Posudek oponenta na bakalářskou práci
Evgenie Belyaevy „Trajektorie Wienerova procesu“

V předložené práci je neprve stručně představena Ciesielského konstrukce Wienerova procesu a na jejím základě je ukázáno, že trajektorie tohoto procesu jsou α-hölderovské, $\alpha < \frac{1}{2}$. Dále je podrobně diskutována neregularita trajektorií: nejsou nikde monotonní, při $\alpha > \frac{1}{2}$ skoro jistě nejsou v žádném bodě α-hölderovské (a tedy ani differencovatelné), mají konečnou kvadratickou variaci.[1] Poté autorka vysvětluje princip zrcadlení pro wienerovské trajektorie a jeho důsledky, z velké části však na jednodušším modelu náhodné procházky; na závěr je uvedena Skorochodova věta o vnoření náhodné procházky do Wienerova procesu.

Autorka se povětšinou dosti těsně drží knih, citovaných v práci jako [1] a [2]. Kniha [1] se snaží o elementární výklad i za cenu ošizených důkazů, kniha [2] naopak není určena začátečníkům, obě tedy poskytují dostatek prostoru pro pokus reprodukovat jejich důkazy podrobně a přesně.[2] Autorka postupovala spíše extensivně, uvádí četné věty, mnohé však bez důkazu či dokazuje jen některá tvrzení těchto vět.[3] To je přijatelný přístup, uvážíme-li, že je pojednáno i o dosti obtížných výsledcích. Důkazy tam, kde byly zařazeny, by však měly být provedeny uspokojivě. V tomto směru je ale vůči práci možno vznést četné námitky:

i) Důkazy z knih [1] a [2] jsou občas rozvinuty nesprávným způsobem.
ii) Často se setkáváme s nesprávnými formulacemi a chybami ve vzorcích. Zpravidla svědčí spíše o nepozornosti, než o nepochopení, ale místy ztěžují čitelnost práce.
iii) Některé formulace nejsou přímo špatně, ale jsou neobratné a mohou býti zavádějící.
iv) Občas chybí vysvětlení prováděného výpočtu: u bakalářské práce se očekává, že postup bude odůvodněn pečlivě a detailně.
v) Lze míti i námitky proti nepečlivosti, s níž je práce vysázena v TEXu. Takové námitky jsou jistě méně závažné, než připomínky k pochybením věcným, ale právě v bakalářské práci by měl uchazeč prokázat, že toto „řemeslo“ zvládnul.

Jazyková úroveň práce je – uvážíme-li, že autorka nemá češtinu jako mateřský jazyk – zcela uspokojivá, několik málo nedopatření, jichž jsem si povšiml, nestojí za explicitní zmínku.

Konkrétní námitky jsou uvedeny v seznamu na závěr posudku, zde lze shrnout, že žádná z chyb, které jsem nalezl, není fatální a mnohé z nich by, samy o sobě, ani nevedly k horšímu hodnocení práce. Problém vidím v jejich nadměrné koncentraci, takové, že si nejsem jist, zda práce splňuje požadavky na bakalářskou práci kladené.

[1] Jak uvidíme níže, výklad o kvadratické variaci bohužel patří k nejslabším částem práce.

[2] Autorka samostatně řešila i pět cvičení, převzatých z těchto knih.

[3] Důsledně se vyhýbá všem krokům, které vyžadují znalost základů theorie martingalů, takže některá tvrzení vůbec dokázati nemůže, anebo musí použíti důkaz složitější, než je standardní, jako v tvrzení 3.1.

Definitivní závěr v této věci by měl být učiněn na základě toho, jak se uchazečka vypořádá s připomínkami při obhajobě.

V dalším x^y (x_y) značí y-tou řádku shora (zdola) na x-té stránce.

Kazové postupy

7^{14}: Pokud důkazu rozumím, autorka ukázala, že pro každé s pevné je $\lim_{t\to s} X_t = X_s$ skoro jistě. To ještě neznamená, že skoro všechny trajektorie jsou spojité funkce.

9^{19}: Autorka zde doplňuje chybějící detaily do důkazu z [2] dosti nešťastně. Výraz

$$\left[\mathsf{P}(f(d_{j+1}) - f(d_j) \geq 0)\right]^n \tag{$\aleph$}$$

je obtížné interpretovat. Buď je možno psáti (s odvoláním na nezávislost přírůstků, která by zde měla být zmíněna)

$$\prod_{j=0}^{n-1} \mathsf{P}(f(d_{j+1}) - f(d_j) \geq 0),$$

anebo říci, že j je v ($\aleph$) libovolně *pevně* zvoleno. Dále, body $d_0, \ldots, d_n$ závisí na n, takže je nesmyslné tvrditi, že limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme rovnost 9_{12}. (Už jenom požadavek $0 \leq j \leq n-1$ pro $n = \infty$ by měl autorku zarazit.)

24_5: Autorka se snaží postupovat podle stručného a nepřesného návodu v knize [1], obávám se však, že přehlíží četné technické jemnosti. Není zřejmé, že existuje náhodný vektor (D, H) s hodnotami v $(-\infty, 0] \times [0, \infty)$, který má rozdělení zadané na řádku 24_5, pokud pracujeme na *a priori* fixovaném pravděpodobnostním prostoru s mírou P. Dále, na řádcích 24_{3-1} se patrně pracuje s vhodnou regulární versí podmíněné pravděpodobnosti $\mathsf{P}(\cdot|D, H)$. Její existence však není očividná; v každém případě je určena jen pro skoro všechna A a B (vzhledem k rozdělení (D, H)). Nadto, tvrzení 3.4 můžeme přímo použít, jen pokud víme, že W je Wienerův proces vzhledem k desintegrující míře $\mathsf{P}(\cdot|D = -B, H = A)$. Správný důkaz užívá náhodný vektor (D, H) nezávislý s W, viz knihu [3], tvrzení VII.2.9, což může vyžadovat přechod na pomocný pravděpodobnostní prostor.

26^{16}: Tvrzení 1.4 ukazuje, že procesy $(\sqrt{n}W(t/n),\, t \geq 0)$ a $(W(t),\, t \geq 0)$ mají stejné rozdělení na prostoru trajektorií, zde však potřebujeme rovnost rozdělení v náhodném čase $\tau_1 + \cdots + \tau_n$, jejíž ověření vyžaduje dodatečný argument.

Nepřesnosti

1_{11}: $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ je kovariance náhodných veličin, nikoliv kovarianční funkce. Název kovarianční funkce přísluší až zobrazení $(s, t) \mapsto \mathrm{Cov}(X_t, X_s)$.

3_4: Funkce h nenáleží prostoru $L^2[0, 1]$: abychom z ní mohli všechny Haarovy funkce získat škálováním, musí být definována na celém $\mathbb{R}_+$.

4^1: Zde má být $\{h_n\}$, nikoliv $\{n\}$.

4^{13}: Bylo by vhodné specifikovat, že g je funkce na $\mathbb{R}_+$.

4_3: Druhý integrál má míti meze $\int_x^\infty$, nikoli $\int_0^\infty$.

4_1: Buď má na pravé straně stát $n^{-\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, takže Borel-Cantelliho lemma by šlo použít pro $\alpha > 2$, nikoliv pro $\alpha > 1$, anebo by měla být odhadována pravděpodobnost $\mathsf{P}(|Z| \geq \sqrt{2\alpha \log n})$.

5^5: Z rovnosti na řádku 5^3 autorka vyvodila rovnost na řádku 5^5, přehlédnuvši však, že je třeba uvažovat jen $K \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (jinak by rovnost 5^7 nemusela platit). Ze zápisu též není zřejmé, že K závisí na ω.

5_{11}: Autorka, následujíc knihu [1], definovala jen Wienerův proces indexovaný intervaly tvaru $[0, T)$, zde uvažuje Wienerův proces na $[0, 1]$. (To jistě nemůže vést k žádným omylům, ale inkonsistence to je a pozorný čtenář [1] by ji mohl opraviti.)

10^8: Má býti $a \leq s < t \leq b$, nikoliv $a < s < t < b$. (Spojitost není předpokládána, takže nejde o ekvivalentní požadavky.)

10^{15}: Věta 2.3 je nepravdivá: trajektorie W jsou na $[0, \infty)$ α-hölderovské pouze lokálně. V důkazu autorka pracuje implicitně na intervalu $[0, 1]$, rozšíření na intervaly tvaru $[0, T]$ lze snadno provésti slepovací technikou z poznámky 1.3, ale v práci to provedeno není.

10_6: O funkci C bylo ukázáno, že je skoro jistě konečná, nikoliv, že je essenciálně omezená.

11^5: Funkce g_n nejsou lineární, ale jen po částech lineární.

12^5 Proces, doposud značený W, je nyní mlčky přeznačen na B. (Podotkněme, že označení B užívá kniha [1], jíž zde autorka těsně sleduje.)

12^6: Odhad je uveden špatně, má býti

$$\mathsf{P}(|B_1| \leq x) \leq \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}.$$

17^4: Proč $V_f^{(1)}(t)$? Pravá strana na t nezávisí. Dále, z definice není úplně zřejmé, že supremum se bere přes všechna konečná dělení intervalu $[a, b]$.

17^7: Definice 2.3 je poněkud zmatená. Jednak, $V^{(2)}(t)$ závisí na volbě posloupnosti dělení $\{\{t_j^{(n)}\}_{j=0}^{k(n)}, n \geq 1\}$, nezávislost pro Wienerův proces je netriviální tvrzení. (To jest, buď je třeba předeslat tvrzení o nezávislosti definici, anebo začít definicí kvadratické variace závislé na dělení.) Dále, je nutno specifikovat, v jakém smyslu má limita na řádku 17^{14} vpravo existovat. Opět, existence je netriviální tvrzení: pokud chceme limitu v L^2-smyslu, je předpoklad $k(n) \geq k(n-1) + 1$ nadbytečný, pokud uvažujeme limitu skoro jistě, je tento předpoklad nedostatečný a je nutno uvažovat monotonní posloupnosti dělení (tj. $(n+1)$-ní dělení musí zjemňovat n-té, $n \geq 1$).[4] Způsob, jakým je definice aplikována v důkazu věty 2.8, ukazuje, že autorka má na mysli konvergenci skoro jistě, ale ani v této větě to řádně specifikováno není.

18^3: Horní mez druhé sumy má být $k(n)$.

[4] Autorku zde mohla zmásti nezcela pregnantní formulace v knize [2].

19_7: Druhá rovnost, zdá se, vyžaduje, aby $\mathsf{P}(E_k^C) = \frac{1}{2}$. Jestliže však dobře chápu, jak je E_k zavedeno, pak $\mathsf{P}(E_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B}$.

20^5: V druhém členu chybí E. Navíc se zdá, že odhad plyne sečtením odhadů z řádky 19_1 přes k a integrováním, nikoliv z rovnosti 20^3.

22^{18}: F je funkce celé trajektorie, tedy role t v uvedené rovnosti je nejasná.

25^6: Rovnost $\mathsf{P}(W_\tau \in (0,x)) = \mathsf{P}(0 \leq X \leq x)$ platí pouze, pokud jsou 0 a x body spojitosti F, v obecném případě je třeba v celém důkazu býti opatrnější, kde je ostrá a kde neostrá nerovnost.

26^{18}: Vlastnost (iii) z definice Wienerova procesu se týká deterministických časů, nikoliv náhodných, a zde ji přímo užíti nelze. Bylo by ostatně třeba vysvětlit, co se míní normálním rozdělením s náhodným rozptylem. Není ovšem třeba se pokoušet dát rovnosti 26^{18} smysl, protože se nikde dále neužívá.

Nejasné či neobratné formulace

9^7: Věta 2.1 je jistě správně, platí však beze změny i pro $a = 0$ a není zřejmé, proč by měl být případ $a = 0$ vylučován.

11_{14}: Bylo by možno zmínit, že „všechna $X_{(n,k)}$“ znamená pro všechna k, nikoliv všechna n.

12^{11}: Autorka dokázala, že při $\alpha > \frac{1}{2}$ skoro každá trajektorie není α-hölderovská na $[0,1]$, ale explicitně tento výsledek nezformulovala (jen důsledek o nediferencovatelnosti), což je škoda.

12_{13}: Označení f zde zavedené se v dalším nikde nevyužije.

13^5: Z této formulace není zcela zřejmé, že skoro každá trajektorie není diferencovatelná v žádném bodě, nikoliv jen, že pro pevné t skoro jistě neexistuje derivace v bodě t.

13_8: Věta je vyslovena správně, ale bylo by možno více zdůraznit, že situace mezi neexistencí (vlastní) derivace a (nevlastní) derivace zprava je rozdíl: nyní pouze platí, že pro každý *pevný* čas derivace zprava neexistuje skoro jistě.

19_{13}: Bylo by velmi vhodné specifikovat význam symbolu $\mathsf{P}(\cdot|S_0 = k)$, neboť nemůže být interpretován jako podmíněná pravděpodobnost v elementárním smyslu. Přirozené je samozřejmě chápat $(\mathsf{P}(\cdot|S_0 = k),\ k \in \mathbb{Z})$ jako markovský systém měr, ale to je patrně mimo obzor práce, takže správný výklad je asi regulární verse podmíněného rozdělení. Jasnější zavedení by velmi usnadnilo sledování dalších výkladů. (Povšimněme si, že S_0 bylo jako náhodná veličina zavedeno jen implicitně.)

19_{10}: Autorka se před tvrzením 3.1 odvolává na knihy [1] a [3]. V knize [3] je však důkaz založen na Waldových rovnostech, v knize [1] je hrubě naznačena myšlenka, která je užita i v práci, ale vznikající diferenční rovnice není, zdá se, diskutována. Pokud je tato diskuse vlastní přínos autorky, mohlo to býti více zdůrazněno. (Upozorněme v této souvislosti, že autorka vždy odkazuje na celou knihu, neuvádějíc stránky či jiné bližší specifikace, ač to Standardy bakalářských prací – velmi rozumně – doporučují.)

21^{11}: Při zavedení reflektované náhodné procházky bych uvítal intuitivní vysvětlení, že trajektorie (T_n) získáme z trajektorií (S_n) zrcadlením podle jisté přímky; to je v práci naznačeno až v části věnované simulacím. Dále, z formulace poznámky 3.1 by se mohlo zdát, že rovnost sdružených rozdělení (S_n) a (T_n) je zcela triviální záležitost, což mi připadá jako poněkud zavádějící.

24^{8}: Ve větě 4.1 se implicitně předpokládá, že X a W jsou definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru, což je zbytečné u výsledku týkajícího se rovnosti v distribuci.

25_{3}: Prohlášení, že (S_n) a $(W(\tau_1+\cdots+\tau_n))$ jsou totožné, je příliš neurčité. Správnou interpretaci podává tvrzení na následujícím řádku, jež je ovšem formulováno jako důsledek.

26^{1}: Stručné prohlášení, že věta 4.2 je důsledek věty 4.1, je označeno jako důkaz. Pokud něco nepřehlížím, přechod od věty 4.1 k větě 4.2 takto očividný není.

Chybějící zdůvodnění

6^{2}: O uvažovaných řadách při pevných s a t víme, že konvergují skoro jistě, proč však lze zaměnit sumu a integrál?

7_{14}: Zatímco je jistě zřejmé, že

$$st\min\Big(\frac{1}{s},\frac{1}{t}\Big)=\min(s,t),$$

mezikrok, který autorka učinila:

$$st\operatorname{Cov}(W_{\frac{1}{t}},W_{\frac{1}{s}})=\min(s,t)\max(s,t)\frac{1}{\max(s,t)},$$

bez vysvětlení sledovat nedokáži.

7_{12}: Odůvodnění, proč je proces Y spojitý v 0 zprava skoro jistě, autorka převzala z knihy [2]. Pokud se nepletu, formalisovat tuto úvahu není úplně triviální a v práci takový pokus měl být učiněn.

12^{4}: Přechod od třetího k čtvrtému řádku by bylo možno více odůvodnit (ukázat, že pravděpodobnost maxima lze vyjadřit jako pravděpodobnost průniku nezávislých jevů). Druhá nerovnost na čtvrtém řádku je ve skutečnosti rovnost.

18^{6}: Na tomto místě by bylo možné (a patrně i vhodné) upozornit, že právě dokázané tvrzení plyne ihned i z věty 2.5, neboť funkce s konečnou variací jsou diferencovatelné skoro všude. (Podobně chybí poznámka o vztahu vět 2.5 a 2.1.)

20^{10}: Diferenční rovnice pro a_k je zavedena intuitivně názorně, mělo by však být poskytnuto i odvození formální. (To souvisí s již zmíněnou otázkou řádné interpretace podmíněných pravděpodobností.) Stejná připomínka se vztahuje k diferenční rovnici pro b_k na řádku 20_{10}.

21_{11}: Na první pohled by se zdálo, že zde potřebuji rovnost sdružených rozdělení $(\tau,(S_n))$ a $(\tau,(T_n))$, mohlo by být vysvětleno, proč rovnost sdružených rozdělení (S_n) a (T_n) stačí.

21_6 Rovnost na řádku 21_6 je přepisem rovnosti 21_{11}, ale ostré nerovnosti se změnily v neostré, na řádku 21_5 se pak opět vracíme k ostrým: mělo by být zdůvodněno (pokud ovšem nejde o překlep).

22^4: Pokud důkazu rozumím, přechod od 22^4 k 22^6 užívá implicitně rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = x\Big) = 0,$$

jež by měla být odůvodněna.

Připomínky k sazbě mathematiky

1_{11}, 5_1 a jinde: Autorka někdy píše $\mathrm{Cov}(X_s X_t)$, někdy $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$, druhá možnost se zdá logičtější.

3_{11}, 3_{13}, 5^3 a dále: Autorka zhusta zapomíná psát isolované matematické symboly v textu v mathematickém modu (takže jsou vysázeny antikvou místo kursivou). (Celkem jsem napočítal asi patnáct případů.)

5^{18}: Jedna z } je nadbytečná.

7^7 Zápis $1/\sqrt{a}W_0$ shledávám neobratným, neboť by mohl svádět k chybnému čtení $\frac{1}{\sqrt{a}W_0}$.

11^{18}: Má býti $\mathbb{N}$ místo N.

11_{8-12}: Zlomit řádek v místě mathematické formule lze podstatně úhledněji, než je zde provedeno. Naopak, na mnoha jiných místech nejsou ošetřena přetečení řádku (např. 4^1, 11^{12}, 21_{13}, 26^4).

12_3, 14^{15} a jinde: Na několika místech chybí mezera mezi mathematickým symbolem a následujícím textem.

17_6 a několikrát dále: Spíše by mělo být $t^{(n)}_{j-1}$ místo $t^{(n)}_{(j-1)}$.

17_1: Ve formuli jsou dvě přebytečné).

19_{13-11}, 22^4 a jinde: Autorka zpravidla značí pravěpodobnost a střední hodnotu P a E, je-li však okolní text vysázen kursivou, jsou kursivní i tyto symboly: P, E, což je přinejmenším nezvyklé.

20_{13}: Má býti $\mathsf{E}(\tau|S_0 = k)$, nikoli $E(\tau|S_0 = k)$.

$23^{7,8}$: Má býti $t \geq 0$, nikoliv $t \leq 0$.

23_6: Odkaz na obrázek je špatně zkompilován.

V Praze, dne 25. 8. 2013 Jan Seidler