Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Garik Dohnal

Skoro disjunktní zjemnění

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2013

Chtěl bych poděkovat zejména panu profesoru Simonovi za pomoc při sepisování této práce a pak své rodině za materiální podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Garik Dohnal

Název práce: Skoro disjunktní zjemnění

Autor: Garik Dohnal

Katedra: Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc., Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Abstrakt: Konstrukce úplně separabilního MAD systému za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$ a jeho vztah k disjunktním a skoro disjunktním zjemněním systémů podmnožin ω na jedné straně a k topologickým vlastnostem ω^* na druhé straně. Ukazuje se, že existence skoro disjunktního zjemnění pro některé velké systémy množin, přesněji pro doplňky hustých ideálů, je ekvivalentní s tím, že každá řídká množina v ω^* je 2^ω-množina. Existence úplně separabilního MAD systému implikuje tato dvě tvrzení. K jeho konstrukci jsou využity nekonečně-kombinatorické vlastnosti systémů množin definovaných na ω.

Klíčová slova: skoro disjunktní zjemnění, úplně separabilní MAD systém

Title: Almost disjoint refinement

Author: Garik Dohnal

Department: Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Supervisor: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc., Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Abstract: Construction of completely separable MAD family under the assumption $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$ and its relationship with almost disjoint refinement of systems of subsets of ω on the one side and with topological properties of ω^* on the other. It is shown that the existence of almost disjoint refinement for complements of dense ideals of subsets of ω is equivalent with the assumption that every nowhere dense set in ω^* is 2^ω-set. The existence of completely separable MAD family implies these two assumptions. Its construction is proceeded by means of combinatorics properties of systems of sets defined on ω.

Keywords: almost disjoint refinement, completely separable MAD family

Obsah

1. Úvod

1.1 Historie problému

Objekt zvaný úplně separabilní MAD systém, jehož existence je hlavním tématem této práce, se poprvé objevuje v díle S. H. Hechlera *Classyfying families of almost disjoint sets with applicatons on* $\beta\omega \setminus \omega$. Úplně separabilní MAD systém je totiž speciálním případem skoro disjunktního systému podmnožin ω. Hechler ve své práci dokázal jeho existenci za předpokladu Martinova axiomu. Na jeho práci navázal Erdős se Shelahem svým článkem [5]. V tom je položena otázka, zda lze dokázat existenci úplně separabilního MAD systému pouze v ZFC(Zermelo-Frankel-Choice). Tuto možnost rozvíjeli Balcar, Dočkálková a Simon - viz [3], kteří dokázali jeho existenci za předpokladu jistých nerovností mezi kardinálními invarianty kontinua. V roce 2011 publikoval Shelah článek, který následně rozvedli Mildenbergerová, Raghavan a Steprans [7], ve kterém je dokázána existence úplně separabilního MAD systému za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$, který v sobě obsahuje všechny předchozí nekonečně-kombinatorické předpoklady, používané při konstrukci tohoto MAD systému, takže jde v jistém smyslu o zatím nejobecnější výsledek. Jediné, co se tak doposud ví, je to, že existence úplně separabilního systému je konzistentní se ZFC, tedy s axiomy Zermelo-Frankelovy teorie množin doplněné o axiom výběru.

1.2 Značení

Symbol ω značí množinu všech přirozených čísel. Písmena i až q budou značit přirozená čísla a všechna velká písmena budou značit nekonečné podmnožiny ω. $[\omega]^\omega$ značí množinu všech nekonečných podmnožin přirozených čísel. Kofinitní množina je taková podmnožina ω, že její doplněk je konečný. V opačném případě říkáme, že množina je koinfinitní. $[X]^\omega$ značí všechny nekonečné podmnožiny $X \in [\omega]^\omega$. Kofinitní množina vzhledem k $[X]^\omega$ je takový prvek $Y \in [X]^\omega$, pro který je $|X \setminus Y| < \omega$. Nechť je $X, Y \in [\omega]^\omega$. Potom X^0 značí X a X^1 značí $\omega \setminus X$. Dále $X \subseteq^* Y$ znamená $|X \setminus Y| < \omega$. Symbol ${}^\omega\omega$ označuje množinu všech funkcí z ω do ω. Na této množině definujeme uspořádání $\leq^*$ a to tak, že pro $f, g \in {}^\omega\omega$ je $f \leq^* g$ pokud platí: $|\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}| < \omega$. Značení $(\exists^\infty n : G(n))$, kde $G(n)$ je nějaká formule, znamená, že množina $\{n \in \omega : G(n)\}$ je nekonečná. Podobně výrok $(\forall^\infty n : G(n))$ znamená, že množina $\{n \in \omega : \neg G(n)\}$ je konečná. Dále symbol fin značí ideál konečných podmnožin ω. Potenční algebru $\mathcal{P}(\omega)$ můžeme faktorizovat právě podle ideálu fin, výslednou algebru budeme značit $\mathcal{P}(\omega)/fin$. Její prvky jsou třídy ekvivalence na $[\omega]^\omega$ a to takové, že dva prvky $A, B \in [\omega]^\omega$ jsou ve stejné třídě, pokud $(A \subseteq^* B) \wedge (B \subseteq^* A)$. Nulový prvek jsou pak všechny konečné podmnožiny ω. V některých kontextech nebudeme formálně rozlišovat mezi podmnožinou ω a příslušnou třídou ekvivalence.

2. Některé kardinální charakteristiky kontinua

Kardinální charakteristiky kontinua jsou kardinální čísla ležící mezi ω a 2^ω. Typicky se zadávají jako nejmenší mohutnosti nějak strukturovaných systémů podmnožin přirozených čísel. Díky tomu se "nabývají", tzn. systémy jejich mohutností existují. V této kapitole definujeme ty kardinální charakteristiky, které budeme potřebovat, a dokážeme základní vztahy mezi nimi.

Definice 2.1. Štěpící číslo $\mathfrak{s}$ (z anglického "splitting number"). Řekneme, že množina $S \in [\omega]^\omega$ štěpí množinu $X \in [\omega]^\omega$, pokud platí, že $|S \cap X| = \omega$ a zároveň $|X \cap (\omega \setminus S)| = \omega$. Jinými slovy, pokud $|S^0 \cap X| = \omega = |S^1 \cap X|$.
$\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ je štěpící systém, pokud platí: $(\forall X \in [\omega]^\omega)$ $(\exists S \in \mathcal{S})(S$ štěpí $X)$. Štěpící číslo $\mathfrak{s}$ je pak nejmenší mohutnost štěpícího systému, jinými slovy: $\mathfrak{s} = min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ a $\mathcal{S}$ je štěpící systém$\}$.

Definice 2.2. Množina $P \in [\omega]^\omega$ je pseudoprůnik souboru $\{X_\alpha \in [\omega]^\omega : \alpha \in \kappa\}$ pokud platí, že pro každé $\alpha \in \kappa$ je $P \subseteq^* X_\alpha$. Soubor $\{X_\alpha \in [\omega]^\omega : \alpha \in \kappa\}$ je řetězec, pokud platí, že pro každé $\alpha \leq \beta \in \kappa$ je $X_\beta \subseteq^* X_\alpha$.

Pozorování 2.1. Každý spočetný řetězec má pseudoprůnik.

Důkaz. Buď $\{X_n : n \in \omega\}$ nějaký spočetný řetězec. Jeho pseudoprůnikem je například selektor na množině $\{\bigcap_{k=1}^n X_k : n \in \omega\}$. □

Tato skutečnost vede k následující definici nového kardinálního invariantu:

Definice 2.3. Kardinální číslo $\mathfrak{t}$ je nejmenší mohutnost řetězce, který nemá pseudoprůnik.

Je tedy zřejmé, že $\mathfrak{t} > \omega$.

Tvrzení 2.1. $cf(\mathfrak{s}) > \omega$.

Důkaz. Sporem. Nechť je $cf(\mathfrak{s}) = \omega$. To znamená, že existuje posloupnost $\{\gamma_n : n \in \omega\}$, pro kterou platí $sup\{\gamma_n : n \in \omega\} = \mathfrak{s}$. Vezměme nyní nějaký štěpící systém $\mathcal{S} = \{S_\alpha : \alpha < \mathfrak{s}\}$ a definujme množiny $\mathcal{S}_n = \{S_\alpha \in \mathcal{S} : \alpha < \gamma_n\}$. Platí $|\mathcal{S}_n| < \mathfrak{s}$. Tím pádem z definice štěpícího čísla existuje $X_0 \in [\omega]^\omega$, že X_0 není rozštěpená žádnou z množin v $\mathcal{S}_0$. Dále existuje $X_1 \in [X_0]^\omega$ taková, že žádný prvek množiny $\mathcal{S}_1$ neštěpí X_0. Kdyby taková množina neexistovala, tak $\mathcal{S}_1$ je štěpící systém na X_0, což je množina mohutnosti ω, a přitom $|\mathcal{S}_1| < \mathfrak{s}$. Indukcí tak získáme posloupnost nekonečných množin $\{X_n : n \in \omega\}$, pro které platí $X_0 \supseteq X_1 \supseteq ... \supseteq X_n \supseteq X_{n+1}...$ Nechť $H = \{h_n : n \in \omega\}$ je pseudoprůnik souboru $\{X_n : n \in \omega\}$. Nyní ke sporu stačí ukázat, že žádná množina $S \in \mathcal{S}$ nerozštípne množinu H. Nechť taková S_β existuje. Potom existuje γ_k, že $\gamma_k \geq \beta$. Tomuto γ_k odpovídá X_k, které není rozštěpené S_β. Také platí $H \subseteq^* X_k$, protože $(\forall n > k : h_n \in X_n \subseteq X_k)$. Proto platí, že množina S_β nemohla rozštěpit H, protože by štěpila i X_k - spor. □

Platí dokonce, že $cf(\mathfrak{s}) \geq \mathfrak{t}$; v předchozím důkazu šlo o existenci pseudoprůniku a ten existuje, pokud má příslušný řetězec mohutnost $< \mathfrak{t}$. Zadarmo tak dostáváme i následující tvrzení:

Tvrzení 2.2. $\mathfrak{s} \geq \mathfrak{t}$

. $\square$

Definice 2.4. MAD číslo $\mathfrak{a}$ (z anglického "Maximal Almost Disjoint"). Řekneme, že množiny $A, B \in \omega$ jsou skoro disjunktní, pokud platí, že $|A \cap B| < \omega$. Systém množin $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ nazveme skoro disjunktní (dále jen AD systém podle anglického "almost disjoint"), pokud každé dva prvky systému $\mathcal{A}$ jsou skoro disjunktní a $\mathcal{A}$ je nekonečný. MAD systém je AD systém, který je maximální vzhledem k inkluzi. Ekvivalentně, nekonečný soubor $\mathcal{M} \subseteq [\omega]^\omega$ je MAD systém, pokud: $(\forall X \in [\omega]^\omega)(\exists M \in \mathcal{M}) : |M \cap X| = \omega$. Číslo $\mathfrak{a}$ je nejmenší mohutnost, jakou může MAD systém mít. Platí tedy, že pokud $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ je libovolný AD systém takový, že $|\mathcal{A}| < \mathfrak{a}$, tak potom existuje $X \in [\omega]^\omega$, že X je skoro disjunktní se všemi $A \in \mathcal{A}$.

Definice 2.5. Omezující číslo $\mathfrak{b}$ ("bounding number"). Toto číslo podle názvu odpovídá nejmenší mohutnosti množiny funkcí z ω do ω, která není omezená ve smyslu uspořádání $\leq^*$. Jinak řečeno $\mathfrak{b} = min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq^\omega \omega$ a $(\forall h \in {}^\omega\omega)$ $(\exists f \in \mathcal{F})$ $(\exists^\infty n : f(n) \geq h(n))\}$.

Tvrzení 2.3. $\mathfrak{b} > \omega$

Důkaz. Sporem. Nechť je $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \omega\}$ neomezená množina funkcí. Definujme funkci $g(m) = max(f_n(m) : n < m)$. Pro g platí: $(\forall n \in \omega)(\forall^m : f_n(m) \leq g(m))$. Pro libovolné $n \in \omega$ totiž máme: $(\forall k > n)(g(k) \geq f_n(k))$. Funkce g tak omezuje množinu $\mathcal{F}$ - spor. $\square$

Platí ještě lepší odhad:

Tvrzení 2.4. $\mathfrak{b} \geq \mathfrak{t}$

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\mathfrak{b} < \mathfrak{t}$. Buď $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in \mathfrak{b}\}$ neomezená množina funkcí z ${}^\omega\omega$, pro kterou platí: $(\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{b})(\alpha < \beta \Rightarrow f_\alpha <^* f_\beta)$. Definujme systém množin $(B_\alpha : \alpha \in \mathfrak{b})$ a jim odpovídajících funkcí b_α. $B_0 = \omega$ a pokud máme definované $B_\alpha = \{b_m : m \in \omega\}$, tak nechť $b_\alpha(m) = b_m$. K této funkci najdeme $g \in \mathcal{F}$, pro kterou $(\exists^\infty n : b_\alpha(n) < g(n))$, tato n si označme N. Nyní položme $B_{\alpha+1} = \{\text{první } b_m > g(n) : n \in N\}$. Pro limitní α vezměme za g funkci, která je na nějaké nekonečné množině N větší než všechny $b_\beta : \beta < \alpha$. $\{B_\beta : \beta < \alpha\}$ tvoří řetězec, jehož pseudoprůnik $P = \{p_m : m \in \omega\}$ použijeme v definici $B_\alpha = \{\text{první } p_m > g(n) : n \in N\}$. Celkově tak získáme řetězec délky $\mathfrak{b} < \mathfrak{t}$, tedy musí mít pseudoprůnik. Ten by ovšem jako svoje vyčíslující funkce omezoval množinu $\mathcal{F}$. $\square$

V následujícím tvrzení ukážeme, že pro MAD číslo $\mathfrak{a}$ platí silnější omezení zdola:

Tvrzení 2.5. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.

Důkaz. Předpokládáme $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. To znamená, že existuje MAD systém $\mathcal{A}$ mohutnosti menší než $\mathfrak{b}$ a z toho vyvodíme spor s maximalitou $\mathcal{A}$. Vezměme $X_n : n \in \omega$ prvků $\mathcal{A}$ a definujme funkce $\{f_A : A \in \mathcal{A} \setminus \{X_n : n \in \omega\}\}$ z $\bigcup\{X_n : n \in \omega\}$ do ω tak, že $f_A(n) = min(X_n \setminus (A \cup max(X_n \cap A))$. Protože soubor $f_A : A \in \mathcal{A}$ je menší než $\mathfrak{b}$, tak existuje funkce g, že $f_A \leq^* g$ pro každou f_A. $Rng(g)$ je pak skoro disjunktní se všemi množinami $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Invariant $\mathfrak{b}$ lze charakterizovat ještě pomocí intervalových rozkladů ω. Intervalový rozklad ω je množina tvaru $I = \{I_n = [i_n, i_{n+1}) : \langle i_n : n \in \omega \rangle$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel$\}$. Na množině všech intervalových rozkladů můžeme definovat uspořádání $\subseteq^*$ a to tak, že $J \subseteq^* I$, pokud platí $(\forall^\infty n)(\exists k)(J_k \subseteq I_n)$. $\mathfrak{b}$ je i v tomto případě nejmenší mohutnost množiny intervalových rozkladů ω, která není omezená ve smyslu $\subseteq^*$.

Tvrzení 2.6. $\mathfrak{b} = min\{|\mathcal{I}| : \mathcal{I}$ je množina intervalových rozkladů ω, která není omezená ve smyslu $\subseteq^*\}$.

Důkaz. Mějme nejprve množinu funkcí $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in \mathfrak{b}\}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že všechny tyto funkce jsou ostře rostoucí a $\forall \alpha \in \mathfrak{b} : f_\alpha(0) > 0$. Z takové množiny vyrobíme množinu intervalových rozkladů a to tak, že funkci f_α přiřadíme rozklad ω, označme ho I_α, a to předpisem $I_\alpha = \{I_{\alpha_n} = [f_\alpha^n(0), f_\alpha^{n+1}(0)) : n \in \omega\}$. Výraz $f^n(0)$ znamená $f(f^{n-1})(0)$, kde $f^0 \equiv 0$ a $f^1 = f$. Dále nechť je dán $J = \{J_n : n \in \omega\}$ libovolný intervalový rozklad ω. Definujme funkci $g(n) = min(k : [n, k)$ obsahuje alespoň dvě množiny z $\{J_n : n \in \omega\})$. K takové funkci podle definice $\mathcal{F}$ existuje funkce $f \in \mathcal{F}$, že $(\exists^\infty n : f(n) > g(n))$. Každé n, pro které platí $f(n) > g(n)$, musí být obsaženo v nějakém intervalu tvaru $[f^q(0), f^{q+1}(0))$ kde $q \in \omega$. Pro toto n platí $n < f^{q+1}(0)$, a tedy i $g(n) < f(n) < f(f^{q+1}(0)) = f^{q+2}(0)$. Z toho plyne $[n, g(n)) \subseteq [f^q(0), f^{q+2}(0))$ a interval $[f^q(0), f^{q+2}(0))$ obsahuje dvě množiny J_1, J_2 z $\{J_n : n \in \omega\}$. Tedy ale minimálně jeden z intervalů $I_1 = [f^q(0), f^{q+1}(0)), I_2 = [f^{q+1}(0), f^{q+2}(0))$ obsahuje jednu z J_1, J_2. Z konstrukce těchto množin také vyplývá: $(I_1 \subseteq J_1) \Rightarrow (J_2 \subsetneq I_2)$. Tedy $(\exists^\infty n)(\exists k) : (J_k \subsetneq I_{\alpha_n})$, kde I_α je intervalový rozklad přiřazený $f = f_\alpha$. To ale znamená, že rozklad I_α není menší než rozklad J.
Na druhou stranu předpokládejme, že máme neomezenou množinu $\mathcal{I}$ intervalových rozkladů, a vytvořme stejně velikou množinu funkcí a to tak, že pro $I \in \mathcal{I}$ definujme $f_I(n) = i_{m+2}$, pokud platí $n \in [i_m, i_{m+1})$. Výsledná množina funkcí $\{f_I : I \in \mathcal{I}\}$ je neomezená: nechť je g libovolná funkce. Z g uděláme rozklad $G = \{[g^n(0), g^{n+1}(0)) : n \in \omega\}$. Protože $\mathcal{I}$ je neomezená, tak existuje intervalový rozklad $J \in \mathcal{I}$, pro který platí: $(\exists^\infty n : [g^n(0), g^{n+1}(0))$ neobsahuje žádnou množinu z J). Nyní se situace rozpadá na dva případy: nechť nejdřív pro takové n existuje interval J_k, že $[g^n(0), g^{n+1}(0)) \subsetneq J_k$. V takovém případě je $g(g^n(0)) < j_{k+1} < j_{k+2} = f_J(g^n(0))$. Nechť nyní takový J_k neexistuje. Interval $[g^n(0), g^{n+1}(0))$ je tak obsažen ve sjednocení dvou intervalů z J a oba dva ho přečnívají. Nechť je J_{k+1} ten, který ho přečnívá na pravé straně, tedy $[g^n(0), g^{n+1}(0)) \subsetneq J_k \cup J_{k+1}$. Pak platí $g(g^n(0)) < j_{k+2} = f_J(g^n(0))$. Tedy existuje nekonečně $n \in \omega$, že platí $g(n) < f_J(n)$ a množina funkcí $\{f_I : I \in \mathcal{I}\}$ tak není omezená. $\square$

Dokázali jsme vlastně víc. Totiž to, že existuje neomezená množina intervalových rozkladů $\mathcal{I}$ nejmenší možné velikosti $\mathfrak{b}$, pro kterou platí:
$(\forall$ intervalový rozklad $J)(\exists I \in \mathcal{I})$, že $(\exists^\infty n)(\exists k) : (J_k \subsetneq I_n)$.

Dále zavedeme zesílení štěpícího čísla $\mathfrak{s}$ a ve zbytku kapitoly ukážeme, že přes toto zesílení zůstane štěpící číslo stejné.

Definice 2.6. Kardinální invariant $\mathfrak{s}_{\omega,\omega}$ je nejmenší mohutnost systému množin $\mathcal{S}$ z $[\omega]^\omega$, pro který platí, že pro libovolnou spočetnou množinu $\{A_n : n \in \omega\} \subset [\omega]^\omega$ existuje $S \in \mathcal{S}$, pro kterou platí: $(\exists^\infty n : |A_n \cap S^0| = \omega) \wedge (\exists^\infty n : |A_n \cap S^1| = \omega)$. Systému množin $\mathcal{S}$ budeme říkat ω, ω-štěpící.

To je ono zesílení - je jasné, že každý ω, ω-štěpící systém je také štěpící (stačí za $\{A_n : n \in \omega\}$ vzít $\{X\}$, k němu existuje S ve ω, ω-štěpícím systému, která rozštípne X), tedy platí $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} \geq \mathfrak{s}$. V následujících odstavcích ukážeme, že existuje ω, ω-štěpící systém mohutnosti $\mathfrak{s}$, jinými slovy $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} = \mathfrak{s}$. Důkaz vychází z [7].

Tvrzení 2.7. Předpokládejme $\mathfrak{s} < \mathfrak{b}$, potom $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} = \mathfrak{s}$.

Důkaz. Dokazujeme sporem, tedy předpokládejme $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} > \mathfrak{s}$. Nechť $\{S_\alpha : \alpha \in \mathfrak{s}\}$ je takový štěpící systém, pro který existuje soubor nekonečných podmnožin $\{A_n : n \in \omega\}$ tak, že platí $(\forall \alpha \in \mathfrak{s})(\exists i_\alpha \in \{0,1\}) : (\forall^\infty n : A_n \subseteq^* S_\alpha^{i_\alpha})$. Dle lemmatu o disjunktním zjemnění použitém na $\{A_n : n \in \omega\}$ můžeme předpokládat, že je $A_n \cap A_m = \emptyset$ pro $n \neq m$. Pro každou S_α nyní definujme funkci $f_\alpha \in^\omega \omega$ a to následujícím způsobem: víme, že existuje $k \in \omega$, že pro všechna $n \geq k$ je buď $|A_n \cap S_\alpha^0| < \omega$, anebo $|A_n \cap S_\alpha^1| < \omega$. Nechť nastává druhá možnost. Definujme tedy $f_\alpha(m) = 0$ pro $m < k$ a pro $m \geq k$ můžeme položit $f_\alpha(m) = max(A_m \cap S_\alpha^1)$. Množina $\{f_\alpha : \alpha \in \mathfrak{s}\}$ je podle předpokladu menší než $\mathfrak{b}$, a tedy existuje funkce f, pro kterou platí: $(\forall \alpha \in \mathfrak{s} : f_\alpha \leq^* f)$. Protože jsou množiny A_n nekonečné, můžeme pro každé $n \in \omega$ vybrat $l_n \in A_n$ takové, že $l_n > f(n)$, a protože jsou množiny A_n disjunktní, je množina $L = \{l_n : n \in \omega\}$ nekonečná. Tedy existuje $\beta \in \mathfrak{s}$, že S_β štěpí L. Dále z $f_\beta \leq^* f$ existuje $k \in \omega$, že pro $n > k$ je $f(n) \geq f_\beta(n)$. Z konstrukce f_β také víme, že existuje m takové, že pro $n > m$ je $f_\beta(n) = max(A_n \cap S_\beta^{1-i_\beta})$. Vzhledem k tomu, že $S_\beta^{1-i_\beta} \cap L$ je nekonečná, jistě existuje $q > max(k, m)$, pro které je $l_q \in S_\beta^{1-i_\beta}$. A jsme hotovi, nyní máme $l_q \leq f_\beta(q)$, protože $l_q \in A_q \cap S_\beta^{1-i_\beta}$ a z definice $f_\beta(q) = max(A_q \cap S_\beta^{1-i_\beta})$. Také platí $f_\beta(q) \leq f(q) < l_q$, což je spor. $\square$

Případ $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{s}$ je komplikovanější a zavedeme kvůli němu další verzi štěpícího systému.

Definice 2.7. Systém množin $\mathcal{R} \subseteq [\omega]^\omega$ nazveme blok-štěpící, pokud splňuje, že pro každý nekonečný rozklad ω na konečné podmnožiny, označme ho $\{r_n : n \in \omega\}$, existuje $R \in \mathcal{R}$, že platí $(\exists^\infty n : r_n \subset R) \wedge (\exists^\infty n : r_n \cap R = \emptyset)$. Řekneme, že R rozštěpila rozklad $\{r_n : n \in \omega\}$. Nejmenší mohutnost blok-štěpícího systému označme $\mathfrak{bs}$.

Konečné rozklady nejsou proti intervalovým rozkladům úplně výhodné pro manipulaci, proto dokážeme pozorování, že blok-štěpící systém stačí ověřovat pouze na intervalových rozkladech.

Pozorování 2.2. Pokud nějaký soubor $\mathcal{R}$ splňuje, že pro každý intervalový rozklad ω existuje $R \in \mathcal{R}$, která tento rozklad rozštípne, tak potom je soubor $\mathcal{R}$ blok-štěpící.

Důkaz. Mějme rozklad $A = \{a_n : n \in \omega\}$ na konečné podmnožiny. Můžeme vytvořit intervalový rozklad G a to tak, že $G_0 = [0, g_1)$, kde $g_1 = min(k : [0, k)$ obsahuje jednu množinu z $A)$, a dále $G_n = [g_n, g_{n+1})$, kde $g_{n+1} = min(k : [g_n, k)$ obsahuje jednu množinu z $A)$. Takto získáme intervalový rozklad a je jasné, že pokud $R \in \mathcal{R}$ rozštěpí intervalový rozklad G, pak rozštěpí i rozklad A. □

Tvrzení 2.8. $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{bs}$.

Důkaz. Nechť je dána libovolná $M \in [\omega]^\omega$ a nechť je $\mathcal{R}$ blok-štěpící systém mohutnosti $\mathfrak{bs}$. $M = \{m(n) : n \in \omega\}$. Definujme $k(0) = [m(0), m(1))$ a $k(n) = [m(n), m(n+1))$. $\{k(n) : n \in \omega\}$ je rozklad ω na konečné množiny. Tedy existuje $R \in \mathcal{R}$, že platí jednak $(\exists^\infty n : k(n) \subset R)$ a také $(\exists^\infty n : k(n) \cap R = \emptyset)$. To ale neznamená nic jiného, než $|M \cap R^0| = \omega = |M \cap R^1|$. □

Tvrzení 2.9. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{bs}$

Důkaz. Dokazujeme sporem, nechť tedy existuje blok-štěpící systém $\mathcal{R}$ mohutnosti $< \mathfrak{b}$. Každá $R \in \mathcal{R}$ je koinfinitní; kdyby totiž byla kofinitní, tak by pro žádný rozklad $\{a_n : n \in \omega\}$ množiny ω na konečné množiny nemohlo platit $(\exists^\infty n : a_n \cap R = \emptyset)$. Můžeme tedy předpokládat, že všechny prvky $\mathcal{R}$ jsou koinfinitní. Díky tomu má následující definice smysl. Pro $R \in \mathcal{R}$ definujme funkci $f_R(n) = min(k : [n, k) \cap R^0 \neq \emptyset \neq [n, k) \cap R^1)$. K množině funkcí $\{f_R : R \in \mathcal{R}\}$ existuje bez újmy na obecnosti rostoucí funkce g, že $f_R \leq^* g$ pro všechna $R \in \mathcal{R}$. Pomocí g definujme rozklad ω a to takto: $g_0 = [0, g(0))$ a $g_n = [g^n(0), g^{n+1}(0))$. Co by se stalo, kdyby nějaký $R \in \mathcal{R}$ rozštěpil $\{g_n : n \in \omega\}$? Nechť n je takové, že platí: $(\forall m \geq n) : (g(n) \geq f_R(n))$. Dále nechť p je první číslo, pro které je $g^p(0) \geq n$. Pro každé $q \geq p$ platí $[g^q(0), f_R(g^q(0))) \subseteq [g^q(0), g^{q+1}(0))$. $[g^q(0), f_R(g^q(0)))$ má neprázdný průnik jak s R^0, tak s R^1, a tak množina R nemohla rozštěpit $\{g_n : n \in \omega\}$ - spor. □

Tvrzení 2.10. $\mathfrak{bs} \leq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{s} = max(\mathfrak{b}, \mathfrak{s})$

Důkaz. Zafixujme štěpící systém $\mathcal{S}$ a neomezenou množinu intervalových rozkladů $\mathcal{I}$, pro kterou platí: $(\forall$ intervalový rozklad $J)(\exists I \in \mathcal{I})$, že $(\exists^\infty n)(\exists k(n)) : (J_{k(n)} \subset I_n)$. Definujme $R(S, I) \in [\omega]^\omega : S \in \mathcal{S}, I \in \mathcal{I}$ a to tak, že $R(S, I) = \bigcup\{I_n : n \in S\}$. Nyní stačí ověřit, že soubor $\{R(S, I) : S \in \mathcal{S}, I \in \mathcal{I}\}$ je blok-štěpící. Nechť je dán libovolný intervalový rozklad J. K němu existuje $I \in \mathcal{I}$, že $(\exists^\infty n)(\exists k(n)) : (J_{k(n)} \subset I_n)$. Těch nekonečně n tvoří nějakou množinu $N \in [\omega]^\omega$. Dále existuje $S \in \mathcal{S}$, že S rozštípne N. $R(S, I)$ tak obsahuje nekonečně intervalů I_n, pro které $(\exists k) : (J_k \subset I_n)$, a to samé platí pro $\omega \setminus R(S, I)$. Každý takový interval I_n ovšem obsahuje nějaký J_k; tedy $R(S, I)$ rozštěpí J, což jsme chtěli dokázat. □

Poslední tři tvrzení dávají dohromady následující:

Tvrzení 2.11. $\mathfrak{bs} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{s} = max(\mathfrak{b}, \mathfrak{s})$

Důkaz. Je důsledek předchozích třech tvrzení. □

Nyní tedy můžeme konečně přikročit k druhé části důkazu tvrzení, že platí $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} = \mathfrak{s}$.

Tvrzení 2.12. Za předpokladu $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{s}$ platí $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} = \mathfrak{s}$.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení zafixujme blok-štěpící systém $\mathcal{R}$, který je velký $\mathfrak{s}$. Ukážeme, že tento systém je ω,ω-štěpící. Nechť je dána $\{A_n : n \in \omega\}$ spočetná množina nekonečných podmnožin ω. Definujme rozklad ω na konečné množiny pomocí $\{A_n : n \in \omega\}$ takto: $s_0 = \{0, min(A_0)\}$ a

$$s_n = \{min(\omega \setminus \bigcup\{s_m : m < n\})\} \cup \{min(A_i \setminus \bigcup\{s_m : m < n\}) : i \leq n\}$$

Je jasné, že $\{s_n : n \in \omega\}$ je rozklad ω na konečné množiny. Tedy existuje $R \in \mathcal{R}$, že $(\exists^\infty n : s_n \subseteq R^0)$ a také $(\exists^\infty n : s_n \subseteq R^1)$. s_n jsou disjunktní a $(\forall i)(\forall n \geq i : s_n \cap A_i \neq \emptyset)$. Z toho plyne, že dokonce platí $(\forall i)(|A_i \cap R^0| = \omega = |A_i \cap R^1|)$. $\square$

S přihlédnutím k tvrzení 2.4. je důkaz $\mathfrak{s}_{\omega,\omega} = \mathfrak{s}$ dokončen. Odteď tedy můžeme předpokládat, že každý štěpící systém je i ω,ω-štěpící.
Nerovnosti mezi kardinálními invarianty shrnuje následující diagram.

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r] & \mathfrak{t} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{a} \\
 & & \mathfrak{s} \arrow[r] & \mathfrak{bs}
\end{tikzcd}$$

3. Disjunktní a skoro disjunktní zjemnění systémů podmnožin ω

Nechť $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ je nějaký soubor množin. Soubor $\{\phi(B) : B \in \mathcal{B}\} \subseteq [\omega]^\omega$ nazveme disjunktním zjemněním souboru $\mathcal{B}$, pokud je tento soubor disjunktní a platí $(\forall B \in \mathcal{B})(\phi(B) \subseteq B)$. Pokud je soubor $\{\phi(B) : B \in \mathcal{B}\}$ pouze skoro disjunktní, tak je to skoro disjunktní zjemnění. Známé lemma o disjunktním zjemnění, které poprvé zformuloval Menger, tvrdí následující:

Tvrzení 3.1 (Menger)**.** Každý spočetný soubor $\{A_n : n \in \omega\}$ nekonečných podmnožin ω má disjunktní zjemnění.

Důkaz. Definujme přirozená čísla $\{a_{n,m} : n \in \omega, m = 0 \dots n\}$ induktivně následujícím předpisem: $a_{0,0}$ nechť je prvek A_0, dále v n-tém kroku definujme pro $k = 0 \dots n$ $a_{n,k}$ jako prvek A_k, který je větší než všechny doposud vybrané. Pokud položíme $\phi(A_k) = \bigcup_{n=k}^{\omega}\{a_{n,k}\}$, tak získáme hledané disjunktní zjemnění. □

Je celkem jasné, že systém nekonečných podmnožin ω, který je nespočetný, nemůže mít disjunktní zjemnění. Můžeme se ale ptát na existenci skoro disjunktního zjemnění a tam je množství kladných odpovědí překvapivě bohaté. Nejdřív bychom potřebovali znát největší možnou mohutnost AD systému. Ačkoli u čistě disjunktního systému je to ω, tak u AD systému je to největší možná mohutnost 2^ω. Stojí za tím fakt, že $|2^{<\omega}| = \omega$.

Tvrzení 3.2. Existuje AD systém mohutnosti 2^ω.

Důkaz. Pracujeme na očíslované množině $2^{<\omega}$. Definujme $\mathcal{A} \subseteq [2^{<\omega}]^\omega$ a to tak, že pro $f \in 2^\omega$ definujme $A_f = \{f \restriction n : n \in \omega\}$. $A_f \subseteq 2^{<\omega}$ a pro $g \in 2^\omega$ že $g \neq f$ existuje $n : f(n) \neq g(n)$. Potom ovšem pro $m > n$ platí $g \restriction m \neq f \restriction m$, a tedy A_f je skoro disjunktní s A_g. □

Definice 3.1. Množina $\mathcal{H} \subseteq [\omega]^\omega$ je hustá, pokud platí: $(\forall X \in [\omega]^\omega)(\exists H \in \mathcal{H})(H \subseteq X)$.

U skoro disjunktního zjemnění tedy nejsme limitovaní mohutností systému, který chceme zjemňovat. Některé pokročilejší věty o skoro disjunktním zjemnění se opírají o strukturu podmnožin ω uspořádaných $\subseteq^*$, která je dána bázovým stromem na algebře $\mathcal{P}_\omega(\omega)$, což je soubor množin $\mathcal{T} \subset [\omega]^\omega$ s následujícími vlastnostmi:

(i) $\langle \mathcal{T}, ^* \supseteq \rangle$ je strom nejmenší možné výšky vzhledem ke vlastnostem $(ii), (iii)$, označme ji $\mathfrak{h}$.

(ii) Jeho hladiny tvoří MAD systémy $M_\alpha : \alpha \in \mathfrak{h}$, kořen je pak celé ω.

(iii) Každý vrchol má 2^ω přímých následníků a celý strom $\mathcal{T}$ je hustá podmnožina $[\omega]^\omega$.

Pro podrobnosti ohledně struktury bázového stromu a z ní vyplývajících tvrzení lze nahlédnout do [1] a [2]. Důležitá vlastnost bázového stromu je ta, že se hladiny jako MAD systémy postupně zjemňují ve smyslu $(\alpha < \beta) \rightarrow (\forall M \in \mathcal{M}_\beta)(\exists N \in \mathcal{M}_\alpha)(M \subseteq^* N)$.

Tvrzení 3.3. Pokud má libovolný soubor množin $\mathcal{S} \subset [\omega]^\omega$ mohutnost menší než 2^ω, tak potom má skoro disjunktní zjemnění.

Důkaz. Pro libovolnou nekonečnou podmnožinu M existuje její rozklad v $\mathcal{P}(M)/fin$ na MAD systém velikosti 2^ω a to znamená, že množina $\{S \cap M : S \in \mathcal{S}\}$ není v $\mathcal{P}(M)/fin$ hustá, tedy existuje $A \subseteq M$, pro kterou platí $(\forall S \in \mathcal{S})(|S \setminus A| = \omega)$. Protože M bylo libovolné, tak je soubor takovýchto množin hustý v $\mathcal{P}(\omega)/fin$ a tak z nich lze vybrat MAD systém $\mathcal{A}_0$. Pro každé $A \in \mathcal{A}_0$ můžeme tuto úvahu zopakovat a indukcí tak dostáváme systém zjemňujících se rozkladů $\mathcal{A}_n : n \in \omega$, přičemž platí, že se na n-té hladině každý prvek $S \in \mathcal{S}$ rozpadá na 2^n svých podmnožin velkých ω, přičemž díky zjemňování hladin tento rozpad odráží strukturu Cantorova stromu - v n-tém kroku totiž ve skutečnosti získáváme 2^n řetězců. Po limitním přechodu k pseudoprůnikům tak pod každou množinou S máme 2^ω nekonečných podmnožin, které dohromady tvoří skoro disjunktní systém, z čehož tvrzení ihned plyne. ☐

Pro systémy mohutnosti kontinua situace není tak jednoduchá a konstrukce skoro disjunktního zjemnění většinou bývá náročná. Obzvlášť netriviální a zajímavý je následující výsledek, který je také postaven na vlastnostech bázového stromu.

Tvrzení 3.4. (Balcar, Vojtáš)
Každý uniformní ultrafiltr $\mathcal{F}$ na ω má skoro disjunktní zjemnění.

Důkaz. Důkaz viz [2]. ☐

Zaměřme se na skoro disjunktní zjemnění z druhé strany, tedy co lze říct o souboru množin, který má skoro disjunktní zjemnění. Znamená to, že jeho množiny jsou buď disjunktní, nebo v jistém smyslu velké - totiž že jsou tak velké, že v nich to skoro disjunktní zjemnění lze definovat.

Definice 3.2. Ideálem budeme nazývat soubor množin z $\mathcal{P}(\omega)$, který je uzavřen na podmnožiny a konečná sjednocení svých množin a obsahuje všechny konečné podmnožiny ω.

Definice 3.3. Ideál generovaný AD systémem. Nechť je $\mathcal{A}$ nějaký AD systém. Symbolem $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ označíme ideál generovaný tímto AD systémem - tedy množinu všech konečných sjednocení prvků z $\mathcal{A}$ doplněnou o podmnožiny těchto konečných sjednocení a konečné množiny.

Pozorování 3.1. Je-li $\mathcal{A}$ MAD systém, potom je $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ hustý ideál.

Důkaz. Pro $X \in [\omega]^\omega$ existuje $A \in \mathcal{A}$, že množina $X \cap A$ je nekonečná. Tato množina je zároveň prvkem $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, a tak je tento ideál hustý. ☐

Malé množiny jsou právě prvky nějakého ideálu. To, že jsou množiny $\mathcal{C}$ opravdu v jistém smyslu velké, je obsah následujícího tvrzení.

Tvrzení 3.5. Pokud má soubor množin $\mathcal{C} \subset [\omega]^\omega$ skoro disjunktní zjemnění, potom existuje hustý ideál $\mathcal{I}$, který je disjunktní s $\mathcal{C}$.

Důkaz. Máme zadaný soubor množin $\mathcal{C}$ a jeho skoro disjunktní zjemnění $\mathcal{A} = \{A_c : c \in \mathcal{C}\}$. Je zřejmé, že stačí vytvořit hustý ideál disjunktní s $\mathcal{A}$. Disjunktnost znamená, že konečné sjednocení množin z $\mathcal{I}$ nikdy neobsáhne žádný prvek $\mathcal{A}$, přičemž množina $O = \omega \setminus \bigcup \mathcal{A}$ nás nezajímá, protože neleží v $\mathcal{C}$. Zkonstruujme AD systém $\mathcal{M}$ jako sjednocení MAD systémů na A_c přes všechna $c \in \mathcal{C}$. Nakonec rozšiřme tento AD systém na MAD systém. $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ je pak hustý ideál, stačí tedy ověřit, že je disjunktní s $\mathcal{A}$. Pokud by platilo, že nějaká $A_c \subseteq^* \bigcup\{M_i : i < k, M_i \in \mathcal{M}\}$, tak M_i jsou buď prvky MAD systémů na $A_C \in \mathcal{A}$, potom ale nemohly dát dohromady skoro celou A_c, anebo přišly s rozšířením $\mathcal{M}$ na MAD systém, potom ale nemohly dát ani nekonečnou část A_c, protože pak by jedna z nich měla nekonečný průnik s A_c a tedy i s nějakým prvkem MAD systému na A_c a nemohla by být při rozšiřování připuštěna. □

Zásadní otázka zní, zdali je předchozí tvrzení ekvivalence. Obecnější formulace zní takto: máme nějaký hustý ideál $\mathcal{I}$ a hledáme skoro disjunktní zjemnění souboru $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$. Pokud je $\mathcal{I}$ prvoideál, tak je hustý - libovolná množina z $[\omega]^\omega$ je buď přímo v $\mathcal{I}$, nebo ji nějakou množinou můžeme rozštěpit a to zaručí existenci nekonečné podmnožiny v $\mathcal{I}$. A protože v případě prvoideálu je $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$ ultrafiltr, tak výsledek Balcara a Vojtáše [2] dává pro prvoideál kladnou odpověď.

V obecném případě je problém udržet "nemaximální" skoro disjunktnost zjemnění přes celou indukci délky 2^ω, lze to nicméně zařídit za předpokladu $\mathfrak{a} = 2^\omega$.

Tvrzení 3.6. Za předpokladu $\mathfrak{a} = 2^\omega$ platí, že pokud pro soubor množin $\mathcal{C}$ existuje hustý ideál $\mathcal{I}$ disjunktní s $\mathcal{C}$, tak potom má soubor $\mathcal{C}$ skoro disjunktní zjemnění.

Důkaz. Očíslujme si $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$. Za $\phi(C_0)$ vezmu prvek $\mathcal{I}$, který leží pod C_0. Předpokládejme tedy, že máme vybranou $\{\phi(C_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ a chtěli bychom vybrat množinu z C_κ. To ovšem půjde snadno - $\{\phi(C_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ nemůže být kvůli své malé mohutnosti MAD a tak v C_κ existuje nekonečná množina skoro disjunktní se všemi dosud vybranými $\{\phi(C_\alpha) : \alpha < \kappa\}$. V této množině pak existuje prvek z $\mathcal{I}$, který vezmeme jako $\phi(C_\kappa)$. □

Definice 3.4. Velkou množinou vůči hustému ideálu $\mathcal{I}$ nazýváme množinu z $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$. Velkou množinou vůči AD systému $\mathcal{A}$ nazýváme množinu, kterou až na konečnou část nelze zapsat jako konečné sjednocení prvků z $\mathcal{A}$. Pokud je AD systém $\mathcal{A}$ MAD, tak obě definice splývají. Soubor velkých množin AD systému $\mathcal{A}$ budeme značit $\mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.

Objekt, který zajímavě spojuje jak ideál $\mathcal{I}$, tak jeho velké množiny, je takzvaný úplně separabilní MAD systém.

Definice 3.5. MAD systém $\mathcal{A}$ je úplně separabilní, pokud zjemňuje svoje velké množiny, tedy pokud pro každou $M \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ existuje $A \in \mathcal{A}$, že $A \subseteq M$.

Úplně separabilní MAD systém je v jistém smyslu velký, například musí mít velikost 2^ω, jak plyne z důkazu následujícího pozorování.

Pozorování 3.2. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) Úplně separabilní MAD systém existuje.

(ii) Existuje MAD systém, jehož každá velká množina obsahuje 2^ω jeho prvků.

(iii) Existuje MAD systém, jehož každá velká množina skoro obsahuje jeden jeho prvek.

(iv) Existuje MAD systém, jehož každá velká množina má nekonečný průnik s 2^ω jeho prvky.

Důkaz. $(i) \to (ii)$: Nechť je $\mathcal{A}$ úplně separabilní MAD systém a buď V jeho velká množina. Pak V má nekonečný průnik s ω množinami z $\mathcal{A}$, označme je $\{B_n : n \in \omega\}$. Každou $V \cap B_n$ rozdělme na 2^n různých nekonečných množin, tedy $V \cap B_n \supseteq \bigcup\{B_n^s : s \in 2^n\}$. Pak $\{\bigcup\{B_n^{f \restriction n} : n \in \omega\} : f \in 2^\omega\}$ je soubor 2^ω různých velkých množin v množině V, které mají z definice úplné separability zjemnění.
$(ii) \to (iii)$: jasné.
$(iii) \to (iv)$: stejné jako $(i) \to (ii)$.
$(iv) \to (i)$: Buď $\mathcal{M}$ MAD systém z podmínky (iv). Pro každou velkou množinu X najdeme $M(X) \in \mathcal{M}$, která má s X nekonečný průnik. Díky předpokladu můžeme požadovat $(X \neq Y \to M(X) \neq M(Y))$. Pokud pro $M(X)$ platí, že $M(X) \setminus X$ je nekonečná, tak jí rozdělíme na dvě množiny - $M(X) \cap X$ a $M(X) \setminus X$. Pokud je konečná, tak jí bereme jako prázdnou. Definujme MAD systém $\mathcal{A} = \{X \cap M(X), M(X) \setminus X : X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{M})\} \cup \{M : M \neq M(X) \text{ pro žádné } X\}$. Snadno se ověří, že jde o úplně separabilní MAD systém. □

Existence úplně separabilního MAD systému je spojená s existencí skoro disjunktního zjemnění následujícím tvrzením:

Tvrzení 3.7. $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$ má skoro disjunktní zjemnění pro každý hustý ideál $\mathcal{I}$ právě tehdy, když pro každý hustý ideál existuje úplně separabilní MAD systém $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$.

Důkaz. Pokud pro nějaký ideál $\mathcal{I}$ takový úplně separabilní MAD systém existuje, tak každou svojí velkou množinu zjemňuje 2^ω prvky a tak lze ono zjemnění vybrat indukcí. Opačnou implikaci dokážeme v následujícím tvrzení. □

Opačná implikace je totiž snadný důsledek obecnějšího tvrzení. Hustému ideálu $\mathcal{I}$ lze pomocí Zornova lemmatu přiřadit MAD systém $\mathcal{M}$, jehož velké množiny jsou mimo jiné $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$. Pak tedy platí, že $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{M})$ a stačí se zaměřit na zjemnění $\mathcal{I}^+(\mathcal{M})$.

Tvrzení 3.8. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) Pro každý MAD systém $\mathcal{M}$ existuje skoro disjunktní zjemnění $\mathcal{I}^+(\mathcal{M})$.

(ii) Pro každý MAD systém $\mathcal{M}$ existuje skoro disjunktní zjemnění $\mathcal{I}^+(\mathcal{M})$ úplně separabilním MAD systémem.

(iii) Existuje bázový strom $\mathcal{T}$, jehož každou hladinu tvoří úplně separabilní MAD systém.

Důkaz. $(iii) \to (ii)$: Díky hustotě a uspořádání $\mathcal{T}$ můžeme z jeho prvků vybrat skoro disjunktní zjemnění $\mathcal{M}$, které je úplně separabilním MAD systémem a z toho tvrzení ihned plyne.
$(ii) \to (i)$: je triviální.
$(i) \to (iii)$: Nechť je $\mathcal{D} = \{B_\alpha : \alpha \in \mathfrak{h}\}$ nějaký bázový strom. Indukcí najděme MAD systémy A_α, pro které platí:

1 Pro každé $\alpha < \mathfrak{h}$ platí, že A_α zjemňuje B_α.

2 Každý $A_{\alpha+1}$ je velký 2^ω a je zároveň skoro disjunktním zjemněním $\mathcal{I}^+(\mathcal{A}_\alpha)$ - což lze díky (i).

Pro každé α a $A \in \mathcal{A}_\alpha$ vyberme jeden prvek $C(A) \subseteq^* A$ z $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ a položme $\mathcal{E} = \{C(A) : A \in \bigcup_{\alpha<\mathfrak{h}} \mathcal{A}_\alpha\}$. $\mathcal{E}$ je hustý strom v uspořádané množině $\langle \mathcal{P}(\omega), \subseteq^* \rangle$. Buď nyní $\mathcal{D}$ libovolný MAD systém složený z prvků $\mathcal{E}$ a buď V nějaká jeho velká množina. Pro každé α definujme $\mathcal{A}_\alpha(V) = \{A \in \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{D} : |A \cap V| = \omega\}$. Buď nyní $\lambda < \mathfrak{h}$ první ordinál, že $\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\alpha(V)$ je nekonečná. Nechť je $\lambda = \beta + 1$: $\mathcal{A}_\beta(V)$ je díky tomu nekonečná a $\bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{A}_\alpha(V)$ konečná. Díky tomu platí, že každá $A \in \mathcal{A}_\beta(V)$ má nekonečný průnik s $\overline{V} = V \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} \bigcup \mathcal{A}_\alpha(V)$, soubor $\mathcal{D}$ je totiž skoro disjunktní a množina V jeho velká množina. $\overline{V}$ je velká vůči $\mathcal{A}_\beta$ a tak existuje $R \in \mathcal{A}_{\beta+1}$, že $R \subseteq \overline{V}$. Přitom R je disjunktní s prvky $\mathcal{A}_\alpha(V) : \alpha < \beta$, a tak díky inkluzivnímu uspořádání $\mathcal{E}$ platí, že ta nekonečná $D \in \mathcal{D}$, která protne R, do ní skoro náleží: $D \subseteq^* R$.
Nechť je nyní λ limitní ordinál se spočetnou kofinalitou, tedy $\lambda = sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Pro každý $\alpha_n < \lambda$ existuje pouze konečně mnoho prvků $C_n^k \in \mathcal{A}_{\alpha_n}(V)$, které protínají V v nekonečné množině, a tak platí $V \setminus \{C_n^1 \cup \ldots \cup C_n^k\}$ je velká vůči $\mathcal{A}_\lambda$. Při limitním přechodu tak dostáváme řetězec velkých množin vůči $\mathcal{A}_\lambda$ a z pozorování 4.2 vyplývá existence pseudoprůniku $P \subseteq V$, který je velký vůči $\mathcal{A}_\lambda$ a s každou C_n^k má pouze konečný průnik. Tedy ho zjemňuje nějaká množina $Z \in \mathcal{A}_{\lambda+1}$. Z maximálnosti $\mathcal{D}$ existuje jeho prvek, který je skoro pod A. $\mathcal{D}$ je tak úplně separabilní. Díky tomu lze vybrat nový bázový strom z postupně se zjemňujících úplně separabilních rozkladů ω. $\square$

4. Existence úplně separabilního MAD systému

V této kapitole předvedeme výsledek Shelaha [8] vylepšený Mildenbergerovou, Raghavanem a Stepransem [7], a totiž, že úplně separabilní MAD systém existuje za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$. Nejprve napevno zafixujme štěpící systém $\mathcal{S} = \{S_\alpha : \alpha \in \mathfrak{s}\}$, který je zároveň i (ω, ω)-štěpícím. Začněme s myšlenkou důkazu. Úplně separabilní MAD systém vyrobíme indukcí podle podmnožin ω. Budeme postupně procházet všechny podmnožiny ω a pokud se stane, že nějaká podmnožina je velká vůči již zkonstruovanému AD systému, tak k němu přidáme nějakou její podmnožinu. Netriviální úkol spočívá v nalezení takové její podmnožiny, která by byla skoro disjunktní se všemi množinami již vytvořeného AD systému. Výraznou pomocí je následující tvrzení, které umožní najít v libovolné velké množině dvě podmnožiny, které jsou opět velké. Iterováním tohoto postupu pak najdeme dokonce 2^ω velkých podmnožin. Onu skoro disjunktní množinu totiž musíme vybírat z velké množiny vůči již definovanému AD systému, v malé množině bychom skoro disjunktní množinu nenašli. Štěpící systém se v tomto úkolu osvědčí tak, že právě on tyto dvě podmnožiny té konkrétní velké množiny "vykrojí" - to je obsah následujícího pozorování.

Pozorování 4.1. Nechť je $\mathcal{A}$ libovolný AD systém a $V \in [\omega]^\omega$ je libovolná velká množina vůči $\mathcal{A}$. Potom existuje $\beta \in \mathfrak{s}$, že obě množiny $V \cap S^0_\beta, V \cap S^1_\beta$ jsou velké vůči $\mathcal{A}$.

Důkaz. Můžou nastat dva případy. Ten jednodušší je, že existuje $N \in [V]^\omega$, která je skoro disjunktní se všemi prvky $\mathcal{A}$. Například pokud existuje pouze konečně mnoho $A \in \mathcal{A}$, pro které platí $|A \cap V| = \omega$. Potom jistě existuje $S_\beta \in \mathcal{S}$, která rozštěpí N. $V \cap S^0_\beta, V \cap S^1_\beta$ jsou ony hledané množiny. Druhý případ nastává, pokud existuje soubor množin $\{A_n : n \in \omega, A_n \in \mathcal{A}\}$ že $(\forall n \in \omega)(|A_n \cap V| = \omega)$. Zúžíme tento soubor na V: nechť je tedy $B_n = A_n \cap V$. Potom ale z definice (ω, ω)-štěpícího systému existuje $\beta \in \mathfrak{s}$, že $(\exists^\infty n : |B_n \cap S^0_\beta| = \omega = |B_n \cap S^1_\beta|)$. Množiny $V \cap S^0_\beta, V \cap S^1_\beta$ jsou velké vůči $\mathcal{A}$, protože každá má nekonečný průnik s nekonečně mnoha členy $\mathcal{A}$. $\square$

Nyní ještě dokážeme jedno technické tvrzení, které také budeme potřebovat.

Pozorování 4.2. Nechť je $\mathcal{A}$ libovolný AD systém a nechť je $\{E_n : n \in \omega\}$ soubor velkých množin vůči $\mathcal{A}$, že platí $E_1 \supseteq E_2 \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$. Potom existuje pseudoprůnik E souboru $\{E_n : n \in \omega\}$, který je navíc velký vůči $\mathcal{A}$.

Důkaz. Nechť je S_0 selektorem na $\{E_n : n \in \omega\}$ a S_k selektorem na $\{E_n \setminus \bigcup_{l=0}^{k-1} S_l : \ n \in \omega \setminus k-1\}$. $\bigcup_{k=1}^{\omega} S_k$ je pak hledaný pseudoprůnik, který je velký vůči $\mathcal{A}$; stačí požadovat, aby různé selektory vybíraly své prvky z různých prvků $\mathcal{A}$. $\square$

Štěpící systém tedy budeme používat během celé indukce, proto si nejdříve zavedeme značení, pomocí kterého se budeme orientovat. Pokud při indukci narazíme na velkou množinu, tak ji pomocí štěpícího systému "ořežeme" na skoro disjunktní množinu vůči již definovanému AD systému. Toto ořezávání se zastaví před $\mathfrak{s}$. Proto každému prvku $A_\alpha \in \mathcal{A}$ bude odpovídat posloupnost $\sigma_\alpha \in 2^{<\mathfrak{s}}$, přičemž bude platit: $(\forall \gamma \in dom(\sigma_\alpha))(A_\alpha \subseteq^* S_\gamma^{\sigma_\alpha(\gamma)})$. Konečné sjednocení takových množin bude stále ořezáno pouze na konečných množinách, proto pro každou posloupnost $\sigma \in 2^{<\mathfrak{s}}$ definujme ideál $I_\sigma = \{M : (\forall \gamma \in dom(\sigma))(M \subseteq^* S_\gamma^{\sigma(\gamma)})\}$. Naším cílem je tedy provést indukci tak, že konstruovaný AD systém $\mathcal{A}$ je v každém kroku "řídký na velkých množinách", tzn. $(\forall A \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}))(\exists R \in [A]^\omega :$ R je skoro disjunktní vůči $\mathcal{A})$. Právě k tomu bude potřeba předpoklad $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$. Pro $\sigma, \tau \in 2^{<\mathfrak{s}}$ definujme $\sigma \leq \tau$, pokud τ prodlužuje σ, a $\sigma \perp \tau$, pokud existuje $\gamma \in dom(\sigma) \cap dom(\tau)$, pro které platí $\sigma(\gamma) \neq \tau(\gamma)$. Pokud $\sigma \perp \tau$, tak řekneme, že to jsou disjunktní posloupnosti.

Pozorování 4.3. $\sigma, \tau \in 2^{<\mathfrak{s}}$. Platí:

(i) Pokud $\sigma \perp \tau$ potom $(\forall K \in I_\sigma)(\forall L \in I_\tau)(|K \cap L| < \omega)$.

(ii) Pokud $\sigma \leq \tau$ potom $I_\tau \subseteq I_\sigma$.

Důkaz. Obě tvrzení se jednoduše ověří z definice. □

Hlavní část důkazu se nyní provede tak, že velkou množinu v ω krocích postupně rozštěpíme na 2^ω velkých množin, přičemž štěpení bude kontrolováno posloupnostmi ordinálních čísel, které se zastaví pod $\mathfrak{s}$. Pak vybereme takovou posloupnost, že všechny už sestrojené množiny budou v ideálech disjunktních posloupností, nebo v ideálech pod vybranou posloupností. Abychom v tento moment mohli uplatnit předpoklad $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$, tak potřebujeme indukční předpoklad $(\forall A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{A})(\sigma_\alpha \neq \sigma_\beta)$, kde $\mathcal{A}$ je už sestrojený AD systém. Tento indukční předpoklad pak musíme zachovat do další iterace indukce. Nyní ukážeme, že je to možné. Označme tedy $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ již sestrojený AD systém a $\mathcal{P} = \{\sigma_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ odpovídající množinu posloupností.

Tvrzení 4.1. Pokud platí $(\forall \sigma, \tau \in \mathcal{P})(\sigma \neq \tau)$, tak potom pro každé $M \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ existuje $B \in [M]^\omega$ a $\sigma_B \in 2^{<\mathfrak{s}}$ že:

(i) B je skoro disjunktní se všemi $A \in \mathcal{A}$ a $B \in I_{\sigma_B}$.

(ii) $(\forall \tau \in \mathcal{P})(\sigma_B \not\leq \tau)$.

Důkaz. Písmena i, j budou vždy prvky $\{0, 1\}$. Podle pozorování 4.1 najdeme nejmenší α_0, pro které platí, že obě množiny $M \cap S^0_{\alpha_0}, M \cap S^1_{\alpha_0}$ jsou velké vůči $\mathcal{A}$. Díky tomu, že α_0 je nejmenší, tak existuje posloupnost $\tau_0 \in 2^{\alpha_0}$, která kontroluje ořezávání množiny M, tedy $(\forall \gamma \in \alpha_0)(\tau_0(\gamma) = i \Leftrightarrow M \setminus S^i_\gamma \in \mathcal{I}(\mathcal{A}))$. Opětovným použitím pozorování 4.1 dostaneme nejmenší α_{00}, pro které platí, že množiny $M \cap S^0_{\alpha_0} \cap S^0_{\alpha_{00}}$ a $M \cap S^0_{\alpha_0} \cap S^1_{\alpha_{00}}$ jsou velké vůči $\mathcal{A}$. Analogicky dostaneme nejmenší α_{01}, pro které jsou množiny $M \cap S^1_{\alpha_0} \cap S^0_{\alpha_{01}}$ a $M \cap S^1_{\alpha_0} \cap S^1_{\alpha_{01}}$ velké vůči $\mathcal{A}$. K ordinálům α_{00}, α_{01} existují posloupnosti τ_{00} a $\tau_{01} \in 2^{<\mathfrak{s}}$, pro které je

$$\tau_{0j}(\gamma) = i \Leftrightarrow M \cap S^j_{\alpha_0} \cap S^i_\gamma \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}). \tag{4.1}$$

α_{0j} je definiční obor τ_{0j}. Dále platí, že $\alpha_{0j} > \alpha_0$, protože kdyby ne, tak $M \cap S^0_{\alpha_{0j}}$ a $M \cap S^1_{\alpha_{0j}}$ jsou velké vůči $\mathcal{A}$ a přitom je $\alpha_{0j} < \alpha_0$, což je spor s minimalitou α_0. Nemůže nastat ani $\alpha_{0j} = \alpha_0$, protože pak by například $M \cap S^0_{\alpha_0} \cap S^1_{\alpha_{0j}}$ byla konečná množina a tedy by nebyla velká vůči $\mathcal{A}$. Ze stejného důvodu dostáváme

$\tau_{0j} > \tau_0$. Platí dokonce $\tau_{0j}(\alpha_0) = j$, protože dle 4.1 platí $M \cap S^j_{\alpha_0} \cap S^{\tau_{0j}(\alpha_0)}_{\alpha_0} \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$. Přikročíme tedy k obecnému případu. Nechť je $0 \neq s \in 2^{<\omega}$ a $\tau_s \in 2^{<\mathfrak{s}}, dom(\tau_s) = \alpha_s$. Z předchozí indukce předpokládáme, že obě množiny $M \cap S^i_{\alpha_s} \cap (\bigcap\{S^{\tau_s(\alpha_t)}_{\alpha_t} : t \subsetneq s\})$, kde $i \in \{0,1\}$, jsou velké vůči $\mathcal{A}$. Zafixujme i. Opět najdeme nejmenší $\alpha_{s \frown i}$, že množiny $S^j_{\alpha_{s\frown i}} \cap M \cap S^i_{\alpha_s} \cap (\bigcap\{S^{\tau_s(\alpha_t)}_{\alpha_t} : t \subsetneq s\})$, kde $j \in \{0,1\}$, jsou velké vůči $\mathcal{A}$. Dále na $\alpha_{s\frown i}$ definujme posloupnost $\tau_{s\frown i}(\gamma) = j \Leftrightarrow$ množina $M \cap S^i_{\alpha_s} \cap (\bigcap\{S^{\tau_s(\alpha_t)}_{\alpha_t} : t \subsetneq s\}) \cap S^j_\gamma$ je velká vůči $\mathcal{A}$. Opět platí $\alpha_{s\frown i} > \alpha_s$ a také $\tau_{s\frown i} \geq \tau_s \frown i$. Takto jsme zkonstruovali množiny $\{\alpha_s : s \in 2^{<\omega}\}$ a $\{\tau_s : s \in 2^{<\omega}\}$. První množina odpovídá definičním oborům posloupností z druhé množiny, přičemž obě množiny odrážejí strukturu Cantorova stromu $2^{<\omega}$. Pro každý prvek $f \in 2^\omega$ definujme $\alpha_f = sup\{\alpha_{f\lceil n} : n \in \omega\}$ a $\tau_f = \bigcup\{\tau_{f\lceil n} : n \in \omega\}$. Díky tomu, že kofinalita $\mathfrak{s}$ je větší než ω, víme, že $(\forall f \in 2^\omega)(\alpha_f < \mathfrak{s})$. Dále pro $g, f \in 2^\omega : f \neq g$ existuje nejmenší n, že $f(n) \neq g(n)$. Pro $s = f\lceil n = g\lceil n$ platí, že $\tau_{s\frown 0} \geq \tau_s \frown 0$ a $\tau_{s\frown 1} \geq \tau_s \frown 1$ a díky tomu jsou posloupnosti τ_f, τ_g disjunktní. Množina posloupností $\mathcal{P}$ z předpokladu je menší než 2^ω a tedy existuje prvek z 2^ω, že τ_f není prodloužená žádnou posloupností z $\mathcal{P}$. Z konstrukce víme, že množiny $E_n = M \cap (\bigcap\{S^{\tau_f(\alpha_{f\lceil m})}_{\alpha_{f\lceil m}} : m < n\})$ jsou velké vůči $\mathcal{A}$ pro každé $n \in \omega$. Dále platí $M \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq E_{n+1} \ldots$ Označme E pseudoprůnik souboru $\{E_n : n \in \omega\}$, který je velký vůči $\mathcal{A}$. Takový pseudoprůnik existuje podle pozorování 4.2. Z této velké množiny bychom rádi vybrali hledanou skoro disjunktní množinu. Požadavek na posloupnosti bude splněn - τ_f se nerovná a není prodloužena žádnou posloupností z $\mathcal{P}$. Zaměřme se nyní na otázku, kolik prvků z $\mathcal{A}$ protíná E v nekonečné množině. Označme $\mathcal{G}$ ty posloupnosti z $\mathcal{P}$, které τ_f prodlužuje, tedy $\mathcal{G} = \{\sigma : \sigma \in \mathcal{P} \wedge \sigma < \tau_f\}$. Protože posloupnosti z $\mathcal{P}$ jsou po dvou různé, tak je $|\mathcal{G}| \leq |\alpha_f| < \mathfrak{s}$. Kýženou množinu B tedy vybereme z E. Poslední požadavek je, aby $B \in \mathcal{I}_{\tau_f}$. Pro každé $\xi < \alpha_f$ existuje n, že $\xi < \alpha_{f\lceil n}$. $\tau_f(\xi) = \tau_{f\lceil n}(\xi)$ a tedy množina $S^{1-\tau_f(\xi)}_\xi \cap E_n$ není velká vůči $\mathcal{A}$. Tedy existuje soubor $\mathcal{F}_\xi \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, že $S^{1-\tau_f(\xi)}_\xi \cap E_n \subseteq^* \bigcup \mathcal{F}_\xi$. A protože platí $E \subseteq^* E_n$, tak i pro E platí $S^{1-\tau_f(\xi)}_\xi \cap E \subseteq^* \bigcup \mathcal{F}_\xi$. Položme $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{F}_\xi : \xi \in \alpha_f\}$. Množina $\mathcal{F}$ je také menší než $\mathfrak{s}$. Dohromady dostáváme, že množina $\mathcal{G} \cup \mathcal{F}$ je menší než $\mathfrak{s}$. Předpokládáme $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$ a díky tomu můžeme z E vybrat množinu B, která je skoro disjunktní se všemi množinami z $\mathcal{G} \cup \mathcal{F}$. Skoro disjunktnost s prvky z $\mathcal{F}$ zaručuje, že $B \in \mathcal{I}_{\tau_f}$. Platí totiž, že $B \cap S^{1-\tau_f}_\xi \subseteq^* B \cap (S^{1-\tau_f}_\xi \setminus \bigcup \mathcal{F}_\xi) = B \cap$konečná množina. Stačí tedy položit $\sigma_B = \tau_f$ a ověřit skoro disjunktnost s prvky $\mathcal{A} \setminus \bigcup\{\mathcal{G} \cup \mathcal{F}\}$. Ta ale plyne z pozorování 4.3., protože posloupnost τ_f je disjunktní s posloupností libovolného prvku z $\mathcal{A} \setminus \bigcup\{\mathcal{G} \cup \mathcal{F}\}$. □

Tím jsme si připravili hlavní nástroj na induktivní vytvoření úplně separabilního MAD systému:

Tvrzení 4.2. Za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$ úplně separabilní MAD systém existuje.

Důkaz. Očíslujme si prvky $[\omega]^\omega = \{N_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c} = |2^\omega|\}$. Induktivně postavme AD systém $\mathcal{A}_\lambda = \{A_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ a odpovídající množinu po dvou různých posloupností $\mathcal{P}_\lambda = \{\sigma_\alpha : \alpha \in \lambda\}$, přičemž platí, že $(\forall \alpha \in \lambda)(A_\alpha \in \mathcal{I}_{\sigma_\alpha})$. To uděláme pomocí předchozího tvrzení. V kroku $\lambda < \mathfrak{c}$ se podíváme na množinu N_λ. Pokud je velká vzhledem k již sestrojenému AD systému $\mathcal{A}_\lambda$, tak v ní pomocí předchozího tvrzení najdeme množinu A_λ, kterou přidáme k $\mathcal{A}_\lambda$. Pokud N_λ není velká vůči $\mathcal{A}_\lambda$, tak místo ní vezmeme ω - ta je rozhodně velká vůči $\mathcal{A}_\lambda$. Sestrojený AD systém $\mathcal{A}_\mathfrak{c}$ je maximální a také úplně separabilní - každou velkou množinu vzhledem k $\mathcal{A}_\mathfrak{c}$ jsme totiž museli potkat a zjemnit při indukci podle $\{N_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$. $\square$

Během indukce můžeme prvky budoucího úplně separabilního MAD systému vybírat navíc z nějakého hustého ideálu $\mathcal{I}$. Balcar, Dočkálková a Simon dokázali existenci úplně separabilního MAD systému za předpokladu $\mathfrak{s} = \omega_1$ a $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$, viz [3]. Každý z těchto předpokladů implikuje $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$.

5. Topologické důsledky vět o skoro disjunktním zjemnění v $\beta\omega \setminus \omega$

V této kapitole se zaměříme na topologický prostor $\beta\omega \setminus \omega$ a co pro něj plyne z některých vět o skoro disjunktním zjemnění. Začněme rychlou rekapitulací, co to $\beta\omega \setminus \omega$ vlastně je. Pojmy z topologie lze nalézt např. v [4], pojem ultrafiltru v [1].

Definice 5.1. $\beta\omega$ je prostor všech ultrafiltrů na ω opatřený topologií, která je generovaná bází $\mathcal{B} = \{\overline{B} : B \subseteq \omega\}$, kde $\overline{B}$ je množina ultrafiltrů obsahujících množinu B. Jinými slovy, pokud je p ultrafiltr na ω, tak platí:

$$p \in \overline{B} \Leftrightarrow B \in p$$

Pro $A \subseteq \beta\omega$ ovšem $\overline{A}$ značí uzávěr množiny A v $\beta\omega$. ω můžeme přirozeně ztotožnit s triviálními ultrafiltry, proto symbol $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ značí podprostor $\beta\omega$, který je tvořen pouze uniformními ultrafiltry. Analogicky B^* značí množinu všech uniformních ultrafiltrů obsahujících množinu B. Následující tvrzení je souhrnem základních informací, jak topologie na $\beta\omega$ vypadá.

Tvrzení 5.1. A, B vždy značí nekonečné podmnožiny přirozených čísel.

(i) Platí $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ a $\beta\omega \setminus \overline{A} = \overline{\omega \setminus A}$.

(ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, $A \subseteq^* B \Leftrightarrow A^* \subseteq B^*$.

(iii) Každá množina z $\mathcal{B}$ je zároveň uzavřená.

(iv) Každou uzavřenou množinu lze zapsat jako průnik prvků z $\mathcal{B}$.

(v) Nechť je $P = \{p_o : o \in O\} \subseteq \beta\omega$. Potom uzávěr množiny P je množina $\overline{P} = \{q \in \beta\omega : q$ rozšiřuje filtr generovaný systémem $\bigcap P\}$.

Důkaz. Body (i) až (iv) jsou triviální, (v) dokážeme: Nejprve ověříme, že $\bigcap P$ je centrovaný systém - pro libovolný konečný počet prvků z $\bigcap P$ platí, že leží v každém ultrafiltru z P a tedy i jejich průnik musí být nekonečný a ležet v každém ultrafiltru, tedy i v $\bigcap P$. Víme, že $\overline{P}$ je uzavřená množina, takže $\overline{P}$ lze zapsat jako $\overline{P} = \bigcap\{\overline{B_i} : i \in I\}$. Množina

$$K = \{q \in \beta\omega : q \text{ rozšiřuje filtr generovaný systémem } \bigcap P\}$$

je uzavřená, protože je to ve skutečnosti množina $\bigcap\{\overline{Q} : Q \in \bigcap P\}$. Je zřejmé, že $P \subseteq K$. K dokončení důkazu předpokládejme, že existuje menší uzavřená množina obsahující P. Ta by byla obsažená v množině tvaru $\bigcap\{\overline{Q} : Q \in \bigcap P\} \cap \overline{A}$, kde A je nějaká nekonečná podmnožina ω. Protože ale A není v $\bigcap P$, znamená to, že existuje ultrafiltr $q \in P$, který neobsahuje A. Tento ultrafiltr pak není ani v $\bigcap\{\overline{Q} : Q \in \bigcap P\} \cap \overline{A}$. $\square$

Dále uvádíme některé globální vlastnosti $\beta\omega$.

Tvrzení 5.2. A opět značí nekonečnou podmnožinu ω.

(i) $|\beta\omega| = 2^{(2^\omega)}$ a také $|\overline{A}| = |A^*| = 2^{(2^\omega)}$.

(ii) ω je hustá v $\beta\omega$ a $\beta\omega \setminus \omega$ je uzavřený podprostor.

(iii) $\beta\omega$ je Hausdorffův kompaktní prostor homeomorfní s Čech-Stoneovou kompaktifikací diskrétního prostoru ω.

Důkaz. (i) Je tvrzení známé jako Pospíšilova věta, důkaz lze najít v [1].
(ii) Pro libovolnou nekonečnou $A \subseteq \omega$ platí, že triviální ultrafiltr generovaný libovolným prvkem z A leží v A^*. Druhá část tvrzení je zřejmá.
(iii) Je známý fakt, důkaz se nachází například v [10]. □

Teď můžeme přikročit k oněm větám o $\beta\omega \setminus \omega$, které plynou z vět o skoro disjunktním zjemnění. Odteď se pohybujeme pouze v $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$.

Definice 5.2. Nechť je κ kardinální číslo. Množinu $P \subset \omega^*$ nazveme κ-množinou, pokud v ω^* existuje κ po dvou disjunktních otevřených množin tak, že P náleží do uzávěru každé z nich.

Tvrzení 5.3. Každý bod podprostoru ω^*, tedy každý uniformní ultrafiltr, je 2^ω-bodem.

Důkaz. Tvrzení plyne z existence skoro disjunktního zjemnění pro libovolný uniformní ultrafiltr $\mathcal{F}$. Zafixujme si tedy nějaký uniformní ultrafiltr $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$ a také jeho skoro disjunktní zjemnění $\{\phi(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Každou $\phi(F)$ můžeme rozdělit na 2^ω skoro disjunktních množin, tedy $\phi(F) = \bigcup\{\phi(F)_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$. Dále položme $U_\alpha = \bigcup\{(\phi(F)_\alpha)^* : F \in \mathcal{F}\}$. Množiny $(U_\alpha : \alpha \in 2^\omega)$ jsou otevřené a disjunktní - pokud by pro $\alpha \neq \beta$ existoval společný ultrafiltr ležící jak v U_α, tak v U_β, pak by tento ultrafiltr přišel do obou z množin s nějakou $\phi(F_1)_\alpha$ a $\phi(F_2)_\beta$. Tyto množiny jsou ale skoro disjunktní, jeden ultrafiltr tedy nemůže obsahovat obě. Zbývá ověřit, že $\mathcal{F}$ leží v každé $\overline{U_\alpha}$. K tomu postačí ukázat, že $\mathcal{F}$ rozšiřuje každý centrovaný systém $\bigcap U_\alpha$. Kdyby nerozšiřoval, tak existuje $F \in \mathcal{F}$, že $\omega \setminus F$ leží v $\bigcap U_\alpha$. To je ale spor, protože $\omega \setminus F$ nemohou obsahovat ty ultrafiltry, které přišly do U_α s množinou $\phi(F)_\alpha$. □

Z druhé a třetí kapitoly víme, že za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$ platí, že pro každý hustý ideál I existuje skoro disjunktní zjemnění $[\omega]^\omega \setminus I$. Předpokládejme tedy, že to platí (například za hypotézy kontinua). Díky tomu můžeme zformulovat obecnější verzi předchozího tvrzení.

Tvrzení 5.4. Každá řídká množina v prostoru ω^* je 2^ω množina.

Důkaz. Nechť je tedy T nějaká řídká množina. Z definice řídkosti existuje hustý ideál $I = \{M \in [\omega]^\omega : M^* \cap T = \emptyset\}$. Soubor $[\omega]^\omega \setminus I$ má podle předpokladu skoro disjunktní zjemnění. Stejně jako v předchozím tvrzení definujme množiny $U_\alpha : \alpha \in \kappa$, kde κ je velikost množiny $[\omega]^\omega \setminus I$, tedy 2^ω. U_α^* jsou otevřené a $T \subseteq \overline{U_\alpha}$ se ukáže stejně jako výše. □

V úplné obecnosti lze tvrzení o 2^ω-množinách zformulovat takto:

Tvrzení 5.5. Pro podmnožinu $T \subseteq \omega^*$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) Množina T je 2^ω-množina.

(ii) Soubor $\mathcal{M} = \{M \subseteq \omega : M^* \cap T \neq \emptyset\}$ má skoro disjunktní zjemnění.

Důkaz. $(i) \to (ii)$: Nechť je tedy $\mathcal{V}$ soubor 2^ω po dvou disjunktních otevřených množin ω^*, že T leží v uzávěru každé z nich. Množina $\mathcal{M}$ je velká nejvýše 2^ω, takže každé $M \in \mathcal{M}$ můžeme přiřadit $V(M) \in \mathcal{V}$ tak, že $V(M) \neq V(N)$ pro $N \neq M$ z $\mathcal{M}$. Množina $M^* \cap V$ je otevřená a neprázdná, to plyne z neprázdnosti $M^* \cap T$ a z inkluze $T \subseteq \overline{V}$. Díky tomu lze v každé $M \cap V(M)$ najít bázovou otevřenou $A(M)^*$, které odpovídá nekonečná podmnožina $A(M) \subseteq M$. Soubor $\{A(M) : M \in \mathcal{M}\}$ je zjemněním $\mathcal{M}$ a je skoro disjunktní, protože každé dva jeho prvky $A(M), A(N)$ jsou pod disjunktními otevřenými množinami $V(M), V(N)$. Opačná implikace se dokáže stejně jako její speciální případ v předchozím tvrzení. $\square$

6. Závěr

Za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}$ se podařilo transfinitní indukcí přes 2^ω zkonstruovat úplně separabilní MAD systém. Konstrukce se opírala a zesílenou charakteristiku čísla $\mathfrak{s}$ a o „štěpící strom", který sestával z jistých posloupností, které určovaly, kde se rozštěpila nějaká velká množina. V konstrukci byl uvedený předpoklad potřeba k udržení možnosti rozšíření stávajícího systému o další skoro disjunktní množinu. Tento předpoklad nemusí být splněn, jak dokázal Shelah konstrukcí modelu ZFC, kde platí $\mathfrak{a} < \mathfrak{s}$ - viz [3]. V takovém případě by snad šlo vybírat posloupnosti rafinovaněji, i když se to dosud neobešlo bez jiných dodatečných předpokladů, viz [8], kde je situace $\mathfrak{a} < \mathfrak{s}$ řešená pomocí dodatečných předpokladů čerpajících ze Shelahovy pcf teorie. Jeho výsledkem je, že úplně separabilní MAD systém existuje za předpokladu $2^\omega < \aleph_\omega$.

Literatura

[1] Balcar Bohuslav, Štěpánek Petr. *Teorie množin.* 1. vydání. Praha:Nakladatelství Československé akademie věd, 1986. 416 s. ISBN 1439-21-022-86.

[2] Balcar Bohuslav, Vojtáš Peter. *Almost disjoint refinement of families of subsets of N*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 73, number 3, 1980. ISSN 0002-9939

[3] Bonnet Robert, Monk J. *Handbook of Boolean algebras.* Amsterdam: North-Holland, 1989, xix, s. 315-7160. ISBN 0-444-87152-7.

[4] Engelking Ryszard. *General topology.* Revised and completed edition. Berlin: Heldermann, 1989. Sigma series in pure mathematics: vol. 6. ISBN 3-88538-006-4.

[5] Erdős Paul, Shelah Saharon. *Separability properties of almost disjoint families of sets*, Israel journal of mathematics, 12, number 2, 1972. ISSN 0021-2172

[6] Hechler Stephen. *Classifying almost-disjoint families with applications to* $\beta N \setminus N$, Israel journal of mathematics, 12, 1971. ISSN 0021-2172

[7] Mildenberger Heike, Raghavan Dilip, Steprans Juris. *Splitting families and complete separability*, preprint, 1204.1810, 2012.

[8] Shelah Saharon. *MAD families and SANE player*, arXiv:0904.0816, 2009.

[9] Simon Petr. *A note on almost disjoint refinement*, Acta Univ. Carolinae - Math. et Phys, 37, 1996.

[10] Wohofsky Wolfgang. *On the existence of p-points and other ultrafilters in the Stone-Ćech-compactification of N.* Diploma thesis, Vienna university of technology, 2008. Vedoucí diplomové práce Ao.Univ.Prof. Martin Goldstern