Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Frakcionální Brownův pohyb
Autor: Tomáš Rubín

Shrnutí obsahu práce

Práce pojednává o frakcionálním Brownovu pohybu, což je zobecnění klasického Brownova pohybu připouštějící korelaci přírůstků.

V první kapitole autor definuje frakcionální Brownův pohyb a odvozuje některé jeho vlastnosti. Zvláštní pozornost je přitom věnována analytickým vlastnostem trajektorií.

Druhá kapitola je věnována simulacím frakcionálního Brownova pohybu. Jsou představeny tři metody simulace: Hoskingova metoda, Choleského metoda a metoda stochastické reprezentace. Všechny metody student naprogramoval v Mathematice a přiložil na CD.

Třetí kapitola se zabývá odhadem Hurstova indexu z trajektorie frakcionálního Brownova pohybu. Autor zpracoval dvě metody - metodu agregovaného rozptylu a Hurstovu R/S analýzu, které následně porovnal pomocí simulační studie. Obě metody student naprogramoval v softwaru R a skripty přiložil na CD.

Celkové hodnocení práce

Téma práce.: Téma práce je poměrně náročné, ale bylo zvoleno přiměřeně. Student splnil víc než bylo požadováno v zadání práce.

Vlastní příspěvek.: Práce obsahuje vlastní výsledek autora, který spočívá v zesílení běžně uváděné nediferencovatelnosti trajektorií frakcionálního Brownova pohybu.

Matematická úroveň.: Po matematické stránce je práce zpracována přehledně a srozumitelně bez žádných vážnějších věcných či formálních nedostatků.

Práce se zdroji.: Použité zdroje jsou v práci náležitě citovány. Při četbě jsem nenarazil jsem na žádný náznak plagiátorství.

Formální úprava.: Formální úprava odpovídá Standardům pro bakalářské práce. Vzhledem k rozsahu obsahuje práce jen zanedbatelné množství překlepů a jazykových nedostatků.

Připomínky a otázky

(1) V práci se ukazuje existence verze frakcionálního Brownova pohybu se spojitými trajektoriemi. Není obtížně sestrojit také verzi tohoto procesu se všemi trajektoriemi nespojitými (jak?). Tyto dva procesy, chápané jako náhodné veličiny s hodnotami v prostoru reálných funkcí se součinovou σ-algebrou, mají tedy disjunktní obory hodnot, přesto mají stejné rozdělení, což může znít trochu překvapivě. Čím je to způsobeno?

(2) Frakcionální Brownův pohyb je v práci definován axiomaticky. Chybí však úplný důkaz existence tohoto procesu. Autor sice dokázal existenci verze se spojitými trajektoriemi užitím Kolmogorov-Čencovovy věty, není zde však

dokázána existence procesu s danými konečně-rozměrnými rozděleními (ta se standardně ukazuje užitím Daniel-Kolmogorovovy věty).

(3) Důkaz Lemmatu 1.2.9. se opírá o výpočet inverzní Fourierovy transformace v programu Mathematica. Takový výpočet může být užitečným vodítkem, nelze jej však považovat za korektní důkaz. Bylo by vhodné provést kontrolu například přímým výpočtem Fourierovy transformace navrhované funkce.

(4) Pojem stochastické reprezentace v kapitole 1.6. není přesně vymezen. Z konetxtu vyplývá, že je dokázána reprezentace v slabém smyslu, tj. že stochastický integrál v rovnosti (1.8) má verzi, která je frakcionální Brownův pohyb.

(5) V kapitole 3.1 se odhaduje Hurstův index pomocí lineární regrese, kde vysvětlovanou proměnnou je logaritmus výběrových rozptylů. Lze očekávat, že tyto veličiny nebudou nekorelované a homoskedastické. Neuvažoval autor o výpočtu jejich kovarianční matice a následném použití metody zobecněných nejmenších čtverců namísto klasické metody nejmenších čtverců?

(6) Definice 1.1.4. dává smysl jen pro $X(t) \in L^1$ (resp. $X(t) \in L^2$)

(7) V důkazu Věty 1.8.1. na str. 19 se píše $P(A_{r,m}) = \inf_{n \geq m} P(...)$. Platnost této rovnosti není zcela zřejmá. Zasloužila by si tedy komentář, nebo by se dala nahradit nerovností $P(A_{r,m}) \leq \inf_{n \geq m} P(...)$, která už zřejmá je a pro potřeby důkazu stačí.

(8) V obrázcích 3.1 a 3.2 chybí legenda a název grafu. Takto jsou grafy samostantně (bez přečtení textu kapitol) nesruzumitelné.

(9) V kapitole 3.3 (4. odst.) se tvrdí, že pro $H \neq 0.5$ je odhad $\hat{H}$ metodou agregovaného rozptylu posunutý k 0.5. Dle grafů se však zdá, že toto platí pouze pro $H > 0.5$, zatímco pro $H < 0.5$ je tomu naopak, tedy posun od 0.5.

(10) Překlepy a jazykové nedostatky:
- str. 14, 2. odst., 4. ř.: ...bude stačit integrovat... (místo integroval)
- str. 29, 2. odst., 7. ř.: ...sklon přímky... (místo skol přímky)
- str. 30, 3. odst., 3. ř.: ...přímky se sklonem... (místo přímky se skolen)

Závěr

Práci považuji za vynikající a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Pavel Kříž
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
7. června 2013