

Garik Dohnal: Skoro disjunktní zjemnění

Klasické tvrzení (Karl Menger, 1928) říká, že pro spočetný systém spočetných nekonečných množin  $\{A_n : n \in \omega\}$  existuje systém  $\{D_n : n \in \omega\}$  tak, že pro každé  $n$  je  $D_n \subseteq A_n$ , množina  $D_n$  je nekonečná a dvě různé množiny  $D_n, D_m$  jsou disjunktní. Soubor  $\{D_n : n \in \omega\}$  se nazývá *disjunktním zjemněním* souboru  $\{A_n : n \in \omega\}$ . Pokud uvažujeme pouze množiny přirozených čísel, je zřejmé, že tento výsledek nelze zesílit. Můžeme však disjunktnost nahradit skoro disjunktností: Dvě nekonečné množiny  $A, B$  jsou skoro disjunktní, pokud jejich průnik je konečný. Nyní se samozřejmě nabízí otázka: Které systémy nekonečných podmnožin přirozených čísel mají skoro disjunktní zjemnění? Kladnou odpověď lze dostat například pro systém mohutnosti  $\omega_1$  nebo pro ultrafiltr. Mez možností je dána následujícím faktem: Pro nekonečný maximální skoro disjunktní systém řekneme, že podmnožina přirozených čísel je vůči němu *velká*, pokud protíná v nekonečné množině nekonečně mnoho prvků daného maximálního skoro disjunktního systému. Má-li soubor  $\mathcal{A}$  skoro disjunktní zjemnění, pak existuje maximální skoro disjunktní systém, že všechny prvky souboru  $\mathcal{A}$  jsou vůči němu velké. Toto pozorování dalo vznik problému (Erdős-Shelah, 1972), zda existuje maximální skoro disjunktní systém, který je skoro disjunktním zjemněním souboru všech množin vůči němu velkých. Což je centrální téma předkládané bakalářské disertace.

Problém má kladnou odpověď za mnoha různých předpokladů o teorii množin. Roku 2009 dal řešení Saharon Shelah za nejslabších předpokladů dosud uvažovaných. Článek však byl napsán tak komplikovaně, že bylo žádoucí, aby byl důkaz presentován ve srozumitelnější podobě, a současně, aby byla ukázána souvislost s dalším, úzce příbuzným problémem o maximálních skoro disjunktních systémech. Oboje pan Dohnal dokonale zvládl. Bohužel, od zadání práce do jejího odevzdání uplynuly dva roky a mezitím se o totéž s úspěchem pokusili i jiní matematici. Protože nyní už práce musela být nutně kompilační, pan Dohnal rozšířil téma tak, aby objasnil i vzájemné vztahy mezi jednotlivými kardinálními invarianty týkajícími se problému, a aby dal také topologickou interpretaci výsledků. Všechno perfektně zvládl.

**Závěr.** Předložená bakalářská práce svědčí o tom, že pan Garik Dohnal kvalitně zvládl zvolenou problematiku, prokázal jak schopnost samostatné práce s literaturou, tak schopnost podat srozumitelný a logicky bezchybný výklad. Doporučuji tuto diplomovou práci klasifikovat stupněm

V Praze, 11. června 2013

