Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Evgeniya Belyaeva

# Trajektorie Wienerova procesu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2013

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu, doc. RNDr. Danielu Hlubinkovi, Ph.D. za odborné vedení, rady a pomoc při zpracování této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ...................... dne ............. Podpis autora

Název práce: Trajektorie Wienerova procesu

Autor: Evgeniya Belyaeva

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se zabýváme zkoumáním vlastností trajektorií Wienerova procesu. V úvodní kapitole se podíváme na to, jak se dá dokázat existence Wienerova procesu a jaké jsou jeho základní vlastnosti. Druhá kapitola je věnovaná analytickým vlastnostem jako je monotónie, diferencovatelnost, hölderovskost a kvadratická variace trajektorií. Ve třetí kapitole zadefinujeme náhodnou procházku a zkoumáme na ní princip reflexe a rozdělení maxima trajektorií. Následně uvedeme analogie pro Wienerův proces. Ve čtvrté kapitole se zaměřujeme na Skorochodovo vnoření a jeho použití při dokazování klasické centrální limitní věty. Na závěr pomocí úvodní kapitoly o existenci Wienerova procesu konstruujeme simulaci Wienerova procesu. S využitím simulace ilustrujeme některé vlastnosti trajektorií. V textu práce je několik autorem samostatně řešených problému, které jsou tématicky začleněny k různým kapitolám.

Klíčová slova: Wienerův proces, trajektorie, nediferencovatelnost, kvadratická variace, Skorochodovo vnoření

Title: Path analysis of Wiener Process

Author: Evgeniya Belyaeva

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we research and introduce several properties of paths of a Wiener process. At first we present a way to prove existence of a Wiener process and then we discuss its basic properties. The second chapter is devoted to analytical properties of Wiener's paths including monotonicity, differentiability, Hölder continuity and quadratic variation. In the third chapter we research the reflection principle and the distribution of maxima of paths in the case of a random walk and then also in the case of a Wiener process. The fourth chapter concentrates on the Skorohod embedding and its application in the proof of the classic central limit theorem. Finally, using the results of the first chapter we simulate a path of a Wiener process and illustrate some of the properties discussed earlier. To demonstrate the concepts, several problems were included in the relevant chapters together with an author's solution.

Keywords: Wiener process, path, nondifferentiability, quadratic variation, Skorohod Embedding

# Obsah

# Seznam použitých symbolů

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | množina přirozených čísel |
| $\mathbb{N}_0$ | množina nezáporných celých čísel |
| $\mathbb{Q}$ | množina racionálních čísel |
| $\mathbb{R}$ | množina reálných čísel |
| $A^C$ | komplement množiny $A$ |
| $L^2[0{,}1]$ | lebesgueův $L^2$ prostor na uzavřeném intervalu [0,1] |
| $\langle h{,}g\rangle$ | skalární součin funkcí $h$ a $g$ v prostoru $L^2[0{,}1]$ |
| $1_{[a,b]}(x)$ | indikátorová funkce intervalu $[a{,}b]$ v proměnné $x$ |
| $C[0{,}1]$ | prostor spojitých funkcí na intervalu [0,1] |
| $\mathsf{E}\,(\tau)$ | střední hodnota náhodné veličiny $\tau$ |
| $\mathrm{var}(X)$ | rozptyl náhodné veličiny $X$ |
| $\mathsf{P}(A\|B)$ | podmíněná pravděpodobnost jevu $A$ vzhledem k $B$ |
| $\mathsf{E}\,(X\|B)$ | podmíněná střední hodnota náhodné veličiny $X$ za podmínky B |
| $\mathrm{Cov}(X_sX_t)$ | kovarianční funkce náhodného procesu $X_t$ |
| $N(0,t)$ | normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $t$ |
| $X \sim N(0,t)$ | náhodná veličina $X$ má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $t$ |
| $\Phi(x)$ | distribuční funkce normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem |
| $V_f^{(1)}(t)$ | variace funkce $f$ |
| $V^{(2)}(t)$ | kvadratická variace |
| $h \downarrow 0$ | $h$ konverguje seshora k nule |
| $\xrightarrow{D}$ | konverguje v distribuci |

# Úvod

Wienerův proces je náhodný proces, který má centrální postavení mezi spojitými náhodnými procesy. Za matematizaci a důkaz existence Wienerova procesu vděčíme americkému matematikovi Norbertu Wieneru. Nejedná se však o ryze teoretický příklad, původ Wienerova procesu totiž tkví v biologických pozorováních Roberta Browna, z fyzikálního hlediska se o něj zajímal Albert Einstein a z finančního hlediska Louis Bachelier. Myšlenka Wienerova procesu se totiž využívá jak v dalším rozvoji teorie (například při definování Wienerovy míry a Wienerova prostoru) tak i v praxi (například ve finančnictví: výpočet ceny opce).

V této práci se zaměřujeme na konkrétní aspekt Wienerova procesu: jeho trajektorie. Cílem je zjistit, jak se tyto trajektorie chovají z analytického hlediska, prezentovat další zajímavé vlastnosti a uplatnit je při řešení různých problému.

V úvodní kapitole zadefinujeme Wienerův proces a provedeme jeho konstrukci pomocí úplné ortonormální posloupnosti funkcí a Parsevalovy rovnosti. Zmíněnou konstrukci pak využijeme k dokazování existence Wienerova procesu a některých jeho analytických vlastností. V první kapitole také uvedeme některé invariantní transformace Wienerova procesu.

V druhé kapitole uvedeme analytické vlastnosti trajektorií Wienerova procesu. Přestože se nejedná o umělý příklad, jsou to často specifické vlastnosti. Například pro trajektorie skoro jistě platí, že nejsou diferencovatelné v žádném bodě, na žádném intervalu nejsou monotónní a nemají konečnou variaci. V této kapitole jsou také prezentované autorem samostatně řešené problémy týkající se lokálních extrému a nulových bodů trajektorií.

Ve třetí kapitole zadefinujeme náhodnou procházku a ukážeme na ní vlastnosti, které má s Wienerovým procesem společné. Jedná se například o princip reflexe a rozdělení maxima trajektorií. Jako spojovací můstek mezi Wienerovým procesem a náhodnou procházkou použijeme Donskerův princip invariance.

Ve čtvrté kapitole využijeme znalostí z předchozí kapitoly a v samostatně řešeném problému rozšíříme důkaz Skorochodovy věty o vnoření z náhodné veličiny, která nabývá jen konečně mnoha hodnot, na obecnou náhodnou veličinu. Ukážeme, že Skorochodová věta má mnoho aplikací na dalším samostatně řešeném problému. V daném problému dokážeme klasickou centrální limitní větu s pomoci věty o vnoření náhodné procházky do Wienerova procesu.

Nakonec na základě úvodní kapitoly a konstrukce Wienerova procesu provedeme simulaci Wienerova procesu. Využijeme zmíněnou simulaci a ilustrujeme některé vlastnosti trajektorií na grafu.

# 1. Existence a základní vlastnosti

## 1.1 Konstrukce Wienerova procesu

Základní pojem z teorie pravděpodobnosti, kterým se zabýváme v této bakalářské práci, je náhodný proces a jeho trajektorie.

**Definice 1.1.**
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}$. Kolekce náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ se nazývá *náhodný proces*. Pro pevné $\omega \in \Omega$, je $X_t = X_t(\omega)$ reálná funkce proměnné $t$, které říkáme *trajektorie* náhodného procesu $\{X_t\}$.

Podobně jako má náhodná veličina s normálním rozdělením výsadní postavení mezi náhodnými veličinami, má Wienerův proces centrální postavení mezi spojitými náhodnými procesy. Uvedeme nyní jeho definici.

**Definice 1.2.**
*Standardní Wienerův proces* na intervalu $[0,T)$, $T \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, je náhodný proces $\{W_t : 0 \leq t < T\}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ definovaný následujícími vlastnostmi:

(i) $W_0 = 0$,

(ii) přírůstky $W_t$ jsou nezávislé, což znamená, že pro libovolnou množinu časů $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n < T$ platí, že náhodné veličiny $W_{t_2} - W_{t_1}$, $W_{t_3} - W_{t_2}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ jsou nezávislé,

(iii) pro libovolnou dvojici $0 \leq s \leq t < T$ platí, že přírůstek $W_t - W_s$ je náhodná veličina s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem $(t - s)$. Z této vlastnosti taky vyplývá, že pro všechna $t \in [0,T)$ náhodná veličina $W_t$ má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem t, protože $W_t = W_t - W_0$,

(iv) existuje množina $A \subset \mathcal{A}$ taková, že $\mathsf{P}(A) = 1$ a zároveň pro každé $\omega \in A$ : $W_t(\omega)$ je spojitá funkce t. Tedy trajektorie Wienerova procesu jsou skoro jistě spojité.

Existence náhodného procesu, který splňuje definici Wienerova procesu, je dokázána v knize [1] pomocí vhodné reprezentace. Tuto konstrukci popíšeme podrobněji, jelikož budeme její dílčí výsledky potřebovat při dokazování analytických vlastností trajektorie Wienerova procesu a při simulaci trajektorie Wienerova procesu.

**Lemma 1.1.** *Uvažujme následující funkci $h \in L^2[0,1]$, pro kterou platí:*

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0 & \textit{jinak}. \end{cases}$$

*Definujeme posloupnost funkcí $\{n\}$, pomocí původní funkce $h$ následujícím způsobem: $h_n(t) = 2^{j/2}h(2^j t - k)$, kde $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$, dodefinujeme funkci $h_0(t) = 1$. Zmíněná posloupnost $h_n$ je úplná ortonormální posloupnost v prostoru $L^2[0,1]$.*

*Důkaz.*

$$\langle h_n, h_n \rangle = \int_0^1 h_n^2(t)dt = \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 2^j dt = 1$$

$$\langle h_n, h_m \rangle = \int_0^1 h_n(t)h_m(t)dt = 0$$

Indikátorové funkce intervalů tvaru $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$ leží (až na množiny míry nula) v lineárním obalu posloupnosti $\{h_n\}$ a jsou husté v prostoru $L^2[0,1]$. [1] Tudíž i lineární obal posloupností funkcí $h_n$ je hustý v prostoru $L^2[0,1]$.

□

*Poznámka. 1.1.* Integrál z funkce $h_n$ se dá vyjádřit pomocí funkce $g_n$, která se konstruuje podobně jako $h_n$. Na začátku máme funkci $g(s)$, definovanou následujícím způsobem:

$$g(s) = \begin{cases} 2s & 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ 2(1-s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Potom označíme $g_n(s) = g(2^j s - k)$ pro $n \geq 1$ a $g_0(s) = s$. Přičemž $j$ je určeno stejně jako v lemmatu 1.1 v závislosti na $n$. Pro integrál z funkce $h_n$ platí $\int_0^s h_n(t)dt = \lambda_n g_n(s)$, kde $\lambda_n = \frac{1}{2}2^{-j/2}$. V poslední kapitole této práce na obrázku 5.1 je pro názornost zobrazeno prvních sedm funkcí z posloupnosti $g_n$. Funkce $g_n$ budeme využívat jako základní stavební kameny pro konstrukci Wienerova procesu. Jelikož Wienerův proces je náhodný proces, budeme potřebovat k deterministickým funkcím přidat ještě prvek náhody ve tvaru posloupnosti nezávislých náhodných veličin $Z_n$ s normálním rozdělením. V následujícím lemmatu dokážeme, že tato posloupnost je v jistém smyslu omezená, čehož využijeme při dokazování existence Wienerova procesu a jeho $\alpha -$ hölderovskosti.

**Lemma 1.2.** *Nechť je $\{Z_n : 0 \leq n < \infty\}$ posloupnost nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Pak existuje náhodná veličina $C$ taková, že $|Z_n| \leq C\sqrt{\log n}$ pro všechna $n \geq 2$ a zároveň $P(C < \infty) = 1$.*

*Důkaz.* Nechť $x \geq 1$, pak platí

$$\mathsf{P}(|Z_n| \geq x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} dv \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v e^{-\frac{v^2}{2}} dv = e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

tedy pro libovolné $\alpha > 1$ platí

$$\mathsf{P}\left(|Z_n| \geq \sqrt{\alpha \log n}\right) \leq n^{-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

[1] Tuto informaci čerpáme z knihy [1].

Jelikož pro libovolné $\alpha > 1$ je $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}} < \infty$ a náhodné veličiny $Z_n$ jsou nezávislé, podle Borelova-Cantelliho lemmatu platí

$$\mathsf{P}\left(|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha \log n} \text{ pro nekonečně mnoho n}\right) = 0,$$

tedy

$$\mathsf{P}\left(\frac{|Z_n|}{\sqrt{\log n}} \geq \sqrt{2\alpha} \text{ jen pro } n \in K \text{ kde K je konečná podmnožina } \mathbb{N}\right) = 1,$$

tím pádem s pravděpodobností 1 platí

$$\max_{n \in K} \frac{|Z_n|}{\sqrt{\log n}} = \sup_{n \geq 2} \frac{|Z_n|}{\sqrt{\log n}} = M < \infty.$$

Tedy náhodná veličina definovaná předpisem

$$C := \sup_{n \geq 2} \frac{|Z_n|}{\sqrt{\log n}}$$

splňuje $|Z_n| \leq C\sqrt{\log n}$ pro $n \geq 2$ a zároveň $\mathsf{P}(C < \infty) = 1$.

□

*Poznámka. 1.2.* Následující vlastnost náhodných procesů se využívá při klasifikaci náhodných procesů a při zkoumání jejich dalších vlastností. My ji budeme využívat v důkazu věty o existenci Wienerova procesu a ve větě o invariantních transformacích Wienerova procesu.

**Definice 1.3.**
Náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ se nazývá *gaussovský*, pokud pro libovolná $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ má náhodný vektor $(X_{t_1},...,X_{t_n})$ normální rozdělení.

**Věta 1.3.** *Nechť $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\}\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením, nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Pak nekonečná suma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_0^t h_n(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \lambda_n g_n(t) = X_t$$

*na intervalu* [0,1] *skoro jistě stejnoměrně konverguje. Navíc kolekce náhodných veličin $\{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ tvoří standardní Wienerův proces na intervalu* [0,1]*. Tedy náhodný proces, který splňuje všechny čtyři vlastnosti z definice 1.2, existuje (pro $T = 1$).*

*Důkaz.* Důkaz zde uvedeme pouze náznakově, kompletní provedení se dá najít v knize [1].
1) Nejdřív se s použitím lemmatu 1.2 dokáže, že suma $\sum_{n=0}^{\infty} Z_n \lambda_n g_n(t)$ skoro jistě stejnoměrně konverguje na [0,1], tedy trajektorie procesu $X_t$ jsou skoro jistě spojité.
2) Dále se dokáže, že kovarianční funkce procesu $\{X_t : 0 \leq t \leq 1\}$ je taková, jakou by měl mít standardní Wienerův proces, tedy

$$\text{Cov}(X_s,X_t) = \min(s,t) \quad \forall\ 0 \leq s, t \leq 1.$$

Tady se využije lemmatu 1.1 a poznámky 1.1, jelikož

$$\mathsf{E}\,(X_sX_t) = \mathsf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Z_n g_n(s)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m Z_m g_m(t)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n g_n(s)\lambda_n g_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^s h_n(u)du\int_0^t h_n(u)du$$

a podle Parsevalovy rovnosti (kterou můžeme použít, jelikož posloupnost funkcí $h_n$ je podle lemmatu 1.1 úplná a ortonormální)

$$\int_0^1 f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, h_n\rangle\langle g, h_n\rangle$$

pro $f(x) = 1_{[0,s]}(x)$ a $g(x) = 1_{[0,t]}(x)$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^s h_n(u)du\int_0^t h_n(u)du = \min(s,t).$$

(3) Dalším krokem je pomocí teorie charakteristických funkcí dokázat, že $X_t$ je gaussovský proces.
(4) Na závěr se dokáže, že každý gaussovský proces, splňující $\mathsf{E}\,(X_t) = 0$ a $\mathrm{Cov}(X_s,X_t) = \min(s,t)$, má nezávislé přírůstky. Jelikož z bodu 1) víme, že $X_t$ je spojitý proces, $X_t$ odpovídá definici Wienerova procesu (první vlastnost, $W_0 = 0$, plyne z toho, že $g_n(0) = 0$ pro každé $n$). Tedy Wienerův proces existuje.

□

*Poznámka. 1.3.* Wienerův proces se dá z omezeného intervalu [0,1] rozšířit na neomezený $[0,\infty)$ tak, že „slepíme“ spočetně mnoho nezávislých Wienerových procesů z [0,1]. Každý následující úsek začneme tam, kde předchozí skončil (místo v nule). Tedy pro každé $1 \le n < \infty$ vezmeme nezávislý Wienerův proces $W_t^{(n)}$ na intervalu [0,1] a dodefinujeme Wienerův proces na intervalu $[1,\infty)$ jako

$$W_t = \sum_{k=1}^{n} W_1^{(k)} + W_{t-n}^{(n+1)}, \qquad t \in [n, n+1), n \in \mathbb{N}.$$

## 1.2 Invariantní transformace

Wienerův proces je stabilní z hlediska určitých transformací, které jsou často užitečné při dokazování vlastností trajektorií Wienerova procesu. V této kapitole budeme čerpat z knihy [2].

**Tvrzení 1.4.** *(invariantní transformace Wienerova procesu)*
*Náhodný proces $\{X_t : 0 \le t < \infty\}$, definovaný předpisem*

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{a}}W_{at}, \quad t \ge 0 \tag{1}$$

*pro nějaké $a > 0$*
*a náhodný proces $\{Y_t : 0 \leq t < \infty\}$, definovaný*

$$Y_t = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = 0, \\ tW_{\frac{1}{t}}, & \text{pro } t > 0, \end{cases} \tag{2}$$

*jsou zase standardní Wienerovy procesy na intervalu $[0,\infty)$.*

*Důkaz.*
(1) Platí $X_0 = 1/\sqrt{a}W_0 = 0$.
Nechť $0 \leq t_1 < ... < t_n < \infty$ je libovolná uspořádaná n-tice časů. Náhodné veličiny $\frac{1}{\sqrt{a}}(W_{at_2} - W_{at_1}), ..., \frac{1}{\sqrt{a}}(W_{at_n} - W_{at_{n-1}})$ jsou nezávislé, jelikož na konstantě $\frac{1}{\sqrt{a}}$ nezáleží a $(W_{s_2} - W_{s_1}), ..., (W_{s_n} - W_{s_{n-1}})$ jsou nezávislé náhodné veličiny ($s_k := at_k$). Pro každé $0 \leq s \leq t < \infty$ náhodná veličina $(W_{at} - W_{as})$ má rozdělení $N(0, at - as)$, tedy náhodná veličina $X_t - X_s$ má rozdělení $N(0, t - s)$.
Nechť $t$ konverguje k $s$. Pak z vlastnosti (iv) Wienerova procesu a aritmetiky limit víme, že $\frac{1}{\sqrt{a}}W_{at}$ konverguje k $\frac{1}{\sqrt{a}}W_{as}$ skoro jistě. Tedy trajektorie procesu $X_t$ je skoro jistě spojitá.
(2) Wienerův proces je gaussovský (viz bod 3) v důkazu věty 1.3), tudíž libovolný konečněrozměrný náhodný vektor $\left(W_{\frac{1}{t_1}}, ..., W_{\frac{1}{t_n}}\right)$ má normální rozdělení. Náhodný vektor $Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}$ je lineární kombinací náhodného vektoru $\left(W_{\frac{1}{t_1}}, ..., W_{\frac{1}{t_n}}\right)$ a tedy má také normální rozdělení. Z toho plyne, že $Y_t$ je také gaussovský proces.

$$s\,\mathsf{E}\,Y_t = \mathsf{E}\,tW_{\frac{1}{t}} = t\,\mathsf{E}\,W_{\frac{1}{t}} = 0,$$

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \mathsf{E}\,(Y_t - \mathsf{E}\,Y_t)(Y_s - \mathsf{E}\,Y_s) = \mathsf{E}\,Y_tY_s = \mathsf{E}\,tW_{\frac{1}{t}}sW_{\frac{1}{s}} =$$

$$= st\,\mathrm{Cov}(W_{\frac{1}{t}}, W_{\frac{1}{s}}) = \min(s,t)\max(s,t)\frac{1}{\max(s,t)} = \min(s,t).$$

Tudíž (viz bod 4) z důkazu věty 1.3) náhodný proces $Y_t$ má nezávislé přírůstky. $Y_t$ je skoro jistě spojitý pro $t \in (0, \infty)$. Jelikož množina racionálních čísel je spočetná, rozdělení procesu $Y_t$ na racionálních číslech je stejné jako u Wienerova procesu, proto skoro jistě platí

$$\lim_{t \to 0, t \in \mathbb{Q}} Y_t = 0.$$

A jelikož je náhodný proces $Y_t$ skoro jistě spojitý pro $t \in (0, \infty)$, platí

$$Y_0 = 0 = \lim_{t \to 0, t \in \mathbb{Q}} Y_t = \lim_{t \to 0} Y_t \quad \text{skoro jistě.}$$

Tedy $Y_t$ je skoro jistě spojitý na $[0, \infty)$ a $Y_0 = 0$, tudíž se jedná o Wienerův proces.

□

Toto tvrzení má jeden velmi přímočarý důsledek:

**Důsledek.** *(zákon velkých čísel pro Wienerův proces)*
*Nechť $\{W_t, t \geq 0\}$ je Wienerův proces, pak*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{W_t}{t} = 0.$$

*Důkaz.* využijeme druhou část tvrzení 1.4 :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \lim_{s\to 0} sW_{\frac{1}{s}} = \lim_{s\to 0} Y_s = Y_0 = 0.$$

$\square$

# 2. Analytické vlastnosti

Přestože jsou trajektorie Wienerova procesu skoro jistě spojité, co se týče ostatních analytických vlastností, často tak přímočaré nejsou.

## 2.1 Monotónie

Následující kapitola čerpá z knihy [2] a zkoumáme v ní, jestli je Wienerův proces na nějakém intervalu monotónní.

**Věta 2.1.** *Wienerův proces skoro jistě není monotónní na libovolném intervalu* $[a,b]$, $\quad 0 < a < b < \infty$.

*Důkaz.* Zafixujeme interval $[a,b]$. Je-li funkce $f(t) = W_t(\omega)$ monotónní na intervalu $[a,b]$ (bez újmy na obecnosti předpokládáme, že je funkce $f(t)$ rostoucí), pro každé $s$, $t$ taková, že $a \leq s \leq t \leq b$, platí $f(s) \leq f(t)$.
Vybereme si dělící body $a = d_0 \leq d_2 \leq ... \leq d_n = b$ a rozdělíme interval $[a,b] = [d_0,d_n]$ na $n$ intervalů $[d_j,d_{j+1}]$. Jelikož $f(t)$ je rostoucí na $[a,b]$, musí být každý přírůstek $f(d_{j+1}) - f(d_j)$ pro $0 \leq j \leq n-1$ nezáporný. Jelikož jsou přírůstky Wienerova procesu nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou (tudíž jejich rozdělení je symetrické kolem 0), musí platit

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(f(d_{j+1}) - f(d_j) \geq 0 \text{ pro každé } 0 \leq j \leq n-1\right) &= \\ = [\mathsf{P}(f(d_{j+1}) - f(d_j) \geq 0)]^n &= 2^{-n} \end{aligned}$$

Konverguje-li $n$ k nekonečnu, vidíme, že

$$\mathsf{P}(f(d_{j+1}) - f(d_j) > 0 \text{ pro každé } 0 \leq j \leq n-1) = 0.$$

Tedy i $\mathsf{P}($ funkce $f(t)$ je monotónní na intervalu $[a,b]) = 0$.
Uvažujeme intervaly, které mají jako koncové body racionální čísla. Takových intervalů je spočetně mnoho, proto i

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left(f(t) \text{ je monotónní na nějakém intervalu s racionálními koncovými body }\right) \leq \\ &\qquad \leq \sum_{z,k \in Q} \mathsf{P}(f(t) \text{ je monotónní na intervalu } [z,k]) = 0. \end{aligned}$$

Jelikož každý interval obsahuje nedegenerovaný interval s racionálními koncovými body, platí tvrzení věty, tedy

$$\mathsf{P}\left(f(t) \text{ je monotónní na nějakém intervalu } [a,b]\right) = 0.$$

□

## 2.2 Hölderovskost

V této kapitole se podíváme na to, pro která $\alpha \in (0,1)$ je trajektorie Wienerova procesu skoro jistě $\alpha$-hölderovská, přitom čerpáme z knihy [1].

Posloupnost funkcí $\{g_n\}$ popsaná v poznámce 1.1 tvoří bázi pro množinu spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$. Tedy pro libovolnou funkci $f \in C([0,1])$ existuje jednoznačně určená posloupnost koeficientů $\{c_n\}$ takových, že

$$f(t) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(t),$$

přičemž konvergence sumy je stejnoměrná.

**Definice 2.1.**
Řekneme, že funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *$\alpha$-hölderovská* pro $\alpha \in (0,1)$, pokud existuje taková konstanta $c > 0$, že pro každé $a < s < t < b$ platí:

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t - s|^{\alpha}.$$

**Lemma 2.2.** *Nechť pro funkci $f \in C([0,1])$ platí, že $f(t) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(t)$. Jsou-li všechny koeficienty omezené hodnotou $2^{-\alpha j}$, tj. platí-li pro každé $n \geq 0$*

$$|c_n| \leq 2^{-\alpha j} \quad \text{kde} \quad n = 2^j + k, \quad 0 \leq j, \quad 0 \leq k < 2^j,$$

*funkce $f$ je $\alpha$-hölderovská na $[0,\infty)$.*

*Důkaz.* Důkaz tohoto tvrzení je možné nalézt v knize [1]

□

**Věta 2.3.** *Pro libovolné $0 < \alpha < 1/2$ jsou trajektorie Wienerova procesu $W_t$ skoro jistě $\alpha$-hölderovské funkce na intervalu $[0,\infty)$.*

*Důkaz.* Z věty o existenci Wienerova procesu 1.3 víme, že se Wienerův proces dá vyjádřit jako

$$W_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n g_n(t) = W_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n g_n(t).$$

Přičemž $Z_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením, nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. O $Z_n$ z lemmatu 1.2 víme, že existuje náhodná veličina $C$ taková, že

$$|Z_n| \leq C\sqrt{\log n} \quad \text{pro } n \geq 2 \quad \text{a} \quad \mathsf{P}(C < \infty) = 1.$$

Jelikož $n = 2^j + k$ a $0 \leq k < 2^j$, platí, že $\sqrt{\log n} \leq \sqrt{j+1}$. Tedy

$$|c_n| \leq \frac{1}{2} 2^{-j/2} |Z_n| \leq \frac{1}{2} C 2^{-j/2} \sqrt{j+1},$$

přičemž $\frac{1}{2}C$ je s pravděpodobností 1 omezené, výraz $2^{j(\alpha - \frac{1}{2})}$ jde k nule s rostoucím $j$ (a tedy i s rostoucím $n$). Tudíž existuje množina $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mathsf{P}(A) = 1$ a pro každé $\omega \in A$ existuje $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$. Přitom pro každé $n \geq n_0(\omega)$ platí, že $\frac{1}{2} C 2^{\alpha j - \frac{1}{2} j} \sqrt{j+1} \leq 1$. Tím pádem pro všechna $n \geq n_0(\omega)$ platí, že $\frac{1}{2} 2^{-j/2} C \sqrt{j+1} \leq 2^{-\alpha j}$. Pro funkci

$$f_t(\omega) = W_0(\omega) + \sum_{n=n_0(\omega)}^{\infty} \lambda_n Z_n g_n(t)$$

můžeme tedy použít lemma 2.2, jelikož koeficienty $|c_n| = \lambda_n Z_n = \frac{1}{2}2^{-j/2}Z_n$ jsou menší než $2^{-\alpha j}$ pro všechna $n$ a $\alpha \in (0,1/2)$. Tím pádem $f_1(t)$ je skoro jistě $\alpha -$ hölderovská pro libovolné $\alpha \in (0,1/2)$
Funkce $q_t(\omega) = \sum_{n=0}^{n_0(\omega)-1} \lambda_n Z_n g_n(t)$ je také skoro jistě $\alpha -$ hölderovská pro libovolné $\alpha \in (0,1/2)$, protože se jedná o konečný součet lineárních funkcí.
A jelikož $W_t(\omega) = f_t(\omega) + q_t(\omega)$, jsou trajektorie Wienerova procesu také skoro jistě $\alpha -$ hölderovské pro libovolné $\alpha \in (0,1/2)$.

□

## 2.3 Diferencovatelnost

Následující kapitola čerpá z knih [1] a [2]. Zkoumáme v ní, zda jsou trajektorie Wienerova procesu diferencovatelné.
Za zmínku stojí, že pro $\alpha > \frac{1}{2}$ už není důkaz věty 2.3 z předchozí kapitoly použitelný. V jistém smyslu je tento důkaz optimální, protože jak ukazuje následující lemma, pro $\alpha > \frac{1}{2}$ trajektorie Wienerova procesu skoro jistě nejsou $\alpha$- hölderovské.

**Lemma 2.4.** *Označme*

$$G(\alpha,c,\varepsilon) = \{\omega \in \Omega : \exists s \in [0,1],\ |W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq c|t-s|^{\alpha} \quad \forall\, |t-s| \leq \varepsilon\}.$$

*Pokud je* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(G(\alpha,c,\varepsilon)) = 0$ *pro každé* $0 < c < \infty$ *a* $\varepsilon > 0$.

*Důkaz.* Rozdělíme interval $[0,1]$ na n intervalů $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $0 \leq k < n$. Nejdříve zafixujeme číslo $m \in N$ a pro $n \geq m$ definujeme náhodnou veličinu

$$X_{(n,k)} = \max\left\{\left|W_{\frac{j}{n}}(\omega) - W_{\frac{j+1}{n}}(\omega)\right|,\ k \leq j < k+m\right\},\quad 0 \leq k \leq n-m.$$

$X_{(n,k)}$ udává největší absolutní přírůstek funkce $W_t$ v bloku $\beta$, který sestává z $m$ po sobě jdoucích intervalů a začíná v $k$-tým intervalem. Všechna $X_{(n,k)}$ mají stejné rozdělení, protože přírůstky $W_{j/n} - W_{(j+1)/n} \sim N(0,1/n)$ a tedy $X_{(n,k)}$ je pokaždé maximum z $m$ nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin.
Uvažujme množinu $G(\alpha,c,\varepsilon)$ a k ní bod $s \in [0,1]$ takový, že
$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq c|t-s|^{\alpha}$ pro každé $t$ takové, že $|t-s| \leq \epsilon$. Zvolíme $n$ tak, aby $\frac{m}{n} < \varepsilon$. Bod s patří do nějakého bloku $\beta$.
Pro každý z $m$ intervalů $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \in \beta$ platí, že $\left|\frac{j}{n} - s\right| \leq \frac{m}{n} \leq \varepsilon$ a
$\left|\frac{j+1}{n} - s\right| \leq \frac{m}{n} \leq \varepsilon$. Použitím trojúhelníkové nerovnosti a podmínky, kterou klademe na bod s, dostáváme:

$$\left|W_{\frac{j}{n}} - W_{\frac{j+1}{n}}\right| \leq \left|W_{\frac{j}{n}} - W_s\right| + \left|W_s - W_{\frac{j+1}{n}}\right| \leq 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}.$$

Tím pádem existuje takové $0 \leq k \leq n-m$ tak, že $X_{(n,k)} \leq 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}$. Proto

$$G(\alpha,c,\varepsilon) \subset \left\{\omega \in \Omega : \min_{0 \leq k \leq n-m} X_{n,k} \leq 2c\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}\right\}.$$

Tudíž, využijeme-li toho, že $W_{j/n} - W_{(j+1)/n}$ jsou stejně rozdělené, máme

$$\mathsf{P}(G(\alpha,c,\varepsilon)) \leq \mathsf{P}\left(\min_{0 \leq k \leq n-m} X_{(n,k)} \leq 2c(m/n)^{\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n-m} X_{(n,k)} \leq 2c(m/n)^{\alpha}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-m} \mathsf{P}(X_{(n,k)} \leq 2c(m/n)^{\alpha}) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}(X_{(n,1)} \leq 2c(m/n)^{\alpha}) = n\,\mathsf{P}(X_{(n,1)} \leq 2c(m/n)^{\alpha}) =$$

$$= n\,\mathsf{P}\left(\max_{1\leq j<1+m} |W_{j/n}(\omega) - W_{(j+1)/n}(\omega)| \leq 2c(m/n)^{\alpha}\right) \leq$$

$$\leq n(\mathsf{P}(|W_{1/n}(\omega) - W_{2/n}(\omega)| \leq 2c(m/n)^{\alpha}))^m \leq n(\mathsf{P}(|W_{1/n}| \leq 2c(m/n)^{\alpha}))^m.$$

Z první části tvrzení 1.4 víme, že náhodná veličina $B_{\frac{1}{n}}$ má stejné rozdělení jako náhodná veličina $\frac{1}{n^2}B_1$. Přitom $B_1 \sim N(0,1)$, tudíž $\mathsf{P}(|B_1| \leq x) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. Proto platí

$$\mathsf{P}(G(\alpha,c,\varepsilon)) \leq n(\mathsf{P}(|B_{1/n}| \leq 2c(m/n)^{\alpha}))^m \leq \left(\frac{4cm^{\alpha}}{2\pi}\right)^m n^{1-m(\alpha-1/2)}.$$

Uvážením $m$ takového, že $m(\alpha - 1/2) > 1$, docílíme toho, že výraz $\left(\frac{4cm^{\alpha}}{2\pi}\right)^m n^{1-m(\alpha-1/2)}$ půjde s rostoucím $n$ k nule. Tedy $\mathsf{P}(G(\alpha,c,\varepsilon)) = 0$.

□

**Věta 2.5.** *Trajektorie Wienerova procesu je skoro jistě nediferencovatelná v každém bodě* $0 \leq t < \infty$.

*Důkaz.* Označíme

$$D := \{\omega \in \Omega : \exists s \in [0,1] \text{ tak, že } f(t) = W_t(\omega) \text{ je diferencovatelná v bodě s}\}$$

Pokud $\omega \in D$ platí, že existuje $s \in [0,1]$ tak, že

$$\lim_{t\to s} \frac{W_t(\omega) - W_s(\omega)}{t - s} = L, \text{ přičemž } L \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall|t - s| < \delta : \quad \left|\frac{W_t(\omega) - W_s(\omega)}{t - s} - L\right| < \varepsilon.$$

Jelikož z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že

$$\left|\frac{W_t(\omega) - W_s(\omega)}{t - s} - L\right| > \left|\frac{W_t(\omega) - W_s(\omega)}{t - s}\right| - |L|,$$

platí

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| < (\varepsilon + |L|)\;(|t - s|).$$

Tedy nutně existuje $k : \frac{1}{k} \leq \delta$ a $j : j \geq (\varepsilon + |L|)$, pro něž platí

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| < j|t - s| \text{ pro každé } t\text{takové, že } |t - s| < \frac{1}{k}.$$

Tím pádem

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} G(1,j,1/k).$$

Můžeme tedy odhadnout pravděpodobnost toho, že nastane jev $D$ takto:

$$\mathsf{P}(D) \leq \mathsf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} G(1,j,1/k)\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(G(1,j,1/k)).$$

Vzhledem k lemmatu 2.4 pro $\alpha = 1$, $\mathsf{P}(G(1,j,1/k)) = 0$ pro každé $k \geq 1$ a $j \geq 1$. Jelikož se jedná o spočetný součet, $\mathsf{P}(D)$ se také rovná nule. Tedy trajektorie Wienerova procesu jsou skoro jistě nediferencovatelné v každém bodě $t \in [0,1]$. Vzhledem ke konstrukci Wienerova procesu na intervalu $[0,\infty)$, kdy pro každé $t \in [n,n+1)$, $W_t = \sum_{k=1}^{n} W_1^{(k)} + W_{t-n}^{(n+1)}$ ($W_t^{(k)}$ jsou nezávislé Wienerovy procesy na intervalu $[0,1]$), otázka diferencovatelnosti v libovolném bodě $t \in [n,n+1)$ se dá převést na otázku diferencovatelnosti v bodě $t-n$, který patří do intervalu $[0,1]$. Označíme

$$D^{(k)} := \{\omega \in \Omega : \exists s \in [0,1] \text{ tak, že } W_t^{(k)}(\omega) \text{ je diferencovatelná v bodě s }\}.$$

Tudíž pro množinu $\delta$ definovanou

$$\delta := \{\omega \in \Omega : \exists s \in [0,\infty) : \ W_t(\omega) \text{ je diferencovatelná v bodě s}\},$$

platí, že

$$\delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} D^{(k)}.$$

Jedná se o spočetné sjednocení, tudíž $\mathsf{P}(\delta) = 0$.

□

Věta 2.5 dává přirozený příklad spojité funkce, která je ale zároveň nediferencovatelná v každém bodě, což je zajímavé i z hlediska matematické analýzy.

Na problematiku diferencovatelnosti trajektorií Wienerova procesu bychom se mohli podívat z odlišného úhlu. Mohli bychom se podívat na Diniho derivace v nějakém bodě $t$ a zkoumat, jestli se rovnají. A právě o tom je tvrzení následující věty 2.6, kterou využijeme v další kapitole při řešení teoretických úloh.

**Věta 2.6.** *Buď $t \geq 0$. Pak trajektorie Wienerova procesu skoro jistě není diferencovatelná v bodě $t$. Navíc platí, že*

$$D^* W_t = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} = \infty, \quad \textit{skoro jistě},$$

$$D_* W_t = \liminf_{h\downarrow 0} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} = -\infty, \quad \textit{skoro jistě}.$$

*Důkaz.* Důkaz této věty opírající se o tvrzení 1.4 a o fakt, že

$$\limsup_{n\to\infty} W_n/\sqrt{n} = \infty \text{ skoro jistě a}$$

$$\liminf_{n\to\infty} W_n/\sqrt{n} = -\infty \text{ skoro jistě,}$$

je uveden v knize [2].

□

## 2.4 Lokální extrémy a nulové body

V této kapitole jsou uvedené autorem samostatně řešené problémy, které se zabývají existenci lokálních extrému a chováním trajektorií Wienerova procesu v okolí bodu $t = 0$.

**Problém. 1.** Uvažujme Wienerův proces $\{W_t : 0 \leq t < \infty\}$. Dokažte, že pak libovolný bod $t \geq 0$ skoro jistě není lokální maximum trajektorie Wienerova procesu $W_t$.

*Řešení.* K důkazu využijeme větu 2.6 která mimo jiné říká, že pro $t \geq 0$

$$D^* W_t = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} = \infty,$$

tedy

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \left( \sup_{h \in (t, t+\delta)} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \right) = \infty \quad \text{skoro jistě },$$

což znamená, že

$$\forall A > 0 \, \forall \delta > 0 \, \sup_{h \in (t,t+\delta)} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} > A \quad \text{skoro jistě.}$$

Tudíž pro $A = 1$

$$\forall \delta > 0 \, \exists h_\delta \in (t, t+\delta) \text{ takové, že} W_{t+h_\delta} - W_t > h_\delta \quad \text{skoro jistě.}$$

Jelikož $h_\delta > 0$, v libovolně malém okolí bodu $t$ skoro jistě najdeme takový bod $t + h_\delta$, že $W_{t+h_\delta} > W_t$. Tím pádem bod $t$ skoro jistě není lokální maximum.

△

Druhou otázkou je, s jakou pravděpodobností lokální maximum trajektorie Wienerova procesu existuje. Bodů $t \in (0,\infty)$ je totiž nespočetně mnoho, proto z toho, že každý bod skoro jistě není lokální maximum, nevyplývá, že žádný lokální maximum neexistuje.

**Problém. 2.** Dokažte, že

$$\mathsf{P}(\text{lokální maximum trajektorie Wienerova procesu existuje}) = 1$$

*Řešení.* Weierstrassova věta o extrémech tvrdí, že každá spojitá funkce na kompaktní množině nabývá svého maxima i minima. Z definice Wienerova procesu víme, že jeho trajektorie jsou skoro jistě spojité. Uvažujme uzavřené intervaly $[k,k+1]$ pro $k \in \mathbb{N}_0$, které jsou kompaktní množiny. Trajektorie Wienerova procesu tedy skoro jistě nabývají na každém intervalu $[k,k+1]$ svého maxima (i minima). Jenže pokud by s nenulovou pravděpodobností platilo, že maxima je nabyto vždy jen v pravém krajním bodě, tak nemusíme nutné najít lokální maximum v tomto krajním bodě (představme si například rostoucí funkci [1]).

[1] My sice z kapitoly o monotónii víme, že trajektorie Wienerova procesu skoro jistě monotónní na žádném intervalu není, můžeme však rostoucí funkci použít jako nejjednodušší příklad. Existují totiž i pravděpodobnější průběhy, na které musíme brát ohled.

Podívejme se tedy na to, s jakou pravděpodobností nastane jev $U$, který spočívá v tom, že maxima bude nabyto vždy v pravém krajním bodě (pro každý interval $[k,k+1]$ v bodě $k+1$). Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mathsf{P}(U) \leq \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\{W_{k+1} - W_k \geq 0\}\right).$$

Jelikož přírůstky Wienerova procesu jsou nezávisle náhodné veličiny s normálním rozdělením a nulovou střední hodnotou, platí také

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\{W_{k+1} - W_k \geq 0\}\right) = \prod_{k=0}^{n}\mathsf{P}(\{W_{k+1} - W_k \geq 0\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Tím pádem

$$\mathsf{P}(U) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0.$$

Z toho vyplývá, že skoro jistě existuje takový interval $[k, k+1]$, jehož maximum neleží v pravém krajním bodě. Teď nastanou dvě možností. Buď existuje takový maximální bod, který leží uvnitř uzavřeného intervalu. A to znamená, že tento maximální bod je zároveň lokální maximum trajektorie Wienerova procesu (kolem něj existuje neprázdné otevřené okolí, na kterém je jeho hodnota maximální). Nebo se maximálních hodnot nabývá jen v krajních levých bodech uzavřených intervalů. Tady musíme být opatrní (kvůli tomu, že by funkce mohla být například klesající) a vybrat si nejmenší krajní levý bod, ve kterém se na nějakém intervalu nabývá maxima. Potom je tento bod lokálním maximem trajektorie Wienerova procesu. Tím pádem platí, že

$$\mathsf{P}(\text{ lokální maximum trajektorie Wienerova procesu existuje }) = 1.$$

$\triangle$

*Poznámka. 2.1.* Dozvěděli jsme se tedy, že každý bod trajektorie Wienerova proces sice skoro jistě není lokální maximum, ale na druhou stranu nějaký lokální maximum trajektorie Wienerova procesu skoro jistě existuje. Totéž platí i pro duální pojem, lokální minimum.

**Problém. 3.** Nechť $\{W_t, t \geq 0\}$ je Wienerův proces. Dokažte, že

$$\mathsf{P}(W_t = 0 \text{ pro nekonečně mnoho } t) = 1.$$

*Řešení.* Využijeme toho, že i v bodě $t = 0$ platí věta 2.6. Tedy $D^*W_0 = \infty$ a $D_*W_0 = -\infty$. Tím pádem

$$D^*W_0 = \limsup_{h\downarrow 0}\frac{W_h - W_0}{h} = \limsup_{h\downarrow 0}\frac{W_h}{h} = \infty \quad \text{skoro jistě},$$

tedy

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\left(\sup_{h\in(0,\delta)}\frac{W_h}{h}\right) = \infty \quad \text{skoro jistě },$$

což znamená, že

$$\forall\delta > 0 \ \sup_{h\in(0,\delta)} \frac{W_h}{h} > 1 \quad \text{skoro jistě.}$$

Tedy pro každé $\delta > 0$ existuje $h_+ \in (0,\delta)$ takové, že $W_{h_+} > h_+ > 0$.
A analogicky pro každé $\delta > 0$ existuje $h_- \in (0,\delta)$ a $W_{h_-} < 0$.
Tím pádem pro libovolné $\delta > 0$ existují dva body $h_+, h_- \in (0,\delta)$ takové, že $W_{h_+} > 0$ a zároveň $W_{h_-} < 0$.
Trajektorie Wienerova procesu jsou skoro jistě spojité, tedy mají skoro jistě Darbouxovu vlastnost nabývání mezihodnot. Tím pádem platí, že pro libovolné $\delta > 0$ existuje bod $h_0 \in (0,\delta)$ takový, že $W_{h_0} = 0$. Teď už zbývá definovat nekonečnou posloupnost nulových bodů. Jelikož $h_0 > 0$, můžeme použít $h_0$ jako $\delta$ a odkázat se na předchozí úvahy, ze kterých plyne, že existuje další nulový bod $h_1 \in (0, h_0)$, $W_{h_1} = 0$. A rekurentně: $h_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, tedy existuje $h_{n+1} \in (0, h_n)$ tak, že $W_{h_{n+1}} = 0$.

△

*Poznámka. 2.2.* Našli jsme nekonečně mnoho nulových bodů, ale zároveň jsme dokázali silnější tvrzení: na libovolně malém okolí bodu $t = 0$, trajektorie Wienerova procesu skoro jistě nekonečně krát změní znaménko a nekonečně krát protne 0. Jelikož přírůstky Wienerova procesu jsou nezávislé, pokaždé, kdy trajektorie protne 0, začíná standardní Wienerův proces nanovo. To znamená, že pro každý nulový bod skoro jistě platí, že v jeho libovolně malém pravém okolí existuje další nulový bod. Tuto vlastnost však nemá každý nulový bod $t \in [0,1]$. Například poslední nulový bod před časem $t = 1$, $\tau = \sup\{t : W_t = 0, t < 1\}$ tuto vlastnost z definice nemá, což se zdá být na první pohled paradoxní.[2]

## 2.5 Lévyho Modul spojitosti

Ve větě 2.3 jsme dokázali, že trajektorie Wienerova procesu jsou skoro jistě $\alpha$-hölderovské pro $\alpha \in (0,1/2)$. V lemmatu 2.4 jsme na druhou stranu dokázali, že pro $\alpha > 1/2$ trajektorie Wienerova procesu $\alpha$-hölderovské nejsou. Avšak jsme zatím nezkoumali případ, kdy $\alpha = 1/2$. Tomuto případu je věnovaná následující věta z knihy [4].

**Věta 2.7.** *Buď $\{W_t : 0 \leq t \leq 1\}$ Wienerův proces, pak skoro jistě platí*

$$\limsup_{h\downarrow 0} \sup_{0\leq t\leq 1-h} \frac{|W_{t+h} - W_t|}{\sqrt{2h\log 1/h}} = 1.$$

*Důkaz.* *Důkaz je možné nalézt v knize [4].*

□

## 2.6 Variace a kvadratická variace

Tato kapitola čerpá ze zdroje [2] a zabývá se otázkou konečnosti variace a kvadratické variace trajektorií Wienerova procesu.

[2] čerpáme z knihy [2].

**Definice 2.2.**
Nechť je funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zprava spojitá. Řekněme, že $f$ *má konečnou variaci*, pokud

$$V_f^{(1)}(t) := \sup \sum_{j=1}^{k} |f(t_j) - f(t_{j-1})| < \infty,$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{k-1} \leq t_k = b$. Jinak řekněme, že $f$ *nemá konečnou variaci.*

**Definice 2.3.**
Nechť $0 < t < \infty$ a posloupnost dělení intervalu $[0,t]$

$$0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq ... \leq t_{k(n)}^{(n)} = t$$

je taková, že $k(n) \geq k(n-1) + 1$ a rozdíl

$$\Delta(n) := \sup_{1 \leq j \leq k(n)} \{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\}$$

konverguje k nule. Pak definujeme *kvadratickou variaci* Wienerova procesu jako náhodnou veličinu

$$V^{(2)}(t) := \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{k(n)} \left( W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)}) \right)^2.$$

**Věta 2.8.** *Kvadratická variace $V^{(2)}(t) = t$ skoro jistě, a proto Wienerův proces skoro jistě nemá konečnou variaci.*

*Důkaz.* Zde uvedu pouze první část důkazu: jde o implikaci, kdy z $V^{(2)}(t) = t$ skoro jistě plyne, že trajektorie Wienerova procesu nemá konečnou variaci. Z věty 2.3 víme, že trajektorie Wienerova procesu je skoro jistě $\alpha$-hölderovská pro $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Tedy existuje konstanta $c > 0$ tak, že pro každé $a,b \in [0,t]$ platí $|W_a - W_b| \leq c|a - b|^\alpha$. Tedy pokud $|a - b| \leq \Delta(n)$, $|W_a - W_b| \leq c\,(\Delta(n))^\alpha$. Tím pádem jelikož pro všechny body v dělení platí, že $\left(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right) \leq \Delta(n)$,

$$\left| W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{(j-1)}^{(n)}} \right| \leq c\Delta(n)^\alpha.$$

Rozepíšeme sumu následujícím způsobem

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \left( W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{(j-1)}^{(n)}} \right)^2 = \sum_{j=1}^{k(n)} \left| W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{(j-1)}^{(n)}} \right| . \left| W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{(j-1)}^{(n)}} \right| .$$

Použijeme nerovnost, která plyne z $\alpha$-hölderovskosti pro jednu z absolutních hodnot

$$c^{-1}\Delta(n)^{-\alpha} \sum_{j=1}^{k(n)} \left( W_{t_j^{(n)}}) - W_{t_{(j-1)}^{(n)}}) \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{k(n)} |W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{(j-1)}^{(n)}}|.$$

Jelikož $\alpha > 0$, $\Delta(n)$ konverguje k 0 při $n$ jdoucím do nekonečna a
$V^{(2)}(t) = t < \infty$ skoro jistě, musí skoro jistě platit, že

$$\sup \sum_{j=1}^{k} \left| W_{t_j} - W_{t_{(j-1)}} \right| \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} |W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{(j-1)}^{(n)}}| \geq tc^{-1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\Delta(n))^{\alpha}} = \infty.$$

Tedy Wienerův proces má nekonečnou variací. Druhý krok důkazu, který se zaměřuje na prokázání toho, že $V^{(2)}(t) = t$, využívá teorii martingalů a je podrobně uveden v knize [2].

$\square$

# 3. Princip reflexe

## 3.1 Náhodná procházka a její vlastnosti

Pro lepší pochopení Wienerova procesu a s cílem ukázat jisté vlastnosti Wienerova procesu na jednodušším příkladě zadefinujeme náhodnou posloupnost zvanou náhodná procházka. Jak se dále ukáže, souvislost mezi těmito dvěma objekty je velmi úzká a názorná. V této kapitole čerpáme z knih [1] a [3].

**Definice 3.1.**
Nechť $\{X_i : 1 \leq i < \infty\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin takových, že

$$\mathsf{P}(X_i = -1) = \mathsf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

Položme $S_0 = k$ pro nějaké $k \in N \cup \{0\}$ a $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, $(1 \leq n < \infty)$. Pak náhodnou posloupnost $\{S_n : 1 \leq n < \infty\}$ nazveme *náhodná procházka.* Pokud $S_0 = 0$, řekněme, že $\{S_n\}$ je *symetrická náhodná procházka.*

Nás bude u symetrické náhodné procházky mimo jiné zajímat, s jakou pravděpodobností překročí trajektorie náhodné procházky hranici $A$ před tím, než překročí hranici $-B$. $A, B$ jsou v tomto případě kladná přirozená čísla, která si předem stanovíme.

**Tvrzení 3.1.** *Nechť náhodná posloupnost $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ je náhodná procházka. Uvážíme dvě kladná čísla $A, B \in \mathbb{N}$. Zadefinujeme si čas výstupu $\tau$ následujícím způsobem: $\tau = \min\{n \geq 0 : S_n = A \text{ nebo } S_n = -B\}$. Pak platí*

*(i)* $P(S_\tau = A | S_0 = 0) = \dfrac{B}{A+B}$,

*(ii)* $P(S_\tau = -B | S_0 = 0) = \dfrac{A}{A+B}$,

*(iii)* $E(\tau | S_0 = 0) = AB$.

*Důkaz.* Nejdřív dokážeme, že $\mathsf{P}(\tau = \infty) = 0$. Uvažme náhodný jev $E_k$: náhodné veličiny $(S_n - S_{n-1})$ mají hodnotu 1 pro všechna přirozená $n$ z intervalu $[k(A+B), (k+1)(A+B) - 1]$. Potom platí

$$\mathsf{P}(\tau > n(A+B) | S_0 = 0) \leq \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} E_k^C\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

A jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathsf{P}(\tau = \infty | S_0 = 0) \leq \mathsf{P}(\tau > n(A+B) | S_0 = 0),$$

A tedy, při n jdoucím do nekonečna, dostáváme $\mathsf{P}(\tau = \infty) = 0$.
Z tohoto výsledku můžeme dokonce odvodit, že náhodná veličina $\tau$ má konečné momenty všech řádů. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Použijeme-li odhad

$$\tau^d \, 1_{((k-1)(A+B), k(A+B))}(\tau) \leq k^d (A+B)^d \, 1_{((k-1)(A+B), \infty)}(\tau)$$

a fakt, že pro libovolnou nezápornou celočíselnou náhodnou veličinu N platí, že

$$\mathsf{E}\,(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N \geq k),$$

dostaneme, že

$$\mathsf{E}\,(\tau^d) \leq \sum_{k=0}^{\infty} k^d (A+B)^d\, 1_{((k-1)(A+B),\infty)}(\tau) \leq \sum_{k=0}^{\infty} k^d (A+B)^d \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < \infty.$$

(i) Hledáme hodnotu pravděpodobnosti $\mathsf{P}(S_\tau = A|S_0 = 0)$. Položme $a_k = \mathsf{P}(S_\tau = A|S_0 = k)$. Jelikož se po jednom kroku můžeme dostat z hodnoty $k$ do hodnoty $(k+1)$ nebo $(k-1)$ s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, platí následující rekurentní vztah:

$$a_k = \frac{1}{2}a_{k-1} + \frac{1}{2}a_{k+1}, \quad -B < k < A.$$

Navíc platí okrajové podmínky $a_A = 1$ a $a_B = 0$. Výše popsaný rekurentní vztah spolu s okrajovými podmínkami tvoří homogenní diferenční soustavu s konstantními koeficienty. Přitom charakteristická rovnice této soustavy je $1/2(\lambda - 1)^2 = 0$. Kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Obecné řešení tedy musí být ve tvaru $a_k = c_1 + kc_2$. Vezmeme-li v úvahu počáteční podmínky, dostaneme, že řešením soustavy diferenčních rovnic je posloupnost $a_k = \dfrac{B}{A+B} + k\dfrac{A}{A+B}$. Dosazením $k = 0$ zjistíme, že:

$$\mathsf{P}(S_\tau = A|S_0 = 0) = a_0 = \frac{B}{A+B}.$$

(ii) Jelikož platí

$$\mathsf{P}\,(S_\tau = A|S_0 = 0) + \mathsf{P}\,(S_\tau = -B|S_0 = 0) = 1,$$

z bodu (i) dostáváme, že $\mathsf{P}\,(S_\tau = -B|S_0 = 0) = \dfrac{A}{A+B}$.

(iii) Označme $b_k = E(\tau|S_0 = k)$. Po jednom kroku se změní hodnota součtu $S_n$ a zároveň se o jednotku zvýší čas čekání na událost $\{S_n = A \text{ nebo } S_n = -B\}$, tudíž dostáváme opět rekurentní vzorec

$$b_k = \frac{1}{2}b_{k-1} + \frac{1}{2}b_{k+1} + 1.$$

Jelikož v okamžiku, kdy dosáhneme buď hodnoty $A$ nebo hodnoty $-B$, už nemusíme na nic čekat, okrajové podmínky k této nehomogenní diferenční rovnici jsou: $b_A = 0$ a $b_{-B} = 0$.

Abychom vyřešili tuto soustavu, budeme postupovat spíše intuitivně, s využitím vhodné analogie. Správnost výsledku, který tímto způsobem dostaneme, ověříme dosazením do soustavy. Zadefinujeme si operátor diference $\Delta b_{k-1} := b_k - b_{k-1}$. Použijeme-li operátor $\Delta$ dvakrát, dostáváme $\Delta^2 b_{k-1} = b_{k+1} - 2b_k + b_{k-1}$. Naše soustava se pomocí tohoto operátoru dá vyjádřit takto:

$$\frac{1}{2}\Delta^2 b_k = -1, \quad -B < k < A.$$

Při této formulaci se nabízí analogie mezi druhou diferencí funkce na přirozených číslech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a druhou derivací reálné funkce. Jelikož jediná reálná funkce, která má konstantní druhou derivaci je kvadratický polynom, koeficient u členu $k^2$ by měl být $-1$. Jelikož pro $k = A$ a $k = -B$ je hodnota polynomu nulová, připadá v úvahu funkce $-(k - A)(k + B)$. Jelikož skutečně platí, že

$$-(k-A)(k+B) = -\frac{1}{2}(k-1-A)(k-1+B) - \frac{1}{2}(k+1-A)(k+1+B) + 1$$

je $b_k = -(k - A)(k + B)$. Střední hodnota je tím pádem $E(\tau|S_0 = 0) = b_0 = AB$.

□

**Definice 3.2.**
Nechť $S_n$ je náhodná procházka. Nechť $x > 0$ a $\tau := \min\{n : S_n = x\}$. Definujeme náhodnou posloupnost $T_n$ předpisem

$$T_n = \begin{cases} S_n & \text{pro } n < \tau, \\ S_\tau - (S_n - S_\tau) & \text{pro } n \geq \tau. \end{cases}$$

*Poznámka. 3.1.* Všechna sdružená rozdělení náhodných posloupností $\{S_n : n \geq 0\}$ a $\{T_n : n \geq 0\}$ jsou stejná, a tak můžeme pomocí náhodné posloupnosti $\{T_n\}$ odvodit překvapivé vlastnosti náhodné procházky.

**Tvrzení 3.2.** *Nechť $\{S_n\}$ je náhodná procházka. Definujeme náhodnou veličinu $S_n^m := \max\{S_k, 0 \leq k \leq n\}$. Pak*

$$2\,P(S_n > x) + P(S_n = x) = P(S_n^m \geq x). \tag{1}$$

*Důkaz.* Překročí-li hodnota náhodné procházky v čase $k \geq \tau$ hranici $(x + y)$ pro nějaké $y > 0$, musí nutně platit, že $T_k \leq x - y$:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(n \geq \tau, S_n > x + y) &= \mathsf{P}(n \geq \tau, S_\tau - (S_n - S_\tau) < 2S_\tau - x - y) = \\ &= \mathsf{P}(n \geq \tau, T_n < 2x - x - y) = \mathsf{P}(n \geq \tau, T_n < x - y). \end{aligned}$$

Jelikož platí, že rozdělení náhodných posloupností $\{T_n\}$ a $\{S_n\}$ jsou stejná, dostáváme i následující rovnost

$$\mathsf{P}(n \geq \tau, S_n > x + y) = \mathsf{P}(n \geq \tau,\ S_n < x - y).$$

Podívejme se teď na náhodnou posloupnost $\{S_n^m\}$. Pro každé $n \in N_0$ se jedná o maximální hodnotu, které dosáhla náhodná posloupnost $\{S_k\}$ do okamžiku $n$. Vzhledem k tomu, jak je definovaný čas $\tau$, víme, že právě když je $n \geq \tau$, tak už pro nějakou hodnotu $0 < l \leq n$ muselo nastat $S_l \geq x$. Proto také platí, že

$$\mathsf{P}(S_n^m \geq x, S_n \geq x + y) = \mathsf{P}(S_n^m \geq x,\ S_n \leq x - y) \quad \forall\, x \geq 0, y \geq 0.$$

A jelikož z $S_n \geq x + y$ plyne $S_n^m \geq x$, dostáváme rovnost $\mathsf{P}(S_n > x + y) = \mathsf{P}(S_n^m \geq x,\ S_n < x - y)$. Volbou $y = 0$ máme $\mathsf{P}(S_n > x) = \mathsf{P}(S_n^m \geq x,\ S_n < x)$. Jelikož také platí $\mathsf{P}(S_n \geq x) = \mathsf{P}(S_n^m \geq x,\ S_n \geq x)$,po sečtení těchto dvou rovnic dostáváme

$$2\,\mathsf{P}(S_n > x) + \mathsf{P}(S_n = x) = \mathsf{P}(S_n^m \geq x).$$

□

**Důsledek.** *Rovnost (1) z tvrzení 3.2 pomáhá zjistit asymptotické rozdělení maxima náhodné procházky. Pokud do (1) totiž dosadíme za $x$ hodnotu $\sqrt{n}x$, dostaneme*

$$P(S_n^m/\sqrt{n} \geq x) = 2\,P(S_n/\sqrt{n} > x) + P(S_n/\sqrt{n} = x).$$

*Tudíž máme*

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n^m/\sqrt{n} \geq x) = 2 \lim_{n\to\infty} P(S_n\sqrt{n} \geq x) = 2(1 - \Phi(x)),$$

*kde $\Phi$ je distribuční funkce normálního rozdělení.*

## 3.2 Analogie pro Wienerův proces

*Poznámka. 3.2.* Náhodnou procházku můžeme využít při aproximaci Wienerova procesu následujícím způsobem. Označíme náhodný proces $S(n,t) = S_n + (t - n)X_{n+1}$ pro $n < t \leq n+1$. Tento proces přeškálujeme a dostaneme $WS_t^{(n)} = S(n,nt)/\sqrt{n}$ pro $0 \leq t \leq 1$. Nyní uvedeme větu z knihy [1], která v jistých případech propojuje znalostí, které máme o náhodné procházce s vědomostmi o Wienerově procesu.

**Věta 3.3.** *(Donskerův princip invariance) Nechť $\{W_t, 0 \leq t \leq 1\}$ je Wienerův proces a $\{WS_t^{(n)}, 0 \leq t \leq 1\}$ je náhodný proces definovaný v poznámce 3.2. Pro libovolný spojitý funkcionál $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$, platí*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(F\left(WS_t^{(n)}\right) \leq x\right) = P\left(F\left(W_t\right) \leq x\right).$$

*Důkaz.* V knize [1] je tato věta uvedená bez důkazu, avšak v knize [6] je možné nalézt Donskerovu větu i s důkazem. Jedná se o obecnější tvrzení, ze kterého plyne tvrzení této věty.

□

Teď uvedeme věty, které jsou analogické větám o náhodné procházce, ale týkají se Wienerova procesu. Jelikož na rozdíl od náhodné procházky je Wienerův proces spojitý proces, budeme potřebovat následující definice.

**Definice 3.3.**
Buď $\{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ stochastický proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Řekněme, že $\sigma$-algebry $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ tvoří *filtraci* procesu $X_t$, jestliže $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pro $s \leq t$ a $X_t$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelná náhodná veličina, $t \geq 0$.

**Definice 3.4.**
Nechť $\{\mathcal{F}_t\}$ je filtrace (stochastického procesu $X_t$). Řekněme, že $\tau : \omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je *markovský* čas vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t$, pokud $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pro všechna $t \geq 0$.

**Tvrzení 3.4.** *Nechť $A, B > 0$, $\tau = \min\{t : W_t = -B$ nebo $W_t = A\}$, pak platí $P(\tau < \infty) = 1$ a*

*(i)* $P(W_\tau = A) = \dfrac{B}{A+B}$

*(ii)* $P(W_\tau = B) = \dfrac{A}{A+B}$

*(iii)* $E(\tau) = AB$.

*Důkaz.* Je možné nalézt v knize [1].

□

Podobný princip reflexe jako pro náhodnou procházku platí i pro její limitní spojitou verzi, Wienerův proces.

**Věta 3.5.** *(Princip reflexe pro trajektorii Wienerova procesu) Je-li $\tau$ markovský čas vzhledem k filtraci standardního Wienerova procesu $\{W_t : t \leq 0\}$, pak proces $\{V_t : t \leq 0\}$ definovaný předpisem:*

$$V_t = \begin{cases} W_t & \text{pro } t < \tau, \\ W_\tau - (W_t - W_\tau) & \text{pro } t \geq \tau \end{cases}$$

*je taktéž Wienerův proces.*

*Důkaz.* Důkaz je možné nalézt v [1].

□

*Poznámka. 3.3.* Obrázek, znázorňující aproximaci trajektorie náhodného procesu $V_t$ a jeho vztah k původní trajektorii Wienerova procesu $W_t$, je možné nalézt v poslední kapitole této práce o simulaci Wienerova procesu. Jedná se o obrázek **??**.

**Věta 3.6.** *Nechť $\{W_t, t \geq 0\}$ je Wienerův proces, pak pro rozdělení jeho maxima na intervalu* [0,1] *platí*

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq 1} W_t \geq x\right) = 2\left(1 - \Phi(x)\right).$$

*Důkaz.* Využijeme-li důsledek 3.1 a větu 3.3, z toho, že maximum je spojitý funkcionál plyne tvrzení věty.

□

# 4. Skorochodova věta o vnoření

V této kapitole jsou uvedené věty a autorem samostatně řešené problémy týkající se Skorochodova vnoření. Pro každý fixovaný čas $t \geq 0$ rozdělení náhodné veličiny $W_t$ známe, jedná se o normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $t$. Když je ale čas $\tau$ také náhodná veličina s nějakým rozdělením, situace se zkomplikuje.

## 4.1 Skorochodovo vnoření

**Věta 4.1.** *(Skorochodová věta o vnoření)*
*Nechť $\{W_t, t \geq 0\}$ je Wienerův proces. Nechť $X$ je náhodná veličina se střední hodnotou 0 a rozptylem $0 < \sigma^2 < \infty$. Pak existuje náhodný markovský čas $\tau$ takový, že pro každé $x \in \mathbb{R}$*

$$P(W_\tau \leq x) = P(X \leq x)$$

a

$$E\,\tau = \sigma^2.$$

*Důkaz.* V knize [1] je uveden důkaz této věty pro náhodnou veličinu $X$, která nabývá jen konečně mnoha hodnot.

□

**Problém. 4.** Rozšiřte důkaz věty 4.1 na obecný případ náhodné veličiny $X$ s distribuční funkci $F$, nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem $0 < \sigma^2$.

*Řešení.* $\mathsf{E}\,X = 0$, proto

$$-\int_{-\infty}^{0} x dF(x) = \int_{0}^{\infty} x dF(x).$$

Označíme

$$\gamma = -\int_{-\infty}^{0} x dF(x) = \int_{0}^{\infty} x dF(x).$$

Mějme náhodný interval $(D,H)$, kde D značí dolní hranici a H horní (platí $D \leq 0 < H$). Zadefinujeme čas $\tau$ předpisem

$$\tau = \inf\{t : W_t \notin (D,H)\}.$$

Určíme sdružené rozdělení náhodného vektoru $(D,H)$ následujícím způsobem

$$\mathsf{P}(D \leq s, H \leq t) = \gamma^{-1} \int_{-\infty}^{s} \int_{0}^{t} (x-y) dF(x) dF(y) \quad \text{pro} s \leq 0 < t.$$

K důkazu budeme používat vlastnost Wienerova procesu z tvrzení 3.4 z předchozí kapitoly :

$$\mathsf{P}(W_\tau = A | D = -B, H = A) = \frac{B}{B+A},$$
$$\mathsf{P}(W_\tau = -B | D = -B, H = A) = \frac{A}{A+B},$$
$$\mathsf{E}\,(\tau | D = -B, H = A) = AB.$$

Pro $y < 0$ platí

$$\mathsf{P}(W_\tau \leq y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^y \mathsf{P}(W_\tau = s | D = s, H = t)\gamma^{-1}(t-s)dF(s)dF(t) =$$
$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^y \frac{t}{t-s}(t-s)\gamma^{-1}dF(s)dF(t) = \left(\gamma^{-1}\int_0^\infty tdF(t)\right)\int_{-\infty}^y dF(s) =$$
$$= \int_{-\infty}^y dF(s) = \mathsf{P}(X \leq y),$$

pro $x \geq 0$ platí

$$\mathsf{P}(W_\tau \in (0,x)) = \int_{-\infty}^0 \int_0^x \mathsf{P}(W_\tau = t | D = s, H = t)\gamma^{-1}(t-s)dF(t)dF(s) =$$
$$= \int_{-\infty}^0 \int_0^x \frac{-s}{t-s}(t-s)\gamma^{-1}dF(t)dF(s) = \gamma^{-1}\left(-\int_{-\infty}^0 sdF(s)\right)\int_0^x dF(t) =$$
$$= \int_0^x dF(t) = \mathsf{P}(0 \leq X \leq x).$$

Tedy

$$\mathsf{P}(W_\tau \leq x) = \mathsf{P}(W_\tau \leq 0) + \mathsf{P}(W_\tau \in (0,x)) = \mathsf{P}(X \leq 0) + \mathsf{P}(0 < X \leq x) = \mathsf{P}(X \leq x),$$

tím pádem je první tvrzení Skorochodovy věty o vnoření dokázané a platí

$$\mathsf{P}(W_\tau \leq x) = \mathsf{P}(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teď zbývá dokázat druhé tvrzení Skorochodovy věty týkající se vztahu mezi střední hodnotou času výstupu a rozptylem vnořené náhodné veličiny. Vyjádříme střední hodnotu času výstupu explicitně:

$$\mathsf{E}(\tau) = \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty -st(t-s)\gamma^{-1}dF(t)dF(s) = \gamma^{-1}\left(-\int_{-\infty}^0 sdF(s)\right)\int_0^\infty t^2dF(t) +$$
$$+ \left(\gamma^{-1}\int_0^\infty tdF(t)\right)\int_{-\infty}^0 s^2dF(s) = \int_{-\infty}^\infty x^2dF(x) = \mathrm{var}(X).$$

Platí tedy i

$$\mathsf{E}(\tau) = \mathrm{var}(X) = \sigma^2.$$

△

## 4.2 Důkaz klasické centrální limitní věty

**Věta 4.2.** *(Věta o vnoření náhodné procházky do Wienerova procesu)* *Máme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_i : 1 \leq i < \infty\}$, které jsou stejně rozdělené, mají nulovou střední hodnotu a pro každé $i$ je $\mathrm{var}(X_i) = 1$. Pak existuje posloupnost časů Wienerova procesu $\{\tau_i : 1 \leq i < \infty\}$ taková, že $\{\tau_i\}$ jsou nezávislé, nezáporné, stejně rozdělené náhodné veličiny, pro každé $i$ je $\mathsf{E}(\tau_i) = 1$ a náhodná procházka $S_n = X_1 + ... + X_n$ je totožná s náhodnou posloupností $T_n = W_{\tau_1+...+\tau_n}$. Tedy všechna konečněrozměrná sdružená rozdělení $\{S_n : 1 \leq n < \infty\}$ a $\{W_{\tau_1+...+\tau_n} : 1 \leq n < \infty\}$ jsou stejná.*

*Důkaz.* Tvrzení věty plyne z věty 4.1.

□

Kromě toho, že nám Skorochodova věta o vnoření dává způsob, jak ztotožnit libovolnou náhodnou veličinu s náhodnou veličinou $W_\tau$ pro vhodně zvolený náhodný čas $\tau$, má i mnoho nečekaných aplikací. Například se pomocí důsledku této věty dá nezávisle dokázat klasická centrální limitní věta.
Při řešení následujícího problému jsem používala věty z knihy [5] o konvergenci v pravděpodobnosti, distribuci a v podstatě.

**Problém. 5.** Dokažte následující větu s pomocí důsledku Skorochodovy věty o vnoření (věta 4.2).

**Věta 4.3.** *Nechť $\{X_i\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin takových, že $\mathsf{E}(X_i) = 0$ a $var(X_i) = 1$. Pak pro součet $S_n = X_1 + ... + X_n$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

*Řešení.* Nejdřív dokážeme, že proces $\frac{1}{\sqrt{n}} W_{\tau_1+...+\tau_n}$ konverguje v pravděpodobnosti k procesu $W_1$. Použijeme-li první část tvrzení 1.4, víme, že náhodný proces určený $\frac{1}{\sqrt{n}} W_{\tau_1+...+\tau_n}$ je ekvivalentní s náhodným procesem určeným $W_{\frac{\tau_1+...+\tau_n}{n}}$.

Z vlastnosti (iii) Wienerova procesu máme, že

$$\left(W_{\frac{\tau_1+...+\tau_n}{n}} - W_1\right) \sim N\left(0, \left|\frac{\tau_1 + ... + \tau_n}{n} - 1\right|\right)$$

Jelikož náhodné veličiny $\{\tau_i : 1 \le i < \infty\}$ jsou nezávislé, stejně rozdělené a $\mathsf{E}\,|\tau_1| = \mathsf{E}\,(\tau_1) = 1$, ze silného zákona velkých čísel pro stejně rozdělené náhodné veličiny vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tau_i = \mathsf{E}\,(\tau_1) = 1 \qquad \text{skoro jistě,}$$

Z vlastnosti (iv) Wienerova procesu máme, že funkce $W_t(\omega)$ je v proměnné $t$ skoro jistě spojitá. Proto platí

$$\lim_{n\to\infty} W_{\frac{\tau_1+...+\tau_n}{n}} = W_1 \qquad \text{skoro jistě.}$$

Z konvergence skoro jistě plyne konvergence v pravděpodobnosti, proto

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(|W_{\frac{\tau_1+...+\tau_n}{n}} - W_1| \ge \varepsilon\right) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Z konvergence v pravděpodobnosti plyne konvergence v distribuci, tedy při $n$ jdoucím do nekonečna, platí

$$W_{\frac{\tau_1+...+\tau_n}{n}} \xrightarrow{D} W_1.$$

Konvergence v distribuci je ekvivalentní s konvergencí v podstatě a tedy, označíme-li distribuční funkci náhodné veličiny $W_{\frac{\tau_1+...+\tau_n}{n}}$ pro každé $n \in N \cup \{0\}$ jako $F_n$ a distribuční funkci náhodné veličiny $W_1$ jako $F$, máme

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ x \text{ je bod spojitosti } F.$$

Distribuční funkci $F$ známe, z vlastnosti (iii) Wienerova procesu plyne, že náhodná veličina $W_1$ má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem 1, tudíž je distribuční funkce $F(x) = \Phi(x)$. Jelikož je funkce $\Phi(x)$ spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, platí:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(W_{\frac{\tau_1+\ldots+\tau_n}{n}} \leq x) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tedy také

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} e^{-t^2/2} dt.$$

A tedy jsme pomocí Wienerova procesu a Skorochodova vnoření dokázali klasickou centrální limitní větu o stejně rozdělených, nezávislých náhodných veličinách.

$\triangle$

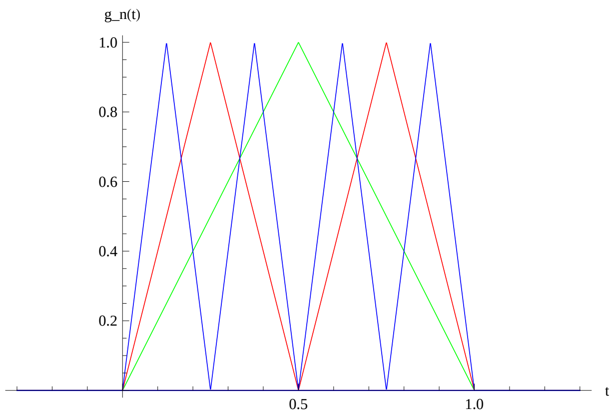
# 5. Simulace Wienerova procesu

V této kapitole se budeme zabývat aproximací Wienerova procesu. Budeme využívat software [7]. [1]

Často se simulace zakládají na náhodné procházce pomocí aproximace 3.2 z kapitoly o principu reflexe. V této práci však založíme simulaci na konstrukci Wienerova procesu z kapitoly 1.1, protože se jedná z pohledu autora o zajímavější přístup, který využívá posloupnost přeškálovaných funkcí a navazuje na předchozí výklad. Budeme používat větu 1.3, která tvrdí, že se Wienerův proces dá vyjádřit jako následující suma:

$$W_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n g_n(t). \tag{1}$$

Nejdřív ale budeme potřebovat zkonstruovat posloupnost funkcí $g_n$ z poznámky 1.1 (anglicky se těmto a podobným posloupnostem funkcí říká „wavelet“ a v současnosti získávají na významu a hojně se používají). Tady uvedeme sedm prvních funkcí $g_n$. Přičemž do prvních sedmi nepočítáme dodefinovanou funkci $g_0(t) = t$.




Obrázek 5.1: Prvních 7 funkcí z posloupnosti $\{g_n\}$

Přesnost aproximace závisí na tom, kolika sčítanců ze sumy (1) budeme uvažovat při simulaci Wienerova procesu.

Kdybychom nejdřív konstruovali funkci $f(t) = \sum_{n=0}^{126} \lambda_n g_n(t)$, což je aproximace Wienerova procesu bez náhodné složky pro 127 sčítanců (toto číslo jsme vybrali, protože se jedná o součet mocnin dvojky), tak bychom dostali funkci na obrázku 5.2. Když ovšem přidáme náhodnou složku, tak pro stejný počet (127) sčítanců dostaneme funkci, jejíž trajektorie už připomíná trajektorii Wienerova procesu a je zobrazená na obrázku 5.3.

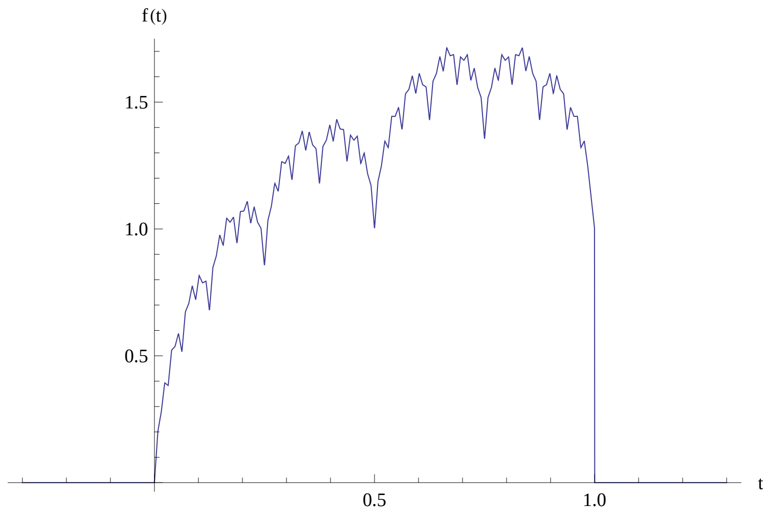
Zvýšíme-li počet sčítanců na 1000,dostaneme aproximaci Wienerova procesu, která vypadá jako na obrázku 5.4.

Přestože se libovolná počítačová simulace skládá jen z konečně mnoha bodů a jejich funkčních hodnot, můžeme se částečně ujistit v tom, že výsledky prezentované v této práci jsou pravdivé. V kapitole o diferencovatelnosti trajektorie Wienerova procesu jsme zjistili, že trajektorie Wienerova procesu je v každém bodě skoro

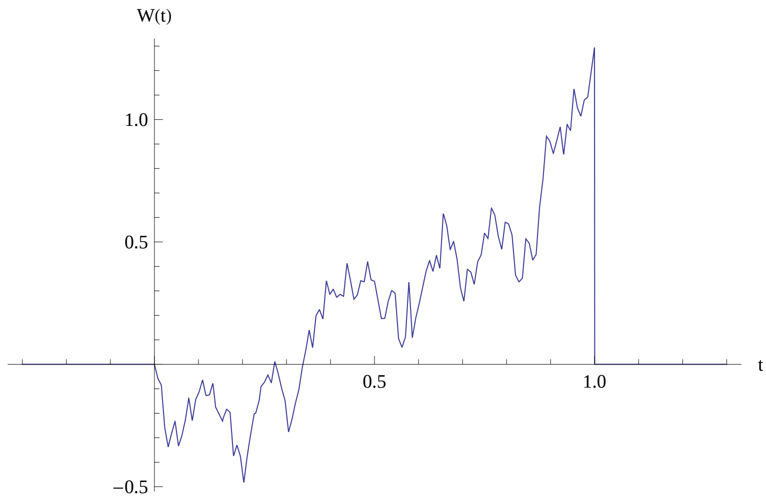
[1] Soubor, který obsahuje zdrojový kód, je přiložen k této bakalářské práci na CD a nahrán do informačního systému Univerzity Karlovy.

jistě nediferencovatelná. Na obrázku 5.4, který je nejpřesnější, vidíme, že trajektorie Wienerova procesu obsahuje mnoho „špiček“ a v takových bodech (viz absolutní hodnota) zpravidla neexistuje derivace. V kapitole o lokálních extrémech a nulových bodech jsme zjistili, že přestože každý bod skoro jistě není lokální maximum, nějaké lokální maximum skoro jistě existuje. Na grafech z obrázku 5.3 a 5.4 je vidět, že funkce $W_t$ v nějakých bodech dosahuje svého lokálního maxima.

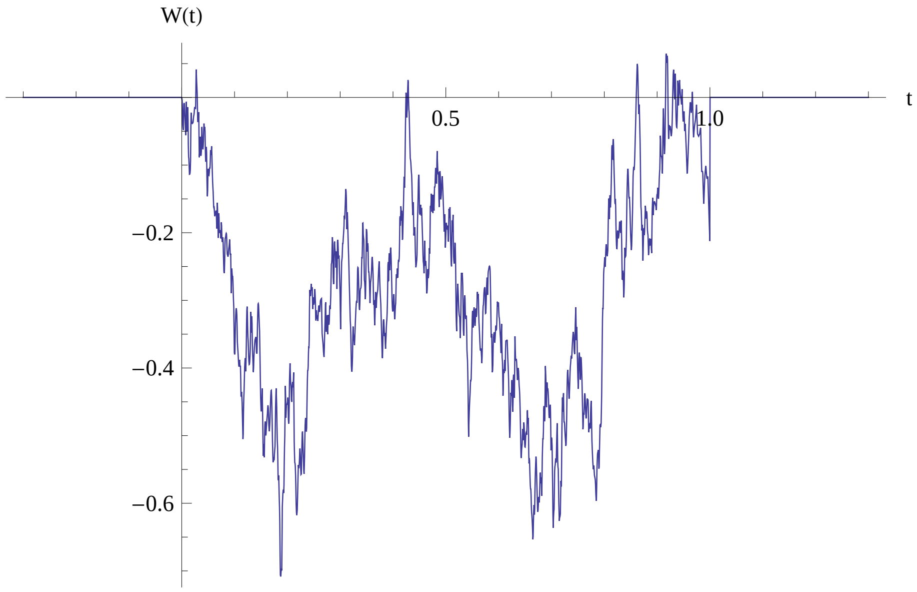
Poslední obrázek 5.5 znázorňuje princip reflexe pro Wienerův proces, který je popsaný ve větě 3.5 z kapitoly o principu reflexe. Červený graf znázorňuje trajektorii původního Wienerova procesu. Z věty 3.5 víme, že náhodný proces $V_t$ je také Wienerův proces. Trajektorie náhodného procesu $V_t$ je funkce, jejíž první část je také červená, ale druhá modrá. Tvrzení věty 3.5 platí v případě libovolného markovského času $\tau$, ale my ho určíme deterministicky jako $\tau = 0{,}3$.



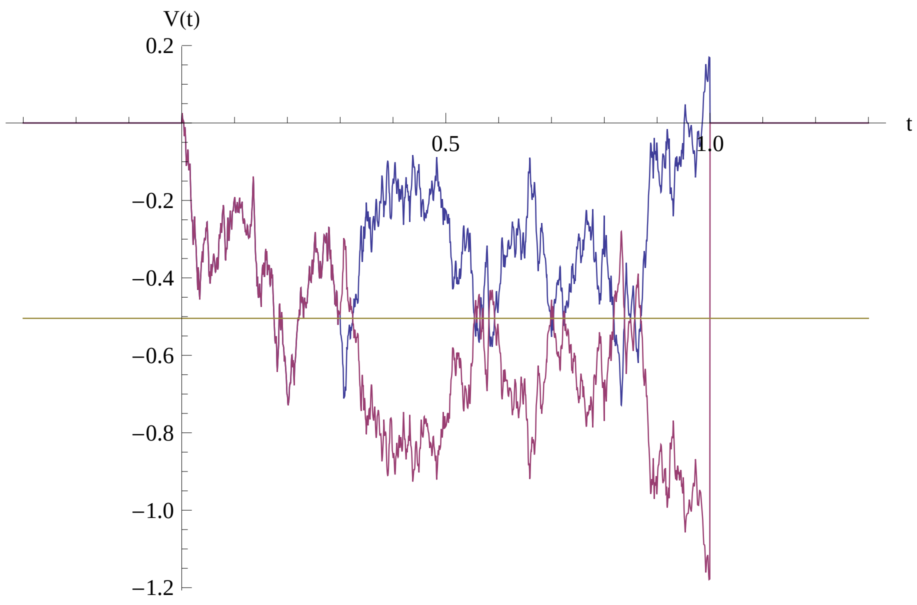

Obrázek 5.2: Pomocná funkce nezahrnující náhodnost Wienerova procesu pro 127 sčítanců na intervalu [0,1]




Obrázek 5.3: Simulace Wienerova procesu pro 127 sčítanců na intervalu [0,1]




Obrázek 5.4: Simulace Wienerova procesu pro 1000 sčítanců na intervalu [0,1]




Obrázek 5.5: Princip reflexe pro Wienerův proces na intervalu [0,1], přičemž $\tau =$ 0,3

# Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo ukázat, jaké vlastnosti mají trajektorie Wienerova procesu a provést simulaci, na které se některé z těchto vlastností dají ilustrovat. V bakalářské práci jsme prozkoumali chování a prezentovali propojení mezi Wienerovým procesem a například náhodnou procházkou, úplnou ortonormální posloupností funkcí z prostoru $L^2[0,1]$ anebo dokonce důkazem klasické centrální limitní věty. Zjistili jsme, že se trajektorie Wienerova procesu často chovají nečekaně: jedná se o spojité funkce, ale skoro jistě nemají v žádném bodě derivaci; jsou to $\alpha$-hölderovské funkce pro $\alpha \in (0,1/2)$, ale na žádném intervalu nejsou monotónní; je-li $\tau$ správně určená náhodná veličina, potom náhodná veličina $W_\tau$ může mít libovolné rozdělení s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem. Vyřešili jsme pět problémů, kde jsme prohloubili pochopení toho, jak zpravidla vypadá průběh trajektorie Wienerova procesu. Bylo by zajímavé prozkoumat hlubší teoretické souvislosti mezi vlastnostmi, které jsou v této bakalářské práci popsány (například jestli existuje závislost mezi $\alpha$-hölderovskosti a kvadratickou variací trajektorií Wienerova procesu) a zjistit, jakou roli hrají tyto vlastnosti Wienerova procesu v aplikacích například ve finančnictví.

# Literatura


[1] J.Michael Steele, *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, 2001.

[2] Peter Mörters and Yuval Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press, 2010.

[3] Josef Štěpán, *Teorie Pravděpodobnosti, Matematické základy*, Academia/Praha, 1987.

[4] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1991.

[5] Petr Lachout, *Teorie pravděpodobnosti*, Nakladatelství Karolinum, 2004.

[6] Patrick Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, 1999.

[7] Wolfram Mathematica 8.0 for Students.