$ a $M^+ \cup M^- \subseteq M$. Nechť K je souvislá kompaktifikace $(M, \mathcal{O}(M^+, M^-))$. Pak pro každou neprázdnou obojetnou množinu $D \subseteq M$ existují body $a \in \overline{D}^X$, $b \in \overline{M \setminus D}^X$ a $p \in K \setminus M$ takové, že*

(*) *pro všechna X-okolí V_a, V_b bodů a, b platí:*

$$p \in \overline{V_a \cap D}^K \cap \overline{V_b \cap (M \setminus D)}^K.$$

Jestliže navíc $a \in M^-$, pak $a \neq \sup D$, a jestliže $b \in M^-$, pak $b \neq \sup M \setminus D$.

Důkaz. Buď $D \subseteq M$ neprázdná obojetná množina. Protože K je souvislá, existuje $p \in \overline{D}^K \cap \overline{M \setminus D}^K$. Položme $a = \sup\{x \in X;\, p \notin \overline{[0, x] \cap D}^K\}$. Je-li $a \in (0, 1)$, pak pro každé X-okolí V_a bodu a existují body $y, z, z_0 \in X$ takové, že $y < a < z < z_0$ a $(y, z_0) \in V_a$. Přitom $p \in \overline{[0, z] \cap D}^K = \overline{[0, y] \cap D}^K \cup \overline{(y, z] \cap D}^K$. Ale $p \notin \overline{[0, y] \cap D}^K$, tedy $p \in \overline{(y, z] \cap D}^K \subseteq \overline{V_a \cap D}^K$. Protože $\overline{(y, z_0) \cap D}^K \neq \emptyset$, je také $(y, z_0) \cap D \neq \emptyset$. Tedy každé otevřené X-okolí bodu a obsahuje nějaký bod z D, neboli $a \in \overline{D}^X$. Je-li $a = 0$, pak $p \in \overline{[0, x] \cap D}^K$ pro každé $x > 0$, tedy pro libovolné okolí V_a bodu a zřejmě platí $p \in \overline{V_a \cap D}^K$. Navíc je podobně jako v předchozím případě $[0, x] \cap D \neq \emptyset$, tedy vskutku $a \in \overline{D}^X$. Je-li konečně $a = 1$, pak pro každé $x < 1$ získáme $p \in \overline{[x, 1] \cap D}^K$, tedy opět $p \in \overline{V_a \cap D}^K$ a $[x, 1] \cap D \neq \emptyset$ implikuje $a \in \overline{D}^X$.

Podobně můžeme definovat $b = \sup\{x \in X;\, p \notin \overline{[0, x] \cap (M \setminus D)}^K\}$. Analogicky se ukáže, že pro každé X-okolí V_b bodu b je $p \in \overline{V_b \cap (M \setminus D)}^K$ a že $b \in \overline{M \setminus D}^X$.

Nyní pro spor předpokládejme, že $a \in M^-$ a $a = \sup D$. Jelikož je D uzavřená, máme $a \in D$. Dále $a \in M^-$, tedy $V_a \cap D$ tvoří lokální bázi x v M (pro každé U

M-okolí a existuje V_a X-okolí a takové, že $V \cap D \subseteq U$). Tedy $p \in \overline{V_a \cap D}^K \subseteq \overline{U}^K$, neboli $a \in \overline{\{p\}}^K$. Ovšem $a \in M$, zatímco $p \in K \backslash M$, tedy K není Hausdorffův – spor. Pro $b \in M^-$ dostaneme analogicky $b \neq \sup M \backslash D$. □

Lemma 2.4.2. *Nechť X, M, M^+, M^- a K jsou jako v lemmatu 2.4.1. Nechť $\mathcal{D}$ je množina všech dvojic $\{a, b\}$, jež pro nějakou obojetnou $D \subseteq M$ a nějaké $p \in K \backslash M$ splňují vztah (*). Pak pro každé $x \in M^-$ a každé $y \in [0, x)$ existuje $t \in (y, x)$ takové, že kdykoli $\{a, b\} \in \mathcal{D}$ a $a \in (t, x)$, pak $b \in [y, x)$.*

Důkaz. Položme $G_{x_1,x_2} = \bigcup\{G \subseteq K; G$ otevřená, $G \cap M \subseteq [x_1, x_2]\}$. Nechť $x \in M^-$, $y \in [0, x)$. Množina $[0, y] \cup (x, 1]$ je M-uzavřená, tedy $x \notin \overline{[0, y] \cup (x, 1]}^K$. Protože K je kompaktní, je nutně i regulární. Proto existují K-otevřené množiny U, V takové, že $x \in U$, $\overline{[0, y] \cup (x, 1]}^K \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Pak zřejmě platí $U \cap M \subseteq (y, x]$. Existuje tedy $t \in (y, x)$ splňující vztah $(t, x] \cap M \subseteq U$. Pak rovněž $\overline{(t, x] \cap M}^K \subseteq U \subseteq G_{y,x}$. Jestliže $\{a, b\} \in \mathcal{D}$ a $a \in (t, x)$, pak příslušné p (určené podmínkou (*)) je prvkem $\overline{(t, x] \cap M}^K$. To znamená, že $G_{y,x}$ je otevřené K-okolí bodu p. Tedy $b \in [y, x]$, neboť jinak bychom našli X-okolí b disjunktní s $G_{y,x}$. Kdyby $b = x$, muselo by platit $p \in \overline{V_b \cap M}^K$. Ovšem množiny $V_b \cap M$ tvoří lokální bázi x v M a K je Hausdorffův, tedy nutně $b \neq x$. □

Než zformulujeme klíčovou větu této části, zmíníme ještě několik pojmů, které pro nás budou v dalším textu užitečné.

Definice. Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{A}$ soubor jeho podmnožin. Řekneme, že soubor $\mathcal{A}$ je *π-báze* prostoru X, jestliže všechny prvky $\mathcal{A}$ jsou otevřené neprázdné množiny a ke každé otevřené množině $G \subseteq X$ existuje $A \in \mathcal{A}$ splňující $A \subseteq G$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{O}_<)$ je lineárně uspořádaný prostor, $A \subseteq X$. Bod $x \in A$ se nazývá *zprava izolovaný* v A, jestliže existuje jeho okolí U v X takové, že $U \cap A \subseteq (\leftarrow, x]$. Obdobně se definuje *zleva izolovaný* bod.

Definice. Nechť X je množina a $\mathcal{F}$ soubor jejích podmnožin, který splňuje následující podmínky:

(i) $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(ii) jestliže $A, B \in \mathcal{F}$, pak také $A \cap B \in \mathcal{F}$,

(iii) jestliže $A \in \mathcal{F}$ a $A \subseteq B \subseteq X$, pak $B \in \mathcal{F}$.

Pak $\mathcal{F}$ je *filtr* na množině X. Je-li navíc pro každé $A \subseteq X$ buď $A \in \mathcal{U}$, nebo $X \backslash A \in \mathcal{U}$, pak je $\mathcal{F}$ *ultrafiltr* na X.

Definice. Nechť $\mathcal{F}$ je filtr na X a $f \colon X \to Y$ je zobrazení množin. Pak soubor $\mathcal{F}_f = \{A \subseteq Y; f^{-1}[A] \in \mathcal{F}\}$ nazveme *obrazem* $\mathcal{F}$.

Lehce se ověří, že je-li $\mathcal{F}$ (ultra)filtr na X, pak $\mathcal{F}_f$ je (ultra)filtr na Y.

Definice. Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{F}$ je filtr na X a $x \in X$. Řekneme, že x je *limitou* filtru $\mathcal{F}$, jestliže $\mathcal{F}$ obsahuje každé okolí bodu x.

Tvrzení 2.4.3. *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Pak každý ultrafiltr na X má právě jednu limitu.*

Důkaz. Buď $\mathcal{F}$ ultrafiltr na X. Kdyby $\mathcal{F}$ neměl žádnou limitu, pak by pro každé $x \in X$ existovala otevřená množina $U_x \subseteq X$ taková, že $x \in U_x \notin \mathcal{F}$. Tedy $\{U_x\}_{x\in X}$ je pokrytí X. Protože X je kompaktní, existují body $x_i \in X$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, pro něž platí $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Pak $\emptyset = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = \bigcap_{i=1}^n X\setminus U_{x_i}$. Jelikož $\mathcal{F}$ je ultrafiltr, pro každé $i \in \{1,\ldots,n\}$ platí $X\setminus U_{x_i} \in \mathcal{F}$. Tedy také $\emptyset \in \mathcal{F}$, což nelze.

Předpokládejme nyní, že $x \neq x'$ jsou limity ultrafiltru $\mathcal{F}$. Protože X je Hausdorffův, existují dvě disjunktní otevřené množiny U, U' takové, že $x \in U$, $x' \in U'$. Jenže $U, U' \in \mathcal{F}$ a $U \cap U' = \emptyset$, tedy opět máme spor. □

Platí i opačná implikace – má-li každý ultrafiltr na X právě jednu limitu, je X kompaktní. Její důkaz lze nalézt v [5].

Definice. Ultrafiltr na množině X je *uniformní*, mají-li všechny jeho prvky mohutnost rovnou $|X|$.

Definice. Topologický prostor X je *α-Lindelöfův*, jestliže je regulární a z každého otevřeného pokrytí X lze vybrat podpokrytí o mohutnosti nejvýše α.

Věta 2.4.4. (Pelant) *Nechť X je kompaktní, souvislý, lineárně uspořádaný prostor, v němž existuje π-báze $\mathcal{B}$ splňující $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ pro daný kardinál κ. Nechť $M \subseteq X$, $M^+ \cup M^- \subseteq M$. Jestliže $|M^+ \cup M^-| > \kappa$, pak prostor $(M, \mathcal{O}(M^+, M^-))$ nemá žádnou souvislou kompaktifikaci.*

Důkaz. Je-li $x \in M^+ \cap M^-$, pak $\{x\} = (\leftarrow, x] \cap [x, \rightarrow)$, neboli $\{x\}$ je obojetná množina. Podle tvrzení 2.3.1 tedy nemá M žádnou souvislou kompaktifikaci. Můžeme proto předpokládat, že $M^+ \cap M^- = \emptyset$. Dále předpokládejme, že $|M^-| > \kappa$ (případ $|M^+| > \kappa$ je analogický). Tvrzení ukážeme sporem. Strategie: za předpokladu, že máme souvislou kompaktifikaci M, zapíšeme M^- jako sjednocení tří množin o mohutnosti menší než κ.

Nechť K je souvislá kompaktifikace M a $\mathcal{D}$ je množina definovaná v lemmatu 2.4.2. Položme

$$\begin{aligned} A^- = \{x \in M^-; (\exists z_x \in (x,1])\, (\forall d \in M^- \cap (x, z_x)) \\ (\exists \{a,b\} \in \mathcal{D})\; x < a < d \leq b\}. \end{aligned}$$

1. Je-li $x \in M^- \setminus \bigcup \mathcal{U}$ a x není v M^- zprava X-izolované, pak $x \in A^-$.

Předpokládejme, že $x \notin A^-$. Pak existuje transfinitní posloupnost $\{d_\iota\}_{\iota<\lambda}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) pro všechna $\iota < \lambda$ je $d_\iota \in M^-$,

(ii) $\{d_\iota\}_{\iota<\lambda}$ je klesající a $x = \inf\{d_\iota\}_{\iota<\lambda}$,

(iii) λ je limitní ordinál, $\lambda \leq \kappa$,

(iv) pro všechny dvojice $\{a,b\} \in \mathcal{D}$ a libovolné $\iota < \lambda$ je $(x, d_\iota) \cap \{a,b\} = \emptyset$ nebo $[d_\iota, 1) \cap \{a,b\} = \emptyset$.

Podmínky (i) a (ii) máme zaručeny tím, že x není v M^- zprava X-izolované. Podmínku (iii) dává existence π-báze $\mathcal{B}$ o mohutnosti nejvýše κ. Podmínku (iv) získáme ze skutečnosti $x \notin A$. Ta říká, že ke každému $z \in (x,1]$ existuje $d \in M^- \cap (x,z)$ takové, že pro každou dvojici $\{a,b\} \in \mathcal{D}$ jsou buď a i b větší než d, nebo jsou obě menší než d. Stačí tedy volit vždy $d_\iota = d$.

Protože libovolné d_ι leží v M^- a $d_\iota \neq x$, je množina $(x, d_\iota] \cap M$ obojetná. Použijeme-li lemma 2.4.1, získáme body $a_\iota \in [x, d_\iota]$, $b_\iota \in X \setminus (x, d_\iota)$ a $p_\iota \in K \setminus M$ splňující podmínku (*). Tedy $\{a_\iota, b_\iota\} \in \mathcal{D}$. Protože $x \notin \bigcup \mathcal{U}$, platí $a_\iota \neq x$. Dle druhé části lemmatu 2.4.1 je $a_\iota \neq d_\iota$, neboť $d_\iota = \sup((x, d_\iota] \cap M)$. Tedy $a_\iota \in (x, d_\iota)$. Podle (iv) je $[d_\iota, 1] \cap \{a_\iota, b_\iota\} = \emptyset$, tedy $b_\iota \in [0, x]$ pro každé $\iota < \lambda$. Lemma 2.4.2 spolu se skutečností, že $a_\iota \notin [0, x)$, dává pro $y = 0$, $a = b_\iota$ a $b = a_\iota$ existenci bodu $r \in (0, x)$, pro který $[r, x] \cap \{b_\iota;\ \iota < \lambda\} = \emptyset$.

Nechť $\mathcal{U}$ je uniformní ultrafiltr na množině λ. Definujme zobrazení $f\colon \lambda \to X$ předpisem $f(\iota) = b_\iota$ a zobrazení $g\colon \lambda \to K$ předpisem $g(\iota) = p_\iota$. Pak $\mathcal{U}_f$ a $\mathcal{U}_g$ jsou ultrafiltry postupně na X a K. Protože X a K jsou kompaktní, existují dle tvrzení 2.4.3 body $m \in X$ a $p \in K$, které jsou limitami postupně $\mathcal{U}_f$ a $\mathcal{U}_g$. Přitom zřejmě $m \in [0, r]$. Buďte nyní U_m a U_x X-uzavřená X-okolí bodů m a x taková, že $U_m \subseteq [0, x]$ a $U_m \cap U_x = \emptyset$. Protože m je limitou ultrafiltru $\mathcal{U}_f$, platí $f^{-1}[U_m] \in \mathcal{U}$. Z uniformity $\mathcal{U}$ pak plyne $|\{\iota < \lambda;\ b_\iota \in U_m\}| = |\lambda|$. Dále je $a_\iota \in (x, d_\iota)$ pro každé $\iota < \lambda$, tedy položíme-li $U = \{\iota < \lambda;\ a_\iota \in U_x,\ b_\iota \in U_m\}$, pak $|U| = |\lambda|$ a $U \in \mathcal{U}$ (totiž $|\lambda \setminus U| < |\lambda|$). To znamená, že

$$\{p_\iota;\ \iota \in U\} \cup \{p\} \subseteq \overline{U_m \cap (M \setminus (x, d_0])}^K \cap \overline{U_x \cap (M \cap (x, d_0])}^K.$$

Pak je ovšem podle lemmatu 2.4.1 $p \in K \setminus M$ a $\{m, x\} \in \mathcal{D}$, což je spor s předpokladem, že $x \notin \mathcal{D}$. Proto $x \in A^-$.

2. Platí $|A^-| \leq \kappa$.

Předpokládejme, že $|A^-| > \kappa$. Protože $|\mathcal{B}| \leq \kappa$, existuje $H \subseteq A^-$, $|H| > \kappa$, a $P \in \mathcal{B}$ taková, že pro každé $x \in H$ je $P \subseteq (x, z_x)$. Jelikož M^- je κ-Lindelöfův prostor a $|H| > \kappa$, existuje zároveň $h \in M^-$ takové, že $h = \sup(H \cap [0, h))$. Dle lemmatu 2.4.2 navíc existuje $t \in (0, h)$ takové, že kdykoli $\{a, b\} \in \mathcal{D}$ a $a \in (t, h)$, pak $b \in [0, h)$. Z definice h existuje $h' \in H \cap [0, h)$ splňující $t < h' < h$. Protože zřejmě $h \leq \inf P$, platí $h' < h \leq \inf P < \sup P \leq z_{h'}$. Jenže $h' \in A^-$, tedy existuje $\{a, b\} \in \mathcal{D}$, pro niž $h' < a < h \leq b$. To je spor s lemmatem 2.4.2, neboť $a \in (t, h)$ a $b \notin [0, h)$.

3. Platí $|\bigcup \mathcal{U} \cap M^-| \leq \kappa$.

Předpokládejme, že $|\bigcup \mathcal{U} \cap M^-| > \kappa$. Pak existují $V \subseteq M^-$, $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ a $Q \in \mathcal{B}$ takové, že platí:

(i) $|V| > \kappa$,

(ii) $\mathcal{D}' = \{\{x, b_x\};\ x \in V\}$,

(iii) pro každé $x \in V$ je $Q \subseteq (\min\{x, b_x\}, \max\{x, b_x\})$.

Podmínky (i) a (ii) dává předpoklad $|\bigcup \mathcal{U} \cap M^-| > \kappa$ a podmínku (iii) lze zajistit, protože $|\mathcal{B}| \leq \kappa$.

Protože M^- je κ-Lindelöfův prostor a $|V| > \kappa$, existuje $v \in M^-$ takové, že $v = \sup(V \cap [0, v))$. Vezměme $y \in [0, v)$ splňující $Q \setminus [y, v) \neq \emptyset$. Dle lemmatu 2.4.2 pak existuje $t \in (y, v)$ takové, že kdykoli $\{a, b\} \in \mathcal{D}$ a $a \in (t, v)$, pak $b \in [y, v)$. Z definice v existuje $v' \in V \cap [0, v)$ splňující $t < v' < v$. Jemu příslušné $b_{v'}$ tedy leží v $[y, v)$. To však znamená, že $Q \subseteq [y, v)$, a to je spor.

Položme $R = \{x \in M^-;\ x \text{ zprava } X\text{-izolovaný v } M^-\}$. Jest $|R| \leq |M^- \setminus R| \leq \kappa$. Protože $M^- = A^- \cup (\bigcup \mathcal{U} \cap M^-) \cup R$, je $|M^-| \leq \kappa$, což je spor s předpokladem, že $|M^-| > \kappa$, a K tedy není souvislá. □

Důsledek 2.4.5. *Sorgenfreyova přímka ani libovolný její nespočetný podprostor nemají žádnou souvislou kompaktifikaci.*

Důkaz. Při zachování značení z věty 2.4.4 položme $X = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Jakožto topologický prostor je X kompaktní, neboť je homeomorfní s intervalem $[0,1]$. Množina $\{(a,b), [-\infty, a), (b, +\infty];\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ tvoří bázi prostoru X o mohutnosti ω. Tedy existuje rovněž π-báze prostoru X o mohutnosti ω. Buď $M \subseteq \mathbb{R}$ taková, že $|M| > \omega$, $M^+ = M$ a $M^- = \emptyset$. Prostor $(M, \mathcal{O}(M^+, M^-))$ je pak zřejmě podprostorem Sorgenfreyovy přímky, přičemž je-li $M = \mathbb{R}$, pak se jedná o Sorgenfreyovu přímku samotnou. □

2.5 Prostor racionálních čísel

V této části se budeme zabývat souvislými kompaktifikacemi prostoru $\mathbb{Q}$ jakožto podprostoru $\mathbb{R}$ se standardní topologií. Tento topologický prostor je totálně nesouvislý (tj. jedinými jeho komponentami jsou jednobodové množiny), neboť všechny intervaly tvaru $(a,b) \cap \mathbb{Q}$, kde $a, b \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, jsou jistě obojetnými množinami v $\mathbb{Q}$.

Ukážeme, že na rozdíl od Sorgenfreyovy přímky má $\mathbb{Q}$ souvislou kompaktifikaci. Prostor $\mathbb{Q}$ identicky vnoříme na hustou podmnožinu uzávěru obrazu $\mathbb{Q}$ v diagonálním součinu daného souboru zobrazení a dokážeme nutnou a postačující podmínku pro souvislost této kompaktifikace. Zároveň uvedeme příklad, který ilustruje, že tuto podmínku nelze zesílit.

Následující lemma nepřináší mnoho nového – jeho důkaz je myšlenkově velmi podobný důkazu věty 1.2.5. Přesto jej však na tomto místě uvádíme, neboť se na něj budeme v této podobě několikrát odkazovat.

Lemma 2.5.1. *Nechť X je Tichonovův prostor, $\mathcal{C}(X)$ soubor všech spojitých funkcí z X do $[0,1]$ a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X)$. Pokud soubor $\mathcal{F}$ odděluje body a současně odděluje body a uzavřené množiny, pak je $\overline{\Delta\mathcal{F}[X]}^{[0,1]^{\mathcal{F}}}$ kompaktifikací X. Je-li $id\colon X \hookrightarrow \overline{\Delta\mathcal{F}[X]}$, pak pro každou $f \in \mathcal{F}$ lze $f \circ id^{-1}$ spojitě rozšířit na $\overline{\Delta\mathcal{F}[X]}$.*

Důkaz. Jelikož soubor $\mathcal{F}$ odděluje jak body, tak body a uzavřené množiny, je dle lemmatu 1.1.1 o vnoření $\Delta\mathcal{F}\colon X \to [0,1]^{\mathcal{F}}$ vnoření. Prostor $\Delta\mathcal{F}[X]$ je tedy homeomorfním obrazem X. Jeho uzávěr je uzavřeným podprostorem kompaktního prostoru $[0,1]^{\mathcal{F}}$, a je tedy rovněž kompaktní. Zřejmě je $\Delta\mathcal{F}[X]$ hustou podmnožinou $\overline{\Delta\mathcal{F}[X]}$, tedy $\overline{\Delta\mathcal{F}[X]}$ tvoří kompaktifikaci X.

Buď $g\colon X \to [0,1]$ spojitá, $g \in \mathcal{F}$. Protože $\Delta\mathcal{F}$ je vnoření, je inverzní zobrazení $(\Delta\mathcal{F})^{-1}\colon\ \Delta\mathcal{F}[X] \to X$ spojité. Položme

$$h = g \circ (\Delta\mathcal{F})^{-1}\colon\ \Delta\mathcal{F}[X] \to [0,1],$$

tedy h je rovněž spojité. Označme $\pi_g\colon [0,1]^{\mathcal{F}} \to [0,1]$, $\pi_g(\langle \alpha_f;\ f \in \mathcal{F}\rangle) = \alpha_g$, g-tou projekci a dále označme $\tilde{h} = \pi_g|_{\overline{\Delta\mathcal{F}[X]}}$. Ukážeme, že $\tilde{h}$ rozšiřuje h. Z vlastností vnoření plyne, že každému bodu $y \in \Delta\mathcal{F}[X]$ lze jednoznačně přiřadit bod $x \in X$ takový, že $y = \langle f(x), f \in \mathcal{F}\rangle$. Tedy

$$\tilde{h}(y) = \pi_g(y) = g(x) = g\big((\Delta\mathcal{F})^{-1}(y)\big) = h(y)$$

a $\tilde{h}$ je skutečně spojitým rozšířením h, respektive $g = h \circ \Delta\mathcal{F}$. □

V dalším textu budeme pro $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ užívat symbol $\mathbb{Q}_0$. Jelikož prostory $\mathbb{Q}_0$ a $\mathbb{Q}$ jsou homeomorfní, je libovolná kompaktifikace $\mathbb{Q}_0$ rovněž kompaktifikací $\mathbb{Q}$. Budeme tedy často pracovat s $\mathbb{Q}_0$, abychom nemuseli zavádět značení pro „body v nekonečnu“.

Následující tvrzení využívá konstrukce Čechovy-Stoneovy kompaktifikace z důkazu věty 1.2.5 ke konstrukci souvislé kompaktifikace $\mathbb{Q}$. Vezmeme zde v úvahu diagonální součin všech funkcí, jež jsou spojitě rozšířitelné na $\mathbb{R}$.

Tvrzení 2.5.2. *Uvažujme topologický prostor $\mathbb{Q}$ racionálních čísel. Položme*

$$\mathcal{F} = \{f \colon \mathbb{Q}_0 \to [0,1];\ \exists \tilde{f} \colon (0,1) \to [0,1],\ \tilde{f} \text{ spojitá},\ f = \tilde{f}|_{\mathbb{Q}_0}\}.$$

Pak $\overline{\Delta\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}^{[0,1]^{\mathcal{F}}}$ je souvislou kompaktifikací $\mathbb{Q}$.

Důkaz. Soubor $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f} \colon (0,1) \to [0,1];\ \tilde{f}$ spojitá$, \exists f \in \mathcal{F}, f = \tilde{f}|_{\mathbb{Q}_0}\}$ odděluje jak body, tak body a uzavřené množiny, tedy totéž platí zřejmě i pro soubor $\mathcal{F}$. Dle lemmatu 2.5.1 je proto $\overline{\Delta\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}$ kompaktifikací $\mathbb{Q}_0$, respektive $\mathbb{Q}$.

Buď $\mathcal{G} = \{g \colon (0,1) \to [0,1];\ g$ spojitá$\}$. Protože každá funkce $f \in \mathcal{F}$ má jednoznačné rozšíření $\tilde{f} \in \mathcal{G}$ a naopak ke každé funkci $g \in \mathcal{G}$ existuje restrikce $g|_{\mathbb{Q}_0} \in \mathcal{F}$, platí $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{F}}$ a $\Delta\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0] = \Delta\mathcal{G}[\mathbb{Q}_0]$. Funkce $\Delta\mathcal{G}$ je dle lemmatu 1.1.1 o vnoření homeomorfismus, tedy $\Delta\mathcal{G}[(0,1)]$ je souvislý jakožto spojitý obraz souvislého prostoru. Proto i $\overline{\Delta\mathcal{G}[(0,1)]}$ je souvislý. Ukážeme, že $\overline{\Delta\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]} = \overline{\Delta\mathcal{G}[(0,1)]}$.

Zřejmě je $\overline{\Delta\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]} = \overline{\Delta\mathcal{G}[\mathbb{Q}_0]} \subseteq \overline{\Delta\mathcal{G}[(0,1)]}$. Pro každé $x \in (0,1) \backslash \mathbb{Q}$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subseteq (0,1)$. Pak platí

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{G}[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)] &\subseteq \Delta\mathcal{G}\Big[[x-\varepsilon, x+\varepsilon]\Big] = \Delta\mathcal{G}\Big[\overline{\mathbb{Q}_0 \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)}\Big] = \\ &= \overline{\mathcal{G}[\mathbb{Q}_0 \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)]} = \overline{\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0 \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)]} \subseteq \overline{\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\Delta\mathcal{G}[(0,1)] = \bigcup_{x \in (0,1)} \Delta\mathcal{G}[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)] \subseteq \overline{\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}$$

a rovněž $\overline{\Delta\mathcal{G}[(0,1)]} \subseteq \overline{\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}$. Proto $\overline{\Delta\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}$ tvoří souvislou kompaktifikaci $\mathbb{Q}$. $\square$

Kompaktifikace sestrojená v tvrzení 2.5.2 je sice souvislá, ale není maximální. Uvažme například funkci $f_r \colon \mathbb{Q}_0 \to [0,1]$ definovanou předpisem

$$f_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}_0 \cap (0,r), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{x-r} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}_0 \cap (r,1), \end{cases}$$

kde $r \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$. Tato funkce je spojitá na $\mathbb{Q}_0$, ale nejde spojitě rozšířit do bodu r. Není těžké ukázat, že přidáme-li f_r do souboru $\mathcal{F}$ definovaného v tvrzení 2.5.2, dostaneme souvislou kompaktifikaci $\mathbb{Q}$, která je ostře větší než ta z tvrzení 2.5.2.

Souvislost nebude porušena ani v případě, že do $\mathcal{F}$ přidáme spočetně mnoho funkcí f_{r_α} ($\alpha \in A$, $f_{r_\alpha}(x) = f_r(x)$ pro $r = r_\alpha$) takových, že pro každé $\alpha \in A$ existuje otevřené okolí bodu r_α disjunktní s $\{r_\beta;\ \beta \in A \backslash \{r\}\}$. Otázka tedy zní, které spojité funkce lze do souboru $\mathcal{F}$ přidat, aniž bychom porušili souvislost výsledné kompaktifikace.

V následujícím lemmatu ukážeme základní nutnou podmínku souvislosti uzávěru obrazu prostoru v diagonálním součinu souboru zobrazení.

Lemma 2.5.3. *Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F} = \{f_\alpha \colon X \to [0,1];\ \alpha \in A\}$ je soubor zobrazení. Je-li $\overline{\triangle\mathcal{F}[X]}^{[0,1]^A}$ souvislý, pak pro libovolné $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ je $\overline{(f_{\alpha_1} \triangle f_{\alpha_2})[X]}^{[0,1]^2}$ rovněž souvislý.*

Důkaz. Definujme projekce $\pi_{\alpha_1}, \pi_{\alpha_2} \colon [0,1]^A \twoheadrightarrow [0,1]$ předpisem $\pi_{\alpha_i}(\langle x_\alpha;\ \alpha \in A\rangle) = x_{\alpha_i}$, $i \in \{1,2\}$. Jelikož projekce jsou spojitá zobrazení, je také $\pi_{\alpha_1} \triangle \pi_{\alpha_2} \colon [0,1]^A \to [0,1]^2$ spojité zobrazení. Protože pro každé $x \in X$ je navíc $f_{\alpha_i}(x) = \pi_{\alpha_i}(\triangle\mathcal{F}(x))$, $i \in \{1,2\}$, platí $(f_{\alpha_1} \triangle f_{\alpha_2})[X] = (\pi_{\alpha_1} \triangle \pi_{\alpha_2})[\triangle\mathcal{F}[X]]$, a tedy také

$$\overline{(f_{\alpha_1} \triangle f_{\alpha_2})[X]} = \overline{(\pi_{\alpha_1} \triangle \pi_{\alpha_2})[\triangle\mathcal{F}[X]]} = (\pi_{\alpha_1} \triangle \pi_{\alpha_2})\left[\overline{\triangle\mathcal{F}[X]}\right],$$

kde druhá rovnost plyne ze spojitosti zobrazení $\pi_{\alpha_1} \triangle \pi_{\alpha_2}$. Tedy je-li $\overline{\triangle\mathcal{F}[X]}$ souvislý, je i $\overline{(f_{\alpha_1} \triangle f_{\alpha_2})[X]}$ souvislý. □

Zcela analogickým postupem lze ukázat, že souvislost $\overline{\triangle\mathcal{F}[X]}$ implikuje souvislost $\overline{\triangle\mathcal{G}[X]}$ pro libovolný konečný podsoubor $\mathcal{G}$.

Graf zobrazení f budeme značit $G(f)$ a budeme jej chápat jako obraz X v diagonálním součinu f s identitou na X. Podle lemmatu 2.5.3 tedy nelze soubor $\mathcal{F}$ z tvrzení 2.5.2 obohatit o zobrazení s nesouvislým uzávěrem grafu v $[0,1]^2$, aniž by byla porušena souvislost výsledné kompaktifikace.

Nyní ukážeme, že lemma 2.5.3 se nedá obrátit – souvislost uzávěru obrazu X v diagonálním součinu každých dvou prvků souboru $\mathcal{F}$ ještě neznamená souvislost $\overline{\triangle\mathcal{F}[X]}$.

Příklad 2.5.4. Buď $r \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$ a buďte $f_r, g_r \colon \mathbb{Q}_0 \to [0,1]$ funkce definované následovně:

$$f_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (0,r), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{x-r} & \text{pro } x \in (r,1), \end{cases}$$

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (0,r), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x-r} & \text{pro } x \in (r,1). \end{cases}$$

Zřejmě jsou $\overline{G(f)}^{[0,1]^2}$, $\overline{G(g)}^{[0,1]^2}$ souvislé, avšak $\overline{(f \triangle g)[\mathbb{Q}_0]}$ souvislý není. Obsahuje totiž bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a kružnici se středem v tomto bodě a poloměrem $\frac{1}{2}$.

Příklad 2.5.4 zároveň říká, že soubor $\mathcal{F}$ z tvrzení 2.5.2 nelze obohatit o všechny spojité funkce z $\mathbb{Q}_0$ do $[0,1]$ se souvislým uzávěrem grafu. V následujícím pozorování tento příklad zobecníme na libovolnou n-tici funkcí.

Pozorování 2.5.5. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n-tice spojitých funkcí z $\mathbb{Q}_0$ do $[0,1]$ se souvislým uzávěrem grafu taková, že obraz $\mathbb{Q}_0$ v diagonálním součinu každých $n-1$ z nich má souvislý uzávěr, ale obraz $\mathbb{Q}_0$ v diagonálním součinu všech nikoliv.*

Důkaz. Předpokládejme, že $n \geq 3$ (případ $n = 2$ jsme rozebrali zvlášť v příkladu 2.5.4). Označme o_i odmocninu z i-tého prvočísla (tedy $o_1 = \sqrt{2}$, $o_2 = \sqrt{3}$, $o_3 = \sqrt{5}, \dots$) a na množině $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definujme funkce $g_1, \dots, g_n$. Pro $x < 0$ položme

$$g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_{n-2}(x) = 0,$$
$$g_{n-1}(x) = g_n(x) = x$$

a pro $x > 0$ položme

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= \cos\frac{o_{n-3}}{x}\cos\frac{o_{n-4}}{x}\dots\cos\frac{o_2}{x}\cos\frac{o_1}{x}\cos\frac{1}{x},\\
g_2(x) &= \cos\frac{o_{n-3}}{x}\cos\frac{o_{n-4}}{x}\dots\cos\frac{o_2}{x}\cos\frac{o_1}{x}\sin\frac{1}{x},\\
g_3(x) &= \cos\frac{o_{n-3}}{x}\cos\frac{o_{n-4}}{x}\dots\cos\frac{o_2}{x}\sin\frac{o_1}{x},\\
g_4(x) &= \cos\frac{o_{n-3}}{x}\cos\frac{o_{n-4}}{x}\dots\sin\frac{o_2}{x},\\
&\vdots\\
g_{n-2}(x) &= \cos\frac{o_{n-3}}{x}\sin\frac{o_{n-4}}{x},\\
g_{n-1}(x) &= \sin\frac{o_{n-3}}{x},\\
g_n(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Je-li $r \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$, definujme pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$ funkci $f_i\colon \mathbb{Q}_0 \to [0,1]$ předpisem

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\cdot g_i\Big(\frac{x}{r} - 1\Big) + \frac{1}{2}.$$

Ukážeme, že množina $\{f_1,\dots,f_n\}$ je hledanou n-ticí.

Označme $\mathbb{Q}_r = \{\frac{q}{r} - 1;\ q \in \mathbb{Q}_0\}$ ($\mathbb{Q}_r$ je tedy hustá v intervalu $(-1, \frac{1}{r} - 1)$). Jelikož funkce $f_1,\dots,f_n$ jsou restrikcemi obrazů $g_1,\dots,g_n$ při výše uvedené afinní transformaci na $\mathbb{Q}_0$, je uzávěr $\triangle_{i\in I\subseteq\{1,\dots,n\}} f_i[\mathbb{Q}_0]$ v $[0,1]^I$ souvislý, právě když je uzávěr $\triangle_{i\in I} g_i[\mathbb{Q}_r]$ v $[-1, \frac{1}{r} - 1]^I$ souvislý. Pro přehlednost tedy budeme pracovat s n-ticí $\{h_1,\dots,h_n\}$, kde $h_i = g_i|_{\mathbb{Q}_r}$.

Nejprve si všimněme, že pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$ je h_i spojitá na $\mathbb{Q}_r$ a má souvislý uzávěr grafu. Dále pro každé $x \in \mathbb{Q}_r$ je $h_i(x) \in [-1,1]$. Snadno se ověří, že pro $x \in \mathbb{Q}_r^+ = \mathbb{Q}_r \cap (0,+\infty)$ platí $\sum_{i=1}^{n-1} h_i^2(x) = 1$. Je-li tedy $x = \langle x_1,\dots,x_{n-1}\rangle$ a $x \in \overline{\triangle_{i=1}^{n-1} h_i[\mathbb{Q}_r^+]}$, pak $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1$.

Pokud je naopak $y = \langle y_1,\dots,y_{n-1}\rangle$ a $\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = 1$, pak lze jeho souřadnice psát ve tvaru

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \cos\alpha_{n-3}\cos\alpha_{n-4}\dots\cos\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_0,\\
y_2 &= \cos\alpha_{n-3}\cos\alpha_{n-4}\dots\cos\alpha_2\cos\alpha_1\sin\alpha_0,\\
&\vdots\\
y_{n-2} &= \cos\alpha_{n-3}\sin\alpha_{n-4},\\
y_{n-1} &= \sin\alpha_{n-3}
\end{aligned}
$$

pro nějaká $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-3}$. Přitom pro každé $i \in \{0,\dots,n-3\}$ platí

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha_i &= \cos(\alpha_i + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z},\\
\sin\alpha_i &= \sin(\alpha_i + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Je-li U okolím bodu y v $[0,1]^{n-1}$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že libovolné y', jemuž pro každé $i \in \{0,\dots,n-3\}$ přísluší nějaké $\beta_i \in (\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon)$, leží v U. Pro $x \in \mathbb{Q}_r^+$ proveďme substituci $z = \frac{1}{x}$, tedy $z \in (\mathbb{Q}_r^+)^{-1} = \{\frac{r}{q-r};\ q \in \mathbb{Q}_0 \cap (r,1)\}$ ($(\mathbb{Q}_r^+)^{-1}$ je hustá podmnožina $(\frac{r}{1-r}, +\infty)$).

Zřejmě jsou o_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, a π iracionální čísla, přičemž podíl žádných dvou z nich není racionální. Tedy položíme-li $o_0 = 1$, pak

$$\bigcap_{i=0}^{n-3} \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{o_i}(\alpha_i + 2k\pi - \varepsilon, \alpha_i + 2k\pi + \varepsilon)$$

obsahuje nějakou otevřenou množinu, která má neprázdný průnik s $(\mathbb{Q}_r^+)^{-1}$. Pak ovšem existuje $z_y \in (\mathbb{Q}_r^+)^{-1}$ splňující $o_i z_y = \frac{o_i}{x} \in (\alpha_i + 2k_i\pi - \varepsilon, \alpha_i + 2k_i\pi + \varepsilon)$, $i \in \{0, \dots, n-3\}$, pro vhodná $k_i \in \mathbb{Z}$. Jemu příslušný bod v $[0,1]^{n-1}$ leží v U. Tedy $y \in \overline{\triangle_{i=1}^{n-1} h_i[\mathbb{Q}_r^+]}$.

Ukázali jsme, že na $\overline{\triangle_{i=1}^{n-1} h_i[\mathbb{Q}_r^+]}$ lze pohlížet jako na $(n-1)$-dimenzionální sféru. Položme $\mathbb{Q}_r^- = \mathbb{Q}_r \cap (-\infty, 0)$. Zřejmě

$$\overline{\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} h_i\big[\mathbb{Q}_r^-\big]} = \{\langle \overbrace{0, \dots, 0}^{n-2\text{-krát}}, t, t\rangle;\ t \in [-1, 0]\}.$$

K tomu, aby $\langle 0, \dots, 0, t, t\rangle \in \overline{\triangle_{i=1}^{n} h_i[\mathbb{Q}_r^+]}$, musí být $0^2 + \dots + 0^2 + t^2 = t^2 = 1$ a současně musí být poslední souřadnice nulová. To není možné, tedy $\overline{\triangle_{i=1}^{n} h_i[\mathbb{Q}_r^+]} \cap \overline{\triangle_{i=1}^{n} h_i[\mathbb{Q}_r^-]} = \emptyset$, neboli $\overline{\triangle_{i=1}^{n} h_i[\mathbb{Q}_r]}$ není souvislý.

Nyní ukážeme, že pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$ už $\overline{\triangle_{i\neq j} h_i[\mathbb{Q}_r]}$ souvislý je. Označme $D_j[A] = \overline{\triangle_{i\neq j} h_i[A]}$.

Nejprve nechť $j = n$. Pak

$$D_n[\mathbb{Q}_r^-] = \{\langle \overbrace{0, \dots, 0}^{n-2\text{-krát}}, t\rangle;\ t \in [-1, 0]\},$$

přičemž bod $\langle 0, \dots, 0, -1\rangle$ leží také v $D_n[\mathbb{Q}_r^+]$. Protože $D_n[\mathbb{Q}_r^-]$ i $D_n[\mathbb{Q}_r^+]$ jsou souvislé a mají neprázdný průnik, je také $\overline{\triangle_{i=1}^{n-1} h_i[\mathbb{Q}_r^+]}$ souvislý.

Nechť $j \neq n$. Kdykoli $\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle \in D_{n-1}[\mathbb{Q}_r^+]$, pak zřejmě $\sum_{i\neq j, i\neq n} a_i^2 \leq 1$. Je-li naopak $\langle b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}\rangle$ bod splňující podmínku $\sum_{i\neq j, i\neq n} b_i^2 \leq 1$, pak můžeme položit $b_j = \sqrt{1 - \sum_{i\neq j, i\neq n} b_i^2}$. Získáme tak $\langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle \in D_{n-1}[\mathbb{Q}_r^+]$. Tedy $\overline{\triangle_{i\neq j, i\neq n} h_i[\mathbb{Q}_r^+]}$ si lze představovat jako $(n-2)$-dimenzionální kouli. Speciálně $\langle 0, \dots, 0\rangle \in \overline{\triangle_{i\neq j, i\neq n} h_i[\mathbb{Q}_r^+]}$.

Protože

$$D_j[\mathbb{Q}_r^-] = \begin{cases} \Big\{\langle \overbrace{0, \dots, 0}^{n-3\text{-krát}}, t, t\rangle, t \in [-1, 0]\Big\} & \text{pro } j \in \{1, \dots, n-2\}, \\ \Big\{\langle \overbrace{0, \dots, 0}^{n-2\text{-krát}}, t\rangle, t \in [-1, 0]\Big\} & \text{pro } j = n-1, \end{cases}$$

je $\langle 0, \dots, 0\rangle \in D_j[\mathbb{Q}_r^-]$, $j \neq n$. Ovšem bod $\langle 0, \dots, 0\rangle$ leží také v $D_j[\mathbb{Q}_r^+]$, neboť poslední souřadnice v $D_j[\mathbb{Q}_r^+]$ je konstantně nulová. Tedy $D_j[\mathbb{Q}_r^-]$ a $D_j[\mathbb{Q}_r^+]$ jsou dvě souvislé množiny s neprázdným průnikem. Jejich sjednocením je $\overline{\triangle_{i\neq j} h_i[\mathbb{Q}_r]}$, který je proto rovněž souvislý.

Každých $n-1$ prvků n-tice $\{h_1, \dots, h_n\}$ má souvislý uzávěr diagonálního součinu, kdežto uzávěr diagonálního součinu všech souvislý není. Totéž tedy platí pro soubor $\{f_1, \dots, f_n\}$. □

Příklad 2.5.6. Ilustrujme pozorování 2.5.5 na příkladu pro $n = 3$. Buď $r \in$

$(0,1)\backslash\mathbb{Q}$. Definujme $g_1, g_2, g_3 \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to [-1,1]$ následovně:

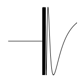
$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ \cos\frac{1}{x} & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x < 0, \\ \sin\frac{1}{x} & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

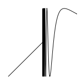
$$g_3(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Příslušné $f_i \colon \mathbb{Q}_0 \to [0,1]$ jsou tedy definovány předpisy

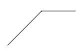
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x < r, \\ \frac{1}{2}\cos\frac{r}{x-r} + \frac{1}{2} & \text{pro } x > r, \end{cases}$$



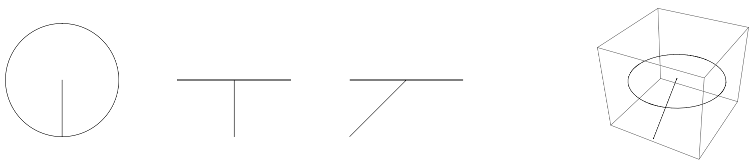
$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2r} & \text{pro } x < r, \\ \frac{1}{2}\sin\frac{r}{x-r} + \frac{1}{2} & \text{pro } x > r, \end{cases}$$



$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x}{2r} & \text{pro } x < r, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x > r. \end{cases}$$



Všechny tyto funkce jsou spojité na $\mathbb{Q}_0$ se souvislým uzávěrem grafu, přičemž každá dvojice má souvislý uzávěr diagonálního součinu. Uzávěr diagonálního součinu všech tří však souvislý není.



Obrázek 2.3: Orientační vyobrazení uzávěrů $\overline{f_1 \triangle f_2[\mathbb{Q}_0]}$, $\overline{f_1 \triangle f_3[\mathbb{Q}_0]}$, $\overline{f_2 \triangle f_3[\mathbb{Q}_0]}$ a $\overline{f_1 \triangle f_2 \triangle f_3[\mathbb{Q}_0]}$

Nechť $\mathcal{F}$ je soubor spojitých funkcí z $\mathbb{Q}_0$ do $[0,1]$. Lemma 2.5.3 a poznámka pod jeho důkazem říkají, že existuje-li konečný podsoubor souboru $\mathcal{F}$, jehož diagonální součin nemá souvislý uzávěr, pak ani diagonální součin $\mathcal{F}$ nemá souvislý uzávěr. Nyní ukážeme opak – souvislost uzávěru diagonálního součinu každého konečného podsouboru stačí k souvislosti uzávěru diagonálního součinu souboru $\mathcal{F}$.

Věta 2.5.7. *Uvažujme prostor $\mathbb{Q}_0$ racionálních čísel v intervalu $(0,1)$. Nechť $\mathcal{F}$ je soubor spojitých funkcí z $\mathbb{Q}_0$ do $[0,1]$ takových, že pro každý konečný podsoubor $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ je $\overline{\Delta\mathcal{G}[\mathbb{Q}_0]}^{[0,1]^{\mathcal{G}}}$ souvislý. Pak je rovněž $\overline{\Delta\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}^{[0,1]^{\mathcal{F}}}$ souvislý.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $F = \overline{\Delta\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}$ není souvislý. Pak existují dvě disjunktní uzavřené množiny $A, B \subseteq F$ takové, že $A \cup B = F$. Tedy A, B jsou kompaktní. Jelikož $[0,1]^{\mathcal{F}}$ je normální, existují $U_A, U_B \subseteq [0,1]^{\mathcal{F}}$ disjunktní otevřené, pro které platí $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$. Pro každý bod $x \in F$ uvažujme jeho otevřené okolí V_x, které je celé částí U_A, respektive U_B. Systémy $\{V_x \cap F;\, x \in A\}$ a $\{V_x \cap F;\, x \in B\}$ jsou otevřená pokrytí A a B, tedy existují jejich konečná podpokrytí $\mathcal{V}_A$ a $\mathcal{V}_B$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechna V_x jsou prvky otevřené báze prostoru $[0,1]^{\mathcal{F}}$. Jsou tedy tvaru $\prod_{f\in\mathcal{F}} U_f$, kde U_f jsou otevřené v $[0,1]$, přičemž ostrá inkluze nastává pouze pro konečně mnoho $f \in \mathcal{F}$. Jelikož je $\bigcup\{V_x;\ V_x \cap F \in \mathcal{V}_A\} \cap \bigcup\{V_x;\ V_x \cap F \in \mathcal{V}_B\} = \emptyset$, pak nutně existuje konečný soubor $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ takový, že

$$\pi_{\mathcal{G}}\Big(\bigcup\{V_x;\ V_x \cap F \in \mathcal{V}_A\}\Big) \quad \text{a} \quad \pi_{\mathcal{G}}\Big(\bigcup\{V_x;\ V_x \cap F \in \mathcal{V}_B\}\Big),$$

kde $\pi_{\mathcal{G}}\colon [0,1]^{\mathcal{F}} \twoheadrightarrow [0,1]^{\mathcal{G}}$ je definovaná předpisem $\pi_{\mathcal{G}}(\langle x_f;\ f \in \mathcal{F}\rangle) = \langle x_f;\ f \in \mathcal{G}\rangle$, jsou disjunktní. Tedy $\overline{\triangle\mathcal{G}[\mathbb{Q}_0]}$ není souvislý, což je spor. $\square$

Pozorování 2.5.5 ukazuje, že podmínka souvislosti pro každý konečný podsoubor je skutečně potřeba.

Předchozí poznatky shrnuje následující věta.

Věta 2.5.8. *Nechť $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{Q}_0)$ je soubor funkcí se souvislým uzávěrem grafu. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\overline{\triangle\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}^{[0,1]^{\mathcal{F}}}$ *je maximální souvislá kompaktifikace $\mathbb{Q}$,*

(ii) *$\mathcal{F}$ je maximální soubor takový, že pro každý konečný soubor $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ je $\overline{\triangle\mathcal{G}[\mathbb{Q}_0]}^{[0,1]^{\mathcal{G}}}$ souvislý.*

Důkaz. Položme $F = \overline{\triangle\mathcal{F}[\mathbb{Q}_0]}^{[0,1]^{\mathcal{F}}}$.

(i)$\to$(ii): Jelikož je F souvislý, je podle lemmatu 2.5.3 a poznámky pod jeho důkazem souvislý také $\overline{\triangle\mathcal{G}[\mathbb{Q}_0]}$ pro libovolný konečný soubor $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Maximalita kompaktifikace dává maximalitu souboru $\mathcal{F}$.

(ii)$\to$(i): Podle věty 2.5.7 je F souvislý. Protože $\mathcal{F}$ je maximální, je identické zobrazení prvkem $\mathcal{F}$. Tedy $\mathcal{F}$ odděluje jak body, tak body a uzavřené množiny. Dle lemmatu 2.5.1 je F kompaktifikací $\mathbb{Q}$ a z maximality souboru $\mathcal{F}$ plyne maximalita F. $\square$

Na závěr učiníme pozorování týkající se spojitých funkcí se souvislým uzávěrem grafu.

Lemma 2.5.9. *Nechť $f\colon \mathbb{Q}_0 \to [0,1]$ je spojitá. Je-li $\overline{G(f)}^{[0,1)\times[0,1]}$ souvislý, pak $\overline{G(f)}^{[0,1]^2} \cap \big(\{1\}\times[0,1]\big)$ je souvislý.*

Důkaz. Jelikož je $\overline{G(f)}^{[0,1)\times[0,1]}$ souvislý, je i $\overline{\overline{G(f)}^{[0,1)\times[0,1]}}^{[0,1]^2} = \overline{G(f)}^{[0,1]^2}$ souvislý. Položme $Y = \overline{G(f)}^{[0,1]^2} \cap \big(\{1\}\times[0,1]\big)$. Tedy Y je uzavřená a platí $Y \subseteq \{1\}\times[0,1]$. Pro spor předpokládejme, že Y není souvislá. Pak $Y = A \cup B$, kde A a B jsou disjunktní neprázdné uzavřené množiny. Tedy existuje $r \in (0,1)$, pro které platí:

(i) $(\exists a \in A)(\exists b \in B)\ a < \langle 1, r\rangle < b$,

(ii) $(\exists \varepsilon > 0)\ Y \cap \{1\}\times(r-\varepsilon, r+\varepsilon) = \emptyset$.

Zřejmě existuje $s \in (0,1)$ takové, že $(s,1]\times(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ je disjunktní s $\overline{G(f)}^{[0,1]^2}$. Nechť $a, b \in \overline{G(f)}^{[0,1]^2}$ vyhovují podmínce (i). Protože $\overline{G(f)}^{[0,1]^2}$ je souvislý, existuje bod $\langle x, y\rangle \in (s,1]\times[0, r-\varepsilon] \cap G(f)$. Buď $U \subseteq [0, r-\varepsilon]$ otevřeným okolím y.

Pak vzhledem ke spojitosti f existuje $\delta > 0$ takové, že $f[\mathbb{Q}_0 \cap (x-\delta, x+\delta)] \subseteq U$. To ovšem znamená, že $(x-\delta, x+\delta) \times [r+\varepsilon, 1]$ je disjunktní s $\overline{G(f)}^{[0,1]^2}$. Tedy také $\big((x-\delta, x+\delta) \times [r+\varepsilon, 1]\big) \cup \big((s, 1] \times (r-\varepsilon, r+\varepsilon)\big)$ je disjunktní s $\overline{G(f)}^{[0,1]^2}$. Doplněk této množiny má dvě komponenty, z nichž jedna obsahuje bod a a druhá obsahuje bod b. To je spor se souvislostí $\overline{G(f)}^{[0,1)\times[0,1]}$. □

Tvrzení 2.5.10. *Nechť $f\colon \mathbb{Q}_0 \to [0,1]$ je spojitá a $\overline{G(f)}^{[0,1]^2}$ je souvislý. Pak pro každé $x \in [0,1]$ je $\overline{G(f)}^{[0,1]^2} \cap \big(\{x\} \times [0,1]\big)$ souvislý.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem – nechť $f\colon \mathbb{Q}_0 \to [0,1]$ je spojitá a $x \in [0,1]$. Zřejmě je $\overline{G(f)}^{[0,x)\times[0,1]}$ souvislý a $[0,x)$ je homeomorfní s $[0,1)$. Je-li $x \in \mathbb{Q}_0$, je závěr tvrzení splněn triviálně. Je-li $x = 1$, pak dle lemmatu 2.5.9 je $\overline{G(f)}^{[0,1]^2} \cap \big(\{x\} \times [0,1]\big)$ souvislý. Pro $x = 0$ je situace analogická. Pokud $x \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$, pak lemma 2.5.9 dává souvislost

$$\overline{G(f|_{\mathbb{Q}_0\cap[0,x)})}^{[0,x]\times[0,1]} \cap \big(\{x\} \times [0,1]\big) \quad \text{a} \quad \overline{G(f|_{\mathbb{Q}_0\cap(x,1]})}^{[x,1]\times[0,1]} \cap \big(\{x\} \times [0,1]\big),$$

jejichž sjednocením je $\overline{G(f)}^{[0,1]^2} \cap \big(\{x\} \times [0,1]\big)$. Tato množina je souvislá, neboť v opačném případě by $\overline{G(f)}^{[0,1]^2}$ byl sjednocením dvou disjunktních uzavřených množin, což není možné. □

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{Q}$	racionální čísla
$\mathbb{Q}_0$	racionální čísla v intervalu $(0, 1)$
$\mathbb{N}$	přirozená čísla
$\mathcal{C}(X)$	soubor všech spojitých funkcí z X do $[0, 1]$
βX	Čechova-Stoneova kompaktifikace prostoru X
$\lvert A \rvert$	mohutnost A
$f[A]$	obraz množiny A při zobrazení f
$\overline{A}^X$, $\overline{A}$	uzávěr množiny A (v prostoru X)
$f\vert_A$	restrikce zobrazení f na A
$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, $X \times Y$, X^A	topologický součin
$\langle x_\alpha;\ \alpha \in A\rangle$, $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$	bod v součinu
$\triangle\mathcal{F}$, $\bigtriangleup_{\alpha\in A} f_\alpha$, $f \triangle g$	diagonální součin
$(\leftarrow, x)$, resp. $(x, \rightarrow)$	$\{z;\ z < x\}$, resp. $\{z;\ z > x\}$ (a podobně další)
$f\colon X \hookrightarrow Y$	vnoření
$f\colon X \twoheadrightarrow Y$	projekce

Literatura

[1] E. Čech. *Topological Spaces.* Academia, Praha, 1966.

[2] A. Emeryk and W. Kulpa. The Sorgenfrey line has no connected compactification. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 18:483–487, 1977.

[3] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[4] J. Flašková. Kompaktifikace a souvislost. Master's thesis, Charles University in Prague, 2002.

[5] A. Kruckman. Notes on ultrafilters. *Berkeley Math Toolbox Seminar*, 2012.

[6] M. S. Kurilić and A. Pavlović. The uniqueness and universality of a generalized ordered space. *Novi Sad J. Math.*, 39:1–5, 2009.

[7] J. Matoušek and J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Nakladatelství Karolinum, Praha, 2002.

[8] J. Pelant. On compactifications of GO-spaces. *Mathematical Centre Tracts*, 169:47–51, 1983.

[9] L. A. Steen and A. Seebach. *Counterexamples in Topology.* Dover Publications, Inc., New York, 1995.

[10] S. Watson and R. G. Wilson. Embeddings in connected spaces. *Houston Journal of Mathematics*, 19:469–481, 1993.