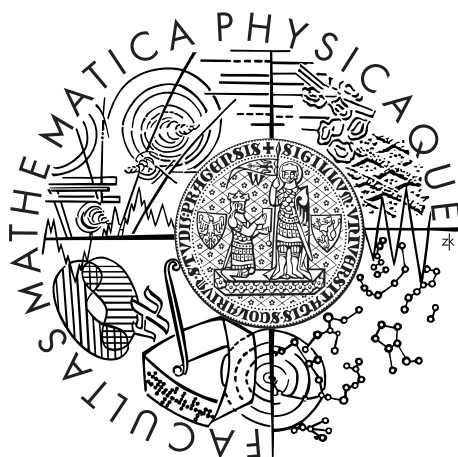


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tomáš Rubín

Frakcionální Brownův pohyb

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2013

Rád bych zde poděkoval Mgr. Janě Šnupárkové, Ph.D., a prof. RNDr. Bohdanu Maslowskému, DrSc., za jejich cenné rady a čas, který mi při konzultacích věnovali při řešení dané problematiky. Také bych chtěl poděkovat svým rodičům za to, že mě morálně i finančně podporují při studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Tomáš Rubín

Název práce: Frakcionální Brownův pohyb

Autor: Tomáš Rubín

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Frakcionální Brownův pohyb je netriviálním zobecněním standardního Brownova pohybu (Wienerova procesu). Upouští od nezávislosti přírůstků, závislost je naopak kontrolována Hurstovým indexem. Práce se zabývá důkazy vlastností frakcionálního Brownova pohybu, mezi které patří korelace mezi přírůstky, soběpodobnost a dlouhodobá závislost. Zabývá se také analytickými vlastnostmi jeho trajektorií — hölderovskostí a nediferencovatelností. Práce přináší důkaz tvrzení o nediferencovatelnosti skoro jistě v silnější verzi, než v jaké bývá publikován v pracích o frakcionálním Brownově pohybu. Dále se práce zabývá simulacemi trajektorií frakcionálního Brownova pohybu aplikovatelnými i na obecné gaussovské procesy. Další náplní je bodový odhad Hurstova indexu.

Klíčová slova: frakcionální Brownův pohyb, nediferencovatelnost trajektorií, simulace trajektorií, odhad Hurstova indexu

Title: Fractional Brownian Motion

Author: Tomáš Rubín

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Fractional Brownian motion is a nontrivial generalization of standard Brownian motion (Wiener process). Definition leaves independence of increments, whereas dependence is controlled by the Hurst index. This paper deals with proofs of fractional Brownian motion's properties such as correlation of increments, self-similarity, long-range dependence and analytical properties of its paths, i.e. Hölder continuity and nondifferentiability. Furthermore, the proof of the theorem about nondifferentiability is presented in a stronger form than it is usual in published papers about fractional Brownian motion. Further topics are simulations of the process's paths, suitable even for general Gaussian processes, and point estimators of the Hurst index.

Keywords: fractional Brownian motion, nondifferentiability of paths, simulation of paths, estimator of Hurst parameter

Obsah

Úvod	2
1 Frakcionální Brownův pohyb	4
1.1 Základní pojmy teorie náhodných procesů	4
1.2 Brownův a frakcionální Brownův pohyb	6
1.3 Korelace mezi dvěma přírůstky	10
1.4 Soběpodobnost	11
1.5 Dlouhodobá závislost	13
1.6 Stochastická reprezentace	14
1.7 Spojitost a hölderovskost	16
1.8 Nediferencovatelnost trajektorií	18
2 Simulace frakcionálního Brownova pohybu	21
2.1 Simulace normálního rozdělení	22
2.2 Hoskingova metoda	23
2.3 Choleského metoda	24
2.4 Metoda stochastické reprezentace	26
3 Odhady Hurstova indexu	27
3.1 Metoda agregovaného rozptylu	27
3.2 Hurstova R/S analýza	29
3.3 Porovnání metod	31
Závěr	34
Literatura	35
Použité značení	36
A Obsah příloženého CD	38

Úvod

Cílem této práce je zavést pojem frakcionálního Brownova pohybu. Tento náhodný proces je netriviálním zobecněním standardního Brownova pohybu, nebo-li Wienerova procesu. Chápeme-li Brownův pohyb jako popis nějaké veličiny v čase, pak její budoucí vývoj závisí pouze na současnosti a na minulosti nezávisí. Tato vlastnost je u frakcionálního Brownova pohybu porušena. Závislost na minulosti je navíc kontrolována pomocí parametru H , takzvaného Hurstova indexu. V práci se seznámíme s tím, jak některé vlastnosti frakcionálního Brownova pohybu podstatným způsobem závisí na Hurstově indexu. Na druhou stranu některé vlastnosti tohoto procesu jsou podobné vlastnostem standardního Brownova pohybu a na Hurstově indexu nezávisí.

Historie frakcionálního Brownova pohybu

Frakcionální Brownův pohyb jako první popsal v roce 1940 sovětský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov v [9]. Avšak proces dostal své dnešní jméno až v roce 1968, kdy jej Francouzsko-americký matematik polského původu Benoît Mandelbrot spolu se svým kolegou Johnem van Nessem v [11] definovali pomocí reprezentace stochastickým integrálem a navrhli označení frakcionální Brownův pohyb. Byl to také Mandelbrot, kdo navrhl nazývat parametr H po britském hydrologu Heroldu Edwinu Hurstovi.

H. E. Hurst pracoval ve 20. století pro egyptskou vládu a byl v čele Fyzikálního oddělení při Ministerstvu veřejných prací. Pod Hurstovým vedením shromažďoval ústav podrobná hydrologická data z Nilské nížiny. Hurst v [7] zkoumal roční příbytky vody na Nilu a objevil nečekanou věc. Zjistil, že suché nebo deštivé roky mají tendenci se seskupovat. Zejména může být překvapující, že jednotlivé roky na sobě, co do množství vody, nejsou nezávislé. O tomto fenoménu se vyskytuje zmínka i v Bibli (Genesis 41, 29–30): „Na celou egyptskou zem přichází sedm let veliké hojnosti. Po nich však nastane sedm let hladu, kdy se v egyptské zemi na všechnu tu hojnost zapomene“. Pochopitelně tamější zemědělství bylo tehdy zcela závislé na Nilu. Mandelbrot proto pojmenoval tento jev jako Josefův efekt.

Současnost a význam

Frakcionální Brownův pohyb lze použít pro modelování systémů v čase, kde je přítomna závislost na historii, neboli paměť procesu. Frakcionální Brownův pohyb může být použit například pro modelování následujícího:

1. Průtok v řece v závislosti na čase. Tím se empiricky zabýval Hurst při měření toku Nilu, přestože neznal aparát frakcionálního Brownova pohybu.

2. Další přírodní jevy jako intenzita slunečního záření v čase, teplota na určitém místě v čase nebo šířka letokruhů ve dřevě.
3. Logaritmus ceny akcie. Pro další informace odkážeme čtenáře na heslo geometrický frakcionální Brownův pohyb.
4. Finanční turbulence (volatilita) a jiné turbulence.
5. Síťový provoz a telekomunikace. Částečně se tímto (informativně) zabývá Dieker v [5].

V přírodních jevech typicky platí, že $H > 1/2$. V tomto případě objekty, které modelujeme pomocí frakcionálního Brownova pohybu, vykazují dlouhodobou závislost na minulosti (viz 1.5) a vlastnosti těchto objektů mají persistentní charakter. Hurst během své práce na Nilu odhadl H přibližně na hodnotu 0.7.

Při modelování turbulencí se často využívá případu $H < 1/2$. Systémy pak mají tendenci být nestálé a rychle měnit své vlastnosti.

Struktura práce a můj přínos

V první kapitole se prvně zabývám zavedením základů teorie náhodných procesů. Následují definice zkoumaných procesů, tedy standardního Brownova pohybu podle tradiční i „moderní“ definice, frakcionálního Brownova pohybu a frakcionálního gaussovského šumu. V dalších sekcích první kapitoly již podrobně dokazují vlastnosti frakcionálního Brownova pohybu: korelaci mezi přírůstky, soběpodobnost a dlouhodobou závislost pro $H > 1/2$. Následně uvádím a dokazuji Mandelbrotovu a van Nessovu stochastickou reprezentaci. Zkoumám také analytické vlastnosti trajektorií procesu. Přestože jsem frakcionální Brownův pohyb definoval jako spojitý proces, uvádím, že spojitost je (ve smyslu přechodu k verzi) splněna automaticky. Pomocí Kolmogorov–Čencovovy věty o lokální hölderovskosti dokazuji hölderovskost trajektorií na kompaktním intervalu. Poslední sekce této kapitoly se týká nediferencovatelnosti. Mandelbrot a van Ness v [11], či jiní autoři, jejichž práce jsem četl, dokazují nediferencovatelnost trajektorií v každém bodě skoro jistě. Dokazuji silnější verzi tohoto tvrzení, totiž že derivace neexistuje skoro jistě v žádném bodě. Přesněji, že P -skoro všechny trajektorie nemají ani v jednom bodě derivaci.

Druhá kapitola se zabývá simulacemi trajektorií frakcionálního Brownova pohybu a z části i obecných gaussovských procesů. Uvádím celkem tři simulační metody. První, Hoskingova metoda, spočívá v postupném generování bodů, přičemž je potřeba spočítat podmíněné rozdělení dalšího bodu na základě hodnot z minulosti. Druhá, Choleského metoda, převádí simulaci procesu na simulaci vícerozměrného normálního rozdělení. Využívá přitom tzv. Choleského rozkladu. Třetí metoda je založena na stochastické reprezentaci odvozené v první kapitole. Provádím základní zhodnocení popsanych metod. Všechny metody jsem naprogramoval a jejich zdrojové kódy příkládám na CD.

V poslední kapitole se zabývám bodovým odhadem Hurstova indexu H . Uvádím dvě metody. První využívá soběpodobnosti procesu a výpočtu rozptylu. Druhá porovnává normované rozpětí maxima a minima v čase. Právě tuto metodu používal Hurst, když měřil tok vody v Nilu. Metody jsem naprogramoval a vyzkoušel na simulovaných datech. Zdrojové kódy příkládám na CD.

Kapitola 1

Frakcionální Brownův pohyb

1.1 Základní pojmy teorie náhodných procesů

Než se pustíme do zkoumání vlastností frakcionálního Brownova pohybu, je zapotřebí definovat základní pojmy z teorie náhodných procesů.

Definice 1.1.1. Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a $T \subset \mathbb{R}$. *Náhodným procesem* rozumíme indexovaný systém $(X(t))_{t \in T}$, kde pro každé $t \in T$ je $X(t)$ náhodná veličina na prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) .

Náhodný proces $(X(t))_{t \in T}$ můžeme chápat jako funkci dvou proměnných $\omega \in \Omega, t \in T$. Chceme-li explicitně zdůraznit závislost na ω , budeme psát $X(t, \omega)$. Proměnnou t interpretujeme jako čas a ω vnáší do vývoje procesu nedeterminismus, náhodnost. Pro pevné t je $X(t)$ náhodná veličina. Pro pevné ω je $X(\cdot, \omega)$ reálná funkce. Tuto funkci budeme nazývat *trajektorií* procesu $(X(t))_{t \in T}$. Je-li $T = \mathbb{N}_0$, pak proces značíme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ a typicky nazýváme *náhodná posloupnost*.

Zvolme si n -tici bodů $t_1, \dots, t_n \in T$. Potom $(X(t_1), \dots, X(t_n))'$ je náhodný vektor a můžeme se zajímat o jeho distribuční funkci a rozdělení. Výběrem všech možných n -tic z T dostaneme celou sadu distribučních funkcí a rozdělení.

Definice 1.1.2. Nechť $X = (X(t))_{t \in T}$ je náhodný proces. Systém rozdělení odpovídající systému distribučních funkcí

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

pro všechny n -tice $t_1, \dots, t_n \in T$ se nazývá *konečně rozměrná rozdělení*.

Informace obsažená v konečně rozměrných rozděleních stačí pro jednoznačné určení rozdělení náhodného procesu ve smyslu následující věty.

Věta 1.1.3. Nechť $X = (X(t))_{t \in T}$ je náhodný proces. Chápeme-li X jako měřitelné zobrazení $X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\prod_{t \in T} \mathbb{R}, \otimes_{t \in T} \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, pak je jeho rozdělení určeno jednoznačně systémem konečně rozměrných rozdělení.

Důkaz. Pomocí Dynkinova lemmatu, viz [13], věta I.10.1, str 83. □

Mezi základní charakteristiky náhodné veličiny patří střední hodnota a rozptyl. Základními charakteristikami náhodného vektoru jsou vektor středních hodnot a varianční matice. Zavedeme analogické pojmy pro náhodný proces.

Definice 1.1.4. Nechť $X = (X(t))_{t \in T}$ je náhodný proces. Potom reálnou funkci $\mu(t) = EX(t), t \in T$, nazýváme *střední hodnotou* náhodného procesu X a funkci dvou proměnných $K(t,s) = \text{cov}(X(t), X(s)), t, s \in T$, nazýváme *autokovarianční funkcí* náhodného procesu X .

Náhodný proces typicky popisuje chování nějakého objektu v čase. Chtěli bychom umět pojmenovat skutečnost, že „zákonitost“ jeho chování se v čase nemění. K tomu slouží pojem stacionarity.

Definice 1.1.5. Nechť $X = (X(t))_{t \in T}$ je náhodný proces. Řekneme, že je *striktně stacionární*, pokud pro jeho konečně rozměrná rozdělení platí

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n),$$

kdykoliv $n \in \mathbb{N}; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}; h > 0; t_1, \dots, t_n \in T$ a $t_j + h \in T$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Nechť náhodný proces X má konečné druhé momenty. Řekneme, že je *slabě stacionární*, pokud má konstantní střední hodnotu $\mu(t) = \mu, t \in T$, a jeho autokovarianční funkce je translačně invariantní, tj. $K(t,s) = K(t+h, s+h)$, kdykoliv $h \in \mathbb{R}; s \in T; t+h, s+h \in T$. Anebo jinak, jeho autokovarianční funkce je pouze funkcí vzdálenosti argumentů, píšeme $K(t,s) = \gamma(t-s)$.

Zřejmě, pokud je náhodný proces striktně stacionární a má konečné druhé momenty, pak je i slabě stacionární.

Definice 1.1.6. Řekneme, že náhodný proces $(X(t))_{t \in T}$ je *centrovaný*, jestliže platí $\mu(t) = EX(t) = 0$ pro všechna $t \in T$.

Mezi rozděleními náhodných veličin a vektorů existuje sada obzvláště významných rozdělení — normální (gaussovská) rozdělení. Poznamenejme ještě, že i degenerované rozdělení (skoro jistě konstanta, také nazývané Diracovo rozdělení) považujeme za normální rozdělení s nulovým rozptylem. Zdefinujeme normalitu pro náhodné procesy.

Definice 1.1.7. Řekneme, že náhodný proces $(X(t))_{t \in T}$ je *gaussovský*, jestliže pro všechna $t_1, \dots, t_n \in T$ má náhodný vektor $(X(t_1), \dots, X(t_n))'$ n -rozměrné normální rozdělení.

Často se píše, že $X \sim GP(\mu, K)$, kde μ je střední hodnota procesu a K je jeho autokovarianční funkce. Znalost funkcí μ, K a faktu, že je proces gaussovský, zaručuje dle věty 1.1.3 jednoznačnost rozdělení náhodného procesu. Dalším důsledkem tohoto faktu je, že pro gaussovské procesy splývají pojmy slabé a striktní stacionarity.

Ještě si zdefinujeme spojitost procesu ve smyslu spojitosti jeho trajektorií.

Definice 1.1.8. Nechť $X = (X(t))_{t \in T}$ je náhodný proces. Řekneme, že je *spojitý*, pokud pro všechna $\omega \in \Omega$ je funkce $t \mapsto X(t, \omega)$ spojitá na T . Řekneme, že je *skoro jistě spojitý*, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}, P(A) = 1$, že $t \mapsto X(t, \omega)$ je spojitá na T pro každé $\omega \in A$.

V následujícím textu budeme často přecházet mezi „podobnými“ procesy.

Definice 1.1.9. Nechť $X = (X(t))_{t \in T}$ a $Y = (Y(t))_{t \in T}$ jsou náhodné procesy. Řekneme, že Y je *verzí* (stochastickou verzí, modifikací) X , pokud

$$\forall t \in T : P(X(t) = Y(t)) = 1.$$

Pokud $(X(t))_{t \in T}$ je verzí $(Y(t))_{t \in T}$, pak tyto procesy mají zřejmě stejná konečně rozměrná rozdělení a díky větě 1.1.3 i stejná rozdělení.

1.2 Brownův a frakcionální Brownův pohyb

V této sekci zdefinujeme všechny zkoumané procesy, dokážeme vztahy mezi nimi a odvodíme základní vlastnosti. Začneme s tzv. tradiční definicí Brownova pohybu.

Definice 1.2.1 (Tradiční definice Brownova pohybu). *Brownův pohyb* je spojitý náhodný proces $(B(t))_{t \geq 0}$ s následujícími vlastnostmi:

1. $B(0) = 0$ skoro jistě,
2. $(B(t))_{t \geq 0}$ má nezávislé přírůstky. To znamená, že pro každé $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$ jsou náhodné veličiny $B(t_1) - B(s_1), B(t_2) - B(s_2), \dots, B(t_n) - B(s_n)$ nezávislé.
3. $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s), 0 \leq s < t$.

Někteří autoři Brownův pohyb nazývají Wienerův proces. V tomto textu budeme oba názvy považovat za synonyma.

Fakt, že přírůstky jsou nepřekrývající je zásadní. Překrývající se přírůstky budou jistě závislé a kladně korelované.

Nyní zdefinujeme frakcionální Brownův pohyb.

Definice 1.2.2. Nechť H je konstanta z intervalu $(0,1)$. *Frakcionální Brownův pohyb* $(B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$ s *Hurstovým indexem* H je spojitý centrovaný gaussovský proces s autokovarianční funkcí

$$K(t,s) = E [B^{(H)}(t) B^{(H)}(s)] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad t,s \geq 0. \quad (1.1)$$

Konstanta H se také nazývá *Hurstův exponent* nebo *Hurstův parametr*.

Později ukážeme, že pro $H = 1/2$ definice 1.2.2 odpovídá tradiční definici Brownova pohybu 1.2.1. Protože tato skutečnost je natolik významná, uveďme přepis definice 1.2.2 pro $H = 1/2$.

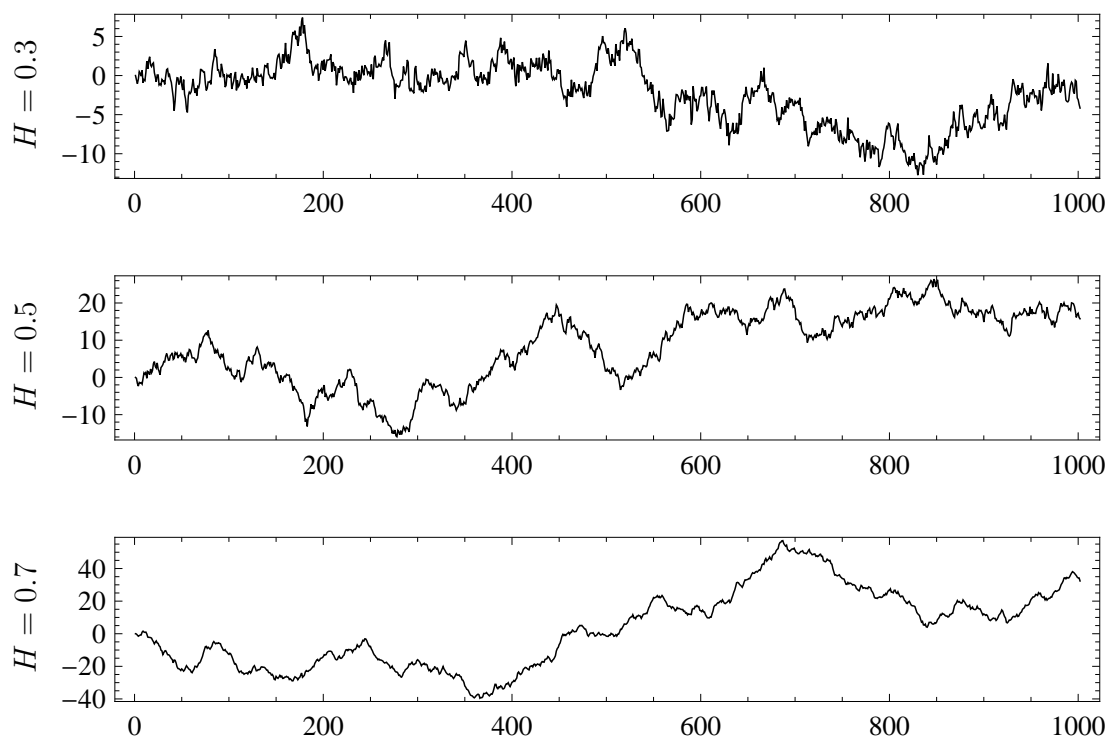
Definice 1.2.3. Standardní *Brownův pohyb* $(B(t))_{t \geq 0}$ je spojitý centrovaný gaussovský proces s autokovarianční funkcí

$$K(t,s) = E [B^{(H)}(t) B^{(H)}(s)] = \min(t,s), \quad t,s \geq 0.$$

Hurstův index zásadním způsobem ovlivňuje některé vlastnosti frakcionálního Brownova pohybu. Jak se přesvědčíme v sekci 1.3, interval $(0,1)$ se štěpí na tři důležité podmnožiny.

- Pro $H \in (0, 1/2)$ dostáváme proces se záporně korelovanými přírůstky.
- Pro $H = 1/2$ dostáváme ve skutečnosti Brownův pohyb, který má nezávislé přírůstky.
- Pro $H \in (1/2, 1)$ dostáváme proces s kladně korelovanými přírůstky.

Další představu o vlivu Hurstova indexu na tvar trajektorií si můžeme udělat z obrázku 1.1. Více o simulacích frakcionálního Brownova pohybu lze dohledat v kapitole 2.



Obrázek 1.1: Frakcionální Brownův pohyb po řadě s $H = 0.3, 0.5$ a 0.7

Věta 1.2.4. *Frakcionální Brownův pohyb $(B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$ má následující základní vlastnosti:*

1. $B^{(H)}(0) = 0$ skoro jistě,
2. $B^{(H)}(t) \sim N(0, t^{2H}), t \geq 0$,
3. má stacionární přírůstky; to znamená, že

$$B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s) \sim B^{(H)}(t), \quad t, s \geq 0.$$

Důkaz. 1. $E[B^{(H)}(0)B^{(H)}(0)] = 0 = \text{var } B^{(H)}(0)$, tedy $B^{(H)}(0)$ je skoro jistě konstanta. Nutně $B^{(H)}(0) = EB^{(H)}(0) = 0$ skoro jistě.

2. $B^{(H)}(t)$ má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem

$$\text{var } B^{(H)}(t) = E[(B^{(H)}(t))^2] = \frac{1}{2}(t^{2H} + t^{2H} - 0^{2H}) = t^{2H}.$$

3. $B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s)$ a $B^{(H)}(t)$ mají normální rozdělení. Normální rozdělení jsou stejná, mají-li příslušné náhodné veličiny stejné první a druhé momenty. Spočítáme první momenty

$$E[B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s)] = E[B^{(H)}(t+s)] - E[B^{(H)}(s)] = 0 = E[B^{(H)}(t)].$$

Spočítáme druhý moment $B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s)$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s) \right)^2 \right] = \\ & = \mathbb{E} \left[\left(B^{(H)}(t+s) \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[2B^{(H)}(t+s) B^{(H)}(s) \right] + \mathbb{E} \left[\left(B^{(H)}(s) \right)^2 \right] = \\ & = (t+s)^{2H} - \left((t+s)^{2H} + s^{2H} - |t+s-s|^{2H} \right) + s^{2H} = t^{2H}, \end{aligned}$$

který se rovná druhému momentu $B^{(H)}(t)$ podle bodu 2. □

Věta 1.2.5. *Fracionální Brownův pohyb s Hurstovým indexem $H = 1/2$ je Brownův pohyb ve smyslu tradiční definice 1.2.1.*

Důkaz. Nechť $B = (B(t))_{t \geq 0}$ je fracionální Brownův pohyb s indexem $H = 1/2$. Potom je spojitý a vlastnosti 1 a 3 v definici 1.2.1 jsou splněny z věty 1.2.4. Zbývá dokázat nezávislost přírůstků. Nechť $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$. Pak pro $i < j$ platí:

$$\begin{aligned} \text{cov} (B(t_i) - B(s_i), B(t_j) - B(s_j)) &= \mathbb{E} [(B(t_i) - B(s_i))(B(t_j) - B(s_j))] = \\ &= \mathbb{E} [B(t_i)B(t_j)] - \mathbb{E} [B(t_i)B(s_j)] - \mathbb{E} [B(s_i)B(t_j)] + \mathbb{E} [B(s_i)B(s_j)] = \\ &= t_i - t_i - s_i + s_i = 0. \end{aligned}$$

Pro sdružené n -rozměrné normální rozdělení je nekorelovanost po dvojicích ekvivalentní s nezávislostí celé n -tice veličin a vektor $(B(t_1) - B(s_1), B(t_2) - B(s_2), \dots, B(t_n) - B(s_n))'$ má sdružené normální rozdělení z definice gaussovského procesu.

Nechť $B = (B(t))_{t \geq 0}$ je Brownův pohyb podle tradiční definice 1.2.1. B je zřejmě spojitý a centrovaný proces, neboť $B(t) \sim N(0, t)$ a tedy $\mathbb{E}B(t) = 0$.

Dokážeme, že je to gaussovský proces. Vezměme si časy $t_1, \dots, t_n \geq 0$, bez újmy na obecnosti různé a bez újmy na obecnosti seřazené $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Chceme dokázat, že lineární kombinace $\sum_{j=1}^n a_j B(t_j)$ je normálně rozdělená náhodná veličina pro $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Trik spočívá v převodu sumace na přírůstky. Platí (dokázalo by se indukcí), klademe-li $t_0 = 0$,

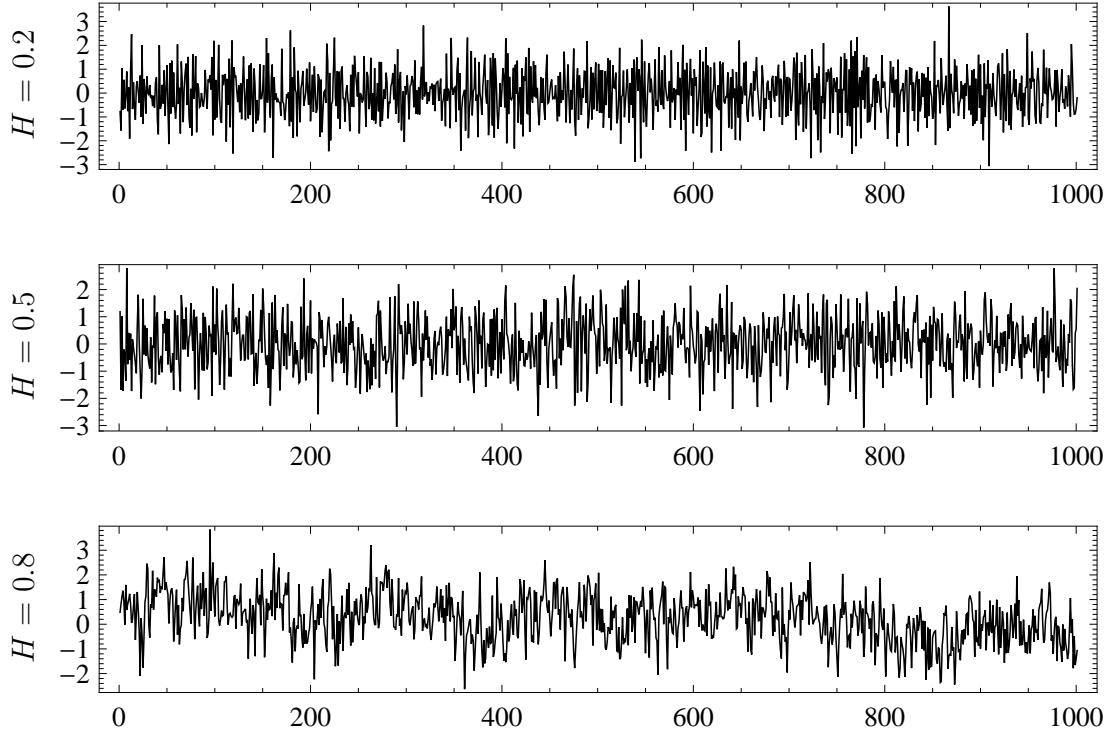
$$\sum_{j=1}^n a_j B(t_j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=j}^n a_l \right) (B(t_j) - B(t_{j-1})),$$

přičemž $B(t_j) - B(t_{j-1}), j = 1, \dots, n$, jsou nepřekrývající se přírůstky, které jsou nezávislé podle bodu 2 tradiční definice Brownova pohybu. Lineární kombinace nezávislých normálních veličin je normálně rozdělená veličina.

Zbývá spočítat autokovarianční funkci

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B(t)B(s)] &= \frac{1}{2} (\mathbb{E} [B(t)^2] + \mathbb{E} [B(s)^2] - \mathbb{E} [(B(t) - B(s))^2]) = \\ &= \frac{1}{2} (t + s - |t - s|) = \min(t, s). \end{aligned}$$

□



Obrázek 1.2: Frakcionální gaussovský šum po řadě s $H = 0.2, 0.5$ a 0.8

Definice 1.2.6. Necht $(B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$ je frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým parametrem H . Potom definujeme *frakcionální gaussovský šum* jako náhodnou posloupnost

$$X_n = B^{(H)}(n+1) - B^{(H)}(n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Frakcionální gaussovský šum je podle věty 1.2.4 striktně stacionární proces a $X_n \sim N(0, 1), n \in \mathbb{N}_0$. Avšak obecně nemáme nezávislost X_n . Pro stacionární proces je jeho autokovarianční funkce pouze funkcí vzdálenosti argumentů. Budeme ji značit $\gamma(k) = K(n+k, n)$. Po krátkém výpočtu (podrobně ve větě 1.3.1) zjistíme, že

$$\gamma(k) = \frac{1}{2} (|k+1|^{2H} + |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na obrázku 1.2 si můžeme prohlédnout trajektorie frakcionálního gaussovského šumu pro různá H . Jednotlivé body posloupnosti jsou propojeny lomenou čarou.

Necht $X = (X_0, \dots, X_n)'$ je začátek posloupnosti frakcionálního gaussovského šumu. Označme jeho varianční matici

$$\mathbf{\Gamma}(n) = (\gamma(i-j))_{i,j=0}^n. \quad (1.2)$$

V následujícím ověříme, že matice $\mathbf{\Gamma}(n)$ je pro každé $n \in \mathbb{N}$ pozitivně definitní, neboli že konečně rozměrná rozdělení frakcionálního gaussovského šumu mají regulární varianční matici.

Definice 1.2.7. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je *striktně pozitivně definitní*, jestliže matice $(f(x_i - x_j))_{i,j=1}^n$ je pozitivně definitní pro každou n -tici po dvou různých čísel $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Věta 1.2.8 (zobecněná Bochnerova). *Nechť μ je nezáporná konečná borelovská míra na \mathbb{R} taková, že její nosič (tj. $\mathbb{R} \setminus \bigcup\{G: G \text{ je otevřená, } \mu(G) = 0\}$) má kladnou Lebesgueovu míru. Potom Fourierova transformace míry μ*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} d\mu(t)$$

je striktně pozitivně definitní funkce.

Důkaz. Viz [6], věta 3.4, str. 32. □

Lemma 1.2.9. *Nechť $H \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$. Potom funkce*

$$\gamma(x) = \frac{1}{2} (|x+1|^{2H} + |x-1|^{2H} - 2|x|^{2H}), \quad x \in \mathbb{R},$$

je striktně pozitivně definitní.

Důkaz. Nechť $H \neq 1/2$. Stačí vypočítat¹ inverzní Fourierovu transformaci funkce γ , a tedy zjistit, že γ lze psát ve tvaru

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt,$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{2\pi}(\cos(t) - 1)|t|^{-2H-1}}{2 \cos(\pi H)\Gamma(-2H)},$$

kde Γ je gamma funkce. Chápejme integrál jako integraci podle míry s hustotou f . Tato míra je konečná, neboť f je integrovatelná. Výraz $(\cos(\pi H)\Gamma(-2H))$ je pro $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ záporný. Výraz $(\cos(t) - 1)$ je nekladný, přičemž je nulový pouze pro $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Tedy f je nezáporná funkce a indukuje nezápornou míru. Její nosič je uzávěr množiny $\{t: f(t) > 0\}$, tedy celá reálná přímka. Podle věty 1.2.8 je funkce γ striktně pozitivně definitní. □

Věta 1.2.10. *Nechť $H \in (0, 1)$. Potom matice (1.2) je pozitivně definitní.*

Důkaz. Pro $H \neq 1/2$ použijeme lemma 1.2.9. Příklad $H = 1/2$ je triviální. □

1.3 Korelace mezi dvěma přírůstky

Přírůstkem procesu $(X(t))_{t \geq 0}$ mezi časy $0 \leq t_1 < t_2$ rozumíme rozdíl $X(t_2) - X(t_1)$. V následujícím budeme zkoumat kovarianci mezi dvěma nepřekrývajícími se přírůstky frakcionálního Brownova pohybu.

Hurstův index $H \in (0, 1)$ zásadním způsobem ovlivňuje chování trajektorií procesu. Ve větě 1.2.5 jsme již dokázali, že frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým indexem $H = 1/2$ je Brownův pohyb a má tedy nezávislé přírůstky. Pro $H \neq 1/2$ nezávislost nemáme. Ve skutečnosti zjistíme, že pro $H \in (1/2, 1)$ má proces kladně korelované přírůstky, zatímco pro $H \in (0, 1/2)$ korelované záporně. V prvním případě proces vykazuje tendenci shlukovat lokální trendy a jeho chování se dá interpretovat jako existence paměti procesu. V druhém případě se proces jeví nestabilně a roztěkaně.

¹Inverzní Fourierovu transformaci jsem spočítal s pomocí softwaru Mathematica. Skript pro její výpočet přikládám na CD, viz příloha A.

Věta 1.3.1. Zvolme $s, t, h \geq 0$ tak, aby $s + h \leq t$ a $n = (t - s)/h \in \mathbb{N}$. Označujme $\rho_H(h, n)$ kovarianci mezi přírůstky $B^{(H)}(t + h) - B^{(H)}(t)$ a $B^{(H)}(s + h) - B^{(H)}(s)$. Potom

$$\rho_H(h, n) = \frac{1}{2} h^{2H} ((n + 1)^{2H} + (n - 1)^{2H} - 2n^{2H}).$$

Nadto

- $\rho_H(h, n) < 0$ pro $H \in (0, 1/2)$,
- $\rho_H(h, n) > 0$ pro $H \in (1/2, 1)$.

Důkaz. Počítejme

$$\begin{aligned} \rho_H(h, n) &= \mathbb{E} [(B^{(H)}(t + h) - B^{(H)}(t)) (B^{(H)}(s + h) - B^{(H)}(s))] = \\ &= \mathbb{E} [B^{(H)}(t + h) B^{(H)}(s + h)] - \mathbb{E} [B^{(H)}(t) B^{(H)}(s + h)] - \\ &\quad - \mathbb{E} [B^{(H)}(t + h) B^{(H)}(s)] + \mathbb{E} [B^{(H)}(t) B^{(H)}(s)] = \\ &= \frac{1}{2} ((t + h)^{2H} + (s + h)^{2H} - (t - s)^{2H} + t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} - \\ &\quad - t^{2H} - (s + h)^{2H} + (t - s - h)^{2H} - (t + h)^{2H} - s^{2H} + (t + h - s)^{2H}) = \\ &= -(nh)^{2H} + \frac{1}{2} (((n - 1)h)^{2H} + ((n + 1)h)^{2H}) = \\ &= \frac{1}{2} h^{2H} ((n + 1)^{2H} + (n - 1)^{2H} - 2n^{2H}). \end{aligned}$$

Zjistíme znaménko $\rho_H(h, n)$ pro pevné n, h, H

$$\begin{aligned} \rho_H(h, n) &= \frac{1}{2} h^{2H} ((n + 1)^{2H} - n^{2H} - n^{2H} + (n - 1)^{2H}) = \\ &= \frac{h^{2H}}{2} ([x^{2H}]_n^{n+1} - [x^{2H}]_{n-1}^n) = h^{2H} H \left(\int_n^{n+1} x^{2H-1} dx - \int_{n-1}^n x^{2H-1} dx \right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Jestliže $H > 1/2$, pak funkce x^{2H-1} je rostoucí a první integrál v (1.3) bude větší než druhý. Tedy $\rho_H(h, n) > 0$. Naopak, je-li $H < 1/2$, pak funkce x^{2H-1} je klesající a $\rho_H(h, n) < 0$. □

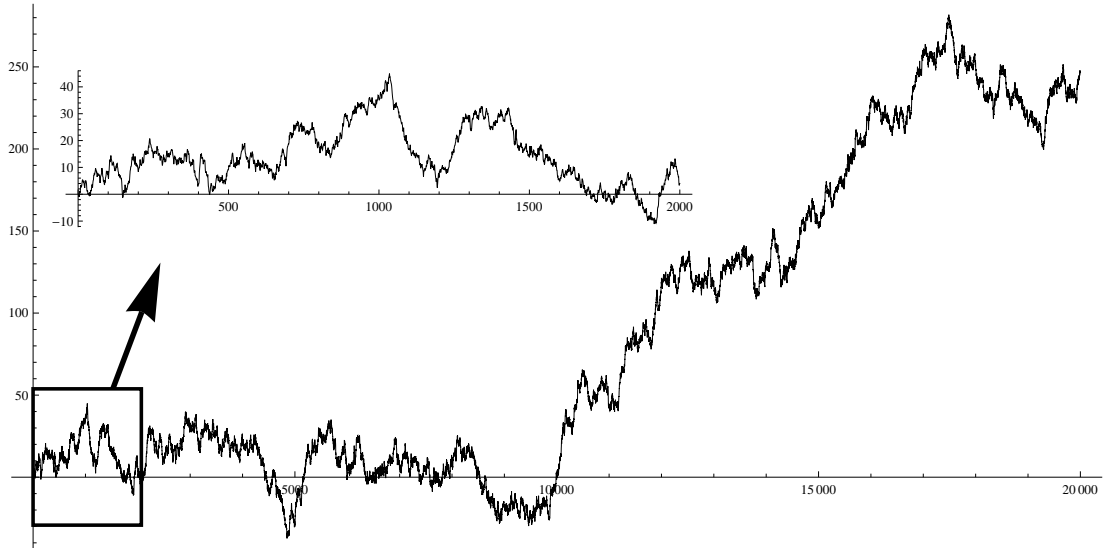
1.4 Soběpodobnost

Jestliže se podíváme na obrázek 1.3, všimneme si, že trajektorie frakcionálního Brownova pohybu vypadají „fraktálně“ a při přiblížení jsou „soběpodobné“. Matematický koncept této skutečnosti zachycuje následující definice.

Definice 1.4.1. Řekneme, že náhodný proces $X = (X(t))_{t \geq 0}$ je *soběpodobný s Hurstovým indexem H* , jestliže pro každé $a > 0$ platí

$$(X(at))_{t \geq 0} \sim (a^H X(t))_{t \geq 0}. \tag{1.4}$$

Pro zkoumání soběpodobnosti frakcionálního Brownova pohybu je klíčovým pojmem homogenní funkce.



Obrázek 1.3: Soběpodobnost frakcionálního Brownova pohybu pro $H = 0.5$

Definice 1.4.2. Necht' $A \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že reálná funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je *pozitivně homogenní* stupně $\alpha \in \mathbb{R}$ na A , jestliže

$$\forall \lambda > 0 \forall x \in A : f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Příklad 1.4.3. Funkce $K(t,s) = 1/2(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$, $t,s \geq 0$, je pozitivně homogenní stupně $2H$ na množině $\{(t,s) : t,s \geq 0\}$. Skutečně

$$\begin{aligned} K(\lambda t, \lambda s) &= \frac{1}{2}((\lambda t)^{2H} + (\lambda s)^{2H} - |\lambda t - \lambda s|^{2H}) = \\ &= \frac{\lambda^{2H}}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) = \lambda^{2H} K(t,s). \end{aligned}$$

Věta 1.4.4. *Frakcionální Brownův pohyb $(B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$ je soběpodobný s Hurstovým indexem H .*

Důkaz. Náhodné procesy mají podle věty 1.1.3 stejná rozdělení, právě když mají stejná konečně rozměrná rozdělení. Zvolme $t_1, \dots, t_n \geq 0$. Stačí tedy ověřit, že

$$(B^{(H)}(at_1), \dots, B^{(H)}(at_n))' \sim (a^H B^{(H)}(t_1), \dots, a^H B^{(H)}(t_n))'.$$

Z definice gaussovského procesu víme, že oba vektory mají n -rozměrné normální rozdělení. Stačí tedy ověřit rovnost vektorů středních hodnot

$$E(B^{(H)}(at_1), \dots, B^{(H)}(at_n))' = (0, \dots, 0)' = E(a^H B^{(H)}(t_1), \dots, a^H B^{(H)}(t_n))'$$

a variančních matic. Rovnost matic se ověřuje po prvcích, tj. pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ musí platit

$$\text{cov}(B^{(H)}(at_i), B^{(H)}(at_j)) = \text{cov}(a^H B^{(H)}(t_i), a^H B^{(H)}(t_j)).$$

Označme $K(t,s) = 1/2(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$ autokovarianční funkci frakcionálního Brownova pohybu. V příkladu 1.4.3 jsme ukázali, že K je pozitivně homogenní stupně $2H$ na množině $\{(t,s) : t,s \geq 0\}$. Počítejme

$$\begin{aligned} \text{cov}(B^{(H)}(at_i), B^{(H)}(at_j)) &= K(at_i, at_j) = a^{2H} K(t_i, t_j) = \\ &= a^{2H} \text{cov}(B^{(H)}(t_i), B^{(H)}(t_j)) = \text{cov}(a^H B^{(H)}(t_i), a^H B^{(H)}(t_j)). \end{aligned}$$

Tedy $(B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$ je soběpodobný s Hurstovým indexem H . \square

Soběpodobnosti se využívá například při statistických odhadech Hurstova parametru. Metoda agregovaného rozptylu 3.1 odhaduje H na základě role, jakou hraje ve vztahu (1.4). Hurstova R/S analýza 3.2 využívá soběpodobnost nepřímo.

1.5 Dlouhodobá závislost

V této sekci ukážeme, že frakcionální Brownův pohyb vykazuje pro $H > 1/2$ takzvanou dlouhodobou závislost. (Přesnější by bylo mluvit o dlouhodobé závislosti jeho přírůstků — frakcionálního gaussovského šumu.)

Nechť $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost. Potom autokovarianční funkce tohoto procesu je pouze funkcí vzdálenosti argumentů. Označujme $\gamma(k) = \text{cov}(X_{n+k}, X_n)$. Jestliže $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ popisuje vývoj nějakého systému v čase, pak bychom očekávali, že závislost mezi X_n a X_{n+k} je malá, jestliže časy n a $n+k$ jsou „daleko od sebe“. Proto v aplikacích funkce γ zpravidla klesá k nule pro $k \rightarrow \infty$. Otázka zní, jak rychle klesá?

Definice 1.5.1. Nechť $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ je slabě stacionární náhodná posloupnost a $\gamma(k) = \text{cov}(X_{n+k}, X_n)$. Řekneme, že $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ vykazuje *dlouhodobou závislost*, jestliže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty.$$

Naopak, je-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k)$ sčitatelná, říkáme, že proces vykazuje *krátkodobou závislost*.

Nechť $(B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$ je frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým parametrem H , pak přírůstky tohoto procesu $X_n = B^{(H)}(n+1) - B^{(H)}(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, se nazývají frakcionální gaussovský šum. Po krátkém výpočtu (podrobně ve větě 1.3.1) zjistíme, že

$$\gamma(k) = \frac{1}{2} (|k+1|^{2H} + |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pomocí konečného Taylorova rozvoje $(1+x)^\alpha$ dostaneme asymptotické chování funkce $\gamma(k)$ v nekonečnu (pro $H \neq 1/2$)

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \frac{k^{2H}}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2H} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2H} - 2 \right) = \\ &= \frac{k^{2H-2}}{2} (2H(2H-1) + o(k^{-3})) \asymp k^{2H-2}, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Použitím limitního srovnávacího kritéria získáme

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty$ pro $H > 1/2$,
2. $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$ pro $H < 1/2$.

Proto frakcionální gaussovský šum vykazuje dlouhodobou závislost pro $H > 1/2$.

Přítomnost dlouhodobé závislosti je důležité zohlednit při statistickém zpracování časových řad. Více o důsledcích dlouhodobé závislosti lze dohledat v [3].

1.6 Stochastická reprezentace

Úmluva. Definujeme $0^0 = 0$ a $x^0 = 1, x \neq 0$.

Mandelbrot a van Ness původně v [11] definovali frakcionální Brownův pohyb pomocí stochastického integrálu

$$Z(t) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{\mathbb{R}} \left((t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2} \right) dB(s) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left(\int_{-\infty}^0 ((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}) dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right), \quad (1.5)$$

kde Γ je gamma funkce a $H \in (0,1)$. Konstanta $\Gamma(H + 1/2)^{-1}$ je v [11] motivována jistou podobností s frakcionálními integrály. Více informací o tzv. frakcionálním Riemann-Liouvillovu integrálu lze dohledat v [4], dodatek B, str. 285.

V následujícím textu vybudujeme nejjednodušší stochastický integrál. Pro podrobný výklad lze odkázat čtenáře na [8], kap. 3. Aparát stochastického integrálu dovoluje integrovat náhodný proces podle jiného náhodného procesu. Nám však bude stačit integrovat pouze deterministickou funkci podle Brownova pohybu.

Nejprve rozšíříme Brownův pohyb na celou reálnou přímku. Nechť $(B_1(t))_{t \geq 0}$ a $(B_2(t))_{t \geq 0}$ jsou nezávislé Brownovy pohyby, pak definujeme *Brownův pohyb na celé reálné přímce* předpisem

$$B(t) = \begin{cases} B_1(t) & , t \geq 0, \\ B_2(-t) & , t < 0. \end{cases}$$

Označme \mathcal{E} lineární prostor schodovitých funkcí tvaru

$$g(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

kde $-\infty \leq a < t_0 < \dots < t_n < b \leq \infty$ je dělení a $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Definice 1.6.1. Stochastický integrál funkce $g \in \mathcal{E}$ definujeme jako

$$\int_a^b g(t) dB(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)).$$

Takto definovaný stochastický integrál je lineární operátor z \mathcal{E} do prostoru $L^2(\Omega)$. Navíc platí *Itôova isometrie*

$$\left\| \int_a^b g(t) dB(t) \right\|_{L^2(\Omega)} = \|g\|_{L^2(a,b)}. \quad (1.6)$$

Vzhledem k tomu, že prostory $L^2(\Omega)$ a $L^2(a,b)$ jsou úplné, \mathcal{E} je hustá v $L^2(a,b)$ a platí (1.6), lze korektně rozšířit stochastický integrál na funkce z $L^2(a,b)$ následovně.

Definice 1.6.2. Nechť $f \in L^2(a,b)$. Stochastický integrál funkce f je definován jako

$$\int_a^b f(t) dB(t) = (L^2(\Omega)) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dB(t),$$

kde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{E}$ je taková, že $f_n \rightarrow f$ v $L^2(a,b)$.

Následující věta shrnuje základní vlastnosti stochastického integrálu.

Věta 1.6.3. *Nechť $f, g \in L^2(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Stochastický integrál:*

1. je určen skoro jistě jednoznačně,

2. má normální rozdělení

$$\int_a^b f(t) dB(t) \sim N\left(0, \int_a^b f(t)^2 dt\right),$$

3. je lineární

$$\lambda_1 \int_a^b f(t) dB(t) + \lambda_2 \int_a^b g(t) dB(t) \stackrel{s.j.}{=} \int_a^b (\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) dB(t)$$

4. a platí pro něj Itôova isometrie

$$\left\| \int_a^b f(t) dB(t) \right\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(a,b)}.$$

Věta 1.6.4. *Proces $(Z(t))_{t \geq 0}$ z (1.5) je až na multiplikační konstantu a až na přechod ke spojité verzi frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým indexem H .*

Důkaz. Pro jednoduchost vynechejme konstantu $\Gamma(H + 1/2)^{-1}$. $Z(t)$ je zřejmě centrováný proces.

Dokážeme, že je gaussovský. $Z(t)$ má tvar $Z(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t, s) dB(s)$. Volme $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že $\sum_{j=1}^n a_j Z(t_j)$ je normálně rozdělená náhodná veličina. Skutečně

$$\sum_{j=1}^n a_j Z(t_j) = \sum_{j=1}^n a_j \int_{\mathbb{R}} K(t_j, s) dB(s) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^n a_j K(t_j, s) \right) dB(s)$$

z linearity integrálu a faktu, že stochastický integrál je normálně rozdělená veličina.

Zbývá spočítat autokovarianční funkci. Označme

$$C_H = \int_{\mathbb{R}} \left((1-u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2} \right)^2 du.$$

Potom

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2(t)] &= \int_{\mathbb{R}} \left((t-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2} \right)^2 dx = \\ &= t^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 - \frac{x}{t}\right)_+^{H-1/2} - \left(-\frac{x}{t}\right)_+^{H-1/2} \right)^2 dx = \\ &= t^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left((1-u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2} \right)^2 du = \\ &= t^{2H} C_H, \end{aligned}$$

kde jsme při výpočtu v druhém integrálu použili substituci $x = tu$. Podobně, postupně využívající substituce $x = s + y$ a $y = (t - s)u$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Z(t) - Z(s))^2] &= \int_{\mathbb{R}} \left((t - x)_+^{H-1/2} - (s - x)_+^{H-1/2} \right)^2 dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left((t - s - y)_+^{H-1/2} - (-y)_+^{H-1/2} \right)^2 dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left((t - s - (t - s)u)_+^{H-1/2} - (-(t - s)u)_+^{H-1/2} \right)^2 |t - s| du = \\
&= |t - s|^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left((1 - u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2} \right)^2 du = \\
&= |t - s|^{2H} C_H.
\end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(t)Z(s)] &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E}[Z(t)^2] + \mathbb{E}[Z(s)^2] - \mathbb{E}[(Z(t) - Z(s))^2] \right) = \\
&= \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) C_H.
\end{aligned}$$

Pokud bychom proces $(Z(t))_{t \geq 0}$ podělili konstantou $C_H^{1/2}/\Gamma(H + 1/2)$, dostali bychom autokovarianční funkci z definice 1.2.2.

Stochastický integrál je definován jen skoro jistě jednoznačně. Hovořit o vlastnosti trajektorií jakou je spojitost tedy moc dobře nelze. Pokud bychom chtěli mít splněnou i tuto vlastnost, můžeme podle důsledku 1.7.6 přejít ke spojitě verzi. \square

Z výše uvedených výpočtů můžeme snadno znormovat stochastickou reprezentaci, aby výsledný proces měl přesně autokovarianční funkci (1.1), a tedy v čase t rozptyl t^{2H} . Po částečném zjednodušení C_H dostaneme normující konstantu V_H :

$$V_H = \left(\int_{-\infty}^0 \left((1 - u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2} \right)^2 du + \frac{1}{2H} \right)^{-1/2}. \quad (1.7)$$

Důsledek 1.6.5. *Nechť $H \in (0,1)$. Frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým indexem H má stochastickou reprezentaci*

$$B^{(H)}(t) = V_H \int_{\mathbb{R}} \left((t - s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2} \right) dB(s), \quad (1.8)$$

kde V_H je konstanta definovaná v (1.7).

1.7 Spojitost a hölderovskost

Z definice frakcionálního Brownova pohybu víme, že je to spojitý náhodný proces, to jest, že všechny jeho trajektorie jsou spojité. Někteří autoři tento požadavek zeslabují na spojitost skoro jistě nebo ho do definice vůbec nekladou. V této sekci si ukážeme, že z pouhé informace o momentech procesu můžeme usoudit, že existuje verze (viz definice 1.1.9) tohoto procesu, která má trajektorie spojité všechny. Dále pro frakcionální Brownův pohyb dokážeme i silnější vlastnost — hölderovskost.

Definice 1.7.1. Řekneme, že reálná funkce reálné proměnné $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, je *hölderovská* řádu $\gamma \geq 0$ (také říkáme, že je γ -*hölderovská*), jestliže

$$\exists \delta > 0, \forall x, y \in M, x \neq y : |f(x) - f(y)| < \delta |x - y|^\gamma.$$

Definice 1.7.2. Řekneme, že reálná funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, je *lokálně hölderovská* řádu $\gamma \geq 0$, jestliže

$$\exists h > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M 0 < |x - y| < h : |f(x) - f(y)| < \delta |x - y|^\gamma.$$

Klíčovou větou, kterou využijeme v této sekci je Kolmogorov–Čencovova. Tato věta zaručuje, za jistých podmínek kladených na momenty náhodného procesu, existenci verze s lokálně hölderovskými trajektoriemi.

Věta 1.7.3 (Kolmogorov–Čencovova). *Nechť $X = (X(t))_{0 \leq t \leq T}$ je náhodný proces. Nechť existují konstanty $\alpha, \beta, K > 0$, že*

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^\alpha] \leq K |t - s|^{1+\beta}, \quad t, s \in [0, T]. \quad (1.9)$$

Potom X má spojitou verzi $(Y(t))_{0 \leq t \leq T}$, která má s.j. lokálně hölderovské trajektorie řádu $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ ve smyslu

$$\mathbb{P} \left(\omega : \sup_{\substack{0 < t-s < h(\omega) \\ s, t \in [0, T]}} |Y(t, \omega) - Y(s, \omega)| < \delta |t - s|^\gamma \right) = 1, \quad (1.10)$$

kde $h(\omega)$ je vhodná s.j. nezáporná náhodná veličina a $\delta > 0$ vhodná konstanta.

Důkaz. Viz [8], věta 2.8, str. 53, 54. □

Věta 1.7.4. *Nechť $H \in (0, 1), T > 0$. Restrikce frakcionálního Brownova pohybu s Hurstovým indexem H na kompaktní interval $[0, T]$ má verzi s hölderovskými trajektoriemi řádu (ostře) menšího než H .*

Důkaz. Ověříme podmínku (1.9) pro $(B^{(H)}(t))_{0 \leq t \leq T}$. S využitím stacionarity přírůstků a soběpodobnosti dostaneme

$$\mathbb{E} \left[|B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s)|^\alpha \right] = \mathbb{E} \left[|B^{(H)}(1)|^\alpha \right] |t - s|^{\alpha H}. \quad (1.11)$$

Podle Kolmogorov–Čencovovy věty má tedy $(B^{(H)}(t))_{0 \leq t \leq T}$ verzi $(Y(t))_{0 \leq t \leq T}$ s vlastností (1.10) pro libovolné $\gamma < (\alpha H - 1)/\alpha = H - 1/\alpha$. Volbou dostatečně velkého α docílíme možnost volby libovolného $\gamma < H$. Označme A náhodný jev, na kterém lokální hölderovskost ve smyslu (1.10) platí.

Fixujme $\omega \in A$. Dokážeme, že z lokální hölderovskosti plyne hölderovskost. Protože interval $[0, T]$ je kompaktní, existuje $N = N_\omega$, že $Nh(\omega) > T$. Volme $t, s \in [0, T]$ libovolně, bez újmy na obecnosti $t < s$ a $|t - s| \geq h(\omega)$. Existuje $n < N$ a dělení $t < t_1 < t_2 < \dots < t_n < s$ tak, že $t_j - t_{j-1} < h(\omega), j = 2, \dots, n$ a $t_1 - t < h(\omega), s - t_n < h(\omega)$. Potom

$$\begin{aligned} |Y(t) - Y(s)| &\leq |Y(t) - Y(t_1)| + |Y(t_1) - Y(t_2)| + \dots + |Y(t_{n+1}) - Y(t_n)| + \\ &+ |Y(t_n) - Y(s)| \leq \delta (|t - t_1|^\gamma + |t_1 - t_2|^\gamma + \dots + |t_{n-1} - t_n|^\gamma + |t_n - s|^\gamma) \leq \\ &\leq \delta N |t - s|^\gamma, \end{aligned}$$

neboť $|t - t_1|, |s - t_n| < h(\omega); |t_j - t_{j-1}| < h(\omega) \leq |t - s|, j = 2, \dots, n$. Tedy $Y(\omega)$ má pro $\omega \in A$ γ -hölderovské trajektorie, protože $\delta^* = \delta N$ je konstanta nezávislá na t, s . Definujme

$$Z(t, \omega) = \begin{cases} Y(t, \omega) & , \omega \in A, \\ 0 & , \omega \notin A. \end{cases}$$

Potom $Z = (Z(t))_{0 \leq t \leq T}$ je verzi X , která má γ -hölderovské všechny trajektorie. \square

Ještě poznamenejme, že byť každá z trajektorií je hölderovská, tak trajektorie nemusí být stejnoměrně hölderovské v ω ve smyslu, že konstanta δ^* může záviset na ω a to prostřednictvím N .

Zatím jsme dokázali existenci verze se spojitými a hölderovskými trajektoriemi pouze na kompaktním intervalu. Kompaktnost je důležitá, neboť důkaz věty 1.7.3 v [8] je založen na omezenosti intervalu. Uveďme podobnou větu uvedenou v [13], která předpokládá omezenost intervalu nepotřebuje, ale na druhou stranu zaručuje jen existenci spojitě verze.

Věta 1.7.5 (Kolmogorovova o spojitě verzi). *Nechť $X = (X(t))_{t \geq 0}$ je náhodný proces. Nechť existují konstanty $\alpha, \beta, K > 0$, že*

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^\alpha] \leq K |t - s|^{1+\beta}, \quad t, s \geq 0. \quad (1.12)$$

Pak existuje spojitá verze procesu X .

Důkaz. Viz [13], věta III.5.8, str. 232. \square

Proces vyhovující podmínce (1.12) lze tedy bez ztráty informace o rozdělení považovat za spojitý. Pro určení rozdělení frakcionálního Brownova pohybu tedy není potřeba vyžadovat spojitost jeho trajektorií. Zformulujme tuto skutečnost do následujícího důsledku.

Důsledek 1.7.6. *Nechť $H \in (0, 1)$ je konstanta. Nechť $X = (X(t))_{t \geq 0}$ je centrovaný gaussovský proces s autokovarianční funkcí*

$$K(t, s) = \mathbb{E}[X(t)X(s)] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad t, s \geq 0.$$

Potom existuje verze procesu X , která je frakcionálním Brownovým pohybem s Hurstovým indexem H , tedy má trajektorie spojitě.

Důkaz. Podmínku (1.12) jsme již ověřili v (1.11). \square

1.8 Nediferencovatelnost trajektorií

V této sekci se přesvědčíme, že trajektorie frakcionálního Brownova pohybu jsou ukázkovým příkladem „nehezkých“ funkcí, které nemají nikde derivaci, přestože jsou spojitě.

Věta 1.8.1. *Nechť $H \in (0, 1)$. Frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým indexem H nemá derivaci skoro jistě v žádném bodě $(0, \infty)$. Přesněji, existuje $E \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(E) = 1$, že pro všechna $\omega \in E$ funkce $t \mapsto B^{(H)}(t, \omega)$ nemá v žádném bodě $(0, \infty)$ konečnou derivaci.*

Důkaz. Volme $N \in \mathbb{N}$ tak, aby $N(H - 1) + 1 < 0$. Nejdříve dokážeme, že $(B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$ nemá derivaci v žádném bodě $(0,1)$ skoro jistě. Označme

$$D = \{\omega \in \Omega : B^{(H)}(\cdot, \omega) \text{ má konečnou derivaci v alespoň jednom bodě } (0,1)\}.$$

Jestliže $\omega \in D$, pak existují $\delta > 0, r \in \mathbb{N}, t_0 \in (0,1)$, že

$$\left| \frac{B^{(H)}(t) - B^{(H)}(t_0)}{t - t_0} \right| < r, \quad |t - t_0| < \delta. \quad (1.13)$$

K těmto $\delta > 0, t_0 \in (0,1)$ volme $m = m(\delta, t_0)$ tak, že

$$\forall n \geq m \exists 1 \leq i \leq n - N + 1 : \frac{i-1}{n} < t_0 \leq \frac{i}{n}, \\ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \dots, \frac{i+N-1}{n} \in U_\delta(t_0). \quad (1.14)$$

Pak podle (1.13) dostaneme

$$\left| B^{(H)}\left(\frac{j}{n}\right) - B^{(H)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right| \leq \left| B^{(H)}\left(\frac{j}{n}\right) - B^{(H)}(t_0) \right| + \\ + \left| B^{(H)}\left(\frac{j-1}{n}\right) - B^{(H)}(t_0) \right| \leq r \left| t_0 - \frac{j}{n} \right| + r \left| t_0 - \frac{j-1}{n} \right| \leq \\ \leq \frac{2Nr}{n}, \quad j = i, i+1, \dots, i+N-1. \quad (1.15)$$

Pomocí (1.13), (1.14) a (1.15) obdržíme inkluzi

$$D \subset A = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n-N+1} \bigcap_{j=i}^{i+N-1} \left[\left| B^{(H)}\left(\frac{j}{n}\right) - B^{(H)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right| \leq \frac{2Nr}{n} \right] = \\ = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{r,m} \in \mathcal{A}.$$

Poznamenejme, že nemáme zaručenou měřitelnost množiny D . Množina A už měřitelná je. Dokážeme, že má nulovou pravděpodobnost. Pro $r, m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(A_{r,m}) = \inf_{n \geq m} \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{n-N+1} \bigcap_{j=i}^{i+N-1} \left[\left| B^{(H)}\left(\frac{j}{n}\right) - B^{(H)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right| \leq \frac{2Nr}{n} \right] \right) = \\ \stackrel{(1)}{=} \inf_{n \geq m} \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^{n-N+1} \bigcap_{j=i}^{i+N-1} \left[n^{-H} |B^{(H)}(j) - B^{(H)}(j-1)| \leq \frac{2Nr}{n} \right] \right) \leq \\ \leq \inf_{n \geq m} \sum_{i=1}^{n-N+1} \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=i}^{i+N-1} [|B^{(H)}(j) - B^{(H)}(j-1)| \leq 2Nrn^{H-1}] \right) \leq \\ \stackrel{(2)}{\leq} \inf_{n \geq m} n\mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^N [|B^{(H)}(j) - B^{(H)}(j-1)| \leq 2Nrn^{H-1}] \right) = \\ \stackrel{(3)}{=} \inf_{n \geq m} n\mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^N [|X_j| \leq 2Nrn^{H-1}] \right).$$

V rovnosti (1) jsme použili soběpodobnost, v úpravě (2) striktní stacionaritu přírůstků frakcionálního Brownova pohybu (a nerovnost $n \geq n - N + 1$). Nakonec jsme v úpravě (3) tyto přírůstky označily $X_j, j = 1, \dots, N$. Veličiny X_1, \dots, X_N značí nepřekrývající se přírůstky frakcionálního Brownova pohybu na intervalech délky jedné. Tedy se jedná o začátek posloupnosti frakcionálního gaussovského šumu. Označme γ autokovarianční funkci frakcionálního gaussovského šumu. Náhodný vektor $X = (X_1, \dots, X_N)'$ má rozdělení $N(0, \Gamma)$, kde $\Gamma = (\gamma(i - j))_{i,j=1}^N$. Protože Γ je pozitivně definitní (viz věta 1.2.10), existuje² odmocninová matice \mathbf{L} , tj. $\mathbf{L}\mathbf{L}' = \Gamma$. Protože Γ je regulární, je i \mathbf{L} regulární. Označme $\mathbf{L}^{-1} = (l_{ij}^{(-1)})_{i,j=1}^N$. Potom vektor X lze psát ve tvaru

$$X = \mathbf{L}Y, \quad Y = \mathbf{L}^{-1}X,$$

kde $Y = (Y_1, \dots, Y_N)'$ je vektor nezávislých veličin s rozdělením $N(0, 1)$. Označme

$$l_{\max}^{(-1)} = \max_{1 \leq i, j \leq N} |l_{ij}^{(-1)}|.$$

Předpokládejme, že $|X_j| \leq c, j = 1, \dots, N$. Potom

$$|Y_i| = \left| \sum_{j=1}^N l_{ij}^{(-1)} X_j \right| \leq \sum_{j=1}^N |l_{ij}^{(-1)}| |X_j| \leq N l_{\max}^{(-1)} c, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.16)$$

Z (1.16) dostaneme inkluzi jevů

$$\bigcap_{j=1}^N [|X_j| \leq 2Nrn^{H-1}] \subset \bigcap_{j=1}^N [|Y_j| \leq 2l_{\max}^{(-1)} N^2 rn^{H-1}]. \quad (1.17)$$

Z nezávislosti a stejného rozdělení veličin Y_1, \dots, Y_n dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{r,m}) &\leq \inf_{n \geq m} n \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^N [|Y_j| \leq 2l_{\max}^{(-1)} N^2 rn^{H-1}] \right) = \\ &= \inf_{n \geq m} n \mathbb{P} (|Y_1| \leq 2l_{\max}^{(-1)} N^2 rn^{H-1})^N = \\ &= \inf_{n \geq m} n \left(\int_{-2l_{\max}^{(-1)} N^2 rn^{H-1}}^{2l_{\max}^{(-1)} N^2 rn^{H-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)^N \leq \\ &\leq \inf_{n \geq m} cn^{1+N(H-1)} = 0, \end{aligned}$$

kde c je konstanta nezávislá na n . Z výše uvedených úvah máme, že existuje $E_1 \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(E_1) = 1$, že pro každé $\omega \in E_1$ funkce $t \mapsto B^{(H)}(t, \omega)$ nemá derivaci v žádném bodě $(0, 1)$. Díky soběpodobnosti můžeme analogicky dokázat existenci $E_n \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(E_n) = 1$, takové, aby pro každé $\omega \in E_n$ funkce $t \mapsto B^{(H)}(t, \omega)$ neměla derivaci v žádném bodě $(0, n)$. Potom $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ má požadované vlastnosti: $\mathbb{P}(E) = 1$ a pro každé $\omega \in E$ funkce $t \mapsto B^{(H)}(t, \omega)$ nemá derivaci v žádném bodě $(0, \infty)$. □

²Lze ji nalézt například metodou Choleského rozkladu, viz. sekce 2.3.

Kapitola 2

Simulace frakcionálního Brownova pohybu

V této kapitole se seznámíme se třemi metodami generování frakcionálního Brownova pohybu. První uvedená metoda — Hoskingova metoda — umožňuje simulovat centrované stacionární gaussovské procesy, které mají regulární varianční matice konečně rozměrných rozdělání. Druhá — Choleského metoda — umožňuje simulovat libovolný gaussovský proces. Pro jednoduchost však také budeme předpokládat centrovanost, stacionaritu a regularitu variančních matic konečně rozměrných rozdělání. Přestože nás zajímá simulace frakcionálního Brownova pohybu, uvedené metody budou odvozovány s obecnou autokovarianční funkcí. Jako poslední je uvedena metoda, která využívá stochastickou reprezentaci frakcionálního Brownova pohybu (1.8). Je proto aplikovatelná jen na tento proces.

Trajektorie náhodného procesu, jakožto reálná funkce, obsahuje v podstatě „nekonečně mnoho informace“. Proto je možné simulovat pouze hodnoty procesu v konečné množině časů. Tyto časy budeme volit ekvidistantně a bez újmy na obecnosti $0, 1, 2, \dots, N$. Frakcionální Brownův pohyb je soběpodobný, takže nasimulovanou trajektorii v časech $0, 1, \dots, N$ lehce ztransformujeme do libovolného kompaktního intervalu. Poznamenejme, že tato úvaha nebude platit pro ostatní gaussovské procesy, které soběpodobné nejsou¹. Vzhledem ke skutečnosti, že nás primárně zajímá právě tento proces, zvolíme popsany postup.

Mějme na paměti, že frakcionální Brownův pohyb rozhodně stacionární není. Můžeme ovšem přecházet mezi ním a jeho přírůstky, které už stacionární jsou. Připomeňme, že podle definice 1.2.6 je frakcionální gaussovský šum zaveden jako náhodná posloupnost

$$X_n = B^{(H)}(n+1) - B^{(H)}(n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kde $B^{(H)}(t)$ je frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým parametrem H . Jestliže máme nasimulovaný frakcionální gaussovský šum $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, pak můžeme získat hodnoty frakcionálního Brownova pohybu v časech $0, 1, 2, \dots$ transformací

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0, \\ Y_n &= \sum_{j=0}^{n-1} X_j, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

¹Ve skutečnosti je frakcionální Brownův pohyb jediný soběpodobný gaussovský náhodný proces. Přesné znění tvrzení a důkaz si čtenář může dohledat v [11].

Všechny uvedené metody jsem naprogramoval v Mathematice. Skripty příkládám na CD, viz příloha A.

2.1 Simulace normálního rozdělení

Než se pustíme do simulace náhodných procesů, zmiňme se o metodách generování jednorozměrných a vícerozměrných normálních rozdělení.

Jednorozměrné normální rozdělení

V nejjednodušším případě se budeme zabývat, jak modelovat náhodnou veličinu s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$. Předpokládejme, že již disponujeme generátorem náhodných čísel z intervalu $(0,1)$. Můžeme tedy generovat náhodné veličiny z rovnoměrného rozdělení na $(0,1)$ kolikrát chceme a nezávisle na sobě.

Dále označme U náhodnou veličinu s rovnoměrným rozdělením na $(0,1)$. Přímočarý způsob, jak generovat čísla ze spojitého rozdělení s rostoucí distribuční funkcí F , je následující. Spočítáme-li inverzní distribuční funkci F^{-1} , potom náhodná veličina $F^{-1}(U)$ má rozdělení s distribuční funkcí F (důkaz lze dohledat v [1], věta 2.6, str. 36). Mluvíme-li o normálním rozdělení, F bohužel nelze vyjádřit v uzavřeném tvaru, a tím pádem ani F^{-1} . Vhodnější je jiný způsob.

Nechť U, V jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $(0,1)$. Použijeme Box–Müllerovu transformaci

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2 \log U} \cos(2\pi V), \\ Y &= \sqrt{-2 \log U} \sin(2\pi V). \end{aligned}$$

Pomocí věty o transformaci lze spočítat, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Touto metodou jsme získali dvě realizace generátoru náhodných čísel, druhou si můžeme uložit pro pozdější použití.

Obecné jednorozměrné rozdělení získáme transformací

$$X = \mu + \sigma Y.$$

Pokud $Y \sim N(0,1)$, pak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Vícerozměrné normální rozdělení

Nechť X je normálně rozdělený náhodný n -rozměrný vektor se střední hodnotou μ a pozitivně definitní varianční maticí Σ . Potom X lze psát ve tvaru

$$X = \mu + \mathbf{B}Y, \tag{2.2}$$

kde \mathbf{B} je odmocninová matice Σ , tj. $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \Sigma$, a Y je vektor nezávislých $N(0,1)$ náhodných veličin. Pro takto definovaný vektor X skutečně platí $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Afinní transformace zachovává normalitu s parametry, které vypočteme následovně:

$$\begin{aligned} EX &= \mu + \mathbf{B}EY = \mu, \\ \text{var } X &= \text{var}(\mathbf{B}Y) = \mathbf{B} \text{var } Y \mathbf{B}' = \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}' = \Sigma. \end{aligned}$$

Pro simulaci náhodného vektoru s rozdělením $N(\mu, \Sigma)$ si nejprve vygenerujeme vektor Y složený z n nezávislých $N(0,1)$ veličin, a pak použijeme transformaci (2.2).

Problémem je, jak spočítat odmocninovou matici \mathbf{B} . Jedno z možných řešení přináší Choleského rozklad, kterého se využívá i v jedné z metod generování frakcionálního Brownova pohybu. Více uvedeme v sekci 2.3.

2.2 Hoskingova metoda

Hoskingova metoda dovoluje simulovat libovolný stacionární gaussovský proces. Idea algoritmu je jednoduchá. Generujeme $(X_n)_{n=0}^N$ rekurentně. Jestliže již máme $X_j, j = 0, \dots, n$, spočítáme podmíněné rozdělení dalšího bodu X_{n+1} za podmínky $X_j, j = 0, \dots, n$.

Zavedme si nejprve značení, které používá Dieker v [5]. Autokovarianční funkci označme γ :

$$\gamma(k) = \mathbf{E}[X_n X_{n+k}], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Předpokládejme $\gamma(0) = 1$. Dále $\mathbf{\Gamma}(n)$ budeme značit varianční matici $\mathbf{\Gamma}(n) = (\gamma(i-j))_{i,j=0}^n$ typu $(n+1) \times (n+1)$ a sloupcový vektor $c(n)$ o velikosti $n+1$ se složkami $c(n) = (\gamma(1), \dots, \gamma(n+1))'$. Nakonec $\mathbf{F}(n) = (\mathbf{1}_{\{i=n-j\}})_{i,j=0}^n$ je matice, která má na vedlejší diagonále jedničky, jinak nuly. Vynásobením $(n+1)$ -prvkovým vektorem zleva či zprava „obrací“ tento vektor.

Všimněme si, že matice $\mathbf{\Gamma}(n)$ mají rekurzivní strukturu:

$$\mathbf{\Gamma}(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & c(n)' \\ c(n) & \mathbf{\Gamma}(n) \end{pmatrix} = \tag{2.3}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}(n) & \mathbf{F}(n)c(n) \\ c(n)'\mathbf{F}(n) & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Věta 2.2.1. *Nechť $X = (Y', Z)'$ má regulární rozdělení $N(\mu, \mathbf{V})$, kde μ a \mathbf{V} mají tvar*

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix},$$

odpovídající marginálním vektorům Y a Z . Pak podmíněné rozdělení Y při daném $Z = z$ je regulární

$$N(\mu_1 + \mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1}(z - \mu_2), \mathbf{V}_{11} - \mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1}\mathbf{V}_{21}).$$

Důkaz. Viz [2], věta 4.12, strana 67. □

Připomeňme, že pokud je matice $\mathbf{\Gamma}(n)$ varianční maticí frakcionálního gaussovského šumu, pak je podmínka regularity v předpokladech věty 2.2.1 splněna z věty 1.2.10. Nyní již můžeme podle věty 2.2.1 a vyjádření (2.3) spočítat podmíněné rozdělení X_{n+1} při podmínkách X_0, \dots, X_n . Dostaneme normální rozdělení s parametry

$$\mu_n = c(n)'\mathbf{\Gamma}(n)^{-1} \begin{pmatrix} X_n \\ \vdots \\ X_0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_n^2 = 1 - c(n)'\mathbf{\Gamma}(n)^{-1}c(n). \tag{2.5}$$

Přirozeně bychom se chtěli vyvarovat počítání inverze $\mathbf{\Gamma}(n)$ v každém kroku. Uveďme algoritmus navržený v [5] využívající rekurzivní vyjádření (2.4). Potřebujeme počítat inverzi matice rozdělené do bloků.

Lemma 2.2.2. *Nechť $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{C} \end{pmatrix}$ je symetrická pozitivně definitní matice taková, že bloky \mathbf{A} a \mathbf{C} jsou čtvercové. Pak také $\mathbf{P} = \mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ je pozitivně definitní a platí*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} \\ -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Důkaz. Viz [2], věta A.10, str. 319. \square

Předpokládejme, že $\mathbf{\Gamma}(n)$ je regulární pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ (což je pro frakcionální gaussovský šum splněno). Položme $d(n) = \mathbf{\Gamma}(n)^{-1}c(n)$. Dosazením (2.4) do (2.6) získáme

$$\mathbf{\Gamma}(n+1)^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \sigma_n^2 \mathbf{\Gamma}(n)^{-1} + \mathbf{F}(n)d(n)d(n)'\mathbf{F}(n) & -\mathbf{F}(n)d(n) \\ -d(n)'\mathbf{F}(n) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Označme $\tau_n = d(n)'\mathbf{F}(n)c(n) = c(n)'\mathbf{F}(n)d(n)$. Použijeme-li (2.7) při výpočtu σ_{n+1}^2 (z definice (2.5)), dostaneme rekurzi

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 - \frac{(\gamma(n+2) - \tau_n)^2}{\sigma_n^2}.$$

Položme $\phi_n = (\gamma(n+2) - \tau_n)/\sigma_n^2$. Rekurentní vyjádření pro σ_{n+1}^2 a $d(n+1)$ dostaneme opět z (2.7) ve tvaru

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma_n^2 (1 - \phi_n^2), \quad (2.8)$$

$$d(n+1) = \begin{pmatrix} d(n) - \phi_n \mathbf{F}(n)d(n) \\ \phi_n \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Algoritmus tedy pracuje následovně. Začneme vygenerováním $X_0 \sim N(0,1)$ a nastavením $\sigma_0^2 = 1 - \gamma(1)^2$ a $d(0) = \gamma(1)$. Poté postupujeme rekurentně. Po n krocích máme $d(n)$ a σ_n^2 . Můžeme z nich vypočítat $d(n+1)$ a σ_{n+1}^2 pomocí rekurencí (2.8) a (2.9). Ze vztahu (2.5) můžeme vypočítat μ_n a generovat $X_{n+1} \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$. Zajímá-li nás frakcionální Brownův pohyb namísto frakcionálního gaussovského šumu, použijeme transformaci (2.1).

Pro výpočet $d(n+1)$ i σ_{n+1}^2 potřebujeme řádově N operací. Vynásobením velikostí vzorku N dojdeme k časové složitosti $O(N^2)$.

Výhodou tohoto algoritmu je skutečnost, že dopředu nemusíme znát velikost vzorku a další body můžeme dosimulovat později.

2.3 Choleského metoda

Opět budeme simulovat frakcionální gaussovský šum. Choleského metoda spočívá v pozorování, že generování gaussovského procesu je v podstatě generování normálně rozděleného vektoru. Skutečně, pozorujeme-li centrovaný gaussovský proces X v časech $0, 1, \dots, N$, získáme normálně rozdělený vektor $(X_0, \dots, X_N)'$.

Označme jeho rozdělení $N(0, \mathbf{\Gamma})$. Nalezneme matici \mathbf{L} takovou, že $\mathbf{L}\mathbf{L}' = \mathbf{\Gamma}$. Nasimulujeme vektor Y složený z $N + 1$ nezávislých $N(0,1)$ veličin a pomocí transformace

$$X = \mathbf{L}Y$$

získáme kýžený výsledek. A právě matici \mathbf{L} můžeme nalézt pomocí Choleského rozkladu.

Mějme reálnou symetrickou pozitivně definitní matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Potom existuje jednoznačný rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}'$, kde \mathbf{L} je reálná dolní trojúhelníková matice. Důkaz uvedeného tvrzení lze nalézt v [12], sekce 4.4, strana 101.

V případě frakcionálního gaussovského šumu je skutečně reálná matice $\mathbf{\Gamma}$ pozitivně definitní (viz věta 1.2.10).

Citujme algoritmus pro výpočet Choleského rozkladu uvedený v [12], A8, strana 103:

```

input  $A^{(0)} := A = [a_{i,j}]$ 
for  $k = 1 : n$ 
   $l_{k,k} := \sqrt{a_{k,k}^{(k-1)}}$ 
  for  $i = k + 1 : n$ 
     $l_{i,k} := \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{l_{k,k}}$ 
    for  $j = k + 1 : i$ 
       $a_{i,j}^{(k)} := a_{i,j}^{(k-1)} - l_{i,k}l_{j,k}$ 
    end
  end
end

```

Choleského metoda má díky třem vnořeným cyklům časovou složitost $O(N^3)$, kde N je počet bodů, kde hodnoty procesu simulujeme.

Chceme-li ale simulovat frakcionální Brownův pohyb několikrát, stačí nám matici \mathbf{L} nalézt jednou a pro další simulace generovat jen vektor nezávislých $N(0,1)$ veličin a vynásobit jím matici \mathbf{L} , což bude mít časovou složitost $O(N^2)$.

Výhodou může být jednoduchá implementace a univerzálnost metody. Ve výše uvedeném odvozování metody jsme předpokládali stacionaritu a centrovanost z důvodu jednoduchosti značení. Tyto dva předpoklady lze snadno odstranit, zobecnění je zřejmé.

Uvedený algoritmus výpočtu Choleského rozkladu funguje pouze pro pozitivně definitní matice. Avšak Choleského rozklad existuje i pro singulární matice a metodu lze zobecnit i na zcela libovolné gaussovské procesy.

2.4 Metoda stochastické reprezentace

V sekci 1.6 jsme reprezentovali frakcionální Brownův pohyb stochastickým integrálem

$$B^{(H)}(t) = V_H \left(\int_{-\infty}^0 ((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}) dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right), \quad (2.10)$$

kde V_H je normující konstanta definovaná v (1.7).

Zabývejme se obecně problémem, jak simulovat náhodnou veličinu reprezentovanou stochastickým integrálem $X = \int_{\mathbb{R}} f(t) dB(t)$. Stochastický integrál je definován postupnými aproximacemi schodovitými funkcemi. Volme dělení reálné přímky $-\infty < t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$. Potom $g(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t)$ je schodovitá funkce a její stochastický integrál se spočítá jako

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) dB(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) (B(t_{j+1}) - B(t_j)).$$

Víme, že veličiny $B(t_{j+1}) - B(t_j)$ jsou pro $j = 0, \dots, n-1$ nezávislé a mají rozdělení $B(t_{j+1}) - B(t_j) \sim N(0, t_{j+1} - t_j)$. Ty už nasimulovat umíme. Pokud budeme volit dělení reálné přímky ekvidistantně s krokem 1 od n_1 do $n_2 + 1$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$), získáme přírůstky s rozdělením $N(0,1)$ a obdržíme aproximaci

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dB(t) \approx \sum_{j=n_1}^{n_2} f(j) \tilde{B}(j), \quad (2.11)$$

kde $\tilde{B} = (\tilde{B}(n_1), \dots, \tilde{B}(n_2))'$ je vektor $n_2 - n_1 + 1$ nezávislých $N(0,1)$ náhodných veličin.

Náhodný proces reprezentovaný ve tvaru (2.10) budeme ve smyslu aproximace (2.11) simulovat jako

$$Y_n = V_H \left(\sum_{j=-b}^{-1} ((n-j)^{H-1/2} - (-j)^{H-1/2}) \tilde{B}_1(j) + \sum_{j=0}^{n-1} ((n-j)^{H-1/2}) \tilde{B}_2(j) \right)$$

pro $n = 1, \dots, N$, kde $\tilde{B}_1 = (\tilde{B}_1(-b), \dots, \tilde{B}_1(-1))'$ a $\tilde{B}_2 = (\tilde{B}_2(0), \dots, \tilde{B}_2(N-1))'$ jsou nezávislé vektory nezávislých $N(0,1)$ náhodných veličin. Číslo $b \in \mathbb{N}$ udává restrikcí nekonečného integračního oboru na konečný.

Normující konstanta V_H je definována pomocí integrálu, ten můžeme spočítat libovolnou numerickou metodou integrace.

Podle [5] není tato metoda dobrým způsobem jak simulovat frakcionální Brownův pohyb a její význam je pouze didaktický.

Kapitola 3

Odhady Hurstova indexu

V této kapitole budeme řešit úlohu bodového odhadu Hurstova parametru frakcionálního Brownova pohybu. Předpokládejme, že máme k dispozici jednu trajektorii a známe její hodnoty v konečné množině časů. Pro jednoduchost budeme předpokládat časy $\{0, \dots, N\}$. Podobně jako v kapitole 2 o simulacích budeme přecházet mezi frakcionálním Brownovým pohybem (značme Y_n hodnotu v čase n) a jeho přírůstků — frakcionálním gaussovským šumem (značme X_n hodnotu v čase n). Tyto procesy mají mezi sebou vztahy

$$X_n = Y_{n+1} - Y_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.1)$$

$$Y_0 = 0, \quad Y_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_j, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Všechny uvedené metody jsem naprogramoval ve statistickém softwaru R. Skripty příkládám na CD, viz příloha A.

3.1 Metoda agregovaného rozptylu

V sekci 1.4 jsme se zabývali soběpodobností frakcionálního Brownova pohybu. Připomeňme, že jsme došli k výsledku

$$B^{(H)}(at) \sim a^H B^{(H)}(t), \quad t \geq 0.$$

Tedy pro rozptyl platí

$$\text{var } B^{(H)}(at) = a^{2H} \text{var } B^{(H)}(t), \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

Metoda agregovaného rozptylu se snaží odhadovat parametr H na základě soběpodobnosti, a to pomocí role, jakou H hraje v rovnosti (3.3).

Mějme hodnoty X_0, \dots, X_{N-1} frakcionálního gaussovského šumu v časech $0, \dots, N$. Pro $m \in \mathbb{N}$ v rozmezí $2 \leq m \leq N/2$ definujme

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=(k-1)m}^{km} X_j, \quad k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor, \quad (3.4)$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ je dolní celá část. Fixujme pro teď m a označme $M = \lfloor N/m \rfloor$. Zamysleme se, co definice (3.4) znamená. Přírůstků X_j rozdělíme do m -tic. V každé z nich

je sečteme a podělíme počtem, tedy počítáme aritmetický průměr. Avšak součet přírůstků je frakcionální Brownův pohyb. S využitím této úvahy a soběpodobnosti získáme informaci o rozdělení:

$$X_k^{(m)} \sim m^{-1}Y_m \sim m^{H-1}Y_1 \sim m^{H-1}X_1.$$

Protože $X_1 \sim N(0,1)$, tak $X_k^{(m)} \sim N(0, m^{2H-2})$, $k = 1, \dots, M$. Spočítáme výběrový rozptyl z dat $X_1^{(m)}, \dots, X_M^{(m)}$

$$\widehat{\text{var}} X^{(m)} = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M \left(X_k^{(m)} - \overline{X^{(m)}} \right)^2,$$

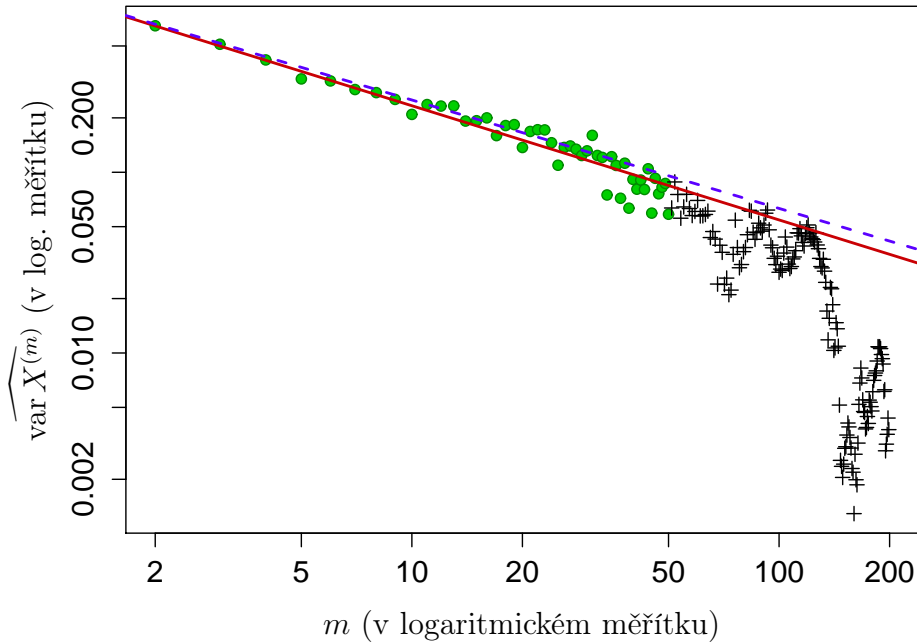
kde

$$\overline{X^{(m)}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X_k^{(m)}$$

je výběrová střední hodnota.

Pokud $H = 1/2$, pak $X_1^{(m)}, \dots, X_M^{(m)}$ jsou nezávislé a výběrový rozptyl je nestranným odhadem rozptylu. V případě $H \neq 1/2$ ale ze základních statistických poznatků nemůžeme nic o chování $\widehat{\text{var}} X^{(m)}$ soudit. Beran v [3], sekce 1.1, ukazuje, že $\widehat{\text{var}} X^{(m)}$ je skutečně pro $H \neq 1/2$ vychýlený. Avšak pro $M \rightarrow \infty$ jde vychýlení k nule, takže $\widehat{\text{var}} X^{(m)}$ je asymptoticky nestranným odhadem rozptylu.

Jestliže $\widehat{\text{var}} X^{(m)}$ odhaduje m^{2H-2} , pak $\log \widehat{\text{var}} X^{(m)}$ odhaduje $(2H-2) \log m$. Parametr H nalezneme pomocí lineární regrese, když jako nezávisle proměnné budeme chápat čísla $\log m$ a jako závisle proměnné hodnoty $\widehat{\text{var}} X^{(m)}$. Poté pomocí



Obrázek 3.1: Odhad H pomocí metody agregovaného rozptylu

metody nejmenších čtverců proložíme body přímkou (procházející počátkem). Sklon přímky bude odhadovat $2H - 2$.

Problémy mohou nastat, budeme-li počítat $\widehat{\text{var}} X^{(m)}$ pro velká m . Poté se výběrový rozptyl počítá z malého vzorku dat a takový odhad není kvalitní. Fakt, že z malého počtu dat nezískáváme obecně dobrý odhad, není zde tolik podstatný. Horší je velká vychýlenost odhadu $\widehat{\text{var}} X^{(m)}$ pro malá M (velká m). Otázku, jaká m už nejsou pro metodu agregovaného rozptylu vhodná, se tato práce nesnaží zodpovídat. Představu o relativní vychýlenosti pro různá M lze získat v [3], tabulka 1.4, str. 10.

Na obrázku 3.1 je uveden příklad použití metody agregovaného rozptylu na simulovaná data (pomocí exaktní Choleského metody, viz 2.3) frakcionálního Brownova pohybu. V příkladu je zvolen Hurstův index $H = 0.7$ a rozsah vzorku $N = 1000$. Do regrese jsou zahrnuty $\widehat{\text{var}} X^{(m)}$ pro $m = 2, \dots, 50$. Díky tomu se každý z výběrových rozptylů počítá z alespoň 20 pozorování. Červeně je zakreslena regresní přímka (procházející počátkem). Odhad v tomto příkladě vychází $\hat{H} \doteq 0.684$. Modrá přerušovaná čára značí sklon přímky odpovídající skutečnému parametru $H = 0.7$.

Poznamenejme ještě, že jsme využívali faktu, že frakcionální gaussovský šum má jednotkový rozptyl. Pokud by tomu tak nebylo (což je v přírodě obvyklé), musíme metodu upravit. Zobecnění metody je jednoduché. Předpokládejme, že $X_n \sim N(0, \sigma^2)$. Pak dostaneme $X_k^m \sim N(0, \sigma^2 m^{2H-2})$, a tudíž $\log \widehat{\text{var}} X^{(m)}$ je odhadem pro $\log \sigma^2 + (2H - 2) \log m$. Jediná odlišnost v regresním modelu je taková, že přímka nemusí procházet počátkem (musíme navíc odhadovat absolutní člen $\log \sigma^2$). Za to, že odhadujeme další (rušivý) parametr, ztrácíme přesnost odhadu H .

3.2 Hurstova R/S analýza

Metoda agregovaného rozptylu 3.1 odhaduje H na základě porovnávání rozptylů. Jiným měřítkem variability může být rozpětí, čehož využil H. E. Hurst, když měřil průtoky na Nilu.

Uvažujme hodnoty ročních průtoků X_0, \dots, X_{N-1} a tomu odpovídající kumulované hodnoty $Y_0 = 0, Y_1, \dots, Y_N$. Hodnoty X_i a Y_i jsou ve vztahu, jaký jsme definovali pro frakcionální gaussovský šum a frakcionální Brownův pohyb v (3.1) a (3.2).

Pro n, r taková, že $n + r \leq N$ definujme rozpětí

$$R(n, r) = \max_{0 \leq k \leq r} \left(Y_{n+k} - Y_n - \frac{k}{r} (Y_{n+r} - Y_n) \right) - \min_{0 \leq k \leq r} \left(Y_{n+k} - Y_n - \frac{k}{r} (Y_{n+r} - Y_n) \right).$$

Člen $k/r(Y_{n+r} - Y_n)$ je vlastně „očekávaná hodnota“ získaná lineární interpolací mezi Y_n a Y_{n+r} . Při výpočtu $R(n, r)$ nalezneme nejvyšší odchylky v obou směrech této očekávané hodnoty od skutečné hodnoty $Y_{n+k} - Y_n$ a jejich součet nazveme rozpětí.

Abychom mohli provádět analýzu rozpětí nezávisle na měřítku, musím rozpětí vhodně znormovat. Rozsahu mezi kumulovanými hodnotami Y_n a Y_{n+r} odpovídají přírůstky X_n, \dots, X_{n+r-1} . Spočtěme výběrovou směrodatnou odchylku

$$S(n,r) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{n+r-1} (X_k - \bar{X}_{n,r})^2}, \quad \text{kde} \quad \bar{X}_{n,r} = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{n+r-1} X_k. \quad (3.5)$$

Potom podíl

$$Q(n,r) = \frac{R(n,r)}{S(n,r)}$$

nazveme *přeškálované rozpětí* (v angličtině *rescaled adjusted range*).

Rozdělme řadu $0, \dots, N$ na K nepřekrývajících se bloků. Nechť každý z těchto bloků obsahuje M pozorování. Označme n_k počáteční index k -tého bloku, $k = 1, \dots, K$. Potom spočítáme celou sadu statistik

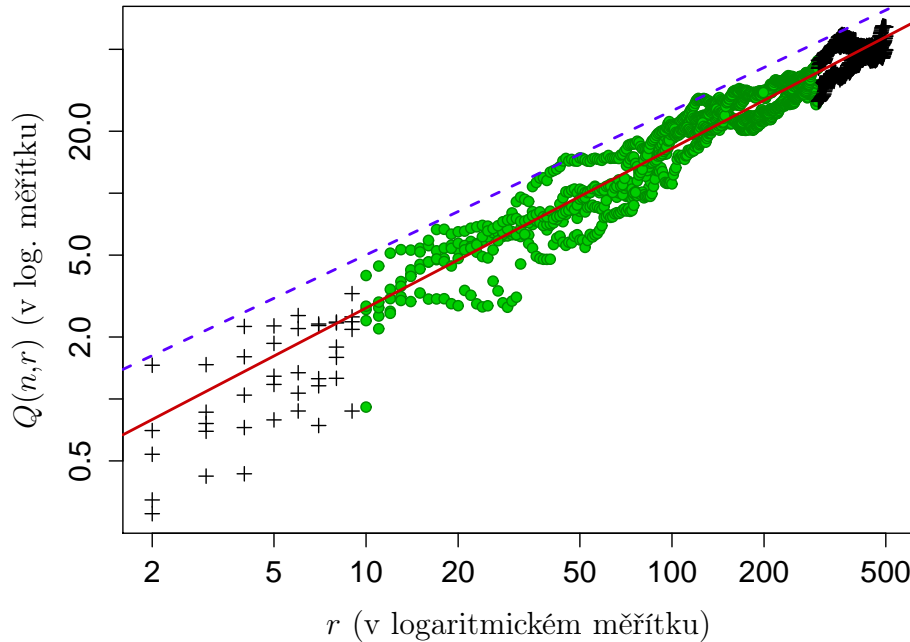
$$Q(n_k, r), \quad k = 1, \dots, K, r = 2, \dots, N, n_k + r \leq N.$$

Pro malá r dostaneme přesně K bodů, avšak pro rostoucí r se počet bodů bude zmenšovat až k jedné. Navíc statistiky $Q(n_k, r)$ začnou být počítány částečně i ze stejných pozorování.

Hurst zakreslil hodnoty $Q(n_k, r)$ proti r v log-log měřítku (obě osy s logaritmickým měřítkem). Všiml si, že body $[\log Q(n_k, r); \log r]$ leží pro dostatečně velké r kolem přímky se sklonem přibližně 0.7.

Mandelbrot byl zaujat Hurstovou empirickou prací a zabýval se touto analýzou v teoretické rovině. V práci [10] dokázal, že

$$r^{-H} Q(n,r) \xrightarrow{d} \xi, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$



Obrázek 3.2: Odhad H pomocí R/S statistiky

kde ξ je nedegerovaná náhodná veličina a d značí konvergenci v distribuci. Jestliže je tedy r dostatečně velké, lze předpokládat

$$\log E [Q(n,r)] \approx C + H \log r. \quad (3.7)$$

Odhad pomocí R/S analýzy provedeme následovně. Vypočteme hodnoty statistik $Q(n_k, r)$ pro vhodná r . Nesmějí být příliš malá, jinak nemůžeme použít asymptotiku (3.6). Nemohou být ani příliš velká, neboť výpočty Q pak probíhají z překrývajících se úseků a takové odhady mohou být nespolehlivé. Beran v [3], kap. 4, diskutuje obtížnost volby vhodného rozpětí pro r . Z vypočtených hodnot $Q(n_k, r)$ odhadneme H pomocí lineární regrese ve tvaru (3.7).

Na obrázku 3.2 je uveden příklad použití metody. Data pochází ze simulace s parametrem $H = 0.7$ a rozsahem $N = 1000$. Do regrese zahrnujeme hodnoty $10 \leq r \leq 300$. Odhadem je červená přímka, jejíž sklon odpovídá $\hat{H} \doteq 0.775$. To je poměrně daleko od skutečné hodnoty $H = 0.7$, které odpovídá sklon modré přerušované čáry (pouze sklon, posunutí je irelevantní).

Všimněme si, že pokud pracujeme s frakcionálním gaussovským šumem, který má jednotkový rozptyl, pak odhad (3.5) odhaduje právě tuto jedničku a mohlo by se zdát zbytečné ho dělat. Můžeme tedy metodu modifikovat tak, že při výpočtu Q nedělíme S , tj. předpokládáme $S = 1$.

3.3 Porovnání metod

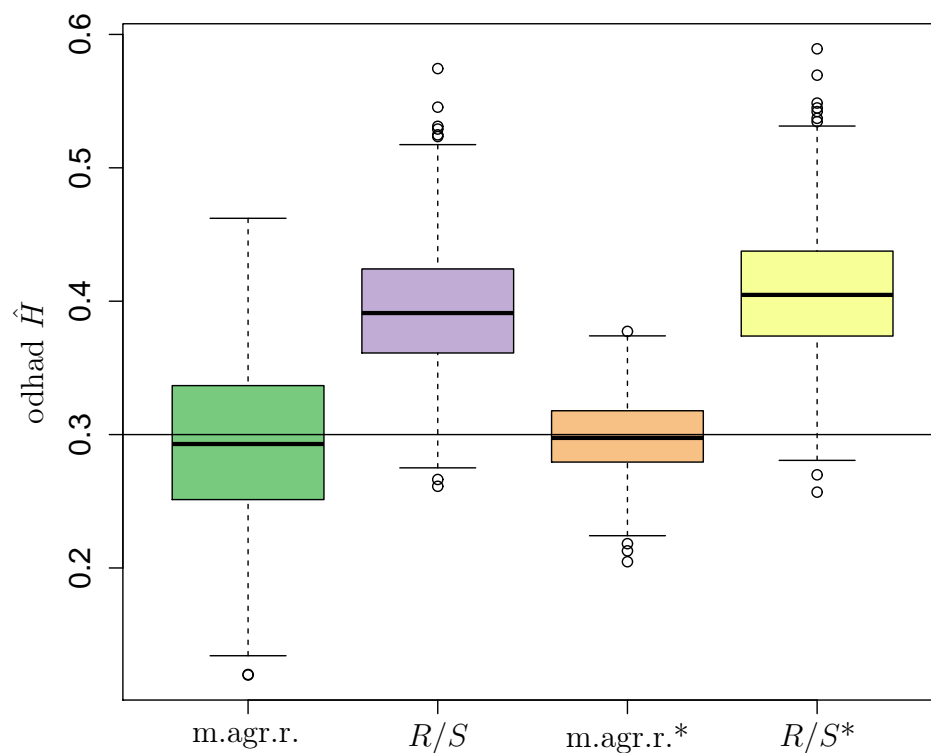
Na obrázcích 3.3, 3.4, 3.5 a 3.6 jsou krabičkové grafy odhadu \hat{H} proti skutečným hodnotám $H \in \{0.3, 0.5, 0.65, 0.8\}$. Frakcionální gaussovský šum o délce 1000 byl simulován exaktní Choleského metodou 2.3. Pro každou hodnotu parametru H bylo použito 1000 trajektorií. V 3.1, resp. 3.2, jsme diskutovali, které hodnoty m , resp. r , zahrnout do regrese. V následujícím porovnání jsou použity stejné meze, jako byly užity v uvedených příkladech.

Z těchto grafů si můžeme udělat představu o rozdělení odhadu metodou agregovaného rozptylu (zkratka „m.agr.r.“) i metodou R/S analýzy. Metody s hvězdičkou značí použití předpokladu o jednotkovém rozptylu, jak bylo diskutováno v 3.1 a 3.2.

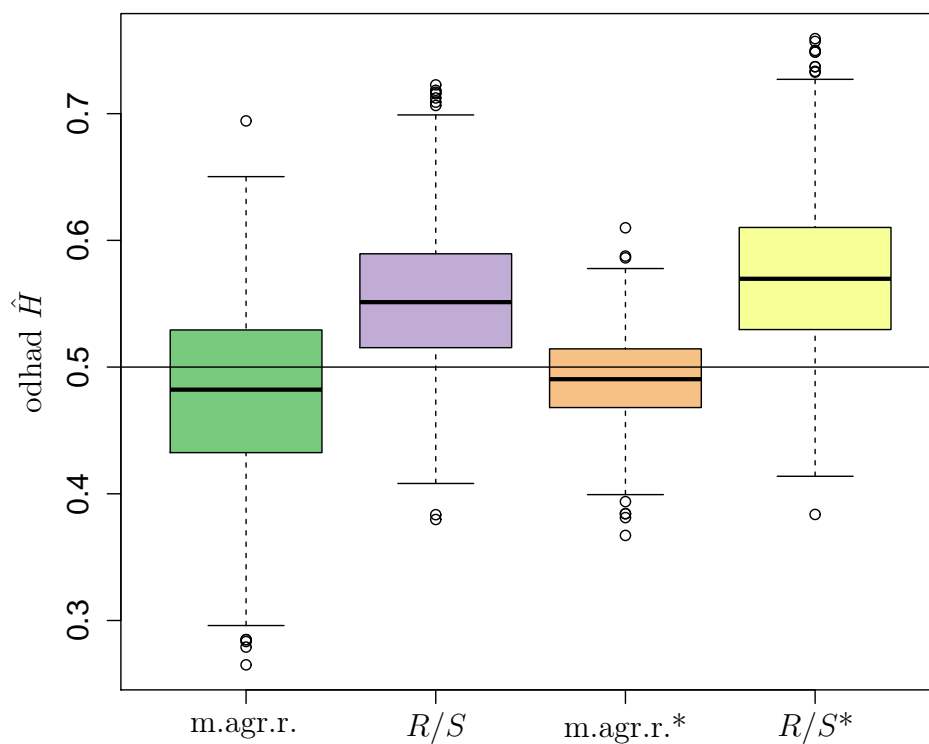
Pohledem na obrázky můžeme dojít k následujícím závěrům. Pro malé hodnoty Hurstova indexu ($H < 0.5$ nebo i $H \approx 0.5$) není R/S analýza vhodná. Naopak metoda agregovaného rozptylu odhaduje H dobře. Pro velké H je situace opačná, R/S analýza dává dobré odhady. S jistou nadsázkou by se dalo říci, že Hurst měl štěstí, když pro studium Nilu použil tuto metodu.

Všimněme si ještě následujícího. Jak již bylo v 3.1 diskutováno, metoda agregovaného rozptylu dává vychýlený výsledek pro $H \neq 0.5$. Pozorujeme, že metoda by skutečně pro $H = 0.5$ mohla být nestranná. Ale pro $H \neq 0.5$ je odhad \hat{H} posunutý k 0.5.

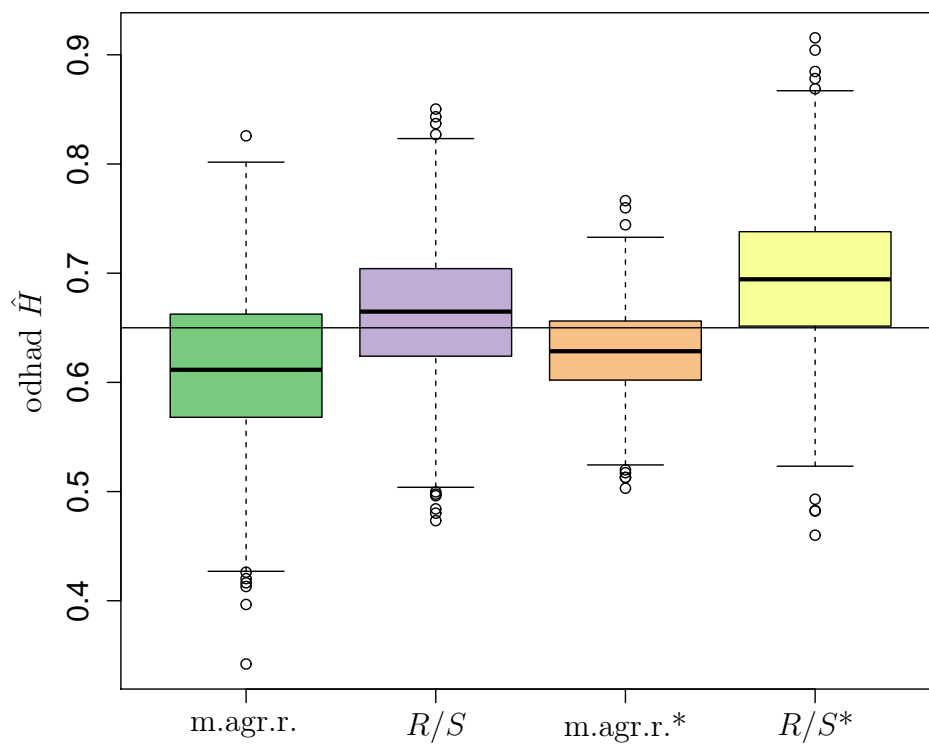
V 3.1 a 3.2 jsme diskutovali, jak využít předpokladu jednotkového rozptylu jednotlivých X_n . Na obrázcích jsou upravené metody ohvězdičkované. Všimněme si, že zatímco tento předpoklad výrazně pomohl v případě metody agregovaného rozptylu, tak pro R/S modifikace zlepšení nepřinesla. Dokonce pak metoda vrátila horší výsledky.



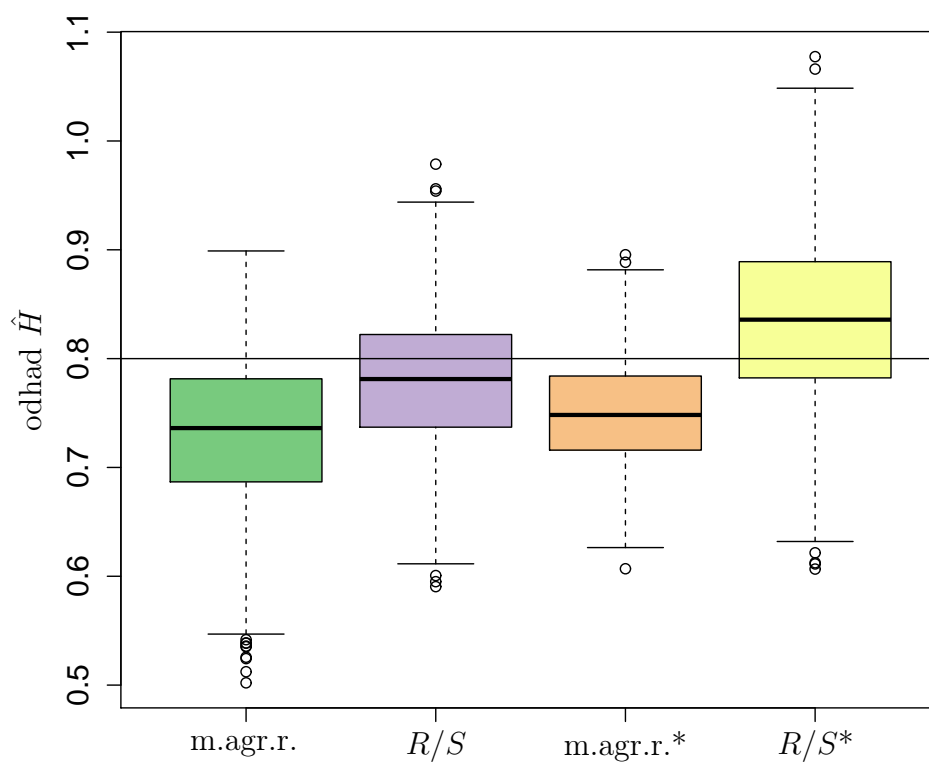
Obrázek 3.3: Srovnání odhadů, $H = 0.3$



Obrázek 3.4: Srovnání odhadů, $H = 0.5$



Obrázek 3.5: Srovnání odhadů, $H = 0.65$



Obrázek 3.6: Srovnání odhadů, $H = 0.8$

Závěr

V této práci jsem se zabýval frakcionálním Brownovým pohybem, který je netriviálním zobecněním standardního Brownova pohybu (Wienerova procesu). Uvedl jsem a podrobně dokázal vlastnosti tohoto náhodného procesu. V důkazech jsem doplňoval kroky, které autoři v literatuře vynechávají. Zvláštní pozornost jsem věnoval analytickým vlastnostem trajektorií frakcionálního Brownova pohybu. Mým vlastním výsledkem je zobecnění věty o nediferencovatelnosti skoro jistě, která přináší silnější tvrzení, než jaké je publikováno v původní Mandelbrotově a van Nessově práci. Rovněž jsem detailně sepsal důkaz o existenci verze s hölderovskými trajektoriemi.

Během přípravy bakalářské práce jsem se seznámil s celou řadou metod simulování gaussovských procesů. Základní z nich jsem uvedl v tomto textu a naprogramoval v Mathematice.

Zabýval jsem se také problematikou odhadu Hurstova indexu. Popsal jsem dvě metody bodového odhadu tohoto parametru. Obě metody jsem naprogramoval ve statistickém softwaru R a vyzkoušel na simulovaných datech.

Literatura

- [1] ANDĚL, J.: *Statistické metody*. Matfyzpress, čtvrté vydání, 2007, ISBN 80-7378-003-8.
- [2] ANDĚL, J.: *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, třetí vydání, 2011, ISBN 978-80-7378-162-0.
- [3] BERAN, J.: *Statistics for Long-Memory Processes*. Monographs on statistics and applied probability, Chapman & Hall, 1994, ISBN 0-412-04901-5.
- [4] BIAGINI, F.; HU, Y.; ØKSENDAL, B.; aj.: *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Probability and Its Applications Series, Springer London, 2008, ISBN 978-1-85233-996-8.
- [5] DIEKER, T.: *Simulation of fractional Brownian motion*. Diplomová práce, University of Twente, 2004.
- [6] FASSHAUER, G.: *Meshfree Approximation Methods With MATLAB*. Interdisciplinary Mathematical Sciences Series, World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2007, ISBN 978-981-270-633-1.
- [7] HURST, H. E.: Long-term storage capacity in reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol 116, 1951: s. 770–799.
- [8] KARATZAS, I.; SHREVE, S.: *Brownian motion and stochastic calculus (Second edition)*. Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1988, ISBN 3-540-97655-8.
- [9] KOLMOGOROV, A. N.: Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertsche Raum. *CR (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.*, vol 26, 1940: s. 115–118.
- [10] MANDELBROT, B.: Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, vol 31, no. 4, 1975: s. 271–285, ISSN 0044-3719.
- [11] MANDELBROT, B.; van NESS, J. W.: Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, vol 10, no. 4, 1968: s. 422–437.
- [12] TEBBENS, J. D.; HNĚTYNKOVÁ, I.; PLEŠINGER, M.; aj.: *Analýza metod pro maticové výpočty, základní metody*. Matfyzpress, první vydání, 2012, ISBN 978-80-7378-201-6.
- [13] ŠTĚPÁN, J.: *Teorie pravděpodobnosti: matematické základy*. Academia, první vydání, 1987.

Použité značení

Číselné obory, vektorové prostory

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{N}_0	množina přirozených čísel s nulou
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$	matice \mathbf{A} typu $m \times n$ s prvky a_{ij}
$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$	čtvercová matice \mathbf{A} typu $n \times n$ s prvky a_{ij}
\mathbf{A}'	transponovaná matice k matici \mathbf{A}
v	vektor v , vždy chápeme jako sloupcový
v'	transponovaný vektor v , tedy řádkový
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skalární součin na prostoru \mathbb{R}^n
x_+	kladná část čísla x
$U_\delta(x)$	otevřené okolí bodu x o poloměru δ
$\mathbf{1}_M$	indikátorová funkce množiny M

σ -algebry a prostory L^p

$\mathcal{B}(X)$	borelovská σ -algebra na topologickém prostoru X
$\bigotimes_{t \in T} \mathcal{S}_t$	součinnová σ -algebra σ -algeber $\mathcal{S}_t, t \in T$; nejmenší σ -algebra obsahující konečně rozměrné válce
$L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$	lineární prostor (tříd μ -s.v. rovných) měřitelných funkcí f pro které $\int_X f(x) ^p d\mu(x) < \infty$ v případě $1 \leq p < \infty$ a $ f < \infty$ μ -s.v. pro $p = \infty$; zkráceně $L^p(X)$, L^p , je-li zřejmé o jaký prostor s mírou se jedná
$\ \cdot \ _{L^p(X, \mathcal{S}, \mu)}$	norma na prostoru $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$; zkráceně $\ \cdot \ _{L^p(X)}$, $\ \cdot \ _{L^p}$ nebo jen $\ \cdot \ $, je-li zřejmé, o jaký prostor s mírou se jedná
$L^p(\mathbb{R})$	chápeme jako $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, kde λ Lebesgueova míra na \mathbb{R}
$L^p(a, b)$	chápeme jako $L^p((a, b), \mathcal{B}((a, b)), \lambda _{(a,b)})$, kde $\lambda _{(a,b)}$ je restrikce Lebesgueovy míry na (a, b)

Pravděpodobnost

(Ω, \mathcal{A}, P)	pravděpodobnostní prostor
EX	střední hodnota náhodné veličiny (vektoru) X
$\text{cov}(X, Y)$	kovariance mezi náhodnými veličinami X a Y
$N(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2
$N(\mu, 0)$	Diracovo rozdělení v bodě μ
$N(\mu, \Sigma)$	vícerozměrné normální rozdělení s vektorem středních hodnot μ a varianční maticí Σ
$X \sim \mu$	náhodná veličina (vektor, proces) X má rozdělení μ
$X \sim Y$	náhodná veličina (vektor, proces) X má stejné rozdělení jako náhodná veličina (vektor, proces) Y

Landauovy symboly

$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 0$
$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a$	$\limsup_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) < \infty$
$f(x) \asymp g(x), x \rightarrow a$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) \in (0, \infty)$

Příloha A

Obsah přiloženého CD

BcPrace-final.pdf

Text této práce v PDF.

choleskeho metoda.nb

Skript generující trajektorie frakcionálního Brownova pohybu pomocí Choleského metody 2.3 v Mathematice.

fgn.R

Funkce generující frakcionální gaussovský šum v R.

hoskingova metoda.nb

Skript generující trajektorie frakcionálního Brownova pohybu pomocí Hoskingovy metody 2.2 v Mathematice.

rs.R

Hurstova R/S analýza 3.2 pro odhad H naprogramovaná v R.

stochasticka reprezentace.nb

Skript generující trajektorie frakcionálního Brownova pohybu pomocí metody stochastické reprezentace 2.4 v Mathematice.

testovani.RData

Data pro porovnání metod odhadů Hurstova indexu z nichž vychází 3.3.

varplot.R

Metoda agregovaného rozptylu 3.1 pro odhad H naprogramovaná v R.

vypocet ift.nb

Skript v Mathematice, který jsem využil v 1.2.9 pro výpočet inverzní Fourierovy transformace autokovarianční funkce frakcionálního gaussovského šumu.