Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petra Janouchová

Střední absolutní odchylka jako míra rizika

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Václav Kozmík
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2013

Chtěla bych na tomto místě poděkovat především vedoucímu bakalářské práce Mgr. Václavu Kozmíkovi za cenné rady, trpělivost a vstřícný přístup při vedení mé práce. Dále bych ráda poděkovala Prof. RNDr. Jitce Dupačové, DrSc., konzultantce této bakalářské práce, za věcné připomínky a odborné rady.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Střední absolutní odchylka jako míra rizika

Autor: Petra Janouchová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Václav Kozmík

Abstrakt: Bakalářská práce se věnuje střední absolutní odchylce jako míře rizika. Zkoumá její vlastnosti a také použití při problému optimální volby portfolia. V práci je popsán Markowitzův model a je ukázán jeho vztah k lineárnímu modelu pro optimální volbu portfolia se střední absolutní odchylkou jako minimalizovanou mírou rizika. Pro tento model je provedena studie citlivosti výsledků na vstupní data. Jako vstupní scénáře jsou použity historické relativní výnosnosti akcií z pražské burzy. V závěru práce je hodnocena stabilita modelu, která je testována na vybraných podmnožinách vstupních scénářů.

Klíčová slova: střední absolutní odchylka, scénáře, optimální volba portfolia, Markowitzův model

Title: Mean absolute deviation risk measure

Author: Petra Janouchová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Václav Kozmík

Abstract: This bachelor thesis considers the mean absolute deviation as a risk measure. It deals with its properties and its application in the case of the asset allocation problem. The Markowitz model is described and we demonstrated the relation between our model with mean absolute deviation and the Markowitz model. We study the influence of changes in the input data for the linear model with mean absolute deviation. The primary data used in this thesis are historical relative rates of profit of shares in the Prague Stock Exchange. The testing is done on the selected subsets of scenarios from primary data and the stability is discussed in conclusion.

Keywords: mean absolute deviation, scenarios, portfolio selection, Markowitz model

Obsah

Úvod

Na akciovém trhu se obchoduje za účelem zisku. K realizaci zisku je však třeba přijmout také riziko ztráty. Zisk a riziko jsou korelované a platí, že čím vyšší je možný zisk, tím se zároveň zvyšuje riziko, že investice bude ztrátová. Investorův zájem je sestavit své portfolio akcií tak, aby přinášelo co nejvyšší zisk a současně bylo minimalizováno riziko jeho ztráty. Základním principem snížení rizika celého portfolia je jeho diverzifikace. Na principu diverzifikace je založeno více modelů, jedním z nich je Markowitzův model.

První kapitola se zabývá střední absolutní odchylkou jako mírou rizika. Popisuje některé její vlastnosti a zjišťuje, zda je střední absolutní odchylka koherentní mírou rizika.

V druhé kapitole je popsán Markowitzův model pro optimální volbu portfolia. Model hledá takové portfolio, které mimimalizuje riziko za určitých požadavků na jednotlivé parametry a výnos. Markowitzův model používá směrodatnou odchylku jako míru rizika.

Ve třetí kapitole je ukázán vztah střední absolutní odchylky k Markowitzově modelu a popsán lineární model s použitím střední absolutní odchylky jako míry rizika. Za předpokladu normálního rozdělení je zde dokázáno, že lineární model odvozený z Markowitzova modelu řeší ekvivalentní úlohu minimalizace rizika. Dále uvádí optimalizační problém volby portfolia s diskrétními daty.

Čtvrtá kapitola se zabývá lineárním modelem se střední absolutní odchylkou jako mírou rizika a testováním jeho citlivosti na vstupní data. Základem pro testování jsou reálná data z pražské burzy. Simuluje se zde různý průběh změn výnosností jednotlivých aktiv. Vlastní testování proběhlo v optimalizačním programu GAMS. K ostatním výpočtům a generování dat byl použit software Wolfram Mathematica.

V závěru jsou jsou shrnuty výsledky a hodnotí se stabilita modelu.

Kapitola 1

Vlastnosti míry rizika

K měření rizika se používají různé míry. Každá míra má své přednosti a nedostatky a poskytuje různou informaci o trhu a informaci o rizikovosti investice. Artzner a kol. (1999) se ve svém článku zabývá vlastnostmi, které by měla vhodná míra rizika splňovat. V této kapitole, stejně jako v celé této práci, budou náhodné veličiny vyjadřovat zisk a nikoli ztrátu.

Definice 1.1. Nechť Ω je prostor všech elementárních jevů, na kterém je dána σ-algebra $\mathcal{A}$ jejích podmnožin. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ je pravděpodobnostní prostor a X a Y jsou náhodné veličiny na tomto pravděpodobnostním prostoru. Nechť $w : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ je míra rizika. Míra rizika w se nazývá *koherentní*, má-li následující čtyři vlastnosti:

(Translační invariance)

$$\text{Pro každou náhodnou veličinu } X \text{ a } \alpha \in \mathbb{R} \text{ platí: } w(X + \alpha) = w(X) - \alpha \tag{1.1}$$

(Subadditivita)

$$\text{Pro každé dvě náhodné veličiny } X \text{ a } Y \text{ platí: } w(X + Y) \leq w(X) + w(Y) \tag{1.2}$$

(Pozitivní homogenita)

$$\text{Pro každé } \lambda \geq 0 \text{ a náhodnou veličinu } X \text{ platí: } w(\lambda X) = \lambda w(X) \tag{1.3}$$

(Monotonie)

$$\text{Pro každé dvě náhodné veličiny } X \text{ a } Y,\ X \leq Y \text{ platí: } w(X) \geq w(Y) \tag{1.4}$$

Nechť mírou rizika w je střední absolutní odchylka, tedy $w(X) = E|X - EX|$ pro náhodnou veličinu X. Podívejme se na některé její vlastnosti. Nechť $\alpha \neq 0$. Podobně jako rozptyl, střední absolutní odchylka nesplňuje podmínku translační invariance.

$$w(X + \alpha) = E|(X + \alpha) - E[X + \alpha]| = E|X - EX + \alpha - E\alpha|$$

$$= E|X - EX| = w(X) \neq w(X) - \alpha$$

Vlastnost subadditivity lze jednoduše ukázat pomocí trojúhelníkové nerovnosti:

$$w(X+Y) = E|X+Y-E[X+Y]| = E|(X-EX)+(Y-EY)| \leq$$

$$\leq E|X-EX| + E|Y-EY| = w(X) + w(Y)$$

Střední absolutní odchylka je pozitivně homogenní. Pro $\lambda \geq 0$ platí:

$$w(\lambda X) = E|\lambda X - E\lambda X| = E|\lambda(X-EX)| = \lambda E|X-EX| = \lambda w(X)$$

Nechť X je náhodná veličina nabývající hodnot $X \in \{0,1\}$, pro kterou platí: $P(X=0) = \frac{1}{2}$ a $P(X=1) = \frac{1}{2}$. Y je náhodná veličina s hodnotami $Y \in \{2,4\}$, pro kterou platí: $P(Y=2) = \frac{1}{2}$ a $P(Y=4) = \frac{1}{2}$. Vidíme tedy, že pro všechny hodnoty X a Yplatí, že $X \leq Y$. Spočteme si střední absolutní odchylky obou veličin. Střední hodnoty jsou $EX = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$ a $EY = \frac{1}{2}(2+4) = 3$

$$E|X-EX| = \frac{1}{2}(|0-\frac{1}{2}| + |1-\frac{1}{2}|) = \frac{1}{2}$$
$$E|Y-EY| = \frac{1}{2}(|2-3| + |4-3|) = 1$$

Platí, že $w(X) \leq w(Y)$, a zároveň $X \leq Y$. Střední absolutní odchylka tedy nesplňuje podmínku monotonie (1.4).

Míra rizika konstruovaná jako střední absolutní odchylka splňuje pouze dvě z výše uvedených vlastností, subadditivitu a pozitivní homogenitu. Podle definice (1.1) není koherentní. Dnes se využívají k měření rizika převážně koherentní míry, jednou z nich je například CVaR *(Conditional Value-at-Risk)* viz Rockafellar a Uryasev (2000).

Kapitola 2

Markowitzův model

Základním modelem, ze kterého vychází tato práce je Markowitzův model. Markowitzův model je určen k optimální volbě portfolia akcií při obchodování. Principem je diverzifikace portfolia. Harry M. Markowitz zavedl tento model poprvé v článku Markowitz (1952) a Markowitz (1959). Model je považován za základní kámen moderní teorie portfolia. Je na něm založen například používaný model CAPM *(Capital asset pricing model)*, v němž se uvažuje kromě akcií navíc jedno aktivum, které je bezrizikové, ale s kladným výnosem. Očekává se, že investor chce vytvořit portfolio akcií s cílem dosáhnout co největšího výnosu a co nejmenšího rizika ztráty. Jako ukazatel výnosnosti je v modelu použita očekávaná hodnota výnosnosti a jako míra rizika směrodatná odchylka výnosnosti.

Model je platný za několika předpokladů, které však v reálné situaci nebývají splněny. Investoři se chovají racionálně, tzn., preferují portfolio s vyšším ziskem při stejném riziku a preferují portfolio s menším rizikem při stejném výnosu. Platí dokonalá informovanost, investoři mají homogenní očekávání. Všechny akcie jsou obchodovatelné a nekonečně dělitelné. Neexistují žádné transakční náklady a daně. Investice jsou v jednom časovém období, všichni investoři nakoupí akcie v jednom okamžiku na stejně dlouhou dobu. Žádný investor nemůže zásadním způsobem ovlivnit výnos aktiv.

2.1 Značení

Značení modelu převezmeme z článku Konno a Yamazaki (1991). Označíme si náhodnou veličinu R_j jako výnos aktiva $j = 1, \ldots, n$ a vektor $\boldsymbol{R} = (R_1, \ldots, R_n)$ jako vektor výnosností. Hledáme vektor vah $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, který vyjadřuje, kolik se má investovat do aktiv $j = 1, \ldots, n$.

Předpokládáme, že $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Tedy není povolen tzv. krátký prodej (*short sales*), kdy investor může prodat akcie, které sám nevlastní. V případě, že by váhy x_j mohly být záporné, lze portfolio zajistit proti riziku poklesu cen aktiv. Nevýhodou však potom je, že portfolio může být neomezeně ztrátové. Pokud by investor prodal množství m akcií v hodnotě 1 určitého aktiva a hodnota tohoto aktiva v daném období k-krát vzroste, musí akcie zpět odkoupit za částku k-násobek částky m. Přitom růst hodnoty aktiva není omezen, tedy i ztráta může být nekonečná.

Investované částky x_j jsou omezené shora parametrem m_j, jenž představuje maximální možnou částku, kterou lze do daného aktiva investovat. M_0 značí částku, kterou investor disponuje, resp. kterou hodlá investovat. Platí, že

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0. \tag{2.1}$$

Je možné uvažovat i situaci, kdy investor nemusí investovat celou svou disponovanou částku. Tedy situaci, kdy platí: $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq M_0$. Pro náš zjednodušený model však budeme uvažovat pouze rovnost.

Výnosem portfolia je očekáváná hodnota součtu náhodných veličin výnosu aktiv vynásobených částkou, která do jednotlivých aktiv byla investována.

$$r(\boldsymbol{x}) = E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E[R_j] x_j \tag{2.2}$$

Na portfolio je kladen požadavek minimálního přijatelného výnosu. Parametr ρ nám udává, jakou návratnost celkové investice požadujeme. Pokud $r_j = E[R_j]$ je očekávaný výnos j-tého aktiva, v modelu se tato podmínka vyjádří:

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0 \tag{2.3}$$

Je zřejmé, že parametr ρ by měl být volen tak, aby platilo, $\rho \geq 0$. V opačném případě by portfolio nalezené Markowitzovým modelem mohlo být prodělečné. Zároveň je při volbě ρ třeba obezřetnosti, aby podmínka (2.3) byla splnitelná a množina přípustných portfolií nebyla prázdná.

Investor má zájem minimalizovat riziko ztráty. V Markowitzově modelu použijeme jako míru rizika, kterou minimalizujeme, směrodatnou odchylku.

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sqrt{E\left[\left\{\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right\}^2\right]} \tag{2.4}$$

Pro samotný model je třeba znát i varianční matici výnosností $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $\sigma_{ij} = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)], \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}$ značí kovarianci mezi výnosnostmi R_i a R_j.

2.2 Vlastní model

Markowitzův model můžeme chápat jako úlohu hledání optimálního portfolia

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j} \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ & 0 \leq x_j \leq m_j, \qquad j = 1 \ldots n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tento problém je úlohou nelineárního programování. Varianční matice Σ je pozitivně semidefinitní, viz Anděl (2011), kapitola 2. A tedy platí, že

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}^T\Sigma\,\boldsymbol{x} \geq 0.$$

Odmocnina na definičním oboru účelové funkce je funkce prostá a ryze monotónní, a tudíž problém minimalizace účelové funkce bez odmocniny je ekvivalentní problému minimalizace účelové funkce s odmocninou. V obou případech získáme stejné optimální řešení a model (2.6) lze už řešit jako úloha kvadratického programování.

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_jx_j \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ & 0 \leq x_j \leq m_j, \qquad j = 1\ldots n \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3 Scénáře

Scénáře můžeme chápat jako realizace z nějakého pravděpodobnostního rozdělení nebo diskrétní data, které nějaké pravděpodobnostní rozdělení aproximují. Více lze najít v knize Dupačová a kol. (2002). V našem případě se jedná o historické údaje o výnosech aktiv, ze kterých můžeme numericky odhadnout očekávávaný výnos akcií a varianční matici výnosností.

Očekáváný výnos určitého aktiva se zpravidla získá jako aritmetický průměr dat. S varianční maticí už je to obtížnější. Ze symetrie variační matice je vidět, že je třeba najít $n(n+1)/2$ koeficientů σ_{ij}. K odhadům rozptylů a kovariancí se používají například faktorové modely. Algoritmus získání varianční matice včetně zahrnutí transakčních nákladů uvedl Perold (1984).

Faktorový model je také objasněn v Dupačová (1996). Faktor se tu chápe jako rozdíl výnosnosti tržního portfolia ρ_M (portfolio složené ze všech aktiv na trhu, všechny aktiva mají stejné váhy) a výnosnosti bezrizikového aktiva r_0. Tedy $F = \rho_M - r_0$. Pro jednotlivé výnosnosti aktiv pak platí:

$$\rho_j = \alpha_j + \beta_jF + \epsilon_j$$

Koeficienty α_j a β_j se odhadují z dat, přičemž

$$\beta_j = \frac{\mathrm{cov}(\rho_j, \rho_M)}{\sigma_M^2},$$

kde ρ_j je výnosnost aktiva j a σ_M^2 je rozptyl tržního portfolia. Koeficient α_j se označuje jako míra nerovnovážnosti. Pokud je trh rovnovážný, budou $\alpha_j = 0$.

Někdy je výhodnější uvažovat jinou formulaci modelu pro nalezení optimálního portfolia, a sice maximalizovat zisk a zároveň minimalizovat riziko.

$$
\begin{aligned}
\text{maximalizovat} \quad & \lambda \sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\
& 0 \leq x_j \leq m_j, \qquad j = 1 \dots n
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Parametr $\lambda \geq 0$ vyjadřuje míru averze investora k riziku. Čím větší je λ, tím více je investor ochoten riskovat. Oproti úloze (2.5) hledání optimálního portfolia je podmínka (2.3) zakomponovaná do účelové funkce a rozšiřuje se tím množina přípustných řešení. V některých situacích, kdy tato podmínka není splněna, tedy pokud nelze se zadanými výnosnostmi dosáhnout minimálního požadovaného výnosu, model (2.7) stále ještě může najít přípustné řešení.

V reálné situaci je potřeba zohlednit transakční náklady při obchodování akcií v modelu portfolia. Pokud jsou poplatky za nákup akcií určité společnosti fixní, nehledě na množství akcií konkrétní společnosti, nevyplatí se nakupovat tolik druhů akcií. Portfolio je pak méně diverzifikované a riziko za předpokladu existence transakčních nákladů bývá větší než bez tohoto předpokladu. Jestliže jsou poplatky variabilní, lze je zahrnout do modelu násobkem vah $x_1, \dots, x_n$.

Výnosnosti nemusí být normálně ani symetricky rozdělené. Bylo by potřeba v modelu zohlednit ne jen první a druhý moment rozdělení, ale ideálně také šikmost. Z tohoto důvodu a také proto, že další předpoklady o trhu nejsou splněny, je interpretace výsledků Markowitzova modelu složitá.

Kapitola 3

Lineární model

V článku Konno a Yamazaki (1991) je ukázáno, že nelineární resp. kvadratický problém hledání optimálního portfolia (2.5) lze převést na podobný model, který je úlohou lineárního programování. Opět minimalizuje riziko za nejmenšího přijatelného výnosu daného investorem. Místo směrodatné odchylky jako míry rizika se použije střední absolutní odchylka, označme ji jako $w(\boldsymbol{x})$.

$$w(\boldsymbol{x}) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] \tag{3.1}$$

3.1 Linearizace modelu

Věta 3.1. *Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{R} = (R_1, \ldots, R_n)$ je n-rozměrně normálně rozdělený, $\boldsymbol{R} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ je vektor středních hodnot a $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je varianční matice. A nechť pro vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ je $w(\boldsymbol{x})$ směrodatná odchylka definovaná viz. (2.4) a $\sigma(\boldsymbol{x})$ střední absolutní odchylka definovaná viz (3.1). Potom platí, že*

$$w(\boldsymbol{x}) = \sqrt{2\pi}\sigma(\boldsymbol{x}).$$

Důkaz. Vektor $\boldsymbol{R}$ je n-rozměrně náhodně rozdělený, jestliže pro libovolný vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ platí, že $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{R} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{c}^T\Sigma\boldsymbol{c})$, viz kapitola 4, Anděl (2011). Dle předpokladů věty platí, že $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R} = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j$ má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$ a rozptylem $\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$. Směrodatná odchylka tedy vypadá takto:

$$w(\boldsymbol{x}) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right]$$

Označme $Y = Y(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{n} R_j x_j$. Potom Y má rozdělení $N(\mu(\boldsymbol{x}), \sigma^2(\boldsymbol{x}))$ a vektor $Z = Y - EY$ má rozdělení $\mathrm{N}(0, \sigma^2(\boldsymbol{x}))$.

$$w(\boldsymbol{x}) = E|Y - EY| = E|Z|$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\boldsymbol{x})} \exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2(\boldsymbol{x})}\} dz$$

$$= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x})} \int_{0}^{\infty} z \ \exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2(\boldsymbol{x})}\} dz$$

Při použití substituce $t = \frac{z^2}{2\sigma^2(\boldsymbol{x})}$ se získá

$$w(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \tfrac{1}{\sigma(\boldsymbol{x})} \sigma^2(\boldsymbol{x}) \int_0^\infty e^{-t} dt = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sigma(\boldsymbol{x}) [-e^{-t}]_0^\infty = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sigma(\boldsymbol{x})$$

❑

Věta ukazuje, že problém minimalizace směrodatné odchylky je ekvivalentní problému minimalizace střední absolutní odchylky, má-li vektor $\boldsymbol{R} = (R_1, \ldots, R_n)$ n-rozměrné normální rozdělení. V obou případech hodnotíme riziko. Naše míry rizika se liší jen o násobek konstantou $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Tedy, na základě této věty, můžeme úlohu (2.5) za předpokladu normálního rozdělení zapsat tímto způsobem :

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & \sqrt{\frac{2}{\pi}} w(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ & 0 \leq x_j \leq m_j, \qquad j = 1 \ldots n \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Vlastní model

Výše uvedeným postupem získáme postupně úlohu lineárního programování. Lineární model se střední absolutní odchylkou jako mírou rizika lze vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ & 0 \leq x_j \leq m_j, \qquad j = 1 \ldots n \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3 Scénáře

Model (3.3) předpokládá normálně rozdělené výnosnosti. Pokud však máme data, která nejsou normálně rozdělená, je vhodné převést model do podoby, ve které se již pracuje s konkrétními scénáři.

Předpokládejme, že máme k dispozici historická data o výnosech akcií $j = 1, \ldots, n$ z období $t = 1, \ldots, T$. Označme r_{jt} výnos akcie j za období t. Očekávanou výnosnost akcie j spočítáme jako aritmetický průměr dat.

$$r_j = E[R_j] = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{T} r_{jt}$$

Střední absolutní odchylku lze potom vyjádřit takto:

$$w(\boldsymbol{x}) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right]$$
$$= E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - \sum_{j=1}^{n} E[R_j] x_j\right|\right] = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right|\right]$$
$$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left|\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right| = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left|\sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j\right|$$

3.3.1 Linearizace absolutní hodnoty

Model chceme dále zjednodušit. Označme si $a_{jt} = r_{jt} - r_j$, $j = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$. Vycházíme z modelu s absolutní hodnotou:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j\right| \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ & 0 \leq x_j \leq m_j, \qquad j = 1 \ldots n \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pro snadnější numerické řešení je lepší pracovat s lineárním modelem, který získáme linearizací absolutní hodnoty. Problém minimalizace $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j\right|$ je ekvivalentní problému minimalizace y_t za podmínky, že $-y_t \leq \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \leq y_t$. Model (3.4) můžeme tedy převést na následující optimalizační problém, který už je úlohou lineárního programování.

$$
\begin{aligned}
\text{minimalizovat} \quad & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{n} y_t \\
\text{za podmínek} \quad & y_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \\
& y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \\
& \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0 \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\
& 0 \leq x_j \leq m_j, \qquad j = 1 \ldots n
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Kapitola 4

Testování citlivosti modelu na vstupní data

V této části zkoumáme citlivost modelu na vstupní data. Pro testování jsme použili GAMS *(The General Algebraic Modeling System)*, program pro matematické modelování a optimalizaci. V tomto programu se konkrétní problém zapisuje prostřednictvím syntaxe, která je velmi blízká matematickému vyjadřování.

4.1 Reálná Data

Reálná data použitá v lineárním modelu (3.5) se střední absolutní odchylkou jako mírou rizika pro optimální volbu portfolia jsou týdenní data z pražské akciové burzy s rozpočtením dividend do výnosů z období 9.11.2007 až 30.3.2012. Uvedené hodnoty v souboru data.xls jsou relativní výnosnosti akcií za 229 období celkem deseti společností: AAA Auto Group N.V., Central European Media Enterprises LTD., ČEZ a.s., Erste Group Bank AG, Komerční Banka a.s., Orco Property Group S.A., Pegas Nonwovens SA, Philip Morris ČR a.s., Telefónica Czech Republic a.s. a Unipetrol a.s..

V tabulce 4.1 jsou uvedeny střední hodnoty, rozptyl a koeficienty šikmosti a špičatosti pro všechny aktiva z dat. Každě symetrické rozdělení má nulovou šikmost, každé normální rozdělení má špičatost rovnu 3. V našich reálných výnos-

Akcie	Střední hodnota	Rozptyl	Šikmost	Špičatost
AAA	-0.203995	51.2859	3.63266	35.7467
CETV	-0.706612	99.0426	-0.0384643	6.96746
CEZ	-0.0634878	16.4648	-0.243513	11.9865
ERSTE	-0.167039	63.2405	-0.0308554	6.32168
KOMB	0.179753	29.4463	-0.20654	6.07573
ORCO	-1.00643	88.0708	-0.126529	7.33935
PEGAS	-0.0450222	15.8157	-1.67282	18.078
PHILL	0.349712	13.5167	0.110646	4.62975
TELE	0.0434868	7.08022	-0.894286	13.2887
UNI	-0.142925	25.6231	-0.225243	9.17743

Tabulka 4.1: Momenty výnosností reálných dat

ρ	Portfolio		
0.0	CEZ 1.000		
0.05	CEZ 0.850	KOMB 0.013	PHILL 0.136
0.10	CEZ 0.701	KOMB 0.027	PHILL 0.272
0.15	CEZ 0.551	KOMB 0.040	PHILL 0.408
0.20	CEZ 0.402	KOMB 0.054	PHILL 0.544
0.25	CEZ 0.252	KOMB 0.067	PHILL 0.680
0.30	CEZ 0.103	KOMB 0.081	PHILL 0.816

Tabulka 4.2: Výsledky modelu s reálnými vstupními daty

nostech přesahuje špičatost u všech aktiv tuto hodnotu. Čím větší je špičatost, tím více naměřených hodnot je blízko střední hodnoty. Z uvedených momentů můžeme usoudit, že data nejsou symetricky rozdělena ani normálně rozdělena. Nejvíce se normálnímu rozdělení blíží výnosnosti akcií společnosti Philip Morris. Tyto vlastnosti lze vyčíst i z histogramů uvedených v příloze B.

Při pohledu na střední hodnoty naměřených dat, je zřejmé, že v optimálním portfoliu bude mít podíl některá ze společností: Komerční Banka, Philipp Morris a Telefónica, jejichž střední hodnoty výnosností jsou kladné.

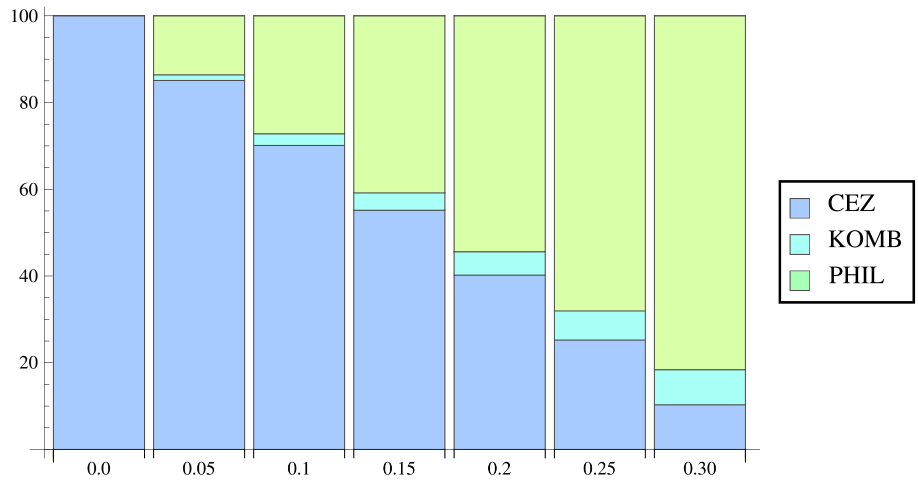
Pro výpočet modelu (3.5) v GAMS předpokládáme že investor má k dispozici částku 1. Volíme tedy $M_0 = 1$. Dále vynecháváme omezení vah x_j shora, volíme $m = \infty$. Z podmínky (2.1) a nezápornosti vah x_j je dáno, že $x_j \leq 1$. Znamená to, že x_j ukazuje procentuální poměr všech akcií j-té společnosti v portfoliu. Protože hodnota r_j ukazuje relativní pokles či zvýšení ceny akcie, stačí uvažovat $\rho \geq 0$. Kód modelu v programu GAMS je k nalezení v příloze C.

4.1.1 Výsledky s reálnými daty

V tabulce 4.2 jsou nalezená optimální portfolia pro minimální, investorem požadovanou, výnosnost celého portfolia $\rho = 0, \ldots, 0.30$. Pro $\rho \geq 0.35$ už neexistuje řešení splňující všechny podmínky. Jak je vidět na obrázku 4.1, procentuální závislost rozložení portfolia pro minimální přijatelnou hodnotu výnosu portfolia $\rho = 0.05, \ldots, 0.30$ je lineární. Portfolio je rozloženo mezi akcie ČEZ, Komerční Banka a Philip Morris. Zde se potvrdilo, že v optimálním portfoliu jsou akcie společností Philip Morris a Komerční Banka, u nichž byla střední hodnota nezáporná. Telefónika, u níž byla střední hodnota výnosností také nezáporná, však v nalezeném optimálním portfoliu není, místo ní se tu objevil ČEZ, který má zápornou střední hodnotu a zároveň i větší rozptyl. Portfolio tedy neovlivňují pouze první dva momenty, ale domníváme se, že také vzájemné kovariance mezi jednotlivými aktivy.

4.2 Výběr scénářů

V této podkapitole budeme několika způsoby vybírat scénáře z původních dat. Budeme tím simulovat jiný průběh změn výnosností a sledovat, jak se tím mění



Obrázek 4.1: Závislost procentuálního rozložení portfolia na ρ

výsledné portfolio.

4.2.1 Období s vyšší celkovou výnosností

Nechť r_{jt} jsou relativní výnosnosti aktiva j za období $t = 1, \ldots, 229$. Sečteme výnosnosti všech deseti aktiv pro každé období.

$$v_t = \sum_{j=1}^{10} r_{jt}, \ t = 1, \ldots, 229$$

Scénáře seřadíme podle parametru v_t, pojmenujme jej jako celková výnosnost za dané období. Odebereme 50 scénářů s nejmenší celkovou výnosností. Na těchto nových datech budeme zkoumat výsledky lineárního modelu hledání optimálního portfolia.

V tabulce 4.3 nalezneme momenty našich nově upravených dat (179 scénářů s vyšší celkovou výnosností). Pozorujeme, že střední hodnoty výnosností kromě výnosností akcií společnosti AAA se zvýšily v porovnání s reálnými scénáři. Tento fakt bychom očekávali jako důsledek způsobu výběru dat. Rozptyly všech společností se zvýšily. U koeficientů šikmosti a špičatosti není takto jednoznačný posun. Tabulky rozdílů momentů jsou pro názornější přehled k nalezení v příloze B. Předpokládáme, že model by měl najít přípustné portfolio i pro $\rho \geq 0.30$.

Tabulka 4.4 ukazuje výsledná portfolia pro minimální požadovanou výnosnost ρ. Vidíme, že model nalezne řešení i pro větší požadované výnosy až do $\rho = 0.45$. Do portfolia znovu zasáhnou pouze akcie společností ČEZ, Komerční Banky a Philipp Morris. Opět je zde lineární závislost procentuálního rozložení na ρ, pokud $\rho = 0.05, \ldots, 0.45$.

4.2.2 Období s nižší celkovou výnosností

Analogicky seřadíme scénáře a tentokrát odebereme 50 scénářů s největšími hodnotami v_t. Simulujeme tím horší průběh změn výnosností.

Akcie	Střední hodnota	Rozptyl	Šikmost	Špičatost
AAA	-0.310776	57.6476	3.89842	36.0029
CETV	-0.301203	109.312	-0.0241127	6.91238
CEZ	-0.0248616	19.3121	-0.226381	10.9858
ERSTE	0.140892	67.1739	0.052559	6.26591
KOMB	0.314974	30.4965	-0.107393	6.30469
ORCO	-0.84642	93.6566	-0.208161	7.40792
PEGAS	-0.0362388	18.0626	-1.80517	17.5386
PHILL	0.493683	14.5447	0.216788	4.29755
TELE	0.070345	7.70032	-1.05179	13.904
UNI	0.108135	28.964	-0.212061	8.87518

Tabulka 4.3: Momenty vypočtené z dat se scénáři s vyšší celkovou výnosností

ρ	Portfolio		
0.0	CEZ 1.000		
0.05	CEZ 0.894	KOMB 0.012	PHILL 0.094
0.10	CEZ 0.789	KOMB 0.024	PHILL 0.187
0.15	CEZ 0.683	KOMB 0.036	PHILL 0.281
0.20	CEZ 0.577	KOMB 0.048	PHILL 0.374
0.25	CEZ 0.472	KOMB 0.060	PHILL 0.468
0.30	CEZ 0.366	KOMB 0.072	PHILL 0.562
0.35	CEZ 0.261	KOMB 0.084	PHILL 0.655
0.40	CEZ 0.155	KOMB 0.096	PHILL 0.749
0.45	CEZ 0.049	KOMB 0.108	PHILL 0.842

Tabulka 4.4: Výsledky modelu se scénáři s vyšší celkovou výnosností

Akcie	Střední hodnota	Rozptyl	Šikmost	Špičatost
AAA	-0.396327	61.2096	3.60703	32.3905
CETV	-1.01908	110.157	-0.0162164	6.92086
CEZ	-0.0956344	19.0541	-0.249968	11.27
ERSTE	-0.55971	63.6779	-0.232675	6.51347
KOMB	0.313673	32.3215	-0.264525	5.95137
ORCO	-1.19127	91.7418	-0.203988	7.76113
PEGAS	-0.243694	17.967	-1.76482	17.3447
PHILL	0.0582649	12.8523	-0.18199	4.77788
TELE	0.0470209	7.92577	-0.952008	13.3303
UNI	-0.223382	27.9584	-0.339093	9.23907

Tabulka 4.5: Momenty vypočtené z dat se scénáři s nižší celkovou výnosností

ρ	Portfolio		
0.0	CEZ 1.000		
0.05	CEZ 0.827	KOMB 0.156	PHILL0.017
0.10	CEZ 0.654	KOMB 0.313	PHILL 0.034
0.15	CEZ 0.481	KOMB 0.469	PHILL 0.050
0.20	CEZ 0.308	KOMB 0.625	PHILL 0.067
0.25	CEZ 0.135	KOMB 0.781	PHILL 0.084
0.30	KOMB 0.946	PHILL 0.054	

Tabulka 4.6: Výsledky modelu se scénáři s nižší celkovou výnosností

Střední hodnoty výnosností nově vybraných dat kromě akcií společností Komerční Banky a Telefóniky klesly, viz tabulka 4.5. Hodnoty rozptylů u všech společností se zvýšily s výjimkou Philip Morris. U šikmosti jsme zaznamenali převážně mírný pokles. Špičatost se výrazně změnila jen u společnosti AAA.

Ve výsledném portfoliu se opět objevují akcie společností ČEZ, Komerční Banka a Philip Morris viz tabulka 4.6. Oproti výběru scénářů s vyšší celkovou výnosností mají v portfoliu větší podíl akcie Komerční banky částečně na úkor akcií společnosti Philip Morris a částečně na úkor akcií společnosti ČEZ. Lineární model našel v tomto výběru scénářů řešení až do $\rho = 0.30$, tedy stejně jako v případě, pokud použijeme na vstupu reálné scénáře. Zde můžeme pozorovat lineární závislost procentuálního rozložení portfolia pro $\rho = 0.05, \ldots, 0.25$. Pro požadovanou výnosnost $\rho = 0.30$ již do portfolia nezasáhnou akcie společnosti ČEZ, jejichž střední hodnota je záporná.

4.2.3 Období s menší celkovou odchylkou

V této podkapitole se budeme zabývat dalším způsobem výběru dat, tentokrát však v závislosti na odchylce výnosností od střední hodnoty. Nechť r_j je aritmetický průměr výnosností společnosti j. Součet odchylek pro všechna aktiva za dané období t označme jako q_t. Pojmenujme jej jako celková odchylka.

$$q_{jt} = |r_j - r_{jt}|, \quad j = 1, \ldots, 10, \quad t = 1, \ldots, 229$$

Akcie	Střední hodnota	Rozptyl	Šikmost	Špičatost
AAA	-0.40059	60.2633	3.65536	33.3658
CETV	-0.920875	104.069	-0.00752593	7.45643
CEZ	-0.286639	15.1888	-1.01157	11.7316
ERSTE	-0.124633	67.4688	-0.00985682	6.56458
KOMB	-0.0728637	30.5315	-0.326471	5.90845
ORCO	-1.02005	98.1096	-0.249883	7.10782
PEGAS	-0.176269	18.5521	-1.62806	16.5323
PHILL	0.185664	15.0666	0.0269916	4.1618
TELE	-0.0465853	7.84335	-1.1234	12.7935
UNI	-0.452232	27.339	-0.557501	8.08553

Tabulka 4.7: Momenty vypočtené z dat se scénáři s menší celkovou odchylkou

ρ	Portfolio				
0.00	CEZ 0.053	KOMB 0.002	PEGAS 0.032	PHILL 0.273	TELE 0.640
0.05	PHILL 0.476	TELE 0.524			
0.10	PHILL 0.751	TELE 0.249			

Tabulka 4.8: Výsledky modelu se scénáři s menší celkovou odchylkou

$$q_t = \sum_{j=1}^{10} q_{jt}, t = 1, \ldots, 10$$

Seřadíme scénáře podle q_t. Odebereme 50 scénářů s největší hodnotou q_t. Podíváme se, jak vypadají tato nová data.

Aniž bychom způsobem výběru dat záměrně ovlivňovali střední hodnotu, pozorujeme její snížení s výjimkou Erste Group Bank (viz Tabulka 4.7). U rozptylu jsme očekávali určité snížení v souvislosti s výběrem scénářů s menší celkovou odchylkou. Kromě společnosti ČEZ se však rozptyl zvýšil. U šikmosti nebyl žádný jednoznačný posun zaznamenán. Špičatost spíše vzrostla.

Vidíme, že u výběru dat s menší celkovou odchylkou se v porovnání s původními daty výrazně změnilo složení výsledného portfolia, viz tabulka 4.8. Pro $\rho = 0$ je portfolio rozdělené mezi akcie pěti společností. Pro $\rho = 0.05$ a $\rho = 0.10$ je složeno pouze s akcií společnosti Philip Morris a Telefónica. V tomto případě je zřejmé, proč tomu tak je. Výnosnosti obou společností mají oproti ostatním největší střední hodnotu a zároveň nejmenší rozptyl. Protože se snížila střední hodnota výnosností téměř u všech společností, model již nenalezne přípustné portfolio splňující podmínku minimální požadované výnosnosi pro $\rho \geq 0.15$.

4.2.4 Období s větší celkovou odchylkou

Analogicky seřadíme scénáře podle parametru q_t. V tomto případě odebereme 50 scénářů s nejmenší celkovou odchylkou.

Stejně jako u období s menší celkovou odchylkou se střední hodnota převážně snížila. Předpokládali bychom, že u rozptylu zaznamenáme zvýšení. To se u

Akcie	Střední hodnota	Rozptyl	Šikmost	Špičatost
AAA	-0.200267	55.982	3.94835	37.7004
CETV	-0.67594	109.715	-0.0393288	6.99373
CEZ	-0.201804	18.9997	-0.220888	11.3488
ERSTE	-0.316956	68.8845	-0.237252	5.90688
KOMB	0.118019	32.075	-0.295119	6.05587
ORCO	-1.34645	80.4313	-0.620217	8.31594
PEGAS	-0.0940533	14.8698	-2.46189	24.4252
PHILL	0.301873	13.2346	0.12972	4.9767
TELE	-0.0187969	7.72087	-1.03373	13.8632
UNI	-0.219857	24.8097	-0.741579	10.1491

Tabulka 4.9: Momenty vypočtené z dat se scénáři s větší celkovou odchylkou

ρ	Portfolio				
0.00	CEZ 0.082	PEGAS 0.099	PHILL 0.146	TELE 0.645	UNI 0.028
0.05	KOMB 0.037	PEGAS 0.072	PHILL 0.265	TELE 0.616	UNI 0.010
0.10	KOMB 0.039	PHILL 0.441	TELE 0.520		
0.15	KOMB 0.080	PHILL 0.623	TELE 0.297		
0.20	KOMB 0.102	PHILL 0.813	TELE 0.085		

Tabulka 4.10: Výsledky modelu se scénáři s větší celkovou odchylkou

většiny společností potvrdilo. Koeficienty šikmosti a špičatosti zůstaly na podobných hodnotách. Vypočtené hodnoty momentů a koeficientů jsou v tabulce 4.9.

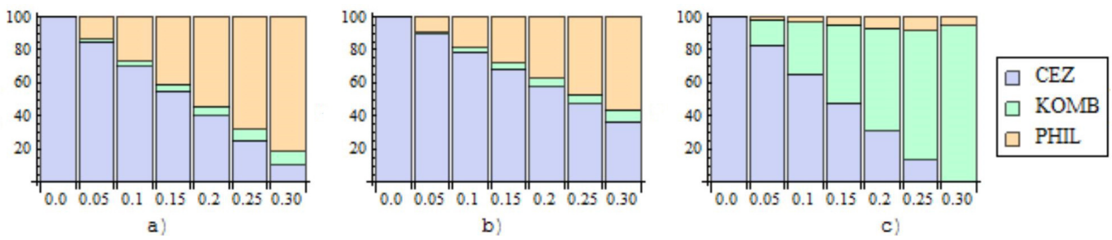
V případě výběru dat s větší celkovou odchylkou nastává podobná situace jako u menší celkové odchylky. Pro malé ρ se portfolio rozloží mezi akcie pěti společností. Místo společnosti Pegas Nonwovens se v portfoliu vyskytuje Unipetrol. Pro $\rho = 0.10, \ldots, 0.20$ je podle modelu optimální investovat do akcií Komerční Banky, Philip Morris nebo Telefónica (viz tabulka 4.10).

4.3 Souhrn výsledků

Výsledky lineárního modelu (3.5) při vstupu reálných dat z pražské burzy ukazují, že rozložení portfolia je závislé na minimálním, investorem požadovaném, výnosu ρ. Portfolio je rozloženo mezi akcie tří společností. Střední hodnota výnosností určitého aktiva má výraznou roli v tom, jestli se aktivum v optimálním portfoliu objeví. Současně jsme mohli vypozorovat, že vybírat akcie do portfolia pouze podle středních hodnot nemusí být z hlediska rizika vždy výhodné. Výběr optimálního portfolia nezávisí pouze na momentech jednotlivých aktiv, ale zřejmě i na vzájemných vztazích mezi nimi, na kovariancích.

Úpravou reálných dat jsme simulovali jiný průběh změn výnosností. Data jsme upravovali odebráním necelých 22% scénářů, celkem 50 z 229. Vstupní scénáře, na kterých jsme hledali výsledné portfolia, byly vybrány dvěma základními způsoby.

Nejprve jsme vybírali data v závislosti na střední hodnotě výnosností za období $t = 1, \ldots, 229$. Scénáře s nižší střední hodnotou byly vynechány a získali



Obrázek 4.2: Procentuální rozložení portfolií v závislosti na ρ: a) Reálná data, b) Data s vyšší celkovou výnosností, c) Data s nižší celkovou výnosností

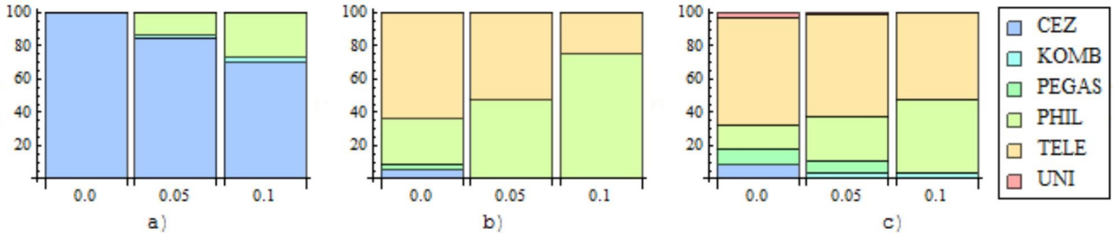
jsme tak data s vyšší celkovou výnosnosti. Analogicky jsme si připravili data s nižší celkovou výnosností.

Výběr scénářů se projevil změnou středních hodnot, jak bychom mohli podle způsobu výběru dat očekávat. Střední hodnota se zvýšila pro data s nižší celkovou výnosností a zvýšila pro data s vyšší celkovou výnosností. Zajímavé je, že v obou případech se zvýšil rozptyl.

Na přehledu grafů Obrázek 4.2 můžeme pozorovat procentuální rozložení portfolia v závislosti na parametru ρ. Pro všechna troje vstupní data (reálná, vyšší celková výnosnost, nižší celková výnosnost) je portfolio složeno pouze z akcií společností ČEZ, Komerční Banka a Philip Morris se dvěma výjimkami. Za prvé pro $\rho = 0$, které znamená, že na portfolio je kladen pouze požadavek, aby nebylo ztrátové. V takovém případě výsledné portfolio obsahuje jen akcie společnosti ČEZ. Zadruhé pro $\rho = 0.30$, kde v případě výběru dat s nižší celkovou výnosností je portfolio složeno pouze z akcií Philip Morris a Komerční Banky. Vidíme, že rozložení portfolia je opět závislé na minimální požadované výnosnosti. Pozorujeme, že závislost procentuálního rozložení výsledného portfolia na ρ je lineární, ale jen pro taková ρ, kde je portfolio složeno ze stejných aktiv. Pokud pro zvyšující se ρ klesá poměr akcií určité společnosti v portfoliu a pro určité ρ společnost z portfolia vymizí, nemůžeme již závislost považovat za lineární. Výsledky modelu se pro data s vyšší i nižší celkovou výnosností od výsledků s reálnými vstupními daty příliš neliší. Rozdíly jsou pouze v procentech, kolik se má do příslušných aktiv investovat.

Podívejme se nyní na data vybraná druhým způsobem, v závislosti na odchylce od střední hodnoty. Zde se rozptyl převážně snížil. Model našel přípustná portfolia nejvýše pro $\rho = 0.1$ v případě dat s menší celkovou odchylkou a pro $\rho = 0.15$ v případě větší celkové odchylky. V přehledu grafů Obrázek 4.3 nalezneme procentuální rozložení portfolia. Vidíme, že nalezená portfolia při vstupních datech s větší a menší celkovou odchylkou se podstatně liší od výsledků s daty reálnými. V důsledku vzájemného přiblížení se středních hodnot výběrem nových vstupních dat, se optimální portfolia dělí až mezi 5 aktiv. Výsledná portfolia jsou pro názorný přehled graficky shrnuta v příloze A.

Pouze s použitím historických dat nelze vždy odhadnout jejich budoucí vývoj. Konkrétně výnosnosti aktiv ovlivňuje mnoho faktorů (ekonomické, politické,...). Jejich změny a velikost těchto změn mohou být na základě dostupných historických dat nepředpověditelné. Správné odhadnutí 80% budoucího vývoje výnos-



Obrázek 4.3: Procentuální rozložení portfolií v závislosti na ρ: a) Reálná data, b) Data s menší celkovou odchylkou, c) Data s větší celkovou odchylkou

ností již lze považovat za úspěšné. Lineární model se střední absolutní odchylkou při odstranění 22% scénářů nedává stabilní výsledky. Optimální portfolia nalezená tímto modelem pro různé výběry se podstatně liší. Pro některé výběry lze nalézt portfolia jen s nízkým požadovaným výnosem. Považujeme tedy lineární model se střední absolutní odchylkou jako mírou rizika za nestabilní.

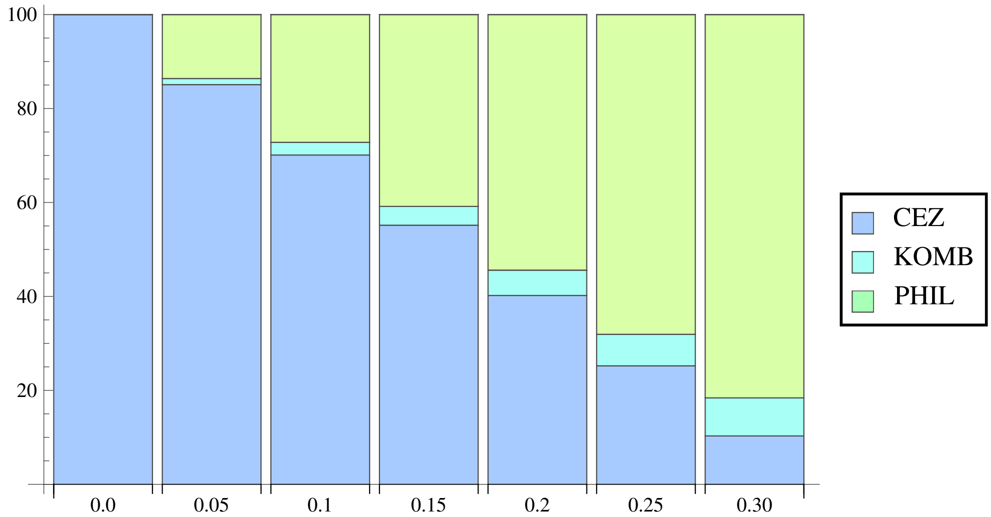
Závěr

V této práci jsme se zabývali problémem minimalizace rizika portfolia za podmínky minimální požadované výnosnosti. Je zde ukázáno, že tento problém s použitím střední absolutní odchylky jako míry rizika je úlohou lineárního programování. Pro normálně rozdělené výnosnosti jsme dokázali, že Markowitzův model a náš odvozený lineární model se střední absolutní odchylkou řeší ekvivalentní optimalizační úlohu.

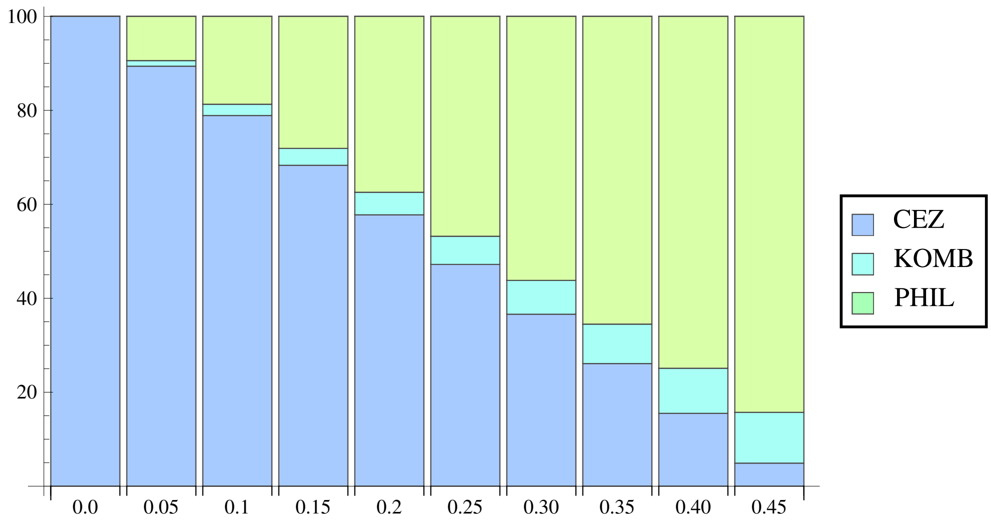
Skutečné výnosnosti aktiv ve většině případů nejsou normálně rozděleny. Za účelem studie citlivosti modelu v diskrétním případě jsme několika způsoby upravovali data z pražské burzy. Při testování citlivosti lineárního modelu optimální volby porfolia se střední absolutní odchylkou jako mírou rizika jsme zjistili, že při změnách vstupních dat v závíslosti na odchylce od střední hodnoty se portfolia velmi lišila od portfolií nalezených modelem s původními scénáři. Studie ukázala, že model již při odstranění necelých 22% scénářů nedává stabilní výsledky.

Studie citlivosti modelu na vstupní data by se dala rozšířit například porovnáním výsledků modelu na generovaných vstupních datech s normálním rozdělením. Do budoucna by bylo zajímavé posoudit stabilitu modelu pro nalezení optimálních portfolií také pro jiné míry rizika než je střední absolutní odchylka.

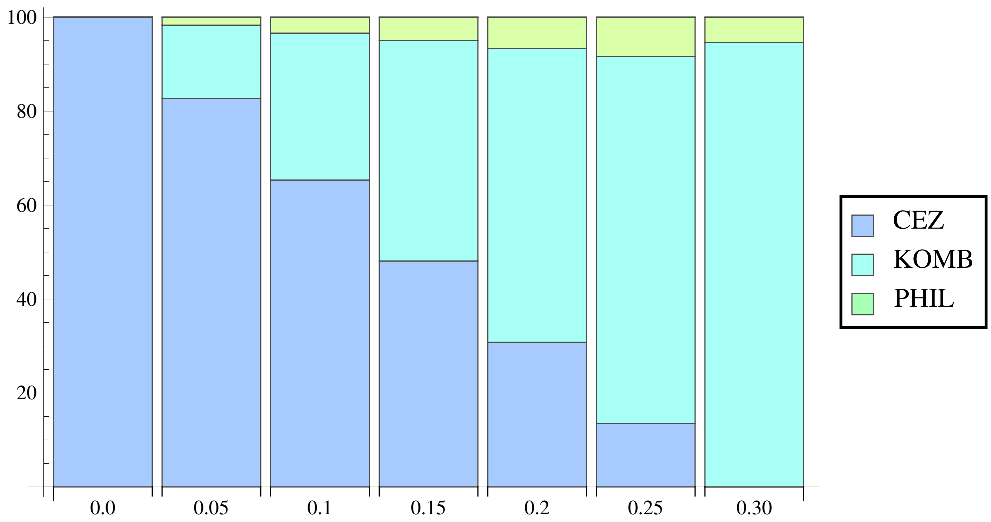
Příloha A



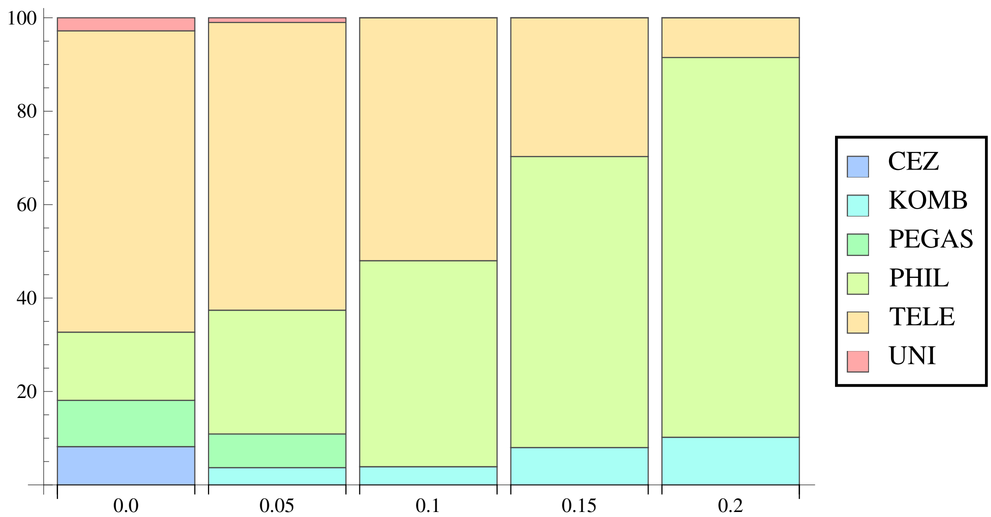
Obrázek A.1: Procentuální závislost rozložení portfolia na ρ: „Reálná data“



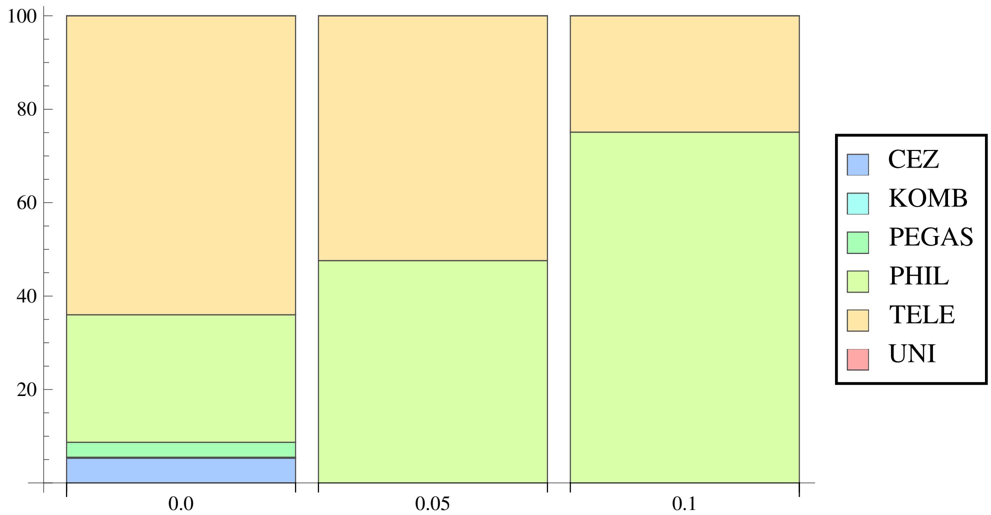
Obrázek A.2: Procentuální závislost rozložení portfolia na ρ: „Vyšší celková výnosnost“



Obrázek A.3: Procentuální závislost rozložení portfolia na ρ: „Nižší celková výnosnost“



Obrázek A.4: Procentuální závislost rozložení portfolia na ρ: „Větší celková odchylka“



Obrázek A.5: Procentuální závislost rozložení portfolia na ρ: „Menší celková odchylka“

Příloha B

	Stredni hodnota	Rozptyl	Sikmost	Spicatost
AAA	-0.106781	6.3617	0.265758	0.256231
CETV	0.405409	10.2692	0.0143516	-0.0550844
CEZ	0.0386262	2.84735	0.0171318	-1.0007
ERSTE	0.307931	3.93338	0.0834144	-0.0557677
KOMB	0.135221	1.05019	0.0991467	0.22896
ORCO	0.160011	5.58578	-0.0816322	0.0685775
PEGAS	0.00878342	2.24682	-0.132355	-0.539321
PHILL	0.143971	1.028	0.106142	-0.332201
TELE	0.0268583	0.620101	-0.157501	0.615223
UNI	0.25106	3.34093	0.0131821	-0.302252

Obrázek B.1: Tabulka rozdílů momentů „Vyšší výnosnost-Reálná data“

	Stredni hodnota	Rozptyl	Sikmost	Spicatost
AAA	-0.192331	9.92373	-0.025637	-3.35618
CETV	-0.312465	11.1143	0.0546806	-0.0466068
CEZ	-0.0321466	2.58932	-0.00645505	-0.716499
ERSTE	-0.392671	0.437416	-0.201819	0.191798
KOMB	0.13392	2.87519	-0.0579847	-0.12436
ORCO	-0.18484	3.67093	-0.0774586	0.421784
PEGAS	-0.198671	2.1513	-0.0920004	-0.733284
PHILL	-0.291447	-0.664374	-0.292636	0.148121
TELE	0.0035341	0.845556	-0.0577227	0.0415599
UNI	-0.0804573	2.33528	-0.11385	0.0616373

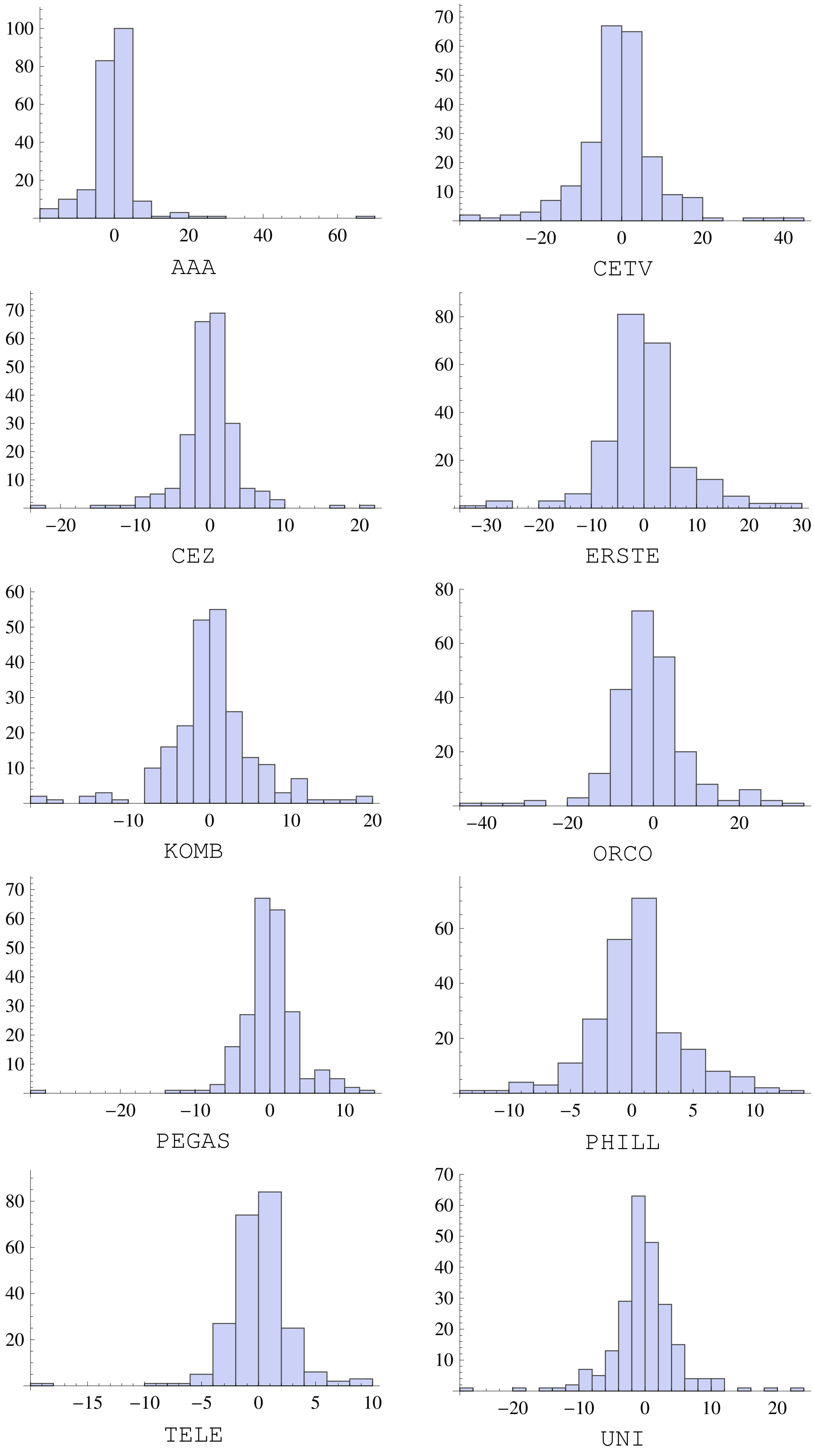
Obrázek B.2: Tabulka rozdílů momentů „Nižší výnosnost-Reálná data“

	Stredni hodnota	Rozptyl	Sikmost	Spicatost
AAA	-0.196594	8.97742	0.022701	-2.38087
CETV	-0.214263	5.02597	0.0309383	0.488963
CEZ	-0.223151	-1.27599	-0.768062	-0.254908
ERSTE	0.0424061	4.22832	0.0209986	0.242902
KOMB	-0.252617	1.0852	-0.119931	-0.167281
ORCO	-0.0136196	10.0387	-0.123353	-0.231528
PEGAS	-0.131247	2.73633	0.0447639	-1.5457
PHILL	-0.164048	1.54999	-0.0836542	-0.467951
TELE	-0.090072	0.763133	-0.229119	-0.49528
UNI	-0.309307	1.71592	-0.332258	-1.0919

Obrázek B.3: Tabulka rozdílů momentů „Menší odchylka-Reálná data“

	Stredni hodnota	Rozptyl	Sikmost	Spicatost
AAA	0.00372806	4.69617	0.315686	1.95376
CETV	0.0306725	10.6723	-0.000864574	0.0262633
CEZ	-0.138316	2.53489	0.0226245	-0.637643
ERSTE	-0.149917	5.64404	-0.206397	-0.414795
KOMB	-0.0617338	2.62875	-0.0885794	-0.019863
ORCO	-0.340018	-7.63952	-0.493688	0.976595
PEGAS	-0.0490311	-0.945984	-0.789075	6.34722
PHILL	-0.0478389	-0.282034	0.0190741	0.346948
TELE	-0.0622836	0.640656	-0.139442	0.574471
UNI	-0.0769322	-0.813373	-0.516336	0.97167

Obrázek B.4: Tabulka rozdílů momentů „Větší odchylka-Reálná data“



Obrázek B.5: Histogramy relativních výnosností vybraných společností z pražské burzy

Příloha C

Kód modelu v programu GAMS:

```
Sets
t cas /1*49/
j akcie /AAA, CETV, CEZ, ERSTE, KOMB, ORCO, PEGAS, PHILL, TELE, UNI/;

Parameter d(t,j);

$call GDXXRW.EXE data1.xls par=d rng=D1:M50

$GDXIN data1.gdx
$LOAD d
$GDXIN

Scalar
L mnozstvi dat (cas t=1...T) /49/
rho pozadavek na vynosnost portfolia /0.05/;

Variable
m minimalizovana promenna
y(t) yt;

Positive Variable
x(j) nakup akcie j;

Parameter
r(j) stredni hodnota akcie j;
r(j) = sum(t,d(t,j))/L;

Parameter
a(j,t) vzdalenost dat od str. hodnoty (bez abs. hodnoty);
a(j,t) = d(t,j) - r(j);

Equations
         mad stredni absolutni odchylka - mean absolute deviation
         absn zaporna cast absolutni hodnoty
         absp kladna cast absolutni hodnoty
         equity soucet vah je roven 1
         return pozadavek na vynosnost;

mad .. m =e= sum(t,y(t))*1/L;
```

```
absn(t) .. y(t) + sum(j,a(j,t)*x(j)) =g= 0;
absp(t) .. y(t) - sum(j,a(j,t)*x(j)) =g= 0;
equity .. sum(j,x(j)) =e= 1;
return .. sum(j,r(j)*x(j)) =g= rho;

Model MADMarkowitz /all/;

Solve MADMarkowitz minimazing m using lp;

Display a, d, r, x.l, x.m ;
```

Seznam použité literatury

Anděl, J. (2011). *Základy matematické statistiky.* Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-162-0.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., a Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, **9**(3), 203–228.

Dupačová, J. (1996). Markowitzův model optimální volby portfolia: předpoklady, data, alternativy. studijní text, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

Dupačová, J., Hurt, J., a Štěpán, J. (2002). *Stochastic modeling in economics and finance.* Springer. ISBN 1-4020-0840-6.

Konno, H. a Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management science*, **37**(5), 519–531.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, **7**(1), 77–91.

Markowitz, H. (1959). Portfolio selection: efficient diversification of investments. *New York: John Wiley & Sons, Inc.*

Perold, A. F. (1984). Large-scale portfolio optimization. *Management Science*, **30**(10), 1143–1160.

Rockafellar, R. T. a Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, **2**, 21–42.

Seznam tabulek