

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Radana Hlavandová

Studium závislostní struktury v ekonomických a finančních datech

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2013

Touto cestou by som sa chcela poďakovať pani RNDr. Jitke Zichovej, Dr.
za odbornú pomoc a cenné rady, ktoré mi poskytla pri vypracovaní bakalárskej
práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 22.5.2013

Podpis autora

Název práce: Studium závislostní struktury v ekonomických a finančních datech

Autor: Radana Hlavandová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zaměřuje na problematiku grafických modelů, jakožto možného nástroje pro určování vztahů mezi různými veličinami. Poskytuje široký teoretický základ pro dvě metody testování dat, test nulovosti parciálních korelačních koeficientů a test založený na věrohodnostním přístupu, který ověřuje shodu grafického modelu s daty na základě deviance. V práci je popsána teorie grafů podmíněných nezávislostí a Markovských vlastností jako podklad pro oba testy, které jsou ilustrovány na obecných příkladech a na příkladu s reálnými finančními daty.

Klíčová slova: parciální korelační koeficienty, graf podmíněných nezávislostí, grafické modely

Title: Study of the dependence structure in economic and financial data

Author: Radana Hlavandová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis focuses on the issue of graphical models as a possible method for determining relationships between different variables. The thesis provides a broad theoretical basis for two methods of testing data, the test of zero partial correlation coefficients and the test based on maximum likelihood estimate. The last mentioned approach is a test of a graphical model with a data set on the basis of deviance. The thesis describes the theory of conditional independence and Markov properties as the basis of both tests, which are illustrated by general examples and by an example with real financial data.

Keywords: partial correlation coefficients, conditional independence graph, graphical models

Názov práce: Štúdium závislostnej štruktúry v ekonomických a finančných dátach

Autor: Radana Hlavandová

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravdepodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práca sa zameriava na problematiku grafických modelov, ako možný nástroj pre určovanie vzťahov medzi rôznymi veličinami. Poskytuje široký teoretický základ pre dve metódy testovania dát, test nulovosti parciálnych korelačných koeficientov a test založený na vierohodnostnom prístupe, ktorý overuje zhodu grafického modelu s dátami na základe deviancie. V práci je popísaná teória grafov podmienených nezávislostí a Markovských vlastností ako podklad pre oba testy, ktoré sú ilustrované na všeobecných príkladoch a na príklade s reálnymi finančnými dátami.

Kľúčové slová: parciálne korelačné koeficienty, graf podmienených nezávislostí, grafické modely

Obsah

1	Základné pojmy a tvrdenia	2
1.1	Charakteristiky náhodných veličín a vektorov	2
1.2	Parciálna a mnohonásobná korelácia	5
1.3	Mnohorozmerný lineárny odhad	6
1.4	Inverzná variančná matica a jej aplikácia	9
2	Grafy a podmienená nezávislosť	13
2.1	Nezávislosť náhodných vektorov	13
2.2	Základy teórie grafov	14
2.3	Markovské vlastnosti	15
2.4	Konštrukcia grafického modelu pre konkrétne dáta	15
2.4.1	Test nulovosti parciálnych korelačných koeficientov	16
2.5	Vierohodnostný prístup	17
2.5.1	Marginálne a podmienené rozdelenia	18
2.5.2	Grafický gaussovský model	18
2.5.3	Logaritmickej vierohodnostnej funkcie a maximálne vierohodné odhady	19
3	Praktická aplikácia testovania podmienenej nezávislosti	22
3.1	Analýza reálnych dát	26
	Literatúra	31
	Zoznam obrázkov	32
	Zoznam tabuliek	33

Úvod

Vo svete finančnictva a ekonómie sa stretávame s rôznymi analýzami finančných a ekonomických dát. Tieto štúdie sú často postavené na vyšetrovaní, či rozličné veličiny sa navzájom ovplyvňujú alebo nie. Často používaný spôsob skúmania vzťahov medzi veličinami vychádza napríklad z lineárnej regresie, čo je užitočný nástroj. Avšak existujú i iné metódy, ktoré sú ale menej známe v praktickej sfére. Popis jednej z nich je aj cieľom tejto bakalárskej práce.

Práca sa zaoberá štatistickým štúdiom vzájomných súvislostí náhodných premenných princípom grafov podmienených nezávislostí. Podrobne sa tejto problematike venuje kniha *Graphical models in applied multivariate statistics* Whittaker (1990). Pravdepodobnostné modely vychádzajúce práve z týchto grafov by mohli byť užitočné a dôležité pre efektívnejšie dosahovanie hospodárskych cieľov.

Práca je členená do troch kapitol a ich podkapitol. Prvá kapitola pojednáva o základných charakteristikách náhodných veličín a vektorov. Definuje a rozoberá parciálnu a mnohonásobnú koreláciu. Tiež popisuje základy lineárneho odhadu a podrobne analyzuje inverznú varianciu. Druhá kapitola je zameraná na nezávislosť náhodných vektorov, teóriu grafov a spôsoby testovania zhody pravdepodobnostného modelu s dátami. Tretia kapitola konkretizuje postupy riešenia problematiky grafov podmienených nezávislostí najskôr všeobecne a následne na konkrétnych finančných dátach.

Teoretická časť práce vychádza hlavne z kníh Anděl (2007) a Whittaker (1990), odkiaľ bola prevzatá väčšina definícií a tvrdení. Dôkazy väčšiny tvrdení sú podrobne rozpísané a odvodené. U definícií a tvrdení prevzatých z inej literatúry je zdroj citovaný priamo na mieste. Internetové odkazy uvedené v literatúre sú citované zo stavu apríla a mája 2013.

Kapitola 1

Základné pojmy a tvrdenia

1.1 Charakteristiky náhodných veličín a vektorov

V celej práci budeme brať všetky vektory ako stĺpcové. Ďalej budeme predpokladať, že všetky náhodné veličiny, resp. náhodné vektory majú konečné druhé momenty, čo znamená, že $\mathbf{E}X^2 < \infty$, resp. $\mathbf{E}X_k^2 < \infty$ pre $k = 1, \dots, n$, kde \mathbf{X} je n -zložkový vektor.

Definícia 1.1: *Náhodný vektor*

Nech X_1, \dots, X_n sú náhodné veličiny na tom istom pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) . Potom vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ nazveme *náhodným vektorom*.

Definícia 1.2: *Stredná hodnota vektora*

Ak existujú stredné hodnoty $\mathbf{E}X_1, \dots, \mathbf{E}X_n$, potom $\mathbf{E}\mathbf{X} = (\mathbf{E}X_1, \dots, \mathbf{E}X_n)^T$ sa nazýva *stredná hodnota vektora* \mathbf{X} .

Definícia 1.3: *Kovariancia, rozptyl*

Nech \mathbf{X} je náhodný vektor. Potom môžeme definovať *kovarianciu* $\text{cov}(X_i, X_j)$ vzťahom $\text{cov}(X_i, X_j) = \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)(X_j - \mathbf{E}X_j)$, kde $i, j = 1, \dots, n$. Pre $i = j$ je $\text{cov}(X_i, X_j)$ rovná *rozptylu* $\text{var}X_i$.

Poznámka:

Úpravou vyššie uvedeného vzťahu pre kovarianciu náhodných veličín dostaneme

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \mathbf{E}X_i X_j - \mathbf{E}X_i \mathbf{E}X_j.$$

Definícia 1.4: *Variančná matica*

Maticu tvaru $\text{var}\mathbf{X} = (\text{cov}(X_i, X_j))$ nazývame *variančná matica* vektora \mathbf{X} , je typu $n \times n$. Platí

$$\text{var}\mathbf{X} = \mathbf{E}(\mathbf{X} - \mathbf{E}\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbf{E}\mathbf{X})^T = \mathbf{E}\mathbf{X}\mathbf{X}^T - (\mathbf{E}\mathbf{X})(\mathbf{E}\mathbf{X})^T.$$

Poznámka:

Pre maticu $\mathbf{B}_{n \times n}$ platí $\text{var}\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{B}\text{var}\mathbf{X}\mathbf{B}^T$.

Definícia 1.5: *Korelačný koeficient*

Nech X a Y sú náhodné veličiny s konečnými druhými momentmi a s $\text{var}X > 0, \text{var}Y > 0$. Potom môžeme definovať *korelačný koeficient* týchto dvoch náhodných veličín ako

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}X \text{var}Y}}.$$

Poznámka:

Pre korelačný koeficient platí $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

Definícia 1.6: *Škálovanie matice*

Operácia *škálovanie matice* $U = (u_{ij})_{n \times n}$ sa tvorí prenasobením matice U sprava i zľava diagonálnou maticou A^{-1} , kde

$$A = \text{diag} \{ \sqrt{u_{11}}, \dots, \sqrt{u_{nn}} \},$$

čím dostaneme jednotky na diagonále.

$$\begin{aligned} A^{-1} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kk} \end{pmatrix} A^{-1} &= \\ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{\sqrt{u_{11}\sqrt{u_{22}}}} & \cdots & \frac{u_{1k}}{\sqrt{u_{11}\sqrt{u_{kk}}}} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_{k1}}{\sqrt{u_{kk}\sqrt{u_{11}}}} & \frac{u_{k2}}{\sqrt{u_{kk}\sqrt{u_{22}}}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definícia 1.7: *Korelačná matica náhodného vektora \mathbf{X}*

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ je náhodný vektor, kde $\text{var}X_i > 0$ pre každé $i = 1, \dots, n$. *Korelačná matica* náhodného vektora \mathbf{X} je

$$\text{cor}\mathbf{X} = A^{-1}\text{var}\mathbf{X}A^{-1},$$

kde $A = \text{diag} \{ \sqrt{\text{var}X_1}, \dots, \sqrt{\text{var}X_n} \}$.

Poznámka:

(i,j) -ty prvok korelačnej matice je ρ_{X_i, X_j} .

Z definície vidieť, že korelačná matica náhodného vektora je škálovaná variančná matica.

Definícia 1.8: *Kovariančná matica dvoch náhodných vektorov*

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ a $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ sú náhodné vektory. *Kovariančná matica* vektorov \mathbf{X} a \mathbf{Y} sa značí ako $\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, je typu $n \times m$. Jej (i, j) -ty prvok je rovný $\text{cov}(X_i, Y_j)$ a platí

$$\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbb{E}(\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X})(\mathbf{Y} - \mathbb{E}\mathbf{Y})^T.$$

Poznámka:

Úpravou vyššie uvedeného vzťahu dostaneme $\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbb{E}\mathbf{X}\mathbf{Y}^T - (\mathbb{E}\mathbf{X})(\mathbb{E}\mathbf{Y})^T$.

Platí

$$\text{cov}(B_{k \times n}\mathbf{X}, D_{l \times m}\mathbf{Y}) = B\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})D^T$$

a

$$\text{cov}(\mathbf{X}_1 \pm \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) = \text{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}) \pm \text{cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}).$$

Definícia 1.9: *Korelačná matica dvoch náhodných vektorov*

Nech náhodné vektory $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ a $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ majú konečné druhé momenty a všetky zložky týchto dvoch vektorov majú kladné rozptyly. *Korelačnou maticou* vektorov \mathbf{X} a \mathbf{Y} nazveme maticu

$$\text{cor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = A_1^{-1}\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})A_2^{-1},$$

kde $A_1 = \text{diag}\{\sqrt{\text{var}X_1}, \dots, \sqrt{\text{var}X_n}\}$ a $A_2 = \text{diag}\{\sqrt{\text{var}Y_1}, \dots, \sqrt{\text{var}Y_m}\}$.

Poznámka:

(i, j) -ty prvok korelačnej matice dvoch náhodných vektorov je rovný korelačnému koeficientu veličín X_i a Y_j .

Platí

$$\text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = [\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]^T$$

a

$$\text{cor}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = [\text{cor}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]^T.$$

V nasledujúcom texte budeme pracovať s maticami, a preto si pripomenieme niektoré maticové operácie.

Tvrdenie 1.10:

- (Bican, 2000, str. 58) Nech sú A, B regulárne štvorcové matice stupňa n . Potom platí
 - i) súčin AB je regulárna matica a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 - ii) matica A^{-1} je regulárna a platí $(A^{-1})^{-1} = A$
 - iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- (Bican, 2000, str. 33) Nech A je matica typu $m \times n$ a B matica typu $n \times p$. Potom platí
 - $(A^T)^T = A$
 - $(AB)^T = B^T A^T$
- (Bican, 2000, str. 54) Ak sú $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ dve štvorcové matice stupňa n , potom $\det(AB) = \det A \det B$.

Dôkaz. Dôkazy bodov z tvrdenia sú uvedené v knihe Bican (2000, 8.6. Věta, str. 58, 4.14. Věta, str. 33, 7.21 Věta, str. 54). □

1.2 Parciálna a mnohonásobná korelácia

Definícia 1.11: *Jednorozmerný lineárny odhad*

Lineárny odhad náhodnej veličiny Y pomocou náhodného vektora \mathbf{X} definujeme predpisom $\hat{Y}(\mathbf{X}) = a + \mathbf{b}^T \mathbf{X}$, kde $a = \mathbf{E}Y - \mathbf{b}^T \mathbf{E}\mathbf{X}$ a $\mathbf{b} = (\text{var}\mathbf{X})^{-1} \text{cov}(\mathbf{X}, Y)$. Za predpokladu nulovosti stredných hodnôt Y a \mathbf{X} platí

$$\hat{Y}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}^T \mathbf{X}.$$

Poznámka:

Značenie $\hat{Y}(\mathbf{X})$ zdôrazňuje závislosť na \mathbf{X} , ďalej značíme už len \hat{Y} .

Definícia 1.12:

Strednú štvorcovú odchýlku $\mathbf{E}(Y - \hat{Y})^2$ nazývame reziduálny rozptyl.

Poznámka:

Platí

$$\mathbf{E}(Y - \hat{Y})^2 = \text{var}Y - \text{cov}(Y, \mathbf{X})(\text{var}\mathbf{X})^{-1} \text{cov}(\mathbf{X}, Y)$$

V knihe Anděl (2007, Věta 2.15, str. 38) je dokázané, že \hat{Y} je optimálny v zmysle minimalizácie strednej štvorcovej odchýlky.

Definícia 1.13: *Koeficient mnohonásobnej korelácie*

Koeficient mnohonásobnej korelácie $\rho_{Y, \mathbf{X}}$ je korelačný koeficient $\rho_{Y, \hat{Y}}$ medzi veličinou Y a jej lineárnym odhadom $\hat{Y}(\mathbf{X}) = a + \mathbf{b}^T \mathbf{X}$, kde a a \mathbf{b} sú uvedené v definícii 1.11. Ak je $\mathbf{b} = 0$, definuje sa $\rho_{Y, \mathbf{X}} = 0$.

Poznámka:

Platí $\rho_{Y, \mathbf{X}} = \rho_{Y, a + \mathbf{b}^T \mathbf{X}} = \rho_{Y, \mathbf{b}^T \mathbf{X}}$ a $\text{cov}(Y, \mathbf{b}^T \mathbf{X}) = \text{cov}(Y, \mathbf{X}) \text{var}\mathbf{X}^{-1} \text{cov}(\mathbf{X}, Y) \geq 0$, teda koeficient mnohonásobnej korelácie je vždy nezáporný.

Definícia 1.14: *Koeficient determinácie*

Koeficient determinácie je definovaný vzťahom

$$R^2 = \rho_{Y,\mathbf{X}}^2.$$

Poznámka:

Z definície vyplýva, že $0 \leq R^2 \leq 1$.

Ďalej platí

$$R^2 = \text{cor}(Y, \mathbf{X}) \text{cor} \mathbf{X}^{-1} \text{cor}(\mathbf{X}, Y) = \frac{\text{var} \hat{Y}}{\text{var} Y}.$$

Ďalej nás bude zaujímať ako môžu byť dve náhodné veličiny Y a Z , kde $\text{var} Y > 0$ a $\text{var} Z > 0$, ovplyvňované veličinami X_1, \dots, X_n . Pre $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ predpokladáme, že matica $\text{var} \mathbf{X}$ je regulárna.

Uvažujme lineárny odhad $\hat{Y}(\mathbf{X}) = a_1 + \mathbf{b}_1^T \mathbf{X}$, kde $\mathbf{b}_1 = \text{var} \mathbf{X}^{-1} \text{cov}(\mathbf{X}, Y)$ a $a_1 = \mathbf{E}Y - \mathbf{b}_1^T \mathbf{E}\mathbf{X}$.

Tú časť veličiny Y , ktorú vektor \mathbf{X} nevysvetlí, je možné si predstaviť ako *reziduum* $Y - \hat{Y}$. Obdobne pre náhodnú veličinu Z môžeme písať $\hat{Z}(\mathbf{X}) = a_2 + \mathbf{b}_2^T \mathbf{X}$, kde $\mathbf{b}_2 = \text{var} \mathbf{X}^{-1} \text{cov}(\mathbf{X}, Z)$ a $a_2 = \mathbf{E}Z - \mathbf{b}_2^T \mathbf{E}\mathbf{X}$. Reziduum má tvar $Z - \hat{Z}$. Táto úvaha vedie k nasledujúcej definícii.

Definícia 1.15: *Parciálny korelačný koeficient*

Za predpokladu $\text{var}(Y - \hat{Y}) > 0$ a $\text{var}(Z - \hat{Z}) > 0$ definujeme *parciálny korelačný koeficient* $\rho_{Y,Z|\mathbf{X}}$ dvoch náhodných veličín Y a Z pri pevnom \mathbf{X} ako korelačný koeficient $\rho_{Y-\hat{Y}, Z-\hat{Z}}$.

Poznámka:

Keďže korelačný koeficient $\rho_{Y-\hat{Y}, Z-\hat{Z}}$ nezávisí na a_1 a a_2 , tak platí

$$\rho_{Y,Z|\mathbf{X}} = \rho_{Y-\mathbf{b}_1^T \mathbf{X}, Z-\mathbf{b}_2^T \mathbf{X}}.$$

1.3 Mnohorozmerný lineárny odhad

Budeme predpokladať, že matica $\text{var} \mathbf{X}$ je regulárna.

Definícia 1.16:

Lineárny odhad náhodného vektora $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ pomocou náhodného vektora $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ je definovaný vzťahom:

$$\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}\mathbf{Y} + \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \text{var}(\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{E}\mathbf{X}).$$

Poznámka:

Jedná sa o priame zobecnenie definície 1.11.

My však budeme predpokladať, že $\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{E}\mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Potom vzťah z definície 1.16 má tvar

$$\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) = \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}.$$

Ak označíme $B = \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}$, budeme písať $\hat{\mathbf{Y}} = B\mathbf{X}$.

Lineárny odhad náhodného vektora \mathbf{Y} z náhodného vektora \mathbf{X} má vlastnosti, ktoré si ukážeme a odvodíme.

Tvrdenie 1.17:

Pre náhodné vektory \mathbf{X} , \mathbf{Y} a $\hat{\mathbf{Y}}$ z definície 1.16 platí

- i) $\text{cov}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}) = \mathbf{0}$
- ii) $\text{cov}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, A\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ pre $\forall A_{m \times n}$
- iii) $\text{cov}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}$
- iv) $\text{cov}(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}) = \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$
- v) $\text{cov}(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y}) = \text{var}(\hat{\mathbf{Y}})$,

kde $\mathbf{0}$ označuje maticu s nulovými prvkami.

Dôkaz.

i)

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}) &= \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - \text{cov}(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}) = \\ &= \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - B\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \\ &= \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\text{var}\mathbf{X} = \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

ii) Odvodí sa analogicky ako bod i).

iii) Ide o špeciálny prípad ii), pretože vieme, že $\hat{\mathbf{Y}} = B\mathbf{X}$. Stačí položiť $A = B$ a dôkaz je zrejmý.

iv)

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}) &= \text{cov}(B\mathbf{X}, \mathbf{X}) = B\text{var}(\mathbf{X}) = \\ &= \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\text{var}(\mathbf{X}) = \\ &= \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y}) &= \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ \text{var}(\hat{\mathbf{Y}}) &= B\text{var}\mathbf{X}B^T = \\ &= \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

Teda rovnosť z tvrdenia platí.

□

Poznámka:

Prvá a druhá vlastnosť ukazujú, že vektor reziduí $\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ je ortogonálny s náhodným vektorom \mathbf{X} a lineárnymi transformáciami \mathbf{X} v zmysle nulovej kovariancie.

Uvažujme náhodné vektory $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ a $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^T$. $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})$ a $\hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{X})$ nech sú najlepšimi lineárnymi odhadmi vektorov \mathbf{Y} a \mathbf{Z} z vektora \mathbf{X} . Naďalej budeme predpokladať, že $\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{E}\mathbf{Z} = \mathbf{0}$. Potom môžeme definovať *parciálnu kovarianciu* vektorov \mathbf{Y} a \mathbf{Z} pri pevnom \mathbf{X} .

Definícia 1.18: *Parciálna kovariancia, parciálny rozptyl*

Parciálna kovariancia je definovaná vzťahom

$$\text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z} | \mathbf{X}) = \text{cov}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}), \mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{X})),$$

kde vektory $\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ a $\mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}}$ sú vektory reziduí, $\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) = \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}$ a $\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{X}) = \text{cov}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}$. Pre $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ máme parciálny rozptyl

$$\text{var}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) = \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y} | \mathbf{X}).$$

Poznámka:

Budeme predpokladať, že matica $\text{var}(\mathbf{Y} | \mathbf{X})$ je regulárna.

Tvrdenie 1.19:

Parciálny rozptyl $\text{var}(\mathbf{Y} | \mathbf{X})$ spĺňa nasledovné

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) &= \text{var}\mathbf{Y} - \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \\ &= \text{var}\mathbf{Y} - \text{var}\hat{\mathbf{Y}} = \text{var}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}). \end{aligned}$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) &= \text{cov}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = \\ &= \text{var}\mathbf{Y} - \text{cov}(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}) - \text{cov}(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y}) + \text{var}\hat{\mathbf{Y}} = \\ &= \text{var}\mathbf{Y} - \text{var}\hat{\mathbf{Y}} = \\ &= \text{var}\mathbf{Y} - \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

Predposledná rovnosť plynie z tvrdenia 1.17, bod v) a posledná rovnosť plynie z úprav v dôkaze tohto bodu v). Ďalej je zrejmé, že $\text{cov}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = \text{var}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})$. \square

Dôsledok 1.20:

Ak položíme $m = p = 1$, ide s využitím definície parciálnej kovariancie a parciálneho rozptylu zapísať parciálny korelačný koeficient uvedený v definícii 1.15

$$\begin{aligned}\rho_{Y,Z|\mathbf{X}} &= \rho_{Y-\hat{Y},Z-\hat{Z}} = \\ &= \frac{\text{cov}(Y - \hat{Y}(\mathbf{X}), Z - \hat{Z}(\mathbf{X}))}{\sqrt{\text{var}(Y - \hat{Y}(\mathbf{X}))}\sqrt{\text{var}(Z - \hat{Z}(\mathbf{X}))}} = \\ &= \frac{\text{cov}(Y, Z|\mathbf{X})}{\sqrt{\text{var}(Y|\mathbf{X})}\sqrt{\text{var}(Z|\mathbf{X})}}.\end{aligned}$$

Dôsledok 1.21:

Pre $m = 1$, $p = 0$ a maticu $A = \text{diag}\{\sqrt{\text{var}X_1}, \dots, \sqrt{\text{var}X_n}\}$ máme podľa definície 1.7 a 1.9

$$\begin{aligned}\text{var}\hat{Y} &= \text{cov}(Y, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}\text{cov}(\mathbf{X}, Y) = \\ &= \sqrt{\text{var}Y}\text{cor}(Y, \mathbf{X})AA^{-1}\text{cor}(\mathbf{X})^{-1}A^{-1}A\text{cor}(\mathbf{X}, Y)\sqrt{\text{var}Y} = \\ &= \text{var}Y\text{cor}(Y, \mathbf{X})\text{cor}(\mathbf{X})^{-1}\text{cor}(\mathbf{X}, Y).\end{aligned}$$

Odtiaľ plynie rovnosť

$$\frac{\text{var}\hat{Y}}{\text{var}Y} = \text{cor}(Y, \mathbf{X})\text{cor}(\mathbf{X})^{-1}\text{cor}(\mathbf{X}, Y),$$

uvedená v poznámke za definíciou 1.14.

1.4 Inverzná variančná matica a jej aplikácia

S inverznou variančnou maticou $\text{var}(\mathbf{X})^{-1}$ sme pracovali pri vyjadrení najlepšieho lineárneho odhadu náhodného vektora pomocou iného náhodného vektora. Bližšia analýza inverznej variančnej matice má svoje opodstatnenie a dovedie nás k dôležitej lemme o inverznej variancii a k jej dôsledkom.

Tvrdenie 1.22:

Nech L je matica tvaru

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times m} \\ -B_{m \times n} & \mathbf{I}_{m \times m} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ a $B = \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\text{var}(\mathbf{X})^{-1}$. Potom platí, že L je regulárna

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

a L transformuje vektor $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ na vektor

$$L \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} \end{pmatrix},$$

ktorý má ortogonálne zložky.

Dôkaz. Jednoduchým vynásobením matíc LL^{-1} a $L^{-1}L$ dostaneme jednotkovú maticu, čo dokazuje prvú časť tvrdenia.

Druhú časť tvrdenia dostaneme blokovým roznásobením matice L a vektoru $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$. Ortogonalita zložiek je dokázaná v tvrdení 1.17, bod i). □

Teraz rozpíšeme variančnú maticu vektora $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ do blokov:

$$\text{var} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{var}\mathbf{X}_{n \times n} & \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{n \times m} \\ \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})_{m \times n} & \text{var}\mathbf{Y}_{m \times m} \end{pmatrix}.$$

Poznámka:

Ďalej budeme $\text{var} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ značiť ako $\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Tvrdenie 1.23:

Choleského rozklad matice $\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ má za predpokladov z tvrdenia 1.22 tvar

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= L^{-1} \text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) (L^{-1})^T = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{var}\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & B^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dôkaz. Podľa tvrdenia 1.22 vieme, že $L \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}$.

Jednoduchá úprava s využitím poznámky za definíciou 1.4 vedie k nasledujúcemu $\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = L^{-1} \text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) (L^{-1})^T$. Keďže $\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}$ podľa tvrdenia 1.17, bod i) a $\text{var}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = \text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ podľa tvrdenia 1.19, tak

$$\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = \begin{pmatrix} \text{var}\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \end{pmatrix}.$$

□

Inverznú variančnú maticu $\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^{-1}$ budeme ďalej označovať symbolom D a zapisovať jej odpovedajúce bloky ako

$$D = \begin{pmatrix} D_{\mathbf{X}\mathbf{X}} & D_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \\ D_{\mathbf{Y}\mathbf{X}} & D_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.24: *Lemma o inverznej variancii*

Inverzná variančná matica náhodného vektora $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ sa dá vyjadriť ako

$$\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^{-1} = \begin{pmatrix} \text{var}(\mathbf{X})^{-1} + B^T \text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})^{-1} B & -B^T \text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})^{-1} \\ -\text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})^{-1} B & \text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})^{-1} \end{pmatrix},$$

kde $B = \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \text{var}(\mathbf{X})^{-1}$.

Dôkaz. Na základe tvrdenia 1.23 o Choleského rozklade a tvrdenia 1.22 je možné písať $\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^{-1} = L^T \text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^{-1} L$. S využitím toho, že $\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})$ je blokovo diagonálna matica a jej bloky $\text{var}(\mathbf{X})$, $\text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ sú regulárne matice, môžeme písať

$$\text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -B^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{var}(\mathbf{X})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{var}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -B & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Roznásobením týchto blokovoých matíc dostaneme vzťah z tvrdenia. □

Dôsledky plynúce z Lemmy o inverznej variancii objasňujú úzke prepojenie medzi prvkami inverznej variancie a parciálnym korelačným koeficientom. Nasledujúce 4 dôsledky sú dokázané v knihe Whittaker (1990, str. 143-145).

Dôsledok 1.25:

Nech inverzná variančná matica je tvaru $D = \begin{pmatrix} D_{\mathbf{X}\mathbf{X}} & D_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \\ D_{\mathbf{Y}\mathbf{X}} & D_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{pmatrix}$. Potom $D_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$ vtedy a len vtedy, keď $\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$.

Dôsledok 1.26:

Uvažujme náhodný vektor $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ s inverznou variančnou maticou

$$D = \text{var}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})^{-1} = \begin{pmatrix} D_{\mathbf{X}\mathbf{X}} & D_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} & D_{\mathbf{X}\mathbf{Z}} \\ D_{\mathbf{Y}\mathbf{X}} & D_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} & D_{\mathbf{Y}\mathbf{Z}} \\ D_{\mathbf{Z}\mathbf{X}} & D_{\mathbf{Z}\mathbf{Y}} & D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} \end{pmatrix}. \text{ Potom platí}$$

$$D_{\mathbf{Y}\mathbf{Z}} = \mathbf{0} \iff \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}|\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$D_{\mathbf{X}\mathbf{Z}} = \mathbf{0} \iff \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$$

$$D_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = \mathbf{0} \iff \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}|\mathbf{Z}) = \mathbf{0}.$$

Zaved'me si značenie $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$,

$$\mathbf{X} \setminus \{X_i\} = \{\mathbf{X}_r; 1 \leq r \leq k, r \neq i\}$$

a

$$\mathbf{X} \setminus \{X_i, X_j\} = \{\mathbf{X}_r; 1 \leq r \leq k, r \neq i, r \neq j\}.$$

Dôsledok 1.27:

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$. Potom všetky diagonálne prvky matice $\text{var}(\mathbf{X})^{-1}$ sú prevrátené hodnoty parciálnych rozptylov $\text{var}(X_i | \mathbf{X} \setminus \{X_i\})$, kde $i = 1, \dots, k$.

Dôsledok 1.28:

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$. Škálovaná inverzná variančná matica $\text{var}(\mathbf{X})^{-1}$ má mimodiagonálne prvky tvaru $(-1)\rho_{X_i, X_j | \mathbf{X} \setminus \{X_i, X_j\}}$, $i \neq j$.

Dôsledok 1.29:

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$. Potom diagonálne prvky inverznej korelačnej matice $\text{cor}(\mathbf{X})^{-1}$ sú tvaru $\frac{1}{1-R_i^2}$, kde $R_i^2 = \rho_{X_i, \mathbf{X} \setminus \{X_i\}}^2$.

Dôkaz. Z definície 1.7 vieme, že $\text{cor} \mathbf{X} = A^{-1} \text{var} \mathbf{X} A^{-1}$, kde $A = \text{diag} \{ \sqrt{\text{var} X_1}, \dots, \sqrt{\text{var} X_n} \}$. Teda inverzná korelácia je $\text{cor}(\mathbf{X})^{-1} = A \text{var}(\mathbf{X})^{-1} A$. Diagonálne prvky inverznej variančnej matice sú podľa dôsledku 1.27 tvaru

$$\frac{1}{\text{var}(X_i | \mathbf{X} \setminus \{X_i\})} \quad i = 1, \dots, k.$$

Odtiaľ jednoznačne plynie, že $\text{cor}(\mathbf{X})^{-1}$ má na diagonále prvky

$$\frac{\text{var} X_i}{\text{var}(X_i | \mathbf{X} \setminus \{X_i\})}.$$

Podľa poznámky za definíciou 1.14 platí, že

$$\frac{1}{1 - R_i^2} = \frac{1}{1 - \frac{\text{var} \hat{X}_i}{\text{var} X_i}} = \frac{1}{\frac{\text{var} X_i - \text{var} \hat{X}_i}{\text{var} X_i}} = \frac{\text{var} X_i}{\text{var}(X_i | \mathbf{X} \setminus \{X_i\})}.$$

Posledná rovnosť plynie z tvrdenia 1.19. □

Dôsledok 1.30:

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$. Škálovaná inverzná korelačná matica má rovnaké mimodiagonálne prvky ako škálovaná inverzná variančná matica.

Dôkaz. Označme $\text{var} \mathbf{X} = (\sigma_{ij})$, $\text{var}(\mathbf{X})^{-1} = (d_{ij})$. Prvky škálovanej inverznej variančnej matice sú

$$\frac{d_{ij}}{\sqrt{d_{ii} d_{jj}}}.$$

Prvky inverznej korelačnej matice sú tvaru $\sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj}} d_{ij}$, pretože $\text{cor}(\mathbf{X})^{-1} = A \text{var}(\mathbf{X})^{-1} A$, kde $A = \text{diag} \{ \sqrt{\sigma_{11}}, \dots, \sqrt{\sigma_{kk}} \}$. Škálovaná $\text{cor}(\mathbf{X})^{-1}$ má potom prvky

$$\frac{\sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj}} d_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} d_{ii} \sigma_{jj} d_{jj}}} = \frac{d_{ij}}{\sqrt{d_{ii} d_{jj}}}.$$

□

Kapitola 2

Grafy a podmienená nezávislosť

2.1 Nezávislosť náhodných vektorov

Budeme predpokladať, že náhodné vektory \mathbf{X} a \mathbf{Y} majú hustoty $f_{\mathbf{X}}$ a $f_{\mathbf{Y}}$ vzhľadom k σ -konečným mieram μ_1 , μ_2 a že existuje združená hustota $f_{\mathbf{XY}}$ vzhľadom k súčinovej miere $\mu_1 \times \mu_2$.

Náhodné vektory \mathbf{X} a \mathbf{Y} sa nazývajú *nezávislé*, ak platí

$$f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}.$$

Poznámka:

Nezávislosť náhodných vektorov budeme značiť $\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$

Ak sú \mathbf{X} a \mathbf{Y} nezávislé z toho vyplýva, že hodnoty \mathbf{Y} neovplyvnia rozdelenie vektora \mathbf{X} . *Podmienenú hustotu* náhodného vektora \mathbf{X} pri pevnom \mathbf{Y} môžeme teda vyjadriť vzťahom

$$f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}$$

V prípade, že o nezávislosti vektorov nevieme v danej chvíli rozhodnúť alebo vieme, že nie sú nezávislé, podmienená hustota náhodného vektora \mathbf{X} pri pevnom \mathbf{Y} je definovaná vzťahom

$$f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \quad f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$$

Definícia 2.1: *Podmienená nezávislosť*

Podmienená nezávislosť náhodných vektorov \mathbf{Y} a \mathbf{Z} pri pevnom \mathbf{X} je definovaná ako

$$f_{\mathbf{YZ}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) = f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})f_{\mathbf{Z}|\mathbf{X}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{x} : f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0$$

Poznámka:

Podmienenú nezávislosť budeme značiť $\mathbf{Y} \perp \mathbf{Z} | \mathbf{X}$.

2.2 Základy teórie grafov

V nasledujúcej podkapitole si zadefinujeme základné pojmy, vlastnosti grafov a hlavne graf podmienených nezávislostí, ktoré budú tvoriť základ pre tzv. markovské vlastnosti.

Graf G je matematický objekt, usporiadaná dvojica $G = (K, E)$, kde K predstavuje konečnú množinu vrcholov a E je konečná množina hrán. Zvyčajne berieme K ako množinu prirodzených čísel $\{1, 2, \dots, k\}$. Hrana medzi dvomi vrcholmi i a j z K je vtedy, ak množina hrán E obsahuje dvojicu vrcholov (i, j) . Platí teda ak $i \in K, j \in K$ a $(i, j) \in E \Rightarrow \exists$ hrana medzi vrcholom i a j .

Termínom *podgraf* grafu $G = (K, E)$ sa označuje usporiadaná dvojica $G_1 = (K_1, E_1)$, pre ktorú platí, $K_1 \subseteq K$ a $E_1 \subseteq E$.

Graf sa nazýva *úplný*, pokiaľ všetky dvojice vrcholov z množiny K sú spojené hranou.

Cestou z vrcholu i do j sa v grafe označuje postupnosť takých vrcholov i_1, \dots, i_m z K ($i_1 = i, i_m = j$), kde i_l a i_{l+1} sú spojené hranou, $(i_l, i_{l+1}) \in E$ pre každé $l = 1, \dots, m - 1$.

Množinou $bd(a)$ budeme značiť množinu vrcholov z $K \setminus a$, ktoré sú spojené hranou s nejakým vrcholom z $a \subseteq K$. Táto množina sa volá *hranica* množiny a .

Pre množiny $a, b, c \subseteq K$ hovoríme, že a *separuje* b, c , keď separuje každú dvojicu vrcholov i a j , kde $i \in b$ a $j \in c$. Znamená to, že $\forall i \in b, j \in c$ každá cesta z i do j obsahuje aspoň jeden vrchol z množiny a .

Podgraf indukovaný množinou $a \subseteq K$ je graf obsahujúci všetky vrcholy z množiny a a všetky hrany spájajúce dvojice vrcholov z a .

Klika v grafe je taká množina vrcholov $a \subseteq K$, ktorá indukuje maximálny úplný podgraf. Ak pridáme ku klike ďalší ľubovoľný vrchol z $K \setminus a$, indukuje podgraf, ktorý už nie je úplný.

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$, $a \subset K = \{1, \dots, k\}$. Symbolom \mathbf{X}_a označíme vektor $(X_{i_1}, \dots, X_{i_j})^T$, kde $i_1 < i_2 < \dots < i_j$, $\{i_1, \dots, i_j\} = a$, $1 \leq j < k$.

Definícia 2.2: *Graf podmienených nezávislostí*

Graf $G = (K, E)$ je *grafom podmienených nezávislostí* náhodného vektora \mathbf{X} , keď platí

$$(i, j) \notin E \Leftrightarrow X_i \perp X_j | \mathbf{X}_{K \setminus \{i, j\}},$$

kde $i, j \in E$.

2.3 Markovské vlastnosti

Nech $a \subset K$. Nasledujúce tri markovské vlastnosti sú alternatívne vyjadrenia podmienenej nezávislosti dvojíc náhodných veličín a vektorov pri pevnom \mathbf{X}_a . Tým definujeme graf podmienených nezávislostí pre náhodný vektor \mathbf{X} .

Definícia 2.3: *Párová markovská vlastnosť*

Nech $i \in K$ a $j \in K$ sú dva vrcholy. Množina $a = K \setminus \{i, j\}$.

Pre všetky dvojice vrcholov (i, j) , ktoré nie sú spojené hranou, platí

$$X_i \perp X_j | \mathbf{X}_a.$$

Definícia 2.4: *Lokálna markovská vlastnosť*

Pre každý vrchol i z množiny K , $a = bd(i)$ a $b = K \setminus (\{i\} \cup a)$ platí

$$X_i \perp \mathbf{X}_b | \mathbf{X}_a.$$

Definícia 2.5: *Globálna markovská vlastnosť*

Pre všetky po dvoch disjunktné podmnožiny $a \subseteq K, b \subseteq K, c \subseteq K$ také, že a separuje b, c platí

$$\mathbf{X}_b \perp \mathbf{X}_c | \mathbf{X}_a.$$

Tvrdenie 2.6:

Všetky tri markovské vlastnosti, párová, lokálna i globálna sú navzájom ekvivalentné.

Dôkaz. Dôkaz je k nahliadnutiu v knihe Whittaker (1990, str. 70,71).

□

2.4 Konštrukcia grafického modelu pre konkrétne dáta

Našimi dátami bude N realizácií náhodného vektora $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$. Ide ich zapísať v tvare matice

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{Nk} \end{pmatrix},$$

kde i -ty riadok \mathbf{X}_i je i -tou realizáciou vektora \mathbf{X} .

Na základe týchto dát chceme nájsť graf $G = (K, E)$, ktorý popisuje štruktúru podmienených nezávislostí zložiek náhodného vektora \mathbf{X} . Pripomeňme si najskôr

odhady základných charakteristík vektora \mathbf{X} .

Odhad strednej hodnoty $\mathbf{E}\mathbf{X}$ je *výberový priemer* $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i$ so zložkami

$$\bar{X}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Odhadom variančnej matice $\text{var}\mathbf{X}$ je *výberová variančná matica*

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^T$$

s prvkami

$$s_{rj} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_{ir} - \bar{X}_r)(X_{ij} - \bar{X}_j), \quad j, r = 1, \dots, k.$$

Pokiaľ sú všetky diagonálne prvky matice S kladné, môžeme definovať *výberovú korelačnú maticu*

$$C = \left(\frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}} \right), \quad i, j = 1, \dots, k.$$

K nájdeniu grafu podmienených nezávislostí pre dané dáta je možné dospieť na základe nasledujúcich krokov.

1. Odhadneme variančnú maticu $\text{var}\mathbf{X}$ pomocou výberovej variančnej matice S .

2. Vypočítame S^{-1} , ktorá je odhadom inverznej variančnej matice D . Táto matica má podľa dôsledku 1.27 na diagonále odhady prevrátených hodnôt parciálnych rozptylov, t.j. $\frac{1}{\text{var}(X_i | \mathbf{X} \setminus \{X_i\})}$, $i = 1, \dots, k$.

3. Na maticu S^{-1} prevedieme operáciu škálovania. Tým dostaneme podľa dôsledku 1.28 mimo jednotkovú diagonálu hodnoty $(-1)r_{X_i, X_j | \mathbf{X} \setminus \{X_i, X_j\}}$, čiže odhadnuté záporne vzaté parciálne korelačné koeficienty veličín X_i a X_j ($i \neq j$) pri pevných hodnotách ostatných zložiek vektora \mathbf{X} .

4. Testujeme nulovosť jednotlivých koeficientov parciálnej korelácie

$$\rho_{X_i, X_j | \mathbf{X} \setminus \{X_i, X_j\}} \equiv \rho.$$

2.4.1 Test nulovosti parciálnych korelačných koeficientov

Tento test je popísaný v knihe Anděl (2007, str. 99). Predpokladom pre prevedenie testu je, že dáta sú výberom z k -rozmerného normálneho rozdelenia.

Označme $r = r_{X_i, X_j | \mathbf{X} \setminus \{X_i, X_j\}}$

Testujeme hypotézu

$$H_0 : \rho = 0$$

proti alternatíve

$$H_1 : \rho \neq 0$$

Testová štatistika je

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{N-k-2} \sim t_{N-k-2}$$

H_0 zamietame v prospech alternatívy H_1 na hladine α vtedy, keď

$$|T| > t_{N-k-2}(1 - \frac{\alpha}{2}),$$

kde $t_{N-k-2}(1 - \frac{\alpha}{2})$ je kvantil t rozdelenia o $N - k - 2$ stupňoch voľnosti.

Ak nezamietame H_0 , znamená to, že náhodné veličiny X_i a X_j sú podmienené nezávislé pri pevných hodnotách ostatných zložiek vektora \mathbf{X} vzhľadom k predpokladanej normalite \mathbf{X} . Podľa párovej markovskej vlastnosti z definície 2.3 v takomto prípade vrcholy i a j v grafe G nie sú spojené hranou. Týmto postupom je možné testovať neprítomnosť každej hrany v grafe G na hladine α zvlášť. Lepším prístupom je test, ktorý by overoval zhodu celého navrhnutého grafu s dátami na hladine α . Ide o *vierohodnostný prístup*, ktorý si popíšeme v nasledujúcej podkapitole.

2.5 Vierohodnostný prístup

Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$, $K = \{1, \dots, k\}$.

1. Budeme predpokladať, že $\mathbf{X} \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma)$, kde $\Sigma = \text{var}\mathbf{X}$. Potrebujeme odhadnúť Σ metódou maximálnej vierohodnosti.
2. Zostrojíme vierohodnostnú funkciu. Budeme predpokladať k -rozmerný náhodný výber taký, že pozorovania sú navzájom nezávislé a majú rovnakú hustotu odpovedajúcu rozdeleniu $N_k(\mathbf{0}, \Sigma)$.
3. Od vierohodnostnej funkcie odvodíme testovú štatistiku pre overenie zhody modelu predstavovaného konkrétnym grafom s dátami.

Definícia 2.7:

(Kulich, 2013, Definície 1.26.) Nech $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)^T$, kde $Z_i \sim N(0, 1)$ sú nezávislé. Nech $\mathbf{A}_{k \times k}$ je matica a $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ je pevný vektor. Náhodný vektor \mathbf{X} definovaný ako $\mathbf{X} = \mathbf{AZ} + \boldsymbol{\mu}$ potom má k -rozmerné normálne rozdelenie s parametrami $\boldsymbol{\mu}$ a $\Sigma \equiv \mathbf{AA}^T$. Značíme $\mathbf{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

Hustota je definovaná ako

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k.$$

Platí $D_{k \times k} = \Sigma^{-1} \Rightarrow \det D = \frac{1}{\det \Sigma}$. Matica D je symetrická pozitívne definitná.

Nad'alej budeme predpokladať nulovosť strednej hodnoty, tj. $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Z toho plynie, že hustota k-rozmerného normálneho rozdelenia má tvar

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{(\det D)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T D \mathbf{x}} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k.$$

2.5.1 Marginálne a podmienené rozdelenia

Nasledujúce tvrdenie hovorí o vlastnostiach marginálnych a podmienených rozdelení a o nezávislosti a podmienenej nezávislosti podvektorov vektora \mathbf{X} , ktorý má k-rozmerné normálne rozdelenie.

Tvrdenie 2.8:

Nech $K = a \cup b$, $a \cap b = \emptyset$ a $\mathbf{X} \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma)$, potom

- I. Marginálne rozdelenie podvektora \mathbf{X}_a , resp. \mathbf{X}_b , je normálne $N(\boldsymbol{\mu}_a, \Sigma_{aa})$, resp. $N(\boldsymbol{\mu}_b, \Sigma_{bb})$, kde $\boldsymbol{\mu}_a$, resp. $\boldsymbol{\mu}_b$ je príslušný podvektor $\boldsymbol{\mu}$ a Σ_{aa} , resp. Σ_{bb} je odpovedajúci diagonálny blok v matici Σ .
- II. Podmienené rozdelenie \mathbf{X}_b pri pevnej hodnote \mathbf{X}_a je normálne.
- III. V podmienenom rozdelení \mathbf{X}_b pri pevnom \mathbf{X}_a je $\mathbf{E}(\mathbf{X}_b | \mathbf{X}_a) = \widehat{\mathbf{X}}_b(\mathbf{X}_a)$, teda lineárny odhad \mathbf{X}_b z \mathbf{X}_a , a $\text{var}(\mathbf{X}_b | \mathbf{X}_a)$ je rovný parciálnemu rozptylu.
- IV. \mathbf{X}_a a \mathbf{X}_b sú nezávislé $\Leftrightarrow \Sigma_{ab} = \text{cov}(\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b) = \mathbf{0} \Leftrightarrow D_{ab} = \mathbf{0}$, kde $D = \text{var}(\mathbf{X})^{-1}$ a D_{ab} je príslušná submatica v D . Značíme $\mathbf{X}_a \perp \mathbf{X}_b$.

Nech ďalej $a, b, c \subset K = \{1, 2, \dots, k\}$ sú po dvoch disjunktné, potom

- V. \mathbf{X}_b a \mathbf{X}_c sú podmienene nezávislé pri pevnom $\mathbf{X}_a \Leftrightarrow \text{cov}(\mathbf{X}_b, \mathbf{X}_c | \mathbf{X}_a) = \mathbf{0} \Leftrightarrow D_{bc} = \mathbf{0}$. Značíme $\mathbf{X}_b \perp \mathbf{X}_c | \mathbf{X}_a$.
- VI. X_i a X_j sú podmienene nezávislé pri pevných hodnotách zvyšných zložiek vektora $\mathbf{X} \Leftrightarrow d_{ij} = 0$, kde d_{ij} je (i, j) -ty prvok matice D . Značíme $X_i \perp X_j | \mathbf{X}_{K \setminus \{i, j\}}$.

Dôkaz. Všetky body tvrdenia sú dokázané v knihe Whittaker (1990, str. 162-164). □

2.5.2 Grafický gaussovský model

Definícia 2.9:

Grafický gaussovský model s grafom G je systém normálnych rozdelení náhodného vektora \mathbf{X} spĺňajúcich štruktúru podmienených nezávislostí

dvojíc zložiek vektora \mathbf{X} popísanú grafom podmienených nezávislostí G .

Zo VI. bodu tvrdenia 2.8 plynie, že v grafe podmienených nezávislostí chýba hrana medzi vrcholmi i a j práve vtedy, keď prvok d_{ij} inverznej variančnej matice D je nulový.

Existuje $2^{\binom{k}{2}}$ rôznych grafov pre k -rozmerný náhodný vektor \mathbf{X} . Krajnými prípadmi sú graf bez hrán a úplný graf.

Podľa dôsledku 1.27 vieme, že $d_{ii} = \frac{1}{\text{var}(X_i|\mathbf{X}\setminus\{X_i\})}$ a zároveň podľa dôsledku 1.28 a 1.30 máme, že $\frac{d_{ij}}{\sqrt{d_{ii}d_{jj}}} = (-1)\rho_{X_i, X_j|\mathbf{X}\setminus\{X_i, X_j\}}$, $i \neq j$.

Grafický gaussovský model je založený na vlastnosti

$$d_{ij} = 0 \Leftrightarrow X_i \perp X_j | \mathbf{X}_{K \setminus \{i, j\}}$$

a na párovej markovskej vlastnosti.

2.5.3 Logaritmická vierohodnostná funkcia a maximálne vierohodné odhady

Nech $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$ je náhodný výber s rozdelením $N_k(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Σ má prvky (σ_{ij}) .

Logaritmická vierohodnostná funkcia má potom tvar

$$\begin{aligned} L_N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) &= \log \prod_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) = \\ &= \log \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{kN}{2}} (\sqrt{\det \Sigma})^N} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})} \right] = \\ &= -\frac{kN}{2} \log 2\pi - \frac{N}{2} \log(\det \Sigma) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

L_N je funkcia parametrov $\boldsymbol{\mu}$ a Σ pri pevných $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$. Naďalej budeme predpokladať, že $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. V tomto prípade má funkcia $L_N(\Sigma)$ tvar

$$L_N(\Sigma) = -\frac{kN}{2} \log 2\pi - \frac{N}{2} \log(\det \Sigma) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}_i$$

Maximálne vierohodné odhady

Keďže predpokladáme nulovosť strednej hodnoty, stačí nám maximalizovať logaritmickú vierohodnostnú funkciu iba cez parameter Σ .

Môžeme to vyjadriť ako

$$\max_{\Sigma} \left[2L_N(\Sigma) + kN \log 2\pi \right] \Leftrightarrow \max_{\Sigma} \left[-N \log(\det \Sigma) - \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}_i \right]$$

Tvrdenie 2.10:

1. Maximalizáciou bez obmedzení, teda keď Σ nie je obmedzená žiadnymi dodatočnými podmienkami, dostávame, že maximálne vierohodný odhad variančnej matice Σ je výberová variančná matica $S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T$.
2. Maximálne vierohodný odhad $\hat{\Sigma}$ variančnej matice Σ a odhad \hat{D} matice $D = \Sigma^{-1}$ pri obmedzeniach daných grafickým modelom s grafom G s $h > 0$ chýbajúcimi hranami (model značíme M) splňuje

$$\text{I.} \quad \widehat{d}_{ij} = 0,$$

keď vrcholy i a j nie sú spojené hranou v grafe G a

$$\text{II.} \quad \widehat{\Sigma}_{aa} = S_{aa},$$

keď množina a je klika a Σ_{aa} , S_{aa} sú príslušné submatice matíc Σ a S .

Dôkaz. Tvrdenie je odvodené v knihe Whittaker (1990, str. 172, 173, 176, 177). □

Definícia 2.11: *Deviancia*

Deviancia grafického modelu M s grafom G je definovaná ako

$$dev(M) = 2[L_N(S) - L_N(\hat{\Sigma})],$$

kde $L_N(S)$ je maximum logaritmickej vierohodnostnej funkcie bez obmedzení a $L_N(\hat{\Sigma})$ je maximum logaritmickej vierohodnostnej funkcie pri obmedzeniach daných grafom G .

Devianciu je možné vyjadriť i pomocou výberovej variančnej matice a odhadnutej inverznej variančnej matice. K dôkazu tohto alternatívneho vyjadrenia budeme potrebovať vzťah z nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 2.12:

(Whittaker, 1990, str. 148) Stopa matice A s prvkami $\{a_{ij}\}$ je suma $Tr(A) = \sum_i a_{ii}$ diagonálnych prvkov matice A . Stopa má nasledujúcu vlastnosť $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Dôkaz. Na dôkaz tvrdenia sa autor odvoláva na literatúru Lang (1970). □

Tvrdenie 2.13:

Devianciu ide vyjadriť v tvare

$$dev(M) = N[\text{Tr}(S\hat{D}) - \log(\det(S\hat{D})) - k].$$

Dôkaz. Po rozpísaní oboch logaritmickejých vierohodnostných funkcií pre parametre S a $\hat{\Sigma}$ a s využitím toho, že $\hat{\Sigma}$ je maximálne vierohodný odhad variančnej matice Σ a \hat{D} odhad $D = \Sigma^{-1}$ pri obmedzeniach dostávame po dosadení v definícii 2.11

$$\begin{aligned} & 2\left[-\frac{kN}{2}\log 2\pi - \frac{N}{2}\log(\det S) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^T S^{-1} \mathbf{X}_i + \right. \\ & \left. + \frac{kN}{2}\log 2\pi + \frac{N}{2}\log(\det \hat{\Sigma}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^T \hat{D} \mathbf{X}_i\right] = \\ & = -N\log(\det(S\hat{D})) - \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^T S^{-1} \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^T \hat{D} \mathbf{X}_i \end{aligned}$$

$\mathbf{X}_i^T \hat{D} \mathbf{X}_i$ ide vyjadriť ako $\text{Tr}(\mathbf{X}_i^T \hat{D} \mathbf{X}_i) = \text{Tr}(\hat{D} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T)$ a $\mathbf{X}_i^T S^{-1} \mathbf{X}_i = \text{Tr}(S^{-1} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T)$. Vyplýva to z tvrdenia 2.12. Ďalej tiež vieme, že $S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T$ a preto $\sum_{i=1}^N \text{Tr}(\hat{D} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T) = \text{Tr}(\hat{D} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T) = N\text{Tr}(S\hat{D})$ a $\sum_{i=1}^N \text{Tr}(S^{-1} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T) = Nk$. Teda

$$dev(M) = -N\log(\det(S\hat{D})) - Nk + N\text{Tr}(S\hat{D}).$$

□

Tvrdenie 2.14:

Deviancia má asymptoticky rozdelenie χ_h^2 , kde h je počet obmedzení definujúcich testovaný model M , t.j. počet chýbajúcich hrán v grafe G .

Dôkaz. Dôkaz tvrdenia nie je rozobraný v knihe Whittaker (1990, 186,187). Autor sa odvoláva na literatúru Cox, D.R. and Hinkley, D.V. (1974).

□

Pri využití deviancie ako testovacieho kritéria, budeme testovať nulovú hypotézu H_0 , že v modele M s grafom G chýba $h > 0$ hrán, proti alternatíve, že model s grafom G je úplný. Keď

$$dev(M) > \chi_h^2(1 - \alpha),$$

tak zamietame zhodu modelu M s grafom G s dátami na hladine α . $\chi_h^2(1 - \alpha)$ je kvantil χ^2 rozdelenia o h stupňoch voľnosti. To znamená, že náš model M s grafom G nezobrazuje štruktúru podmienených nezávislostí v dátach lepšie ako úplný graf, kde každá veličina s každou je závislá.

Kapitola 3

Praktická aplikácia testovania podmienenej nezávislosti

Výpočty k tejto kapitole boli prevedené v programe Wolfram Mathematica 9 a notebooky sa nachádzajú na priloženom CD k bakalárskej práci pod názvami *matice.nb* a *indexy.nb*. Popíšeme si postup riešenia problematiky grafov podmienených nezávislostí na konkrétnych dátach. Rozoberieme všeobecný, detailný postup pre 3-vrcholové grafy. Budeme pozorovať N realizácií trojrozmerného náhodného vektora \mathbf{X} , t.j. $k = 3$. Naše dáta môžeme vyjadriť v maticovom tvare ako

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & X_{N3} \end{pmatrix},$$

kde i -ty riadok \mathbf{X}_i je i -tou realizáciou vektora \mathbf{X} .

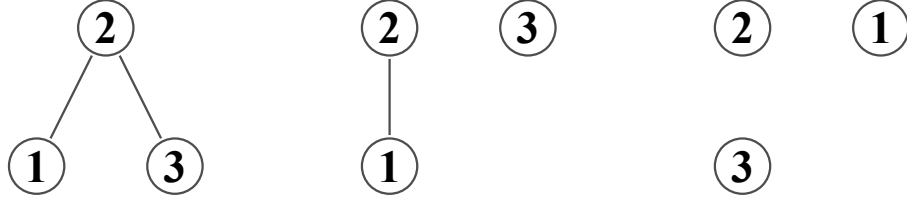
V kapitole 2.5.2 sme uviedli vzorec, ktorý nám určí, koľko grafov podmienených nezávislostí pre dané k dostaneme. V našom prípade pôjde o 8 rôznych grafov pretože $2^{\binom{k}{2}} = 2^{\binom{3}{2}} = 8$. Jednotlivé grafy si môžeme rozdeliť do 4 skupín podľa počtu chýbajúcich hrán:

- žiadna chýbajúca hrana (úplný graf)
- 1 chýbajúca hrana
- 2 chýbajúce hrany
- 3 chýbajúce hrany

Úplný graf je krajným prípadom, ktorým sa nebudeme bližšie zaoberať, pretože v odpovedajúcom grafickom modeli pre náhodný vektor \mathbf{X} platí závislosť medzi všetkými veličinami navzájom. Podľa tvrdenia 2.10 je $S = \hat{\Sigma}$ a teda deviancia je nulová.

Zo skupiny b) a c) budeme testovať na zhodu s dátami len jedného zástupcu, pretože ostatné sú postupovo ekvivalentné.

Pre ďalšie výpočty budeme potrebovať určiť kliky pre jednotlivé grafy. Predpokladajme, že zástupcovia zo skupiny b), c) a d) sú grafy na obrázku 3.1.



Obr. 3.1: Typy trojuholníkových grafov s aspoň jednou chýbajúcou hranou

Potom kliky pre graf s jednou chýbajúcou hranou sú $a = \{1,2\}, \{2,3\}$, pre graf s dvomi chýbajúcimi hranami sú $a = \{1,2\}, \{3\}$ a pre graf bez hrán sú $a = \{1\}, \{2\}, \{3\}$.

Pre každého zástupcu jednotlivých skupín si popíšeme postup výpočtu deviancie. Najskôr vypočítame výberovú variančnú maticu S . Pre výpočet deviancie

$$dev(M) = N[\text{Tr}(S\hat{D}) - \log(\det(S\hat{D})) - k]$$

d'alej potrebujeme určiť výberovú variančnú maticu $\hat{\Sigma}$ pre konkrétny grafický model a následne odhad inverznej variančnej matice $\hat{\Sigma}^{-1} = \hat{D}$.

I. Grafický model s jednou chýbajúcou hranou

Výberová variančná matica a odhad inverznej variančnej matice majú tvary

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \widehat{\sigma}_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ \widehat{\sigma}_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \widehat{d}_{11} & \widehat{d}_{12} & 0 \\ \widehat{d}_{12} & \widehat{d}_{22} & \widehat{d}_{23} \\ 0 & \widehat{d}_{23} & \widehat{d}_{33} \end{pmatrix}$$

Pre submatice

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}$$

z matice $\hat{\Sigma}$ na základe tvrdenia 2.10, bod 2., platí, že ide o podmatice $\widehat{\Sigma}_{aa} = S_{aa}$, kde $a = \{1,2\}, \{2,3\}$ je klika daného grafu. Nuly v matici \hat{D} , teda $\widehat{d}_{13} = 0$, sú dôsledkom I. podmienky z tvrdenia 2.10, čo znamená, že vrcholy 1 a 3 nie sú spojené hranou.

Ukážme si na tomto grafe markovské vlastnosti zmienené v kapitole 2.3.

Pre $i = 1, j = 3, a = \{2\}$ platí párová markovská vlastnosť $X_1 \perp X_3 | X_2$. Ak zvolíme napríklad $i = 1$, je $a = bd(i) = \{2\}$ a $b = K \setminus (\{i\} \cup a) = \{3\}$. Potom podľa

lokálnej markovskej vlastnosti $X_1 \perp X_3 | X_2$. Nakoniec $a = \{2\}$ separuje $b = \{1\}$ a $c = \{3\}$, a teda vzhľadom ku globálnej markovskej vlastnosti $X_1 \perp X_3 | X_2$.

To, že $\hat{\Sigma}^{-1} = \hat{D}$, nám dáva možnosť odvodiť pomocou známych prvkov výberovej variančnej matice vzťah pre neznáme hodnoty $\widehat{\sigma}_{13}$.

Na to budeme potrebovať nasledujúcu definíciu a tvrdenie.

Definícia 3.1:

(Bican (2000, 8.11. Definice, str. 60)) Bud' $A = (a_{ij})$ štvorcová matica stupňa n . Matica $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, kde $\bar{a}_{ij} = A_{ji}$ je algebraický doplnok prvku a_{ji} v matici A , sa nazýva matica adjungovaná k matici A .

Tvrdenie 3.2:

(Bican (2000, 8.12. Věta, str. 60)) Bud' $A = (a_{ij})$ štvorcová matica stupňa n .

i) Ak $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ je matica adjungovaná k matici A , potom $A\bar{A} = \det A \cdot \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matica.

ii) Ak je matica A regulárna, potom $A^{-1} = \frac{\bar{A}}{|A|}$, t.j. $A^{-1} = (b_{ij})$, kde $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$.

Poznámka:

Vynechaním i -teho riadku a j -teho stĺpca matice A , dostaneme submaticu matice A , ktorej determinant značíme M_{ij} . Opatrením tohto subdeterminantu znamienkom, máme prvok $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, ktorý sa volá algebraický doplnok prvku a_{ij} v matici A .

Môžeme teda písať

$$\det \begin{pmatrix} s_{12} & \widehat{\sigma}_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{pmatrix} = 0$$

a dostávame, že

$$\widehat{\sigma}_{13} = \frac{s_{12}s_{23}}{s_{22}}.$$

Deviancia má podľa tvrdenia 2.14 asymptoticky rozdelenie χ_h^2 , kde h je počet chýbajúcich hrán v grafe alebo počet obmedzení definujúcich testovaný model M , to znamená, že $h = 1$. Deviancia má potom tvar

$$\begin{aligned} dev(M) &= N[\text{Tr}(S\hat{D}) - \log(\det(S\hat{D})) - k] = \\ &= -N \log \left(1 - \frac{(s_{13}s_{22} - s_{12}s_{23})^2}{(s_{11}s_{22} - s_{12}^2)(s_{22}s_{33} - s_{23}^2)} \right). \end{aligned}$$

II. Grafický model s dvomi chýbajúcimi hranami

Výberová variančná matica a odhad inverznej variančnej matice majú tvary

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \widehat{\sigma}_{13} \\ s_{12} & s_{22} & \widehat{\sigma}_{23} \\ \widehat{\sigma}_{13} & \widehat{\sigma}_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \widehat{d}_{11} & \widehat{d}_{12} & 0 \\ \widehat{d}_{12} & \widehat{d}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{d}_{33} \end{pmatrix}$$

Pre submaticu

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$$

a jednoprvkovú submaticu s_{33} z matice $\hat{\Sigma}$ na základe tvrdenia 2.10, bod 2., platí, že ide o submaticu $\widehat{\Sigma}_{aa} = S_{aa}$, kde $a = \{1,2\}, \{3\}$ je klika daného grafu.

Nuly v matici \hat{D} , teda $\widehat{d}_{13} = 0$ a $\widehat{d}_{23} = 0$, sú dôsledkom I. podmienky z tvrdenia 2.10, čo znamená, že vrcholy 1, 3 a vrcholy 2, 3 nie sú spojené hranou. K tomu, aby sme boli schopní určiť, čomu sa rovnajú naše neznáme parametre $\widehat{\sigma}_{13}$ a $\widehat{\sigma}_{23}$, si musíme pripomenúť výpočet inverzie blokovej matice s regulárnymi diagonálnymi blokmi. Platí

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

Z toho nám vyplýva, že oba hľadané parametre sú rovné nule, t.j. $\widehat{\sigma}_{13} = 0$ a $\widehat{\sigma}_{23} = 0$.

Deviancia má asymptoticky rozdelenie χ_h^2 , kde $h = 2$. Deviancia má potom tvar

$$\begin{aligned} dev(M) &= N[\text{Tr}(S\hat{D}) - \log(\det(S\hat{D})) - k] = \\ &= -N \log \left(1 - \frac{s_{11}s_{23}^2 - 2s_{12}s_{13}s_{23} + s_{13}^2s_{22}}{s_{33}(s_{11}s_{22} - s_{12}^2)} \right). \end{aligned}$$

III. Grafický model s tromi chýbajúcimi hranami

Ide o graf, ktorý neobsahuje žiadne hrany, čo evokuje to, že všetky zložky vektora $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ sú nezávislé za platnosti tohoto modelu. Výberová variančná matica a odhad inverznej variančnej matice majú tvary

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} s_{11} & \widehat{\sigma}_{12} & \widehat{\sigma}_{13} \\ \widehat{\sigma}_{12} & s_{22} & \widehat{\sigma}_{23} \\ \widehat{\sigma}_{13} & \widehat{\sigma}_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \widehat{d}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{d}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{d}_{33} \end{pmatrix}$$

Pre jednoprvkové submaticy s_{11} , s_{22} a s_{33} z matice $\hat{\Sigma}$ na základe tvrdenia 2.10, bod 2., platí, že ide o submaticy $\widehat{\Sigma}_{aa} = S_{aa}$, kde $a = \{1\}, \{2\}, \{3\}$ je klika daného grafu. Nuly v matici \hat{D} , teda $\widehat{d}_{12} = 0$, $\widehat{d}_{13} = 0$ a $\widehat{d}_{23} = 0$, sú dôsledkom I. podmienky z tvrdenia 2.10, čo znamená, že vrcholy 1, 2, vrcholy 1, 3 a vrcholy 2, 3 nie sú spojené hranou. Hodnoty našich neznámych parametrov sú zrejmé, pretože \hat{D} je diagonálna matica a vieme, že platí $\hat{\Sigma}^{-1} = \hat{D}$. Preto $\widehat{\sigma}_{12} = 0$, $\widehat{\sigma}_{13} = 0$ a $\widehat{\sigma}_{23} = 0$.

Deviancia má asymptoticky rozdelenie χ_h^2 , kde $h = 3$. Deviancia má potom tvar

$$\begin{aligned} dev(M) &= N[\text{Tr}(S\hat{D}) - \log(\det(S\hat{D})) - k] = \\ &= -N \log \left(-\frac{-s_{11}s_{22}s_{33} + s_{11}s_{23}^2 + s_{12}^2s_{33} - 2s_{12}s_{13}s_{23} + s_{13}^2s_{22}}{s_{11}s_{22}s_{33}} \right). \end{aligned}$$

Ďalej si uvedieme príklad s reálnymi dátami, ktorý bude testovať ich zhodu s modelom M s grafom G a tiež si predvedieme test nulovosti parciálnych korelačných koeficientov.

3.1 Analýza reálnych dát

Dátami, na ktorých budeme prevádzať oba testy, či už test zhody grafického modelu s dátami alebo test nulovosti parciálnych korelačných koeficientov, budú tri svetové burzové indexy, Dow Jones Industrials (USA, newyorská burza), NASDAQ Composite (USA), FTSE 100 (Veľká Británia), po dobu 105 dní od 1. decembra 2012 do 5. mája 2013. Časovú radu hodnôt všetkých troch indexov sme previedli na časovú radu logaritmických výnosov, ktorá sa definuje ako

$$\ln \frac{X_t}{X_{t-1}},$$

kde X_t je hodnota indexu v čase t a X_{t-1} je hodnota indexu v čase $t - 1$. Keďže pre testovanie požadujeme normalitu dát prevedieme Shapiro - Wilkov test normality, ktorý je implementovaný v systéme Mathematica. Vieme, že pre normálne rozdelenie platí, ak sú náhodné veličiny nekorelované, sú aj nezávislé a samozrejme aj naopak. V praxi sa ukazuje, že spravidla finančné časové rad logaritmických výnosov sú nekorelované, rovnako rozdelené náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou. To, či naše dáta sú naozaj nezávislé si overíme testom založeným na znamienkach diferencií, ktorý je prevzatý zo zdroja Hurt (2012). V oboch testoch budeme uvažovať hladinu $\alpha = 0,01$.

Konkrétne dané a dosiahnuté hodnoty:

Dôsledkom toho, že pozorujeme tri burzové indexy, je $k = 3$. Počet pozorovaných dní je 105, čo po prevedení dát na časovú radu logaritmických výnosov, bude $N = 104$.

Shapiro - Wilkovým testom sme dostali p-hodnoty, ktoré odpovedajú tomu, že nezamietame nulovú hypotézu, že dáta sú realizáciami výberu z normálneho rozdelenia. Pri teste nezávislosti dát sme opäť dostali vyhovujúce p-hodnoty. Nezamietajú sa teda hypotéza, že dáta sú tromi náhodnými výbermi.

P-hodnoty pre oba testy pre všetky tri burzové indexy sú uvedené v tabuľke 3.1.

Burzové indexy	Shapiro-Wilkov test p-hodnota	Test nezávislosti p-hodnota
DJI	0,094	0,027
IXIC	0,275	0,612
FTSE	0,051	0,236

Pozn: Dow Jones Industrials (DJI), NASDAQ Composite (IXIC), FTSE 100 (FTSE)

Tabuľka 3.1: P-hodnoty Shapiro-Wilkovho testu normality a testu nezávislosti pomocou znamienok diferencií na burzové indexy

Ďalej otestujeme zhodu grafických modelov s grafmi z obrázka 3.1 s dátami. To znamená, že zistíme, či daný model s určitým grafom vyhovuje našim dátam. Výberová variančná matica vypočítaná z dát je

$$S = \begin{pmatrix} 0,0000386358 & 0,0000449645 & 0,0000104601 \\ 0,0000449645 & 0,0000702288 & 0,0000139369 \\ 0,0000104601 & 0,0000139369 & 0,000044055 \end{pmatrix}$$

Maximálne vierohodné odhady variančnej matice Σ postupne pre všetky tri grafy z obrázka 3.1 označíme $\hat{\Sigma}_1$, $\hat{\Sigma}_2$ a $\hat{\Sigma}_3$. Ich hodnoty sú

$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0,0000386358 & 0,0000449645 & 8,92323 \times 10^{-6} \\ 0,0000449645 & 0,0000702288 & 0,0000139369 \\ 8,92323 \times 10^{-6} & 0,0000139369 & 0,000044055 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0,0000386358 & 0,0000449645 & 0 \\ 0,0000449645 & 0,0000702288 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000044055 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0,0000386358 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0000702288 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000044055 \end{pmatrix}.$$

Na základe podrobného popisu výpočtu neznámych hodnôt $\hat{\sigma}_{12}$, $\hat{\sigma}_{23}$ a $\hat{\sigma}_{13}$ v tejto kapitole, môžeme vypočítať postupne odhady \hat{D}_1 , \hat{D}_2 a \hat{D}_3 inverznej variančnej matice. Ich hodnoty sú

$$\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} 101554 & -65021 & 0 \\ -65021 & 56823,2 & -4806,35 \\ 0 & -4806,35 & 24219,4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D}_2 = \begin{pmatrix} 101554 & -65021 & 0 \\ -65021 & 55869,4 & 0 \\ 0 & 0 & 22698,9 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D}_3 = \begin{pmatrix} 25882,7 & 0 & 0 \\ 0 & 14239,2 & 0 \\ 0 & 0 & 22698,9 \end{pmatrix}.$$

Máme všetky potrebné hodnoty k výpočtu deviancií

$$dev(M) = N[\text{Tr}(\mathbf{S}\hat{D}) - \log(\det(\mathbf{S}\hat{D})) - k].$$

Hodnoty pre každý grafický model sú

$$dev_1 \doteq 0,606$$

$$dev_2 \doteq 7,349$$

$$dev_3 \doteq 149,519.$$

Kritický obor testu zhody grafického modelu M s grafom s h chýbajúcimi hranami s dátami má tvar

$$dev(M) > \chi_h^2(1 - \alpha).$$

Z tabuľkovej časti knihy Likeš, J., Laga, J. (1978, str. 7) pre kvantily χ^2 rozdelenia pre 1 až 3 stupne voľnosti a pre $\alpha = 0,01$ máme hodnoty v tabuľke 3.2.

Na základe týchto hodnôt môžeme usúdiť, že vyhovujúce grafické modely pre naše dáta sú graf s jednou chýbajúcou hranou a graf s dvomi chýbajúcimi hranami, pretože

$$dev_1 < \chi_1^2$$

$$dev_2 < \chi_2^2$$

Stupne voľnosti	α
$h = 1$	6,63
$h = 2$	9,21
$h = 3$	11,34

Tabuľka 3.2: Kvantily χ^2 rozdelenia pre $h = 1, 2, 3$ stupne voľnosti pri $\alpha = 0,01$

čo znamená, že nezamietame zhodu modelu M s grafom G s dátami. Z toho vyplýva, že burzové indexy DJI a FTSE pre graf s jednou chýbajúcou hranou sú podmienene nezávislé pri pevnom indexe IXIC a pre graf s dvomi chýbajúcimi hranami platí, že indexy DJI a FTSE sú podmienene nezávislé pri pevnom indexe IXIC a zároveň indexy IXIC a FTSE sú podmienene nezávislé pri pevnom indexe DJI. Pretože netestujeme zhodu modelu s grafom G s dátami pre všetkých 7 možných grafov, ale len pre vybraných zástupcov, nemôžeme tvrdiť, že sme získali jediné možné vyhovujúce grafické modely pre naše dáta.

O správnosti získaných záverov sa ešte presvedčíme testom nulovosti parciálnych korelačných koeficientov, ktorý je popísaný v kapitole 2.4.1 Pre výpočet budeme potrebovať výberovú variančnú maticu, ktorá je

$$S = \begin{pmatrix} 0,0000386358 & 0,0000449645 & 0,0000104601 \\ 0,0000449645 & 0,0000702288 & 0,0000139369 \\ 0,0000104601 & 0,0000139369 & 0,000044055 \end{pmatrix}.$$

Vypočítame S^{-1} , ktorá je odhadom inverznej variančnej matice D . Táto matica je rovná

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 102148 & -64646,4 & -3802,08 \\ -64646,4 & 56105,8 & -2400,13 \\ -3802,08 & -2400,13 & 24360,9 \end{pmatrix}.$$

Na maticu S^{-1} prevedieme operáciu škálovanie, označíme ju S_{sc}^{-1} . Dostaneme, že

$$S_{sc}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,853937 & -0,0762183 \\ -0,853937 & 1 & -0,0649207 \\ -0,0762183 & -0,0649207 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mimo jednotkovú diagonálu sme dostali odhadnuté záporne vzaté parciálne korelačné koeficienty veličín X_i a X_j ($i \neq j$) pri pevných hodnotách ostatných zložiek vektora \mathbf{X} . Ďalej postupne vypočítame testové štatistiky s využitím jednotlivých odhadnutých parciálnych korelačných koeficientov.

$$T_1 = \frac{r_{X_1, X_2 | X_3}}{\sqrt{1 - (r_{X_1, X_2 | X_3})^2}} \sqrt{N - k - 2} = 16,3277$$

$$T_2 = \frac{r_{X_2, X_3 | X_1}}{\sqrt{1 - (r_{X_2, X_3 | X_1})^2}} \sqrt{N - k - 2} = 0,647319$$

$$T_3 = \frac{r_{X_1, X_3 | X_2}}{\sqrt{1 - (r_{X_1, X_3 | X_2})^2}} \sqrt{N - k - 2} = 0,760575.$$

Z kapitoly 2.4.1 vieme, že hypotézu H_0 zamietame v prospech alternatívy H_1 na hladine α vtedy, keď

$$|T| > t_{N-k-2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Z tabuľkovej časti knihy Likeš, J., Laga, J. (1978, str. 16) máme, že kvantil t rozdelenia o $N - k - 2 = 99$ stupňoch voľnosti pri hladine $\alpha = 0,01$ má hodnotu 2,62. Z toho nám plynie zhodný záver ako pri teste grafického modelu s dátami, že indexy DJI a FTSE sú podmienene nezávislé pri pevnom indexe IXIC a indexy IXIC a FTSE sú podmienene nezávislé pri pevnom indexe DJI.

Záver

Cieľom tejto práce bolo poskytnúť široký teoretický podklad pre jednu z možností analýzy vzťahov medzi veličinami. Jednalo sa o menej známu a používanú metódu medzi finančnými analytikmi, testovanie vzájomných súvislostí náhodných veličín princípom zhody grafických modelov s testovanými dátami. O správnosti fungovania tohto testu, sme sa pokúsili i ďalším možným spôsobom, a to testom nulovosti parciálnych korelačných koeficientov. Videli sme, že oba prístupy, ktoré sme previedli na reálnych finančných dátach z oblasti svetových burzových indexov, nám poskytli zhodné výsledky. Práve preto by mohli byť oba princípy testovania dát viac používané, a tak nahradiť všeobecne známe a veľmi často využívané metódy založené na lineárnej regresii.

Testovanie dát spôsobom zhody grafických modelov nám poskytlo informácie o podmienených nezávislostiach náhodných veličín, čo je užitočný fakt a môže byť nápomocný pri realizovaní lepších hospodárskych výsledkov v ekonomickom a finančnom svete.

Literatúra

- ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky*. Druhé opravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.
- BICAN, L. (2000). *Lineární algebra a geometrie*. Academia, Praha. ISBN 80-200-0843-8.
- COX, D.R. AND HINKLEY, D.V. (1974). *Theoretical Statistic*. 2nd Ed. Chapman and Hall, London.
- HURT, J. (2012). URL http://www.karlin.mff.cuni.cz/~hurt/WTC2012_Jan_Hurt_Statistical_Inference_Working_with_Reference2.nb. Charles University of Prague, Faculty of Mathematics and Physics.
- KULICH, M. (2013). Malý větníček. URL http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kulich/vyuka/statfpm/doc/statfpm_vetnik.pdf.
- LANG, S. (1970). *Linear Algebra*. 2nd Ed. Addison-Wesley, Mass.
- LIKEŠ, J., LAGA, J. (1978). *Základní statistické tabulky*. SNTL, Praha.
- WHITTAKER, J. (1990). *Graphical models in Applied multivariate Statistics*. John Wiley, New York. ISBN 0 471 91750 8.

Zoznam obrázkov

3.1	Typy trojuholníkových grafov s aspoň jednou chýbajúcou hranou	23
-----	---	----

Zoznam tabuliek

3.1	P-hodnoty Shapiro-Wilkovho testu normality a testu nezávislosti pomocou znamienok diferencií na burzové indexy	26
3.2	Kvantily χ^2 rozdelenia pre $h = 1, 2, 3$ stupne voľnosti pri $\alpha = 0,01$.	28