

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Skoro disjunktní zjemnění

Autor: Garik Dohnal

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce pojednává o existenci různých skoro disjunktních systémů nekonečných podmnožin přirozených čísel. Jedná se o náročnou oblast blízkou teorii množin a množinové kombinatorice. Na konci práce je uvedena i aplikace výsledků pro topologické prostory.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce je na bakalářskou práci náročné a ze sepsání lze poznat, že autor tématu nejen porozuměl, ale byl i schopen v něm pracovat. Zadání práce bylo splněno.

Vlastní příspěvek. Tady se dostávám k nejasným odpovědím. Nedovedu odpovědět na otázku, co je v práci vlastním příspěvkem autora - o tom viz dále.

Matematickou úroveň tu lze posuzovat jednak z hlediska obtížnosti tématu (s čímž se autor vyrovnal dobře) a z hlediska zpracování. Z tohoto druhého hlediska je výsledek dost špatný.

Práce se zdroji také není na úrovni, na které by měla být. Autor u výsledků neuvádí, zda jsou známé nebo nové, jen zřídka uvádí citace. Je tu hodně známých výsledků (a nikoli všeobecně známých), které jsou prezentovány bez citace.

Formální úprava. Při prvním pohledu a letmém čtení se jeví práce jako dobře čitelná a formálně pěkná. Při podrobnějším čtení je však snadné narazit na nepřesné formulace a zapomenuté předpoklady.

ZÁVĚR

Z hlediska odborného zvládnutí tématu považuji práci za velmi pěknou. Z hlediska zpracování však za špatnou. V takovém případě je těžké rozhodnout o uznání práce. Nicméně, spíše se kloním k tomu, aby tato práce byla jako bakalářská uznána.

PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

V následujícím znamená např. 2₅ druhá strana, pátý řádek zdola, podobně 2⁵ pátý řádek shora.

Práce obsahuje celkem málo přepisů a ty nehrají žádnou roli pro porozumění textu, např.

1. 2⁹ má být mezera za ZFC
2. 6¹⁶ bez mezery výraz $\omega\omega$
3. 21³ místo “a zesílenou” má být “o zesílenou”

Následující připomínky uvádějí některé nesprávné formulace nebo formulace, kterým oponent neporozuměl, dále některé chybějící předpoklady nebo nejasnosti v definicích. Jsou tu i návrhy na lepší formulace.

Kapitolu 4 jsem z nedostatku času jen zběžně přečetl, aniž jsem zkoumal správnost postupů a formulací. K této části proto nejsou připomínky.

Ve velké většině následujících připomínek není složité špatné formulace opravit a nežádám na autorovi, aby se k nim vyjadřoval. Je samozřejmě možné, že někde jsem v připomínkách udělal chybu já a pak je vhodné, aby mi to autor sdělil. Chtěl bych, aby se autor vyjádřil k následujícím bodům: 4, 5, 6, 17, 24, 27, 28, 30, 34.

1. 2₁₈ Definice ω jako množina přirozených čísel není přesná, protože v různých předmětech (i na MFF) se číslo 0 někdy zahrnuje a někdy nezahrnuje mezi přirozená čísla. Bylo lepší definovat ω jako množinu konečných ordinálních nebo kardinálních čísel.
2. 2₁₄ Definice $[X]^\omega$ je popletená a nesmyslná.
3. 3₂₀ Je vhodnější připomenout, co je selektor. Ale nutné to samozřejmě není.
4. 3 Na této straně začínají Tvzení v kapitole 2, která jsou snad vesměs známá. Nevšiml jsem si, že by tu bylo někde napsáno, odkud jsou převzaty anebo zda důkazy jsou jiné, než dosud publikované. To se týká i dalších kapitol 3,4 a 5. Je nutné dodat seznam jednotlivých tvrzení s komentářem, zda je to výsledek vlastní nebo známý (s citací) a v tomto případě zda je postup důkazu vlastní nebo převzatý.
5. 4₉ Definice $B_{\alpha+1}$ není hezky napsaná. Navíc tento důkaz Tvzení 2.4 není zcela dokončen ve smyslu, že se požaduje dokončení čtenářem. I když to není těžké, přece jen je nutné udělat možná složitější krok než některé lehké kroky na jiných místech.
6. 5¹ Formulace v důkazu Tvzení 2.5 jsou popletené, možná chybí nějaké závorky. Neměli bychom psát do této práce, že soubor je menší než nějaký kardinál, ale že jeho mohutnost je menší než onen kardinál. Opět je tu nechán zbytek důkazu čtenáři a tentokrát mi není jasné, zda závěr autora opravdu platí (možná není dobře definice funkcí f_A).
7. 5¹⁵ Chybí předpoklad, že množina funkcí \mathcal{F} je neomezená.
8. 5₁₃ Pro libovolně zvolenou funkci g nemusí být G rozklad.
9. 5 Většinou se rozkladem množiny míní soustava disjunktích množin, které onu množinu pokrývá. Ta poslední podmínka není autorem požadována, ale někde se zdá, že ji vyžaduje.
10. 6¹³ Autor tu volí štěpící systém, který má určitou vlastnost. Ale za předpokladu $\mathfrak{s} < \mathfrak{s}_{\omega,\omega}$ každý štěpící systém mohutnosti \mathfrak{s} onu vlastnost má.
11. 6¹⁴ Je tu použito lemma o disjunktím zjemnění, které nemusí být každému čtenáři známé. Nicméně, v práci je dále uvedeno jako 3.1 a stačilo tedy dát na něj odkaz.
12. 6¹⁸ Autor tu ze dvou možností volí jednu, nicméně o pár řádek dále pracuje s oběma možnostmi.
13. 6₆ Co je konečný rozklad? Rozklad na konečně mnoho množin - tak bych to chápal já. Nicméně, asi to tu znamená rozklad na konečné množiny.
14. 7⁸ Funkce m musí být rostoucí, jinak se nedostane rozklad.
15. 7¹⁴ Není pravda, že každá množina z blok-štěpícího systému musí být koinfinitní. Tady měl autor říci, že lze v systému vynechat kofinitní množiny a pracovat jen s koinfinitními.
16. 7²⁰ Chybí předpoklad, že $g(0) > 0$, jinak další úvaha neplatí.

17. 7_{14} Je jasné, že můžeme vzít \mathcal{I} tak, že platí daný předpoklad?
18. 9_{20} Formulace v důkazu není dobrá. Autor definuje \mathcal{A} , ale je nutné si domyslet, že má za prvky množiny A_f .
19. 9_{16} Po definici husté množiny by bylo vhodné podotknout, že z takové množiny lze vybrat MAD (pokud je hustá množina nekonečná). To je použito dále bez objasnění.
20. 10^4 Soustava $\{S \cap M\}$ nemusí být hustá proto, že může obsahovat konečnou množinu (husté soustavy se podle definice musí skládat z nekonečných množin). Autor by měl správně napsat, že $\{S \cap M : S \in \mathcal{S}, |S \cap M| = \omega\}$ není hustá.
21. 10^6 Není zcela jasné, jaké množiny má na mysli autor v “soubor takovýchto množin” a je lepší napsat “soubor takovýchto množin A ”.
22. 10_4 Tento odstaveček není jasný. Věta “Malé množiny jsou právě prvky nějakého ideálu” do této chvíle nemá v textu opodstatnění. I další věta odstavce je divná proto, že používá “množiny \mathcal{C} ” a není jasné, co to \mathcal{C} vůbec je.
23. 11^6 Autor zapomněl označit MAD systém a měl napsat “rozšířme tento AD systém na MAD systém \mathcal{M} ” (tj. doplnit “ \mathcal{M} ”). Konec tohoto důkazu není jasný. Postup budí zdání, že se ze dvou možností vždy bere jedna pro všechna i , ale je nutné pro každé i volit jednu z možností zvlášť.
24. 11^{16} Tvrzení “a to zaručí ...” mi není jasné.
25. 11^{21} V Tvrzení 3.6 by mělo být uvedeno, že $\mathcal{C} \subset [\omega]^\omega$. V důkazu se navíc používá, že $|\mathcal{C}| = 2^\omega$, nebo by mělo být řečeno, že \mathcal{C} očíslováme s opakováním. Ale důkaz platí pro $|\mathcal{C}| \leq \mathfrak{a}$ a není nutné předpokládat, že $\mathfrak{a} = 2^\omega$.
26. 11^{11} V Definici 3.4 je několik nejasností. Místo “nelze zapsat jako konečné sjednocení prvků z \mathcal{A} ” by asi mělo být “nelze pokrýt konečně mnoha prvky z \mathcal{A} ”. Dále nelze napsat “obě definice splývají”, ale např. “velké množiny pro \mathcal{A} a pro $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ splývají”.
27. 12^{10} Zjemnění se asi míní zjemnění systému \mathcal{A} , ale není to jasné.
28. 12^{17-18} Není jasné, o jakou množinu se jedná v “tak ji bereme jako prázdnou”. Z předchozí věty by vyplývalo, že je to $M(X)$, ale ta je daná a je nekonečná. Zápis systému $\{M : M \neq M(X)\}$ pro žádné X je gramaticky matoucí.
29. 12^{23} V druhé části Tvrzení 3.7 je nutné znovu opakovat o jaký ideál jde, tj. napsat “pro každý hustý ideál \mathcal{I} existuje...”.
30. 12_{18} Domnívám se, že je nutné napsat místo “tak každou svojí velkou množinu zjemňuje 2^ω prvky” formulaci “tak podle 3.3(ii) existuje MAD, který každou svojí velkou množinu zjemňuje 2^ω prvky”.
31. 12_{14} Formulace “jsou mimo jiné $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$ ” by se měla doplnit na “jsou mimo jiné množiny z $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$ ”.
32. 18_{15} Chápe-li čtenář množinu P jako množinu bodů, pak $\bigcap P$ je něco jiného než když chápe P jako množinu ultrafiltrů. V následujícím důkazu se dokazuje, že tento průnik je centrovaný - je ale triviální, že průnik filtrů na dané množině je opět filtr. Navíc je v důkazu chyba, protože se nepředpokládá, že se pracuje s volnými ultrafiltry a pak průnik na 18_{12} nemusí být nekonečný.

33. 19₂₁ Formulace "Množiny $\{U_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$ jsou otevřené a..." by správně měla být "Množiny z $\{U_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$ jsou otevřené v ω^* a..."
34. 19₉ Tvzení 5.4 je napsáno bez předpokladu. Nicméně v předchozím odstavci se píše cosi o nějakých předpokladech. Je to předpoklad i pro Tvzení? Je-li tomu tak, musí být tento předpoklad v Tvzení uveden. Navíc není jasné, o jaký předpoklad se jedná. Začátek odstavce říká, že za předpokladu A platí B a pokračuje se "Předpokládejme tedy, že to platí" Ale co? A nebo B? Co tedy musí být jako předpoklad napsáno v Tvzení 5.4?
35. 20⁵ Nejasná formulace "Množina $M^* \cap V$ je otevřená a neprázdná, to plyne z ..." by měla být napsána např. jako "Množina $M^* \cap V$ je otevřená v ω^* a neprázdná pro každé $V \in \mathcal{V}$, což plyne z ..."

21.6.2013

Miroslav Hušek
KMA MFF UK