

Posudek na bakalářskou práci Bc. Jany Glivické.

Název. Logické základy forcingu; Logical background of forcing

Práce je psána anglicky. Autorka se zabývá forcingem v teorii množin (varianty odvozené od ZF) a příbuznými technikami. Práce se nesusoustrředí využití forcingu pro dokazování konzistencí množinově teoretických tvrzení, ale studuje logické aspekty této metody. V práci je forcing prezentován s důrazem na formální korektnost, čehož následně autorka využívá pro formalizaci forcingu v rámci Peanovy aritmetiky. Forcing je rovněž představen jako nástroj pro demonstrování vzájemné (ne)interpretovatelnosti různých rozšíření ZF.

U čtenáře se předpokládá aktivní znalost základů logiky a teorie modelů, zejména pak Peanovy aritmetiky a forcingu samotného. Práce sice v několika prvních kapitolách obsahuje úvod do problematiky, jedná se však spíše o stručný přehled úrovně znalostí, které se od čtenáře předpokládají.

Hlavní část práce je obsažena v kapitolách 4.1, 4.2 a 5.

Kapitola 4.1 se věnuje logicky korektnímu zpracování klasické prezentace forcingu, příslušná část kapitoly je zpracována dobře a podrobně. Tato formalizace je následně využita k argumentaci, že celou forcingovou konstrukci lze provést v rámci Peanovy aritmetiky. Zde bych ocenil, kdyby autorka věnovala větší prostor problematice formalizace v rámci Peanovy aritmetiky. V práci je v podstatě vše shrnuto argumentem typu „z toho, jak byla provedena konstrukce v předchozích sekcích, je zřejmé, že vše lze v Peanově aritmetice formalizovat“. Pro čtenáře, který nemá s možnými úskalími této problematiky velké zkušenosti (do této kategorie patří i oponent), je pak tato část textu těžko ocenitelná. Jako nedostatečné mi pak přijde zpracování odstavce 4.1.4, který odkazuje na příklady použití metody forcingu k odvození konzistentních výsledků. Není zde využita příležitost demonstrovat použití forcingu v předchozích sekcích vyvinuté podobě v konkrétních příkladech, místo toho je pouze nadefinován Cohen a Sacks forcing v běžné, „formálně bezstarostné“ podobě. Role predikátu U z předchozích sekcí je zde zamlčena, genericita G není nijak specifikována, které perfektní stromy (z kterého modelu) uvažujeme při Sacksově forcingu není uvedeno. . .

Kapitola 4.2 se nezabývá přímo forcingem, ale budováním Booleovských univerz jako Boolean valued modelů teorie množin. Tato teorie je zde záměrně zpracována bez použití generických objektů. Je s podivem, že autorka nečerpala z aktuálních prací J. Hamkinse, které se zabývají moderním pohledem na přesně tuto problematiku. Je škoda, že zde chybí jakákoliv zmínka o souvislosti této konstrukce s klasickou Booleovskou ultramocninou univerza množin, a je rovněž pominuto, jakou role hraje

případné použití generického ultrafiltru při faktorizaci Booleovského univerza. Chybí rovněž demonstrace použití metody Boolean valued modelů (bez generického objektu) pro důkaz konzistence tvrzení na nějakém konkrétním příkladu.

V kapitole 5 je forcing společně s metodou symetrických modelů použit k důkazu nemožnosti bi-interpretovat teorie ZF a ZFC (nemožnosti 1-1 jednoznačného přiřazení modelů těchto teorií). Kapitola je podrobným zpracováním odkazované poznámky A. Enayata a přepracováním odkazovaného článku P. Cohena. Vzhledem k nemalé komplexitě celé konstrukce bych považoval za vhodné, kdyby text obsahoval jasnější a podrobnější představení základních myšlenek, nejen pouhé prodokazování lemmat. Za zásadní nedostatek považuji absenci vysvětlení nutnosti použít k této konstrukci nestandardní model teorie množin.

Mojí hlavní výhradou k práci je nedostatečné odkazování literaturu. Autorka například často používá formulace typu „... při obvyklých výkladech. . .“, aniž by specifikovala, které výklady jsou míněny. Pro čtenáře, který není dobře zběhlý v dané problematice, může být také často obtížné zjistit, na jakých základech jsou příslušné sekce práce vystavěny. Zcela nemožné bez pátrání v literatuře je pak zjistit, které definice a věty jsou původní a které převzaté.

Přivítal bych rovněž přesnější a pozornější formulaci vět. Příklady: Věty na straně 7 nezmiňují bezespornost T , před formulací důsledku 14 by bylo vhodné zmínit význam použitého zápisu, lemmatu 39 by slušela kvantifikace proměnných, v lemmatu 44 není na první pohled zřejmé, je-li použitá ekvivalence metamatematická či v jazyce ZFC, . . . V kapitole 5 jsem nenašel definici objektu M_ω , který je zde opakovaně používán.

Práce má po matematické stránce dobrou úroveň, autorka prokazuje, že dobře zvládá problematiku logického pohledu na modely teorie množin, a jazykové formě zpracování nelze mnoho vytknout.

Navrhuji hodnotit známkou výborně.

David Chodounský
Matematický ústav AV ČR, v. v. i.