Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lada Peksová

Kvantová logika a projektivní prostory

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Obecná fyzika

Praha 2013

Děkuji RNDr. Svatopluku Krýslovi, Ph. D., za směřování, hodnotné rady a odbornou pomoc při vytváření této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 22. 5. 2013 Lada Peksová

Název práce: Kvantová logika a projektivní prostory

Autor: Lada Peksová

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V této práci nahlížíme na množinu výroků o vlastnostech kvantového systému jako na částečně uspořádanou množinu podprostorů konečně či nekonečně dimenzionálního Hilbertova prostoru. Operaci uspořádání provádíme na množině výroků porovnáním pravdivostních hodnot výroků a na množině podprostorů jako operaci inkluze. Na základě požadovaných vlastností převádíme tyto struktury na operace se svazem. Ukazujeme, čemu zde odpovídá Heisenbergův princip neurčitosti. Dále ukazujeme, že svazy odpovídající podprostorům nekonečně dimenzionálního Hilbertova nejsou modulární. Tuto vlastnost tak dále, po přidání operace negace, nahrazujeme slabší vlastností - ortomodularitou. V návaznosti na práci G. Birkhoffa a J. von Neumanna pak hledáme strukturu kvantové logiky v projektivních prostorech, které zavádíme aritmeticky i axiomaticky. Analyzujeme také příklady kvantové logiky, jejich fyzikální realizace i případné realizace v projektivních prostorech.

Klíčová slova: Svazy, kvantová logika, projektivní geometrie

Title: Quantum logic and projective spaces

Author: Lada Peksová

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstract: A set of statements about the properties of a quantum system is looked at as at a partially ordered set of subspaces of finite or infinite dimensional Hilbert space. The operation of ordering is performed on a set of propositions comparing the truth values of these propositions and on the set of subspaces as the operation of inclusion. Based on the required properties these structures are translated into operations on the lattice. The correspondence with Heisenberg uncertainty principle is shown there. Furthermore, it is shown that the lattices corresponding to the subspaces of infinite dimensional Hilbert space are not modular. This property is replaced with weaker property of orthomodularity, when operation of the negation is added. Following the work of G. Birkhoff and J. von Neumann, the structure of quantum logic is looked for in projective spaces, which are introduced either arithmetically or axiomatically. The examples of quantum logic, their physical implementation and eventual implementation in projective spaces are analysed.

Keywords: Lattices, quantum logic, projective geometry

Obsah

Úvod **2**

1 Svazy **7**
1.1 Základní vlastnosti svazů 7
1.2 Vlastnosti svazů kvantové logiky 14

2 Logiky **19**
2.1 Kvantová logika 21
2.2 Současně pozorovatelné veličiny 22

3 Projektivní geometrie **27**
3.1 Základní vlastnosti projektivní geometrie 27
3.2 Vztah projektivní geometrie ke kvantové logice 33

Seznam použité literatury **39**

Úvod

„Nedefinuji čas, prostor, místo a pohyb, ježto jde o věci všem dobře známé. Musím pouze konstatovat, že neučení lidé si nepředstavují tyto veličiny jinak než v jejich vztahu k smyslovým objektům. A z toho pocházejí jisté předsudky …“

Isaac Newton

Fyzika je neustálým bojem člověka o popis přírody. Z tohoto pohledu dala klasická mechanika v začátku svého vývoje mnoho – nejen možnost vyslovovat o chování přírody různá tvrzení, ale i možnost jistým způsobem interpretovat tato tvrzení.

Již před začátkem minulého století se však začala objevovat omezení platnosti tvrzení vyvozených z klasické mechaniky a problémy s interpretacemi nových poznatků - konečné rychlosti světla ve všech inerciálních soustavách a s ní spojený problém následnosti či současnosti nesoumístných dějů a interference jednotlivé částice, která mohla vzniknout jen interferencí se sebou samotnou. Nový myšlenkový přístup tak vyžadovaly obě dvě nově se vyvíjející teorie - teorie relativity i kvantová teorie.

V klasické mechanice můžeme z Newtonových zákonů o tělese z pohledu zvolené inerciální soustavy v určitém čase zjistit jeho polohu $\vec{r}$ a rychlost $\vec{v}$. V tomtéž okamžiku z pohledu stejné soustavy nemůže mít těleso již žádnou jinou polohu ani rychlost. Pokud naopak o tělese prohlásíme, že nemá danou polohu $\vec{r}$ a rychlost $\vec{v}$, pak může mít jakoukoliv jinou polohu a rychlost z množiny, která je doplňkem k těmto hodnotám. O každém takovém a podobném výroku tak můžeme říci, zda pravdou je, nebo není, a přisoudit mu tak jednoznačnou pravdivostní hodnotu. Vždy platný výrok pro nás bude mít hodnotu 1 a vždy neplatný hodnotu 0.[1] Pokud chceme výrok s opačnou pravdivostní hodnotou, budeme vybírat výrok z doplňkové množiny. Tímto způsobem můžeme s výroky, které vytvoříme v rámci klasické mechaniky, pracovat jako v klasickém výrokovém počtu.

Klasický výrokový počet (více viz [1]) je vlastně abstraktní jazyk, který můžeme vybudovat z neomezené množiny atomických (základních) výroků pomocí několika binárních operací ($\wedge$, $\vee$, $\to$) a jedné unární operace ($'$) působících na těchto výrocích. V jeho obvyklé interpretaci (sémantice) rovněž využíváme hodnotu 1 pro pravdivý výrok a hodnotu 0 pro nepravdivý. Dále je nutné určit pravidla vyhodnocení operací. Například přisoudíme výroku x' hodnotu 1 právě tehdy, když má výrok x hodnotu 0, výroku $x \wedge y$ přisoudíme hodnotu 1 právě tehdy, když mají oba výroky x a y hodnotu 1, a obdobně i pro zbývající operace.

Všimněme si, že v tomto jazyce můžeme vytvořit dva (syntakticky) různé výroky, které při stejném ohodnocení základních podvýroků mají stejné pravdivostní hodnoty. Jako příklad uveďme tyto dva výroky

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

[1]V češtině je přirozené pro vyjádření záporu využít ve větě dvě negace, jako například: „*Nikdy* jsem *nebyla* na Měsíci.“ V matematice naopak pro vyjádření záporu musíme využít právě lichý počet negací. Aby nevznikala nedorozumnění, budu se držet „matematické“ verze a pro vyjádření záporu používat pouze jednu negaci.

$$x \wedge (y \vee z)$$

Z hlediska interpretací tedy v klasickém výrokové počtu platí ekvivalence

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \Leftrightarrow x \wedge (y \vee z)$$

Poznamenejme, že v klasickém výrokovém počtu jsou tyto dva výroky ekvivalentní i z hlediska vyplývání, jež se formuluje pomocí syntaxe.

Kvantovou mechaniku můžeme vůči klasické vymezit díky čtyřem jevům – vlnově-korpuskulárnímu dualismu, principu neurčitosti, kvantování určitých veličin a provázanosti stavů. Již v těchto svých základních principech obsahuje prvky, které neumožňují aplikovat stejným způsobem klasický výrokový počet. Jako asi nejnázornější se v tomto jeví vlnově-korpuskulární dualismus při interferenci v dvojštěrbinovém experimentu.

Představme si rovinné stínítko (dle [2]), před nímž je v určité vzdálenosti postavena neprostupná překážka s určitým množstvím velmi malých štěrbin. Nejprve proveďme „částicový“ experiment.

Budeme proti překážce směrem ke stínítku posílat dostatečně malé objekty (pro jednoduchost si představujme například kuličky) a sledovat četnost dopadů na jednotlivá místa stínítka. Mějme nejprve pouze jednu štěrbinu. V tomto případě nám na stínítko budou dopadat kuličky s jistým pravděpodobnostním rozložením, které je v rovině kolmé na stínítko a procházející štěrbinou velmi podobné Gaussově rozložení. Pokud nyní přidáme do překážky druhou štěrbinu blízko první, objeví se nám na stínítku vzorec odpovídající součtu pravděpodobnostních rozložení od obou štěrbin.

Nyní proveďme „vlnovou“ variantu tohoto experimentu. Proti překážce budeme tentokrát posílat vlnění. To projde v místě štěrbiny, kde se pozmění na vlnění se sférickými vlnoplochami, se stejnou frekvencí. Pokud budeme mít opět pouze jednu štěrbinu, pak se nám na stínítku objeví podobné rozložení, jako v předchozím případě. Po přidání druhé štěrbiny se však pravděpodobnostní rozložení změní. V místě, kde bude mít každá z přicházejících vln od obou štěrbin opačnou fázi, zaznamenáme minimum a v místě, kde se setkají se stejnou fází, naopak maximum.

O elektronech známe jejich klidovou hmotnost, jejich náboj, spin, a proto je v jistém smyslu přirozené pokládat elektrony za klasický objekt z hlediska dvojštěrbinového experimentu. Pokud budeme vysílat jednotlivé elektrony proti překážce s jedinou štěrbinou, získáme stejné rozložení jako pro klasické částice. Jelikož můžeme zmenšit inteznitu zdroje dostatečně, je dokonce možné sledovat postupně přibývající stopy po dopadu jednotlivých elektronů. To vše nás přesvědčuje o správnosti klasického pohledu na elektron.

Necháme-li však elektronům možnost procházet dvěma štěrbinami, jejich chování se podstatně změní. I při nízké intenzitě, kdy bude procházet celou dráhou vždy pouze samostatný elektron, se nám postupem času začnou na stínítku objevovat stejné interferenční obrazce jako v případě postupujícího vlnění. Elektron jsme vysílali jako klasický objekt a detekujeme ho na stínítku jako klasický objekt, ale jeho chování při průchodu štěrbinami neodpovídá klasickým objektům.

Můžeme tedy říci, že zjistíme, jak vypadá průchod elektronu skrz štěrbiny tak, že v blízkosti každé z nich postavíme detektor, který nám řekne, kterou ze štěrbin elektron procházel. Jakmile to však uděláme, náš interferenční obrazec opět zmizí, a to i přesto, že mají elektrony stále na výběr. Nemůžeme tedy rozhodnout, která ze štěrbin je ta „správná“, pokud nenarušíme experiment. Výrok „elektron procházel jednou ze štěrbin“ je pravdivý, výrok „elektron neprocházel ani jednou ze štěrbin“ je nepravdivý, ale výrokům „elektron procházel štěrbinou 1“ a „elektron procházel štěrbinou 2“ nemůžeme přisoudit žádnou z dosud určených pravdivostních hodnot.

Dalším příkladem ukazujícím nutnost využít jiný typ logiky vychází z principu neurčitosti.

Představme si povrch, na kterém se nacházejí dvě kvantové tečky. Kvantová tečka je seskupení několika atomů na povrchu nějakého vzorku. Modulací tvaru tečky, její velikostí a její rozdílné vodivosti vůči okolnímu vzorku můžeme vytvořit objekt, který oproti svému okolí velmi snadno váže elektrony. Pozici elektronu, který se nám takto „chytí do pasti“, můžeme snadno zjistit pomocí pozice a rozměrů tečky. V případě dvou kvantových teček ale může nastat situace, kdy se chytí do obou zároveň a nastane takzvaná superpozice obou stavů. Elektron se tak bude z části nacházet v obou tečkách a jeho pozice bude dána pozicemi obou teček.

Nyní mějme vedle sebe dvě takovéto tečky a elektron, který je v nich chycen tak, že víme velmi přesně jeho hybnost. Představme si, že se nám povede určit jeho hybnost dokonce tak přesně, že v případě zachycení do jediné kvantové tečky by elektron nemohl splňovat Heisenbergovu relaci neurčitosti, ale v případě zachycení oběma tečkami by ji již splňoval.

Řekněme, že výrok x bude obsahovat informaci o velikosti a střední kvadratické odchylce hybnosti elektronu, výrok y bude obsahovat informaci o velikosti a střední kvadratické odchylce polohy elektronu, pokud se nachází v první kvantové tečce, a výrok z bude obsahovat informaci o velikosti a střední kvadratické odchylce polohy elektronu, pokud se nachází v druhé kvantové tečce.

Tak, jak jsme systém vytvářeli, vytvořili jsme rovněž podmínky, za nichž $x \wedge y$ a $x \wedge z$ jsou nepravdivé výroky, reprezentující nesplnění relace neurčitosti, tedy jim můžeme přisoudit hodnotu 0. Ale jelikož je poloha dána superpozicí obou možných stavů reprezentovaných zde tvrzením $y \vee z$, ‚může být výrok $x \wedge (y \vee z)$ již pravdivý a my mu musíme přisoudit hodnotu 1. Oproti klasickému výrokovému počtu tak

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \not\Leftrightarrow x \wedge (y \vee z)$$

I přes tyto dvě ukázky, které potvrdily, že samotný klasický výrokový počet se nehodí pro kvantovou mechaniku, se nabízí otázka, zda můžeme vytvořit nějakou strukturu, z které bychom rovněž mohli vyvozovat „pravdivost“ či „nepravdivost“ tvrzení.

Jedním z mála konceptů, které kvantová mechanika sdílí s klasickou, je koncept fázového prostoru (viz [3]). Ve fázovém prostoru klasické mechaniky je stav každého systému neustále svázán s určitým bodem ve fázovém prostoru. Ten je matematicky popsatelný a reprezentuje stav zjistitelný z tzv. maximálního pozorovaní. Bod tak odpovídá změření $2n$ proměnných odpovídajících n proměnným polohových a n proměnným pohybových souřadnic.

Zatímco v klasické mechanice je maximální pozorování totožné s maximálním možným pozorováním, v kvantové mechanice nejsme vždy schopni určit všechny vlastnosti v důsledku principu neurčitosti. Pro kvantové systémy je tak přesné určení bodu ve fázovém prostoru nedosažitelné. Je ale možné vytvořit „analogický“ formalismus, kdy jsou jednotlivé stavy systému popsány vlnovými funkcemi, prvky nějakého Hilbertova prostoru. Pozorovatelné veličiny pak odpovídají hermitovským operátorům.

Označme si tedy současně pozorovatelné veličiny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Víme, že v Hilbertově prostoru existuje množina navzájem ortogonálních uzavřených lineárních podprostorů Ω_i odpovídajících třídám vlastních funkcí f_k. Každý bod (funkce) f Hilbertova prostoru tak může být jednoznačně zapsán jako lineární kombinace

$$f = \sum_i c_i f_i, \;\; f_i \in \Omega_i, \quad a \in \mathbb{C}$$

Matematickou reprezentací podmnožiny S pozorovatelných veličin (určených současně měřitelnými $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$), tak budeme rozumět množinu všech bodů f Hilbertova prostoru, určenou splněním podmínek

$$\begin{aligned} \alpha_1 (f_k) &= \lambda_1 f_k \\ \alpha_2 (f_k) &= \lambda_2 f_k \\ &\vdots \\ \alpha_n (f_k) &= \lambda_n f_k \end{aligned}$$

kde $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \in S$. Z toho nám vyplývá, že každá matematická reprezentace jakéhokoli experimentálního tvrzení je uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru. Dále, jelikož jsou operátory pozorovatelných veličin v kvantové mechanice hermitovské, je matematická reprezentace negace tvrzení o jakémkoli výroku ortogonálním doplňkem této reprezentace. Rovněž vidíme ekvivalenci tvrzení „matematická reprezentace P je podmnožinou matematické reprezentace Q“,„pro jakýkoliv statistický soubor systémů je pravděpodobnost P nejvýše rovná pravděpodobnosti Q“ a „P implikuje Q“.

S operátory tak můžeme zacházet obdobně jako s lineárními podprostory při součtu, direktním součinu či ortogonálním doplňku a dle G. Birkhoffa a J. von Neumanna tak systém fyzikálních vlastnosti systému umožňuje operace podobné operacím logického počtu. Operaci implikace můžeme pojmout jako způsob částečného uspořádání, což nabídl i G. Mackey ve svém VII. Axiomu (viz [4]), kde množiny všech možných tvrzení o systému, izomorfně přiřadil k částečně uspořádaným množinám, se kterými budeme pracovat i my, a na nichž budeme budovat kvantovou logiku - jako operace se svazem.

V první kapitole se tak seznámíme s vlastnostmi svazů (přičemž vycházíme z [3] a [4]). Ukážeme, že Heisenbergově principu neurčitosti dobře odpovídá nesplnění distributivních zákonů a nekomutativitě fyzikální měření pak nesplnění modulární podmínky. Ukážeme, jaké podmínky musíme klást na dimenzi Hilbertova prostoru, pokud chceme z množiny všech jeho (uzavřených) podprostorů vytvořit modulární či distributivní svaz.

V druhé kapitole přidáme k svazu novou operaci - negaci. Jak jsme viděli, je nutné zde nahradit koncept negace výroku z klasické mechaniky, kde hledáme negaci výroku v doplňkové množině. V kvantové mechanice musíme hledat negaci výroku, chápaného jako vektor v Hilbertově prostoru, v ortogonálním doplňku k tomuto vektoru v Hilbertově prostoru. Tato operace nám pak umožní podmínku modularity nahrazovat slabší podmínkou ortomodularity.

V třetí kapitole pak převedeme tento pohled do „řeči projektivních prostorů“. Jelikož projektivní prostory můžeme vytvářet projektivizací vektororových prostorů i axiomaticky, ukážeme si nejprve, jak spolu tato dvě zavedení souvisí pomocí Veblenovy-Youngovy věty. Za účelem zavedení operace negace z kvantové logiky zavedeme operaci involuce. Pomocí ní zavedeme dále skalární součin a vlastnost „ortogonality“ v projektivních prostorech. Tyto posledně jmenované struktury využijeme při formulaci a důkazu jedné implikace Birkhoffovy-von Neumannovy věty z [3].

1. Svazy

1.1 Základní vlastnosti svazů

Definice 1.1.1. *Částečně uspořádaná množina* je každá množina X, na které je zavedena binární operace $\leq$, která pro všechny prvky $x,\ y,\ z \in X$ splňuje

$$x \leq x \tag{1.1}$$

$$\text{Pokud } x \leq y \text{ a } y \leq x,\ \text{pak } x = y \tag{1.2}$$

$$\text{Pokud } x \leq y \text{ a } y \leq z,\ \text{pak } x \leq z \tag{1.3}$$

Poznámka 1.1.2. Vlastnost (1.1) označujeme jako reflexivitu, (1.2) jako antisymetrii a (1.3) jako tranzitivitu. Částečně uspořádané množina se anlicky označuje jako „poset“.

Poznámka 1.1.3. Pokud $x \leq y$ a zároveň $x \neq y$, pak píšeme $x < y$. Pro $x \leq y$ můžeme využít alternativního zápisu $y \geq x$.

Pro lepší představu o konečných částečně uspořádaných množinách můžeme vytvořit tzv. Hasseův diagram (viz 1.1). Zde je každý prvek z množiny reprezentován kruhem. Pokud je prvek y větší než prvek x, pak umístíme y nad x. Pokud neexistuje žádný prvek z takový, že $x < z < y$, spojíme x a y „hranou“.

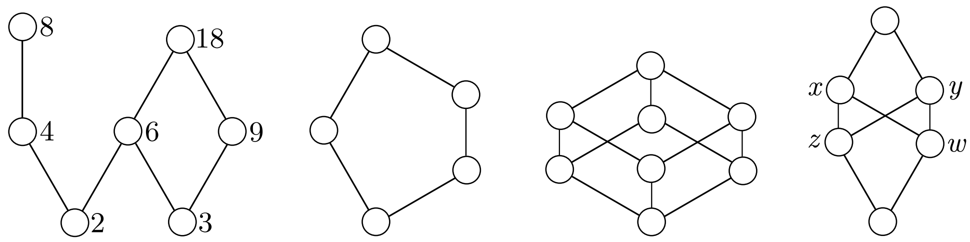


Diagram dělitelnosti na množině {2, 3, 4, 6, 8, 9, 18} $\qquad$ N_5 $\qquad$ 2^3 $\qquad$ P^6

Obrázek 1.1: Hasseovy diagramy částečně uspořádaných množin

Definice 1.1.4. *Univerzálnímí hranicemi* částečně uspořádané množiny X nazveme takové dva prvky $O, I \in X$, pro které pokud existují, platí pro všechna $x \in X$

$$O \leq x \tag{1.4}$$

$$x \leq I \tag{1.5}$$

Prvek O tedy označuje nejmenší prvek X a prvek I největší prvek X. Pokud by existovaly dva takové prvky O, $\tilde{O}$ splňující (1.4), pak dle (1.2) $O = \tilde{O}$. Obdobně pro I.

Poznámka 1.1.5. Částečně uspořádaná množina $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 18\}$ s operací $\leq$ jako dělitelností, jejíž Hasseův diagram je na 1.1, nemá ani největší ani nejmenší prvek. Částečně uspořádaná množina, která by měla největší a nejmenší prvek, by musela být tvořena na množině $\{2, 4, 8\}$ nebo na množině $\{3, 6, 9, 18\}$.

Poznámka 1.1.6. Jelikož jsme motivováni hledáním vhodné struktury pro kvantovou logiku, budeme tyto hranice dále značit jako $O = 0$ a $I = 1$ a o 0 uvažovat jako o vždy nepravdivém výroku a 1 jako o vždy pravdivém výroku.

Definice 1.1.7. *Svaz* je částečně uspořádaná množina L taková, že pro každé dva prvky $x,\ y \in L$ existuje právě jedna největší dolní závora $\inf\{x, y\}$ v L a právě jedna nejmenší horní závora $\sup\{x, y\}$ v L.

Tyto prvky budeme dále značit

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \tag{1.6}$$

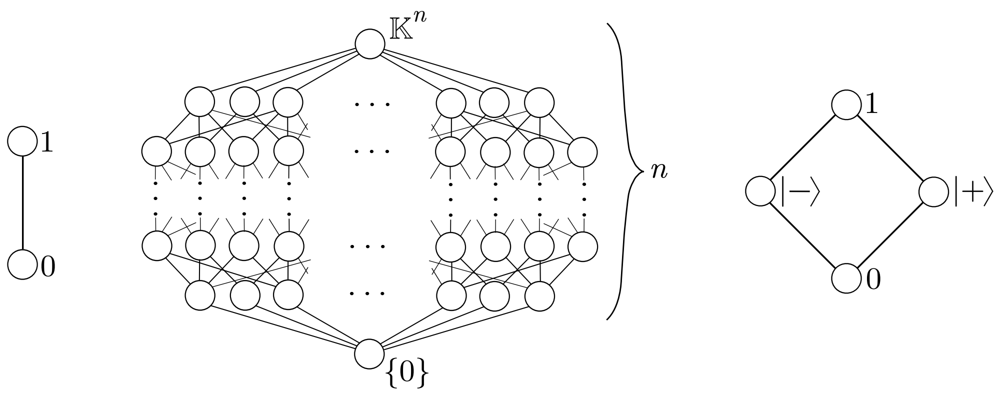
$$x \vee y = \sup\{x, y\} \tag{1.7}$$

Pokud pro všechny podmnožiny $D \subseteq L$ existují jejich univerzální hranice $\inf\{D\} \in D$ a $\sup\{D\} \in D$, pak se L nazývá *uzavřený* svaz.

Poznámka 1.1.8. Budeme říkat, že svaz L obsahuje *podsvaz* L', jestliže L' je podmnožina množiny L a tvoří svaz dle definice 1.1.7.

Poznámka 1.1.9. Pokud $x, y \in L$ odpovídají dvěma pozorovatelným fyzikálním veličinám, pak i $x \wedge y$ a $x \vee y$ odpovídají pozorovatelným fyzikálním veličinám. Tyto dva prvky by tak měly být rovněž obsaženy v L. Při hledání vhodné struktury pro kvantovou logiku, se tak budeme nadále zabývat pouze uzavřenými svazy.

Jak si můžeme nyní všimnout, jsou částečně uspořádané množiny na obrázku 1.1 označené jako N_5 a 2^3 svazy, zatímco P_6 není svaz, jelikož pro prvky x a y jsme schopni najít dva různé prvky odpovídající jejich dolní univerzální hranici (prvky z a w). Navíc jsme schopni pro prvky z a w najít i dva různé prvky odpovídající jejich horní univerzální hranici (prvky x a y).



Obrázek 1.2: Hasseovy diagramy svazů

Příklad 1.1.10. Několik příkladů svazů

1. Klasický výrokový počet (dále již jen KVP) pracující pouze se dvěma pravdivostními hodnotami může být reprezentován prvním svazem na obrázku 1.2. Vidíme, že operaci uspořádání $(0 \leq 1)$ zde odpovídá operace implikace $(0 \Rightarrow 1)$.

2. Mějmě množinu M a množinu všech jejích podmnožin označme 2^M. Spolu s operací inkluze ($\subseteq$) pak 2^M tvoří svaz, kdy infimum množiny $\mathcal{A}$ množin A_i splňuje
$$\inf \mathcal{A} = \bigcap_i A_i$$
a její supremum je
$$\sup \mathcal{A} = \bigcup_i A_i.$$
Univerzálními hranicemi pak jsou $O = \emptyset$ a $I = M$.

3. Nechť nad komutativním tělesem[1] $\mathbb{K}$ je vybudován vektorový prostor $\mathbb{K}^n$ a $L(\mathbb{K}^n)$ označuje množinu všech podprostorů prostoru $\mathbb{K}^n$. Lineárním obalem množiny A označme průnik všech podprostorů obsahujících A, neboli
$$\mathrm{Lin} A = \cap\{V \in L(\mathbb{K}^n) : A \subseteq V\}.$$
Potom definujíce $V \wedge W = V \cap W$ a $V \vee W = \mathrm{Lin}(V \cup W)$ se množina $L(\mathbb{K}^n)$ s operací „$\leq$" definovanou jako „$\subseteq$" svaz. Univerzálními hranicemi jsou $O = \{0\}$ a $I = \mathbb{K}^n$. Velmi schematický obrázek tohoto případu můžeme vidět na druhém svazu na obrázku 1.2.

4. Kvantově mechanický systém, který může nabývat pouze dvou hodnot a může být i v jejich libovolné kvantové superpozici, navýzáme qubit.[2] Takovýto fyzikální systém může být realizován například pomocí excitace elektronu, polarizací fotonu či spinem částice. Samostatný takový qubit před měřením můžeme reprezentovat třetím svazem na obrázku 1.2. Prvek 0 označuje výrok „částice nebude po měření v žádném ze stavů", prvek $|-\rangle$ označuje například výrok „částice bude mít z-ovou složku spinu $-\hbar/2$", $|+\rangle$ označuje výrok „částice bude mít z-ovou složku spinu $+\hbar/2$" a prvek 1 označuje výrok „částice bude v nějakém stavu".[3] Operaci „$\leq$" pak odpovídá porovnání pravděpodobností, že daný stav bude změřen.[4]

   Na tento fyzikální systém se můžeme nahlížet i z hlediska mnohasvětové interpretace. Ta každému výroku přiřadí množinu světů, ve kterém je tento výrok pravdivý (po uskutečnění měření). Proběhlo-li měření a my zjistili stav systému $|-\rangle$, pak prvku 0 můžeme přiřadit tvrzení „pravda v žádném světě", prvku $|-\rangle$ můžeme přiřadit „pravda v našem skutečném světě", prvku $|+\rangle$ tvrzení „pravda v alternativním světě" a prvku 1 tvrzení „pravda v nějakém světě". Tento přístup tak odpovídá čtyřhodnotové modální logice, kdy do klasického výrokového počtu přidáme operátory *nutnosti* a *možnosti* (více o modální logice viz [1]).

[1] Více v kapitole Projektivní geometrie.

[2] Zatímco matematicky principem superpozice rozumíme lineární kombinaci s konstantami a, b, zde musíme chápat princip superpozice kvantově, tedy s dodatečnou podmínkou $|a|^2 + |b|^2 = 1$

[3] Tento stav tedy můžeme zapsat ve tvaru $a\,|-\rangle + b\,|+\rangle$.

[4] Například pravděpodobnost změření stavu $|+\rangle$ je $|b|^2$. Tuto hodnotu ale nejsme schopni zjistit. Měřením můžeme dostat vždy pouze hodnotu $|-\rangle$ nebo $|+\rangle$.

Definice 1.1.11. *Morfismus svazů* je zobrazení

$$\varphi : (L, \wedge, \vee, \leq) \quad \rightarrow \quad (L', \wedge', \vee', \leq')$$

takové, že pro všechny prvky $x,\ y \in L$ platí

$$\text{Pokud } x \leq y, \text{ pak } \varphi(x) \leq \varphi(y) \tag{1.8}$$

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) \tag{1.9}$$

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \tag{1.10}$$

Lemma 1.1.12. Svaz systému podmnožin 2^M pro $|M| = 1$ (počet prvků množiny M je 1) je izomorfní s KVP a pro $|M| = 2$ je izomorfní se svazem pro spinové stavy samostatného qubitu (viz příklad 1.1.10).

Důkaz: Jelikož je počet prvků v těchto svazech konečný a poměrně malý, můžeme důkaz provést přímo výčtem tím, že převedeme jednotlivé prvky pomocí zobrazení φ.

Pro $|M| = 1$ ztotožníme 0 z KVP s $\emptyset$ z 2^M a 1 z KVP s M z 2^M.

Pro $|M| = 2$, kde prvky M označíme jako a, b, ztotožníme prvek 0 ze stavů qubitu s $\emptyset$ z 2^M, $|-\rangle$ s množinou $\{a\}$, $|+\rangle$ s množinou $\{b\}$ a prvek 1 s množinou $\{a, b\}$.

Jak vidíme, odpovídají uvedená ztotožnění definici 1.1.11.

□

Pro další snazší práci se svazy nyní ukážeme několik jejich vlastností.

Věta 1.1.13. Svaz $(L, \wedge, \vee, \leq)$ splňuje následující vlastnosti.

$$\textit{Idempotence} \quad x \wedge x = x,\ x \vee x = x \tag{1.11}$$

$$\textit{Komutativita} \quad x \wedge y = y \wedge x,\ x \vee y = y \vee x \tag{1.12}$$

$$\textit{Asociativita} \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \tag{1.13}$$

$$\textit{Kontrakce} \quad x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x \tag{1.14}$$

$$\textit{Konzistence} \quad x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y \tag{1.15}$$

Důkaz: Vlastnosti idempotence a komutativity přímo vyplývají ze zavedení svazu v definici 1.1.7. Asociativita vyplývá ze vztahu $x \wedge (y \wedge z) = \inf\{x, \{y, z\}\} = \inf\{x, y, z\} = \inf\{\{x, y\}, z\} = (x \wedge y) \wedge z$ a obdobného vztahu pro $x \vee (y \vee z) = \sup\{x, y, z\}$. Rovněž snadno nahlédneme, že z $x \leq y$ plyne $x \wedge y = x$, a obdobně naopak. Dále z $x \leq y$ plyne $x \vee y = y$ a naopak taktéž, což dokazuje konzistenci.

Pro důkaz kontrakce nejprve předpokládejme případ $x \leq y$ (z konzistence pak víme $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$). Vztah (1.14) se nám tak zjednodušší na tvrzení

$$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x \text{ z čehož } x \wedge y = x \vee x = x,$$

což je opět z konzistence pravda.

A obdobně případ $y \leq x$ ($\Leftrightarrow x \wedge y = y \Leftrightarrow x \vee y = x$) nám nejprve zjednoduší vztah (1.14) na

$$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x \text{ z čehož } x \wedge x = x \vee y = x,$$

což jak vidíme, opět platí. Pro obě možnosti tedy vztah (1.14) platí.

$\square$

Poznámka 1.1.14. Z věty 1.1.13 vidíme dále tyto dvě vlastnosti, které budeme dále nazývat *spojení.*

$$x \leq y,\ x \leq z \Longrightarrow x \leq y \wedge z \tag{1.16}$$

$$y \leq x,\ z \leq x \Longrightarrow y \vee z \leq x \tag{1.17}$$

Ukážeme si důkaz pouze pro (1.16), neboť pro (1.17) je obdobný.

Z předpokladů (1.16) a (1.15) vidíme

$$x \wedge y = x,\ x \wedge z = x$$

Pomocí (1.13) můžeme upravovat

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z = (x \wedge z) \wedge z = x \wedge (z \wedge z) = x \wedge z = x$$

To nám z (1.15) dává

$$x \leq y \wedge z$$

Věta 1.1.15. Svaz $(L, \wedge, \vee, \leq)$ splňuje pro všechny své prvky $x, y, z \in L$ tzv. *distributivní nerovnosti*

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{1.18}$$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \tag{1.19}$$

a pro $x \leq z$ tzv. *modulární nerovnost*

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z \tag{1.20}$$

Důkaz: Pro důkaz modulární nerovnosti vyjdeme ze vztahu konzistence. Díky němu víme, že vždy platí $x \leq x \vee y$ (pokud $x \leq y$, pak $x \vee y = y$, a pokud $x \geq y$, pak $x \vee y = x \geq x$). Spojením s podmínkou $x \leq z$ a znovu aplikováním konzistence získáváme $x \leq (x \vee y) \wedge z$. Ze vztahu konzistence dále víme, že vždy platí $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ (pokud $y \leq z$, pak $y \wedge z = y \leq y$, případně $y \geq z$ pak $y \wedge z = z \leq y$, kde nyní můžeme využít obdobně $y \leq x \vee y$). Jelikož je $y \leq x \vee y$, platí $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$. Jestliže jsou oba prvky x a $(y \wedge z)$ menší nebo rovny $(x \vee y) \wedge z$, vidíme, že

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

Pro důkaz distributivní nerovnosti využijeme již získaných poznatků. Víme, že platí $x \wedge y \leq x$, $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$. Odkud získáváme $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$. Obdobně z poznatků $x \wedge z \leq x$, $x \wedge z \leq z \leq y \vee z$ získáváme $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$. Jelikož je $x \wedge y$ i $x \wedge z$ menší než $x \wedge (y \vee z)$, získáváme výsledně

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$$

Obdobně se dokáže i druhá distributivní nerovnost.

$\square$

Dle věty (1.1.15) můžeme svazy dále rozdělit.

Definice 1.1.16. Svaz $(L, \wedge, \vee, \leq)$ nazýváme *modulární*, pokud pro všechny své prvky $x, y, x \in L$ splňuje

$$\text{Pokud } x \leq z, \text{ pak } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \tag{1.21}$$

Definice 1.1.17. Svaz $(L, \wedge, \vee, \leq)$ nazýváme *distributivní*, pokud pro všechny své prvky $x, y, z \in L$ splňuje

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{1.22}$$

Poznámka 1.1.18. V úvodu jsme zmiňovali případ z kvantové mechaniky, který ukazoval, že tato rovnost nemusí být splněna v důsledku Heisenbergových relací neurčitosti. Dalším příkladem z kvantové mechaniky, který ukazuje porušení této rovnosti můžeme najít v [3].

Uvažujme vlastnosti vlnové funkce v prostoru, který máme rozdělen na dva poloprostory rovinou φ. Prvek $y \in L$ bude označovat všechny vlnové funkce splňující „vlnová funkce je nenulová pouze na prvním poloprostoru“, prvek z vlnové funkce splňující „vlnová funkce je nenulová pouze na druhém poloprostoru“ a prvek x „vlnová funkce je symetrická vůči rovině φ“. Pak vidíme

$$x \wedge (y \vee z) = 1$$

Avšak

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0$$

Věta 1.1.19. Vztah (1.22) je ekvivalentní se vztahem

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \tag{1.23}$$

Neboli pokud platí vztah (1.22), pak platí i vztah (1.23), a naopak.

Důkaz: Vyjděme z levé strany (1.23) a postupně upravujme.

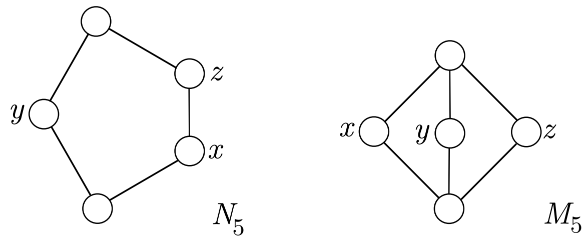
$$\begin{array}{rl}
\text{Kontrakcí (1.14)} & x \vee (y \wedge z) = [x \vee (x \wedge y)] \vee (y \wedge z) \\
\text{Asociativitou (1.13)} & [x \vee (x \wedge y)] \vee (y \wedge z) = x \vee [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \\
\text{Distributivitou(1.22)} & x \vee [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] = x \vee [y \wedge (x \vee z)] \\
\text{Kontrakcí (1.14)} & x \vee [y \wedge (x \vee z)] = [x \wedge (x \vee z)] \vee [y \wedge (x \vee z)] \\
\text{Distributivitou (1.22)} & [x \wedge (x \vee z)] \vee [y \wedge (x \vee z)] = (x \vee z) \wedge (x \vee y)\,,
\end{array}$$

čímž jsme ekvivalenci dokázali.

□

Nejjednodušší svaz, který *není modulární*, je svaz N_5 (viz obrázek 1.3). Při snaze ověřit platnost vztahu (1.21) snadno zjistíme, že platí pouze nerovnost (1.20). A obdobně nejjednoduššími *nedistributivními* svazy jsou svazy N_5 a M_5, což rovněž můžeme snadno ověřit dosazením jednotlivých prvků do vztahu (1.22).

Věta 1.1.20. Obsahuje-li svaz L podsvaz izomorfní s N_5, pak již automaticky není ani modulární ani distributivní. Obdobně obsahuje-li podsvaz izomorfní s M_5, pak automaticky není distributivní.



Obrázek 1.3: Nejjednodušší příklady nemodulárních a nedistributivních svazů

Věta 1.1.21. Svaz podprostorů konečně dimenzionálního vektorového prostoru je modulární.

Důkaz: Víme, že pro všechny svazy musí platit modulární nerovnost (1.20), tedy budeme dokazovat pouze druhou nerovnost, tj.

$$x \leq z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge z$$

Mějme tři podprostory U, V, W, kde $U \subseteq V$. Připomeňme si příklad 1.1.10, kde jsme definovali $V \wedge W$ jako $V \cap W$ a $V \vee W$ ztotožňovali s $\mathrm{Lin}\{V, W\}$.

Podprostor $\mathrm{Lin}\{U, W\} \cap V$ je tvořen prvky, které můžeme vždy vyjádřit jako $a = b + c$, kde $a \in V$, $b \in U$ a $c \in W$.

Jelikož jsou tyto prostory budovány nad tělesem, v němž je sčítání abelovská grupa, existuje v nich prvek inverzní při sčítání k b, prvek $-b \in U$, a tedy

$$c = -b + a$$

Víme, že prvek $a \in V$ a prvek $-b \in U \subseteq V$. Tedy i prvek $c \in V$, z čehož vidíme $c \in V \cap W$.

Prvek $a = b + c \in \mathrm{Lin}\{U, V \cap W\}$. Všechny prvky z $\mathrm{Lin}\{U, W\} \cap V$ tak jsou obsaženy v $\mathrm{Lin}\{U, V \cap W\}$. Pro $U \subseteq V$ tedy platí rovnost

$$\mathrm{Lin}\{U, W\} \cap V = \mathrm{Lin}\{W \cap V\}$$

Svaz vektorových podprostorů konečně dimenzionálního prostoru je tak modulární.

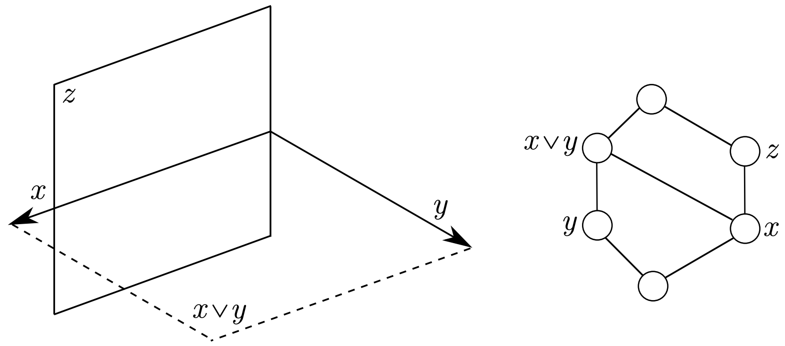
□

Přesto by se mohlo zdát, že lze na $L(\mathbb{K}^n)$ jednoduše vytvořit svaz, který obsahuje podsvaz izomorfní s N_5 (tedy by svaz na $L(\mathbb{K}^n)$ neměl být modulární).

Zjednodušeně lze uvažované podprostory tohoto prostoru vidět na obr. 1.4. Přímka x je obsažena v rovině z, čímž máme splněnu podmínku $x \leq z$. Přímka y má s x a z společný pouze podprostor $\{0\}$.

Ve vztahu pro modularitu svazu (1.21) však využíváme i prostor $x \vee y$, který tak musí být z definice ve svazu obsažen. Obsažen je i v tomto případě - jedná se o rovinu $x \vee y$. Hasseův diagram tohoto svazu (viz 1.4) však není izomorfní s N_5.

Poznámka 1.1.22. Případ ukázaný v 1.1.18 o vlastnostech vlnové funkce v prostoru odpovídá svazu M_5.



Obrázek 1.4: Svaz vektorových podprostorů

1.2 Vlastnosti svazů kvantové logiky

Jak je to však s modularitou a distributivitou v kvantové logice? Kvantovou logiku chceme budovat na Hilbertově prostoru. Jako výroky chceme brát Hilbertovy podprostory tohoto prostoru. V následující části si tak nejprve ujasníme, s čím musíme ztotožňovat operace $\wedge$ a $\vee$ v těchto prostorech, abychom stále pracovali s Hilbertovými podprostory. A dále si ukážeme podmínky na Hilbertův prostor, aby svaz jeho podprostorů byl modulární či distributivní.

Poznámka 1.2.1. Hilbertův prostor je pro nás úplný separabilní vektorový prostor se skalárním součinem. Úplností zde myslíme vlastnost, kdy každá cauchyovská posloupnost má v tomto prostoru svou limitu vůči metrice indukované skalárním součinem. Separabilní znamená, že obsahuje spočetnou hustou podmnožinu, což je však ekvivalnetní s existencí úplného ortonormální systému (viz například [5]).

Lemma 1.2.2. Mějme nekonečně dimenzionální Hilbertův prostor H a dva jeho nekonečně dimenzionální Hilbertovy podprostory A a B.[5] Množina

$$A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \tag{1.24}$$

nemusí být celým Hilbertovým podprostorem H.

Důkaz: Nekonečně dimenzionální separabilní Hilbertův prostor můžeme izomorfně ztotožnit s prostorem

$$H \cong l^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,\ a_n \in \mathbb{R}\}$$

Přičemž skalární součin v l^2 je dán

$$\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

Podprostory A, B si tak můžeme zkonstruovat jako

$$\begin{aligned} A &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l^2 \mid a_{2n} = 0\} \\ B &:= \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l^2 \mid b_{2n+1} = n b_{2n}\} \end{aligned}$$

[5]Neboli tyto dva prostory jsou oba opět Hilbertovy.

Z čehož vidíme, že $A \cap B = 0$ (neexistuje žádná taková posloupnost, krom $(0)_{n\in\mathbb{N}_0}$, která by patřila do A i B).

Nyní předpokládejme, že posloupnost $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \in A \oplus B$. To znamená, že

$$\frac{1}{n+1} = a_n + b_n$$

Z konstrukce A vidíme

$$\frac{1}{2n+1} = a_{2n} + b_{2n} = b_{2n}$$

Z toho dostáváme dle definice B předpis pro liché členy posloupností $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$b_{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

Avšak tato posloupnost není z l^2,[6] z čehož vidíme $A \oplus B \neq H$ a platí tedy pouze $A \oplus B \subsetneq H$.

□

Lemma 1.2.3. Prostor $A \oplus B$, kde A, B jsou z důkazu 1.2.2, obsahuje všechny posloupnosti s konečným nosičem.[7]

Důkaz: Představme si libovolnou posloupnost prvků $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s konečným nosičem. Pokud ji lze vyjádřit pomocí $A \oplus B$, pak nutně

$$f_n = a_n + b_n$$

Neboli

$$\begin{aligned} f_{2n} &= a_{2n} + b_{2n} = b_{2n} \\ f_{2n+1} &= a_{2n+1} + b_{2n+1} = a_{2n+1} + nb_{2n} = a_{2n+1} + nf_{2n} \end{aligned}$$

Z toho vidíme, že musí platit

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 0 \\ a_{2n+1} &= f_{2n+1} - nf_{2n} \\ b_{2n} &= f_{2n} \\ b_{2n+1} &= nf_{2n} \end{aligned}$$

Jelikož je nosič $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konečný, jsou takto vyjádřené posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v l^2. Posloupnosti s konečným nosičem jsou tak obsaženy v $A \oplus B$.

□

[6] Jelikož má být suma kvadrátů absolutních hodnot menší než $+\infty$, musí i suma kvadrátů lichých členů být menší než $+\infty$. My však vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 = \frac{1}{4} > 0$$

čímž je porušena nutná podmínka konvergence řady

[7] Tedy s pouze konečným počtem nenulových členů.

Lemma 1.2.4. Množina posloupností s konečným nosičem je hustá v prostoru l^2.

Důkaz: Mějme posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. Chceme nalézt posloupnost $(\gamma_n)_{n\in N}$ takovou, která pro $n \in M$: $a_n \neq 0$ a pro $n \notin M$: $a_n = 0$, kde M je konečná podmnožina $\mathbb{N}$, aproximuje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s přesností ε. Neboli

$$\| (a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \| < \varepsilon$$

Jelikož $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, pak dle Bolzano-Cauchyovy věty pro řady existuje nějaké n_0 takové, že

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2 < \varepsilon$$

Zvolme tedy posloupnost $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tak, že $\forall n < n_0 : \gamma_n = a_n$, $\forall n \geq n_0 : \gamma_n = 0$. Je tedy

$$\| (a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \| < \varepsilon$$

Jak vidíme, můžeme se tedy k libovolné posloupnosti z l^2 přiblížit s libovolnou přesností.

□

Shrňme předchozí lemmata v následující větě.

Věta 1.2.5. Pokud A, B jsou Hilbertovy podprostory prostoru H z důkazu 1.2.2, pak $\overline{A \oplus B}$ je celý Hilbertův prostor H

Důkaz: V 1.2.2 jsme si ukázali, že

$$A \oplus B \subsetneq H$$

Z 1.2.3 a 1.2.4 víme, že $A \oplus B$ obsahuje množinu, která je hustá v H. Tak i $A \oplus B$ je husté v H. Zároveň z předchozího lemmatu víme, že „zúplněním“ množiny posloupností s konečným nosičem získáváme H, tedy i zúplněním $A \oplus B$ získáme H, neboli

$$\overline{A \oplus B} = H$$

□

Jak tedy plyne z předchozí věty, pokud v kvantové logice (příslušném svazu) chceme pracovat s Hilbertovými podprostory, musíme definovat operace $\vee$ a $\wedge$ jinak, než jak jsme to učinili v třetím bodě příkladu 1.1.10.

Definice 1.2.6. Operaci „$\vee$“ v Hilbertových prostorech chápeme jako „$\hat{\oplus}$“, neboli

$$A \vee B = A \hat{\oplus} B = \overline{A \oplus B} = \overline{\{a + b \mid a \in A, b \in B\}} \tag{1.25}$$

Operaci $\wedge$ v Hilbertových prostorech chápeme jako $\cap$, neboli

$$A \wedge B = A \cap B = \{z \mid z \in A \wedge z \in B\} \tag{1.26}$$

Modulární identita (1.21) tak má pro Hilbertovské prostory podobu

$$\overline{A \oplus (B \cap C)} = \overline{(A \oplus B)} \cap C \tag{1.27}$$

Distributrivní identita (1.22) má pro Hilbertovské prostory podobu

$$A \cap \overline{(B \oplus C)} = \overline{(A \cap B) \oplus (A \cap C)} \tag{1.28}$$

Věta 1.2.7. Svaz podprostorů Hilbertova prostoru je modulární právě tehdy, když je tento Hilbertův prostor konečně dimenzionální.

Důkaz: Mějme v nekonečně dimenzionálním Hilbertově prostoru H úplnou ortonormální množinu vektorů $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tři Hilbertovy podprostory

$$\begin{aligned} A &:= \overline{\mathrm{Lin}\{\xi_{2n} + 10^{-n}\xi_1 + 10^{-2n}\xi_{2n+1} |\ n \in \mathbb{N}\}} \\ B &:= \overline{\mathrm{Lin}\{\xi_{2n} |\ n \in \mathbb{N}\}} \\ C &:= \overline{\mathrm{Lin}\{A \cup \{\xi_1\}\}} \end{aligned}$$

Podprostor A obsahuje vektory

$$\xi_2 + 10^{-1}\xi_1 + 10^{-2}\xi_3,\ \xi_4 + 10^{-2}\xi_1 + 10^{-4}\xi_5,\ \xi_3 + 10^{-3}\xi_1 + 10^{-6}\xi_7,\ \ldots$$

a podprostor B obsahuje vektory

$$\xi_2,\ \xi_4,\ \xi_6,\ \ldots$$

Jejich lineární kombinací

$$\eta_n = \left(\xi_{2n} + 10^{-n}\xi_1 + 10^{-2n}\xi_{2n+1}\right) - (\xi_{2n})$$

tak můžeme získat vektory

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 10^{-1}\xi_1 + 10^{-2}\xi_3 \\ \eta_2 &= 10^{-2}\xi_1 + 10^{-4}\xi_5 \\ \eta_3 &= 10^{-3}\xi_1 + 10^{-6}\xi_7 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Začneme-li z těchto vektorů vytvářet nové vektory

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{10^n \eta_n}{m} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\left(\xi_1 + 10^{-n}\xi_{2n+1}\right) = \xi_1 + \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} 10^{-n}\xi_{2n+1}.$$

Z uzavřenosti $\overline{A \oplus B}$ dostaneme, že i

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m \in \overline{A \oplus B} \tag{1.29}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty}\left(\xi_1 + \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} 10^{-n}\xi_{2n+1}\right) = \xi_1,$$

neboť

$$\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m\| \leq \lim_{m\to\infty} \|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} 10^{-n}\xi_{2n+1}\| \leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} 10^{-n}\|\xi_{2n+1}\| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} 10^{-n}\cdot 1 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\cdot\frac{10^{-1} - 10^{-(m+1)}}{1 - 10^{-1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1 - 10^{-m}}{9m} = 0$$

Tedy podprostor $\mathrm{Lin}\{\xi_1\} \subset \overline{A \oplus B}$.

Levá strana (1.27) tak má pro podprostory A, B, C hodnotu podprostoru

$$\overline{\overline{\mathrm{Lin}\{\xi_{2n} + 10^{-n}\xi_1 + 10^{-2n}\xi_{2n+1} |\ n \in \mathbb{N}\}} \oplus \left(\overline{\mathrm{Lin}\{\xi_{2n} |\ n \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{\mathrm{Lin}\{A, \xi_1\}}\right)} = \\ = \overline{A \oplus 0} = \overline{A} = A$$

zatímco pravá strana má hodnotu podprostoru

$$\overline{\left(\overline{\mathrm{Lin}\{\xi_{2n} + 10^{-n}\xi_1 + 10^{-2n}\xi_{2n+1} |\ n \in \mathbb{N}\}} \oplus \overline{\mathrm{Lin}\{\xi_{2n} |\ n \in \mathbb{N}\}}\right)} \cap \overline{\mathrm{Lin}\{A, \xi_1\}} \supseteq \\ \supseteq \overline{\mathrm{Lin}\{A, B, \xi_1\}} \cap \overline{\mathrm{Lin}\{A, \xi_1\}} \supseteq \overline{\mathrm{Lin}\{A, \xi_1\}} = C$$

Jelikož zřejmě $A \subsetneq C$, není splněn vztah (1.27) a svaz Hilbertových podprostorů Hilbertova prostoru tedy není modulární.

Svaz podprostorů konečně dimenzionálního Hilbertova prostoru je izomorfní se svazem lineárních podprostorů vektorového prostoru. O těch jsme si ukázali, že jsou modulární ve větě 1.1.21, čímž je naše věta dokázána.

□

Poznámka 1.2.8. Prostory A, B, C z důkazu 1.2.7 tvoří svaz izomorfní se svazem N_5.

Věta 1.2.9. Hilbertův prostor je distributivní právě tehdy, když je jednodimenzionální.

Důkaz: Ukážme, že již dvoudimenzionální Hilbertův prostor nesplňuje distributivní rovnost (1.28).

Nechť $\{\xi_n, n = 1, 2\}$ je ortonormální báze. Pak můžeme uvažovat i tři Hilbertovy podprostory

$$\begin{aligned} A &:= \mathrm{Lin}\{\xi_1\} \\ B &:= \mathrm{Lin}\{\xi_2\} \\ C &:= \mathrm{Lin}\{\xi_1 + \xi_2\} \end{aligned}$$

Jak vidíme, jsou všechny tři prostory generovány vektory, které jsou vždy po dvou navzájem lineárně nezávislé, tedy $A \cap B = A \cap C = B \cap C = 0$. Avšak

$$(A \oplus B) = (A \oplus C) = (B \oplus C) = \mathrm{Lin}\{\xi_1, \xi_2\}$$

Levá strana (1.28) je tak

$$A \cap (B \oplus C) = \mathrm{Lin}\{\xi_1\} \cap \mathrm{Lin}\{\xi_1, \xi_2\} = \mathrm{Lin}\{\xi_1\} = A$$

Zatímco pravá strana je

$$(A \cap B) \oplus (A \cap C) = 0$$

Jelikož $0 \subsetneq A$, není splněna distributivní rovnost (1.28).

Pouze pro prostor o pouze jedné dimenzi není možné takovéto prostory zkonstruovat, a jak se dá snadno ověřit, platít tam tak distributivní rovnost (1.28).

□

Poznámka 1.2.10. Prostory A, B, C z důkazu 1.2.9 tvoří svaz izomorfní se svazem M_5.

2. Logiky

Logiku budeme obecně chápat jako svaz, který má univerzální hranice, s další přidanou speciální operací - negací.

Definice 2.0.11. *Slabou negací* nazýváme zobrazení svazu L s univerzálním hranicemi 0 a 1

$$\begin{aligned} {}' : L &\rightarrow L \\ x &\rightarrow x' \end{aligned}$$

takové, že pro všechny prvky x, $y \in L$ platí následující vztahy

$$x \leq (x')' \tag{2.1}$$

$$\text{Pokud } x \leq y, \text{ pak } y' \leq x' \tag{2.2}$$

$$0' = 1 \text{ a } 1' = 0 \tag{2.3}$$

Objekt $(L,')$ pak označujeme jako *fuzzy logiku.*

Pokud je slabá negace navíc *bezesporná, tedy*

$$x \wedge x' = 0 \tag{2.4}$$

pak $(L,')$ *označujeme jako logiku a slabou negaci jako negaci.*

Poznámka 2.0.12. Vlastnost (2.1) se někdy nazývá jako slabá dvojitá negace, vlastnost (2.2) jako antitonní a vlastnost (2.3) jako Booleova hraniční podmínka.

Poznámka 2.0.13. Pro zjednodušení zápisu budeme $(x')'$ občas značit pouze jako x''.

Věta 2.0.14. Nechť svaz L se zobrazením $' : L \rightarrow L$ splňuje (2.1). Pak platí (2.2) právě tehdy, když platí pro všechna $x, y \in L$ tzv. *disjunktivní De Morganovo pravidlo*

$$x' \wedge y' = (x \vee y)' \tag{2.5}$$

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že platí vztah antitonie (2.2). Pak

$$\begin{aligned} \text{Z konzistence (1.15)} \qquad & x \leq x \vee y, \; y \leq x \vee y \\ \text{Z antitonie (2.2)} \qquad & (x \vee y)' \leq x', \; (x \vee y)' \leq y' \\ \text{Ze spojení (1.16)} \qquad & (x \vee y)' \leq x' \wedge y' \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \text{Z konzistence (1.15)} \qquad & x' \wedge y' \leq x', \; x' \wedge y' \leq y' \\ \text{Z antitonie (2.2)} \qquad & x \leq (x' \wedge y')\,, \; y \leq (x' \wedge y') \\ \text{Ze spojení (1.17)} \qquad & x \vee y \leq (x' \wedge y')' \\ \text{Z antitonie (2.2)} \qquad & (x \vee y)' \geq x' \wedge y' \end{aligned} \tag{2.7}$$

Spojením vztahů (2.6) a (2.7) získáváme

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

Nyní předpokládejme naopak platnost disjunktivního De Morganova pravidla (2.5). Pro $x \leq y$ víme z konzistence (1.15)

$$y = x \vee y$$

Z (2.5) víme

$$y' = (x \vee y)' = x' \wedge y'$$

Z konzistence pak vidíme $y' \leq x'$, tj. antitonie je splněna.

$\square$

Lemma 2.0.15. Pro svaz L se zobrazením $' : L \to L$ splňujícím (2.1) a (2.2) (resp. (2.5)) platí pro všechna $x, y \in L$ i tzv. *slabé konjunktivní De Morganova pravidlo*

$$x' \vee y' \leq (x \wedge y)' \tag{2.8}$$

Důkaz: Vyjděme z platnosti (2.5), pak

$$(x' \vee y')' = x'' \wedge y''$$

Jelikož $x \leq x''$ a $y \leq y''$ z (2.1), platí

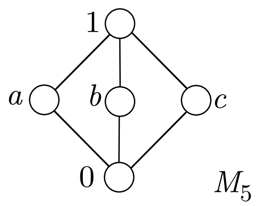
$$x \wedge y \leq x'' \wedge y'' = (x' \vee y')'$$

$\square$

Jednoduchým příkladem se dá ukázat, že rovnost v (2.8) nemusí nastávat, tj. konjunktivní De Morganovo neplyne z vlastností antitonie či z disjunktivního De Morganova pravidla.

Příklad 2.0.16. Mějme svaz M_5 viz obr. 2.9 a zaveďme na něm operaci negace

x	0	a	b	c	1
x'	1	c	0	a	0



Obrázek 2.1: Svaz logiky, v níž existují prvky, jež nesplňují rovnost ve (2.8)

Pak snadno nahlédneme, že jsou splněny všechny podmínky definice 2.0.11, tj. že platí vztah (2.2) i vztah (2.5). Avšak

$$x' \vee y' \neq (x \wedge y)'$$

Pouze

$$x' \vee y' < (x \wedge y)'$$

S následujícím přidáním podmínky $(x')' = x$ však již platí rovnost, jak se dále přesvědčíme.

Lemma 2.0.17. Fuzzy logika na svazu L splňující pro všechna $x \in L$ rovnost $x'' = x$ splňuje rovněž

$$x' \vee y' = (x \wedge y)' \tag{2.9}$$

Důkaz: Díky $(x')' = x$ ze vztahu (2.5) víme

$$(x' \vee y')' = x'' \wedge y'' = x \wedge y$$

čehož negací rovnou získáváme důkaz rovnosti.

□

Z toho ale získáváme pro logiku *zákon vyloučení třetího.*

Věta 2.0.18. Logika na svazu L splňující pro všechna $x \in L$ rovnost $(x')' = x$ musí splňovat také

$$x \vee x' = 1 \tag{2.10}$$

Důkaz: Z lemmatu 2.0.17 víme

$$x \vee x' = (x \wedge x')'$$

Jelikož se jedná o logiku (ne jen o fuzzy logiku), víme $x \wedge x' = 0$ a z definice fuzzy logiky víme, že $0' = 1$.

□

Tuto větu použijeme v následující kapitole.

2.1 Kvantová logika

Definice 2.1.1. *Kvantová logika* je logika splňující

$$\text{Pokud } x \leq y \text{ pak } x \vee (x' \wedge y) = y \tag{2.11}$$

Věta 2.1.2. Logika je kvantová právě tehdy, když

$$x'' = x \tag{2.12}$$

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že logika je kvantová. Pak můžeme ve vztahu (2.11) nahradit $y = x''$ (jelikož z (2.1) víme $x \leq x''$, je podmínka $x \leq y$ splněna), čímž získáváme

$$x \vee (x' \wedge x'') = x''$$

Jelikož se jedná o logiku, pak

$$x \wedge x' = x' \wedge x'' = 0$$

a tedy získáváme

$$x \vee 0 = x = x''$$

Nyní naopak předpokládejme $x = x''$. Pak máme dvě možnosti

- $x' \geq y$

  Pak z (1.15) víme $x' \wedge y = y$ a s předpokladem $x \leq y$ vidíme opět z (1.15) $x \vee y = y$, tedy
  $$x \vee (x' \wedge y) = y$$

- $x' \leq y$

  Pak s předpokladem $x \leq y$ získáváme $x \vee x' \leq y$. Ale z $x = x''$ s použitím (2.10) víme $x \vee x' = 1$ a tedy $y = 1$. Z čehož získáváme
  $$x \vee (x' \wedge y) = x \vee (x' \wedge 1) = x \vee x' = 1 = y$$

Pro obě možnosti tedy platí vztah definující kvantovou logiku.

$\square$

Příklad 2.1.3. V 1.1.10 jsme si ukázali, že množina podprostorů $L(\mathbb{K}^n)$ prostoru $\mathbb{K}^n$ s operacemi $\cap$, $\mathrm{Lin}\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ a $\subseteq$ tvoří svaz s univerzálními hranicemi $0 = \{0\}$ a $1 = \mathbb{K}^n$. Pokud definujeme operaci negace výroku jako ortogonální doplněk daného podprostoru $V \subseteq \mathbb{K}^n$, neboli
$$V' = V^{\perp} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid x \perp y,\ \forall y \in V\}$$
pak vidíme, že pro tuto operaci je splněno
$$V \wedge V^{\perp} = \{0\}$$
$$V \vee V^{\perp} = \mathbb{K}^n$$
Dále
$$\left(V^{\perp}\right)^{\perp} = V$$
nám z definice kvantové logiky a z věty 2.12 říká, že se jedná o kvantovou logiku, ve které platí rovnost v obou De Morganových pravidlech.

Poznámka 2.1.4. Jelikož svaz podprostorů vektorového prostoru konečné dimenze je modulární a je zde definována negace jako ortogonální doplněk, je podmínka (2.11) občas nazývána *ortomodulární identitou.* Stejně tak nazýváme (2.11) i v Hilbertových prostorech.

Nyní již vidíme, že množina Hilbertových podprostorů, včetně nekonečně dimenzionálního Hilbertova prostoru H, s operacemi $\cap$, $\hat{\oplus}$, $\subseteq$ a $^{\perp}$ tvoří kvantovou logiku s univerzálními hranicemi $0 = \{0\}$ a $1 = H$.

2.2 Současně pozorovatelné veličiny

Pokud o nějakých dvou veličinách v kvantové fyzice prohlásíme, že jsou současně měřitelné, pak to znamená, že změření hodnoty x jedné veličiny není změněno následným změřením hodnoty y druhé veličiny. Po opětovném změření první veličiny tak získáme x. A měření jsou tak prohoditelná (nezáleží na jejich pořadí).

Tato situace nastává například při změření nejprve z-tové složky spinu částice a následným změřením součtu kvadrátů velikostí spinů. Operátory reprezentující tato měření značme S_z a $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$, kde S_x, S_y a S_z značí po řadě operátory měření x-ové, y-ové a z-ové složky spinu částice.

Pokud naopak máme dvě měření, která se navzájem ovlivňují, pak nemůže nastat okamžik, kdy máme výsledky z obou měření. „Pravdivost“ vlastnění správného výsledku z prvního měření byla zničena druhým měřením v důsledku Heisenbergova principu neurčitosti. To nás vede k zavedení následující definice.

Definice 2.2.1. *Ortogonálními* nazýváme ty prvky x, y kvantové logiky L, které splňují zároveň

$$x \wedge y = 0, \quad x \leq y', \quad y \leq x'. \tag{2.13}$$

Značíme $x \perp y$.

Dva výroky x, y jsou *současně měřitelné*, pokud existují takové tři prvky u, v, w kvantové logiky L, že jsou splněny podmínky

$$u \perp v, \quad v \perp w, \quad u \perp w \tag{2.14}$$

$$u \vee v = x \quad \text{a} \quad v \vee w = y \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\text{Podsvaz budovaný na svazu prvků} \\ \{x, y, u, v, w, x', y', u', v', w'\} \text{ splňuje vztah (2.11)}\end{gathered} \tag{2.16}$$

Abychom dokázali jednoduše sestavit svaz splňující podmínky definice 2.2.1, ukažme si, že prvky u, v, w z této definice jsou dány jednoznačně pomocí x, y.

Věta 2.2.2. Pokud L je kvantová logika a u, v, w jsou dány pro současně měřitelné x a y dle definice 2.2.1, pak

$$u = x \wedge y' \tag{2.17}$$

$$w = x' \wedge y \tag{2.18}$$

$$v = x \wedge y = x \wedge (x' \vee y) = y \wedge (x \vee y') \tag{2.19}$$

Důkaz: Vzhledem k symetrii v určení x a y z u, v, w ukážeme důkaz pouze pro (2.17), pro (2.18) se dá dokázat analogicky.

Jelikož se jedná o kvantovou logiku, můžeme využít (2.5) a (2.9). Z definice 2.2.1 tak vidíme, že

$$y' = (v \vee w)' = v' \wedge w'$$

Předpokladem je $u \perp v$, z čehož víme $u \leq v'$, a $u \perp w$, odkud $u \leq w'$, tedy $u \leq v' \wedge w' = y'$. Dále víme $u \vee v = x$, což nám dává $u \leq x$. Výsledně pak získáváme první nerovnost

$$u \leq x \wedge y'$$

Pomocí vztahu (2.2) z toho dále získáváme $y \leq u'$, což můžeme využít jako podmínku ve vztahu určujícím kvantovou logiku (2.11)

$$y \leq u' \implies y \vee (y' \wedge u') = u'$$

Z určení x a y víme

$$u \vee y = u \vee (v \vee w) = u \vee [(v \vee v) \vee w] = (u \vee v) \vee (v \vee w) = x \vee y$$

Pro získání druhé nerovnosti tedy nyní již jen upravujme

$$x \wedge y' \leq (x \vee y) \wedge y' = (u \vee y) \wedge y' = [(u' \wedge y') \vee y]' = (u')' = u$$

Pro důkaz (2.19) nejprve z ortogonality $u \perp v$ vidíme $u \leq v'$ a jelikož se jedná o kvantovou logiku, můžeme to využít jako podmínku (2.11)

$$u \leq v' \Longrightarrow u \vee (u' \wedge v') = v'$$

Z (2.17) víme $u = x \wedge y' \Rightarrow u' = x' \vee y$, čímž získáváme

$$v = (x' \vee y) \wedge x$$

obdobně z ortogonality $w \perp v$ vidíme $w \leq v'$ a obdobně získáváme

$$v = (x \vee y') \wedge y$$

Poslední část (2.19) získáme z dvou nerovností. Nejprve jelikož víme $u \vee v = x$ a $v \vee w = y$ získáváme

$$v \leq x \wedge y$$

A dále z ortogonality u, v, w získáváme $u \leq v'$ a $w \leq v'$, to nám dává $u \vee w \leq v'$, což můžeme použít jako podmínku (2.11)

$$(u \vee w) \vee \left[(u \vee w)' \wedge v'\right] = v'$$

Negací a dosazením z (2.17) a (2.18)

$$[(x \vee y') \wedge (x' \vee y)] \wedge (x \vee y) = v$$

Z kontrakce (1.14) víme platnost

$$(x \vee y') = [(x \vee y') \wedge y] \vee y, \quad (x' \vee y) = [(x' \vee y) \wedge x] \vee x$$

a z již dokázaných částí rovnosti $v = (x' \vee y) \wedge x$, $v = (x \vee y') \wedge y$ tak víme

$$[(v \vee y) \wedge (v \vee x)] \wedge (x \vee y) = v$$

Z distributivní nerovnosti z věty 1.1.15 víme

$$[v \vee (x \wedge y)] \wedge (x \vee y) \leq [(v \vee y) \wedge (v \vee x)] \wedge (x \vee y)$$

A z modulární nerovnosti z věty 1.20

$$v \vee [(x \wedge y) \wedge (x \vee y)] \leq [v \vee (x \wedge y)] \wedge (x \vee y)$$

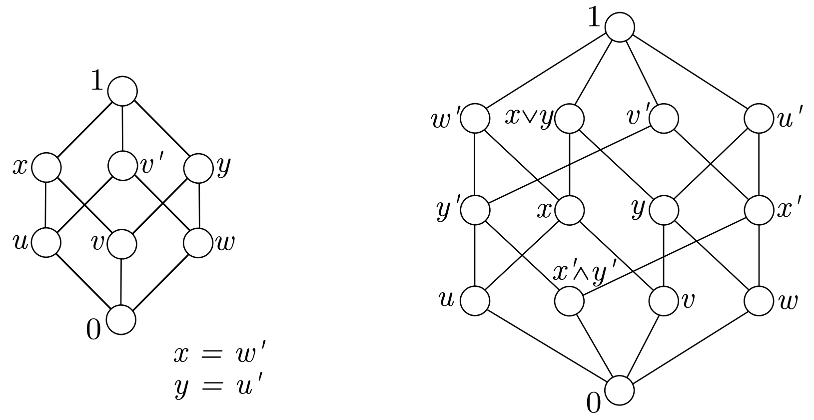
levou stranu však z asociativity (1.13) a kontrakce (1.14) můžeme upravit

$$v \vee [(x \wedge y) \wedge (x \vee y)] = v \vee [(x \wedge (x \vee y)) \wedge y] = v \vee (x \wedge y)$$

Výsledně tedy

$$(x \wedge y) \leq v \vee (x \wedge y) \leq v$$

což nám dává druhou hledanou nerovnost.



Obrázek 2.2: Logiky obsahující současně pozorovatelné x a y

□

Nyní, když už víme, jaké podmínky musí takováto logika splňovat, můžeme si zkontruovat několik příkladů, takových logik.

Velmi jednoduše bude vypadat logika, do které přidáme dodatečné předpoklady $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ a předpoklady $x = w', y = u'$, jak můžeme vidět na 2.2.

Svaz logiky, obsahující současně pozorovatelné prvky x a y, se bude jevit složitější (opět viz 2.2), pokud necháme pouze podmínky $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ a nebudeme žádné další prvky spolu ztotožňovat.

Z druhého, obecnějšího případu, však vidíme dobrou motivaci pro následující větu.

Věta 2.2.3. V kvantové logice L jsou x a y současně měřitelné právě tehdy, když

$$x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') \tag{2.20}$$

$$y = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y) \tag{2.21}$$

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že x a y jsou dané dle definice 2.2.1 a jsou současně měřitelné. Pak z (2.17) a (2.19) víme

$$u = x \wedge y', \quad v = x \wedge y' \Longrightarrow u \vee v = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$$

Ale ze zavedení $x = u \vee v$ získáváme

$$x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$$

a obdobně i (2.21).

Nyní naopak předpokládejme platnost (2.20) a (2.21). Pak si označme jednotlivé části

$$u = x \wedge y', \quad v = x \wedge y, \quad x' \wedge y = w$$

Ze splnění

$$(x \wedge y') \wedge (x \wedge y) = 0$$
$$x \wedge y' \leq y' \leq x' \vee y' = (x \wedge y)'$$

vidíme $u \perp v$. Obdobným způsobem můžeme ověřit i $u \perp w$ a $v \perp w$. Vztah (2.15) jsme splnili již označením částí (2.20) a (2.21). Ortomodularitu celého svazu pak můžeme jednoduše ověřit. Daná logika tak obsahuje současně měřitelné x a y.

□

Příklad 2.2.4. Ukažme si nyní několik příkladů kvantových logik.

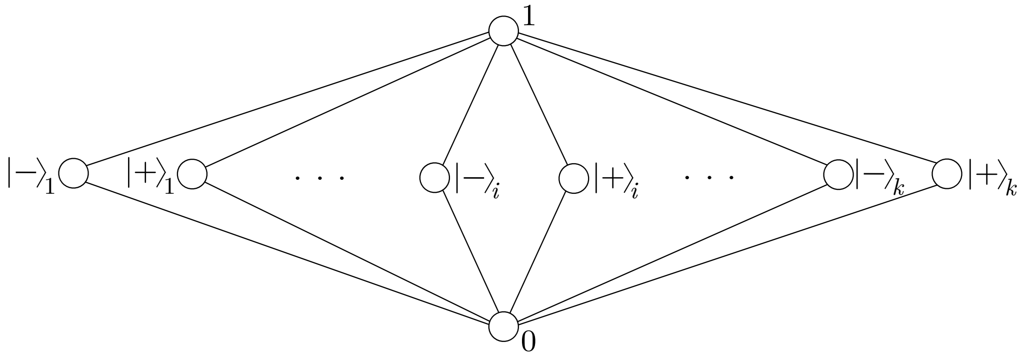
1. V příkladě 1.1.10 jsme si ukázali svaz odpovídající systému jednoho qubitu. Ukažme si, že tento svaz umožňuje zavedení kvantové logiky.

   Opačný výrok k „nebude změřen žádný stav“ je „bude změřen nějaký stav“. Z fyzikálního pohledu je rovněž jasné, že tvrzení „bude změřen stav $|+\rangle$“ je opačné k tvrzení „bude změřen stav $|-\rangle$“. Námi zavedená operace negace je tedy

x	0	$\lvert+\rangle$	$\lvert-\rangle$	1
x'	1	$\lvert-\rangle$	$\lvert+\rangle$	0

   Jak vidíme, jedná se o kvantovou logiku.

2. Předchozí příklad se dá dále rozvinout do tzv. kvantového registru (více viz [6]). V něm budeme uvažovat systém tvořený z k navzájem neinteragujících qubitů. Tento systém může reprezentovat například měření, při němž částice může vylétávat v k různých směrech a my zjišťujeme její orientaci spinu. Svaz totoho systému můžeme vidět na 2.3.



Obrázek 2.3: Svaz kvantové logiky tvořené k-qubity

   Operaci negace zavedeme obdobně jako v předchozím případě

x	0	$\lvert+\rangle_1$	$\lvert-\rangle_1$	$\dots$	$\lvert+\rangle_i$	$\lvert-\rangle_i$	$\dots$	$\lvert+\rangle_k$	$\lvert-\rangle_k$	1
x'	1	$\lvert-\rangle_1$	$\lvert+\rangle_1$	$\dots$	$\lvert-\rangle_i$	$\lvert+\rangle_i$	$\dots$	$\lvert-\rangle_k$	$\lvert+\rangle_k$	1

   Jak vidíme, opět se jedná o kvantovou logiku.

3. Projektivní geometrie

Projektivní geometrii je možné vymezit pomocí tří axiomů (jako v například [7]) přidaným k axiomům pro obecnou geometrii. Rovněž ji ale lze chápat jako zobrazení prostoru na rovinné „malířské“ plátno (jako v [8]), kde tento prostor obvykle chápeme jako vektorový prostor dimenze n nad komutativním (případně i nekomutativním) tělesem $\mathbb{R}$ (více o vlastnostech těchto objektů viz [9]).

3.1 Základní vlastnosti projektivní geometrie

Definice 3.1.1. *Těleso (Skew field)* je množina prvků $\mathbb{F}$ se dvěma binárními operacemi označenými $+, \cdot$ uzavřenými na $\mathbb{F}$, neboli

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

splňující pro všechy prvky $a, b, c \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}
+, \cdot \text{ jsou asociativní :} &\qquad a + (b + c) = (a + b) + c \\
&\qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \\
\text{pro } +, \cdot \text{ existují neutrální prvky :} &\qquad a + 0 = 0 + a = a \\
&\qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \\
+ \text{ je komutativní :} &\qquad a + b = b + a \\
\text{pro } \forall a \text{ existuje u operace} + \text{ inverzní prvek :} &\qquad a + (-a) = (-a) + a = 0 \\
\text{pro } \forall a \neq 0 \text{ existuje u operace} \cdot \text{ inverzní prvek :} &\qquad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \\
\cdot \text{ je distributivní k } + \text{ :} &\qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\
&\qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c
\end{aligned}$$

Definice 3.1.2. *Komutativním tělesem* nazýváme těleso, v němž je i druhá z binárních operací komutativní.

Poznámka 3.1.3. Jak vidíme, je $(\mathbb{F}, +, -, 0)$ abelovská grupa a $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa. Dohromady jsou pak svázané distributivním zákonem pro tělesa.

Definice 3.1.4. *Vektorový prostor nad tělesem* $\mathbb{F}$ je množina prvků V s operacemi

$$\begin{aligned}
\text{skalární násobení :} &\qquad \mathbb{F} \times V \to V \\
\text{vektorové sčítání :} &\qquad V \times V \to V
\end{aligned}$$

splňující pro všechny prvky $a, b \in \mathbb{F}$ a $u, v, w \in V$

- Vektorový prostor V s operací vektorového sčítání tvoří komutativní grupu

$$\begin{aligned}
+ \text{ je asociativní :} &\qquad u + (v + w) = (u + v) + w \\
\text{pro } + \text{ existuje neutrální prvek :} &\qquad v + \vec{0} = \vec{0} + v = v \\
+ \text{ je komutativní :} &\qquad v + w = w + v \\
\text{pro } \forall v \text{ existuje u operace} + \text{ inverzní prvek :} &\qquad v + (-v) = (-v) + v = \vec{0}
\end{aligned}$$

- Násobení skalárem je asociativní

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$$

- Pro všechny $v \in V$ při operaci násobení skalárem s neutrálním prvkem $\mathbb{F}$ platí

$$1 \cdot v = v$$

- Mezi násobením skalárem a vektorovým násobením platí distributivní vztahy

$$\begin{aligned} a \cdot (v + w) &= a \cdot v + a \cdot w \\ (a + b) \cdot v &= a \cdot v + b \cdot v \end{aligned}$$

Prvky $a \in \mathbb{F}$ pak zde nazýváme *skaláry* a prvky $v \in V$ *vektory.*

Potvrďme si, že existuje pouze jeden neutrální prvek. Pokud by totiž existovaly dva různé neutrální prvky $\vec{0}_1$ a $\vec{0}_2$, pak

$$\vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2$$

a tedy jsou tyto prvky totožné. Stejně tak vidíme, že pro každý prvek $v \in V$ existuje právě jeden inverzní prvek. Pokud by totiž existovaly pro prvek v dva různé inverzní prvky $v\,', v\,''$, pak

$$\begin{aligned} v\,' + v &= \vec{0} \\ v\,'' + v &= \vec{0} \\ \vec{0} + v\,' = (v\,' + v) + v\,' &= (v\,'' + v) + v\,' \\ (v\,'' + v) + v\,' &= v\,'' + (v + v\,') = v\,'' + \vec{0} \end{aligned}$$

Neboli

$$v\,'' = v\,'$$

Ještě si ujasněme, čemu se rovná $0 \cdot v$. Upravováním

$$v = 1 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = v + 0 \cdot v$$

a porovnáním s definicí neutrálního prvku $\vec{0}$ vidíme

$$0 \cdot v = \vec{0}$$

Poznámka 3.1.5. O vektorech $v_1, v_2, ...v_n$ prohlásíme, že jsou *lineárně nezávislé*, pokud

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

může být splněno pouze pro $\lambda_i = 0,\ i = 1, ...n$.

Jako *dimenzi* vektorového prostoru pak označujeme nejvyšší počet lineárně nezávislých vektorů, které jsou v něm obsaženy. Tyto vektory pak nazýváme *bází.*

Z Frobeniovy věty (viz například [9]) pro komutativní $\mathbb{F}$ víme, že dimenze daného prostoru V je vždy stejná, bez ohledu na množiny generátorů. Lze snadno nahlédnout, že pro obecné těleso platí Frobeniova věta také, a tak i pro něj je pojem dimenze dobře definován.

V tzv. aritmetickým vektorovým prostorem rozumíme n-dimenzionální vektorový prostor V_n složený z n těles $\mathbb{F}$, neboli

$$V_n = \underbrace{\mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \cdots \times \mathbb{F}}_{n} = \mathbb{F}^n$$

v němž vektor $v \in V_n$ vyjadřujeme jako

$$v = (v_1, v_2, ...v_n)$$

kde $v_i \in \mathbb{F}$. Sčítání dvou vektorů a skalární násobení pak definujeme pro vektory $u = (u_1, ...u_n), v = (v_1, ...v_n)$ po složkách jako

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + v_1, ...u_n + v_n) \\ v \cdot \lambda &= (v_1 \cdot \lambda, ...v_n \cdot \lambda) \end{aligned}$$

Z [9] víme, že každý vektorový prostor V dimenze n je izomorfní s aritmetickým vektorovým prostorem $V_n = \mathbb{F}^n$. Dále tedy budeme vše vyjadřovat pomocí $\mathbb{F}^n$. To nám usnadní orientaci - snadno poznáme těleso, nad kterým se „pohybujeme“, i dimenzi daného prostoru.

Definice 3.1.6. *n-rozměrným projektivním prostorem* vektorového prostoru $\mathbb{F}^{n+1}$ nazýváme množinu $P_n\mathbb{F}$ všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru $\mathbb{F}^{n+1}$. Neboli

$$P_n\mathbb{F} = \{\mathrm{Lin}\{v\} \mid v \in \mathbb{F}^{n+1}, v \neq \vec{0}\} \tag{3.1}$$

Prvky této množiny pak nazýváme *body* projektivního prostoru. Bod reprezentovaný vektorem v budeme dále značit jako $[v] \in P_n\mathbb{F}$.

Takto definovaný projektivní prostor budeme nazývat *aritmetický* projektivní prostor.

Poznámka 3.1.7. Povšimněme si, že pro $\lambda \neq 0$ jsou v a $\lambda \cdot v$ sice dva různé vektory, ale

$$[\lambda v] = [v]$$

V projektivním prostoru jsou tedy zobrazeny na stejný bod.

Definice 3.1.8. *Podprostorem v projektivním prostoru* $P_k\mathbb{F}$ myslíme obraz vektorového podprostoru $\mathbb{F}^{k+1}$ prostoru $\mathbb{F}^{n+1}$, $k+1 \leq n+1$, v projektivním prostoru $P_n\mathbb{F}$. Neboli

$$P_k\mathbb{F} = \{[v] \mid v \in \mathbb{F}^{k+1}\} \tag{3.2}$$

Podprostory projektivního prostoru o dimenzi 0 nazýváme *bod*, o dimenzi 1 nazýváme *přímka*, o dimenzi 2 *rovina* a o dimenzi $(n-1)$ *nadrovina.*

Poznámka 3.1.9. Pokud budeme projektovat podprostor $V \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$ o neznámé dimenzi, pak jeho projektivní prostor budeme značit $P(V)$.

Definice 3.1.10. *Projektivní prostor* P axiomaticky vymezujeme množinou prvků B s množinou $L \subset 2^B$, kde 2^B značí množinu podmnožin množiny B, a relací náležení $R \subseteq B \times L$[1] splňující následující axiomy

- Dva různé prvky $a, b \in B$ jsou vždy obsaženy v právě jednom prvku $p \in L$.
- Pokud pro různé prvky $a, b, c, d \in B$ existují prvky $p, q \in L$ tak, že $a, b \in p$, $c, d \in q$, pak existují $r, s \in L$ takové, že $a, c \in r$ a $b, d \in s$, a dále r, s mají společný prvek z B.
- Každý prvek z L obsahuje alespoň tři prvky z B.

Prvky množiny B nazýváme *body*, prvky množiny L nazýváme *přímky*.

Poznámka 3.1.11. Všimněme si, že nám tak podprostory v projektivním prostoru tvoří „řetězce", kde $\emptyset$ náleží bodu, bod náleží přímce, přímka náleží rovině … *Axiomatickou dimenzí projektivního prostoru* pak rozumíme délku nejdelšího takto vytvořeného řetězce, přičemž prostor s nejdelším řetězcem *bod-přímka* bereme jako jednodimenzionální.

Může se zdát, že rozdílné přístupy k zavedení projektivního prostoru aritmeticky a axiomaticky, dávají i rozdílné výsledky.

Věta 3.1.12. *(Veblenova-Youngova)* Každý axiomaticky zavedený projektivní prostor P s axiomatickou dimenzí $n \geq 3$ je izomorfní s nějakým aritmeticky zavedeným projektivním prostorem $P_n\mathbb{F}$.

Tuto větu nebudeme dokazovat. V případě zájmu se dá důkaz najít v [10]. Zde si ukážeme pouze jednu z implikací, a sice, že aritmetický projektivní prostor s dimenzí $n \geq 3$ je axiomaticky zavedený projektivní prostor.

Tvrzení 3.1.13. Dva různé body aritmetického projektivního prostoru jsou obsaženy v právě jedné přímce.

Důkaz: Mějme v projektivním prostoru $P_n\mathbb{F}$ dva různé body $[u], [v]$. Vektory $u, v \in V$, které je reprezentují pak musí být lineárně nezavislé. Tedy neexistuje $\lambda \in \mathbb{F}$ takové, aby $u = \lambda \cdot v$. V opačném případě by se nejednalo o dva různé body

$$[u] = [\lambda \cdot v] = [v]$$

Z lineární algebry pak víme, že lineární obal dvou lineárně nezávislých vektorů vytváří dvojdimenzionální prostor, jenž označme $U \subseteq V$. Projekce tohoto podprostoru $P(U)$ pak obsahuje oba body $[u], [v]$ a odpovídá definici přímky v (3.1.8).

Pokud by existoval další podprostor $U' \subseteq V$ vytvořený pomocí u, v, pak musí obsahovat i U. Podprostory U, U' jsou ale oba dvojdimenzionální, a tedy $U = U'$.

$\square$

Tvrzení 3.1.14. Dvě různé přímky projektivní roviny mají společný právě jeden bod z projektivního prostoru.

[1] Prvek $b \in B$ náleží prvku $l \in L$, neboli $b \in l$.

Důkaz: Projektivní rovina $P_2\mathbb{F}$ odpovídá prostoru $\mathbb{F}^3$. Každá z přímek v projektivním prostoru P_1U, P_1V odpovídá podprostorům U, V o dimenzi 2. Z lineární algebry pak víme

$$\dim\mathbb{F}^3 \geq \dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

Z toho vidíme

$$\dim(U \cap V) \geq 1$$

Zároveň však víme, že se jedná o dvojdimenzionální podprostory, tedy

$$\dim(U \cap V) \leq 2$$

Pokud by $\dim(U \cap V) = 2$, pak by se nejednalo o dva různé podprostory. Jedinou další možností[2] tedy je $\dim(U \cap V) = 1$. Projekce tohoto podprostoru $P(U \cap V)$ je pak hledaný společný bod.

□

Tvrzení 3.1.15. Každá přímka z aritmetického projektivního prostoru obsahuje alespoň tři různé body.

Důkaz: Přímka $P_1\mathbb{F}$ odpovídá dvojdimenzionálnímu podprostoru $\mathbb{F}^2$. V dvojdimenzionálním prostoru musí existovat dva lineárně nezávislé vektory u, v. Z nich jsme schopni získat ještě třetí vektor $w = u + v$. Takto jsou každé dva vektory po dvou lineárně nezávislé.

Tyto tři vektory se nám pak zobrazí na body $[u], [v], [w]$, které musí být různé, neboť

$$u \neq \lambda \cdot v,\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \Longrightarrow [u] \neq [v]$$
$$u \neq \lambda \cdot w,\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \Longrightarrow [u] \neq [w]$$
$$v \neq \lambda \cdot w,\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \Longrightarrow [v] \neq [w]$$

□

Příklad 3.1.16. Příklady projektivních prostorů na tělesech

1. Zbytková třída $\mathbb{Z}_2 = \{[a]_2 | a \in \mathbb{Z}\}$, kde $[a]_2 = \{b | b = a \pmod{n}\}$, tvoří komutativní těleso, kde operaci $+$ definujeme jako

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0 \\ 0+1 = 1+0 &= 1 \\ 1+1 &= 0 \end{aligned}$$

a operaci $\cdot$ definujeme jako

$$\begin{aligned} 0\cdot 0 &= 0 \\ 0\cdot 1 = 1\cdot 0 &= 0 \\ 1\cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

Což můžeme udělat alternativně pomocí tzv. Cayleyho tabulek

[2] Jelikož dimenze vektorového prostoru může nabývat pouze hodnot z $\mathbb{N}_0$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Na tomto tělese pak můžeme vytvořit vektorový prostor $V_1 = \mathbb{Z}_2$ a dále jeho projektivní prostor $P_0\mathbb{Z}_2$. Jak vidíme, bude tebnto projektivní prostor obsahovat pouze jeden bod.

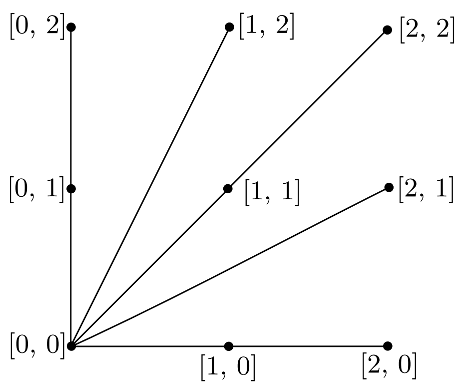
2. Zbytková třída $\mathbb{Z}_3$ tvoří komutativní těleso s operacemi definovanými jako

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Na tomto tělese pak můžeme vytvořit vektrorový prostor $V_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Projektivní prostor $P_1(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ má pouze pět různých bodů ležících na jedné přímce.

Na obr. 3.1 vidíme prvky prostoru V_2, jež značíme $[a_1, a_2]$, kde $a_i \in \mathbb{Z}_3$, které jsou zde spojeny v případě, že se zobrazují na jeden společný bod v projektivním prostoru.



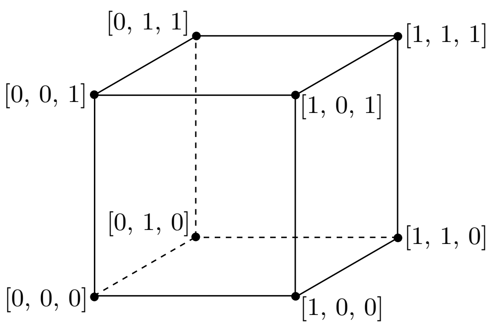
Obrázek 3.1: Vektorový prostor $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

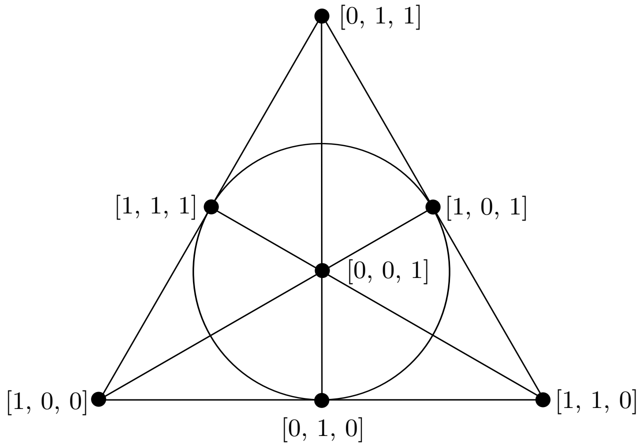
3. Vektorový prostor $V_3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ si můžeme představit jako sedm vektorů směřujících do vrcholů krychle na 3.2. Projektivní rovina tohoto prostoru je $P_2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, jinak nazývaná též Fanova rovina[11].

Jak vidíme, leží na každé přímce v projektivním prostoru vždy tři body. Znamená to tedy, že místo očekávaných 21 přímek, vidíme pouze 7 přímek. To není tak překvapivé, když si uvědomíme, co jsou přímky v projektivním prostoru.

Rovina daná body $[0,0,0],[1,0,0],[1,1,1]$, která se zobrazí na přímku spojující body $[1,0,0],[1,1,1]$, je totožná s rovinou $[0,0,0],[0,1,1],[1,1,1]$, která se zobrazí na přímku spojující body $[0,1,1],[1,1,1]$. Přímka spojující $[1,0,0],[1,1,1]$ tedy musí obsahovat i bod $[0,1,1]$.

Za upozornění stojí rovina procházející body $[0,0,0],[1,0,1],[0,1,1]$. Tato rovina obsahuje i bod „$[1,1,2]$“$= [1,1,0]$.





Obrázek 3.2: Vektorový prostor $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a jeho projektivizace - Fanova rovina

3.2 Vztah projektivní geometrie ke kvantové logice

Nyní se nabízí otázka (viz [3]), zda mohou mít takovéto projektivní prostory s nějakou další přidanou operací stejnou strukturu jako svazy s operací negace. Jinými slovy, zda je můžeme izomorfně ztotožnit.

Pro zodpovězení této otázky zkusíme nejprve najít vhodnou operaci na projektivních prostorech.

Definice 3.2.1. *Involucí* na tělese $\mathbb{F}$ rozumíme zobrazení

$$^{-} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \tag{3.3}$$

splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{F}$

$$\overline{(\overline{x})} = x \tag{3.4}$$
$$\overline{(x+y)} = \overline{x} + \overline{y} \tag{3.5}$$
$$\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x} \tag{3.6}$$

Díky tomuto zobrazení můžeme definovat novou operaci.

Definice 3.2.2. *Skalární součin* dvou vektorů $u = (u_1, ...u_n), v = (v_1, ...v_n) \in \mathbb{F}^n$ definujeme jako

$$(u, v) = \overline{u_1} \cdot v_1 + ... + \overline{u_n} \cdot v_n \tag{3.7}$$

Z toho vidíme jeho následující vlastnosti

$$(u, v) \quad = \quad \overline{(v, u)} \tag{3.8}$$
$$(u, \lambda \cdot v) = (u, v) \cdot \lambda \quad \text{a} \quad (\lambda \cdot u, v) = \overline{\lambda} \cdot (u, v) \tag{3.9}$$
$$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2) \quad \text{a} \quad (u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \tag{3.10}$$
$$(v, v) = \overline{(v, v)} = 0 \iff v_1 = v_2 = ... = v_n = 0 \tag{3.11}$$

Nyní už vidíme, jak by mohla vypadat ona hledaná vhodná operace.

Definice 3.2.3. Dva vektory $u, v \in \mathbb{F}^n$ prohlásíme za *ortogonální*, pokud

$$(u, v) = 0 \tag{3.12}$$

Značíme $u \perp v$. Pokud

$$(u, v) \neq 0 \tag{3.13}$$

pak je označíme za lineárně závislé

Věta 3.2.4. Vlastnost $\perp$ je symetrická, neboli pokud $u \perp v$, pak i $v \perp u$.

Důkaz: Předpokládejme $u \perp v$, pak

$$\begin{aligned} 0 &= (u, v) = \overline{(v, u)} \\ \overline{0} &= \overline{\overline{(v, u)}} = (v, u) \\ 0 &= (v, u) \end{aligned}$$

kde jsme využili $\overline{0} = 0$, což snadno zjistíme ze vztahu (3.5) při dosazení 0 za jeden z členů.

□

Dále vidíme, že se nám tato vlastnost přenáší i do projektivního prostoru $P_{n-1}\mathbb{F}$.

Věta 3.2.5. Jsou-li dva vektory $u, v \in \mathbb{F}^{n+1}$ ortogonální, pak jsou ortogonální i jim příslušné body v projektivním prostoru $P_n\mathbb{F}$.

Důkaz: Jestliže jsou u, v ortogonální, pak

$$(u, v) = 0$$

což si ovšem můžeme upravit

$$0 = \overline{\alpha} \cdot 0 \cdot \beta = \overline{\alpha} \cdot (u, v) \cdot \beta = (\alpha \cdot u, \beta \cdot v)$$

Jak tedy vidíme, jsou všechny prvky z $\{\mathrm{Lin}\{u\} \mid u \in \mathbb{F}^{n+1}, u \neq \vec{0}\}$ kolmé na všechny prvky $\{\mathrm{Lin}\{v\} \mid v \in \mathbb{F}^{n+1}, v \neq \vec{0}\}$.

□

O bodech v projektivním prostoru tak můžeme prohlásit, že jsou na sebe kolmé.

Věta 3.2.6. *(Jedna z implikací Birkhoffovy-von Neumannovy věty)* Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze $n+1 \geq 3$ nad tělesem $\mathbb{F}$ s involucí

$$\bar{} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$$

Množina všech podprostorů projektivního prostoru $P_n\mathbb{F}$ s operacemi $\cap$, $\mathrm{Lin}\{\cdot, \cdot\}$, $\perp$ tvoří svaz kvantové logiky L s operacemi $\wedge, \vee, '$.

Důkaz: Jak víme z věty 3.2.5, můžeme v $P_n\mathbb{F}$ zvolit bod a_1 a hledat všechny body $P_n\mathbb{F}$, jež jsou k tomuto bodu ortogonální. Tyto body nám vytvoří projektivní podprostor $B_1 \cong P_{n-1}\mathbb{F}$ projektivního prostoru $P_n\mathbb{F}$. Bod a_1 nám vytvoří projektivní podprostor $A_1 = \{a_1\} \cong P_0\mathbb{F}$. Touto konstrukcí jsme tak našli podprostory A_1 a B_1 splňující

$$\begin{aligned} A_1 \cap B_1 &= \emptyset \\ \mathrm{Lin}\{A_1, B_1\} &= P_n\mathbb{F} \end{aligned}$$

V podprostoru B_1 však můžeme najít další bod a_2 a k němu v projektivním prostoru B_1 hledat všechny ortogonální body. Ty nám vytvoří nový podprostor $B_2 \cong P_{n-2}\mathbb{F}$. Z bodů a_1, a_2 můžeme vytvořit podprostor $A_2 = \mathrm{Lin}\{a_1, a_2\} \cong P_1\mathbb{F}$. Opět vidíme

$$\begin{aligned} A_2 \cap B_2 &= \emptyset \\ \mathrm{Lin}\{A_2, B_2\} &= P_n\mathbb{F} \end{aligned}$$

Tímto způsobem zřejmě dokážeme vytvořit libovolný podprostor $C \cong P_k\mathbb{F}$ z $k+1$ navzájem ortogonálních bodů $\{a_1, a_2, ...a_{k+1}\}$ a podprostor $C^\perp \cong P_{n-k-1}\mathbb{F}$, jehož každý bod je ortogonální ke každému bodu z C. Neboli

$$C \cap C^\perp = \emptyset \tag{3.14}$$

$$\mathrm{Lin}\{C, C^\perp\} = P_n\mathbb{F} \tag{3.15}$$

Pokud pro $C, D \subseteq P_n\mathbb{F}$ platí $C \subseteq D$, pak $D^\perp \subseteq C^\perp$. Dále vidíme $C \subseteq \left(C^\perp\right)^\perp$ a $P_n\mathbb{F}^\perp = \emptyset$, $\emptyset^\perp = P_n\mathbb{F}$.

Projektivní prostory dimenze $n \geq 3$ tak splňují vlastnosti kvantové logiky.

$\square$

Je tak možné vzít libovolné těleso $\mathbb{F}$, definovat na něm involuci umožňující zavést skalární součin, čímž získat vhodný způsob pro vyjádření ortogonálních doplňků, a poté pro libovolnou konečnou dimenzi n vytvořit $P_n\mathbb{F}$ splňující vlastnosti kvantové logiky.

Poznámka 3.2.7. Platí dokonce tzv. Birkhoffova-von Neumannova věta, v níž platí i opačná implikace v 3.2.6 (viz [3]).

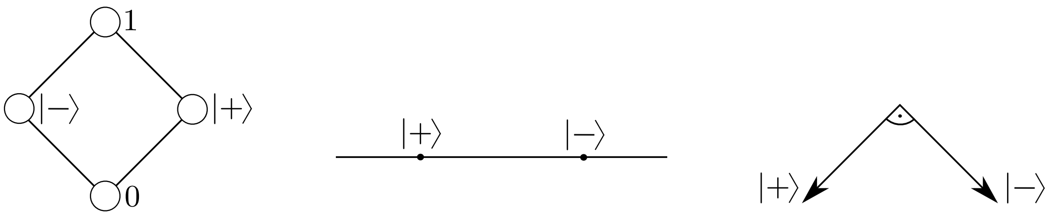
Příklad 3.2.8. Na závěr ukažme několik příkladů, které ukazují oba možné pohledy.

1. Jak jsme si ukázali již v příkladě 1.1.10 a 2.2.4, můžeme systém sestávající se z jednoho qubitu reprezentovat kvantovou logikou na svazu L. Pokusme se nyní k této kvantové logice najít příslušný projektivní prostor $P(V)$ a jemu příslušný vektorový prostor V.

   Celý svaz obsahuje pouze čtyři prvky. Prvek $0 \in L$ ztotožníme s $\emptyset \in P(V)$ a prvek $1 \in L$ s celým projektivním prostorem $P(V)$. Pro oba zbylé prvky svazu ($|+\rangle$ a $|-\rangle$) platí, že neexistuje žádný jiný prvek $z \in L, 0 < z < |+\rangle$ či $0 < z < |-\rangle$. Proto tyto prvky svazu ztotožníme s body v projektivním prostoru.

   „Projektivní prostor“ $P(V)$ je tak přímka obsahující dva body, což můžeme vidět graficky znázorněné na 3.3. Takovýto projektivní prostor ale nesplňuje axiomatické zavedení, neboť přímka v tomto prostoru neobsahuje alespoň tři body. Jedná se o tzv. degenerovaný případ z hlediska axiomatického zavedení projektivní geometrie.

   Z hlediska aritmetického zavedení projektivní geometrie ale nemusí nastat problém, neboť věta 3.1.12 izomorfně ztotožňuje aritmetické a axiomatické projektivní prostory až od dimenze $n \geq 3$. Zkusme tedy najít vektorový prostor takový, aby jeho projektivní prostor odpovídal našim požadavkům.



Obrázek 3.3: Svaz a „projektivní prostor“ odpovídající qubitu

   Hledáme tak vektorový prostor nad konečným tělesem $\mathbb{F}$ o dvou navzájem ortogonálních vektorech. Z [9] víme, že každé konečné těleso je izomorfní s nějakou zbytkovou třídou $\mathbb{Z}_p$. Proto stačí vyšetřovat pouze zbytkové třídy.

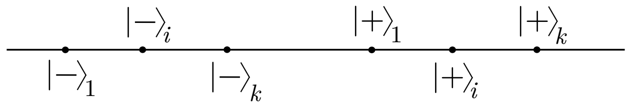
   Jak jsme viděli v 3.1.16, je $V = \mathbb{Z}_2$ nedostačující, protože projektivní prostor $P_0\mathbb{Z}_2$ obsahuje pouze jeden bod. Projektivní prostor $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ obsahuje již tři různé body (dle značení z 3.1.16 se jedná o body $[0,1], [1,0], [1,1]$). Uvažujme tedy ještě o prostoru $V = \mathbb{Z}_3$ nad $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$.

   Tento prostor sice obsahuje dva různé vektory $u = 1,\ v = 2$, ale ty se zobrazují v projektivním prostoru na totožný bod

$$[u] = [2 \cdot u] = [v],\ 2 \in \mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$$

   Prostor $V = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ pak obsahuje opět již příliš mnoho bodů. Pro jeden samostatný qubit jsme tedy schopni sestavit pouze kvantovou logiku na svazu L, ne však již projektivní prostor $P(V)$.

2. V příkladě 2.2.4 jsme si dále ukázali kvantovou logiku pro kvantový registr. Obdobný způsobem jako v předchozím bodě dojdeme k předpokladu, že by projektivní prostor $P(V)$ měl obsahovat $2k$ různých bodů na přímce, kde tato přímka je již celý projektivní prostor $P(V)$. Tento případ můžeme vidět na 3.4.



Obrázek 3.4: Projektivní prostor odpovídající svazu kvantového registru

Pro $k \geq 2$ již tento systém splňuje axiomy projektivního prostoru. Axiomatická dimenze je však $n = 1$ a tedy nemusí existovat vektorový prostor nad nějakým tělesem $\mathbb{F}$, jehož projektivní prostor by vyhovoval požadavkům.

3. Pro myšlenkové experimenty vytvořené D. J. Foulisem a C. H. Randallem (více viz [6]) můžeme vytvořit kvantovou logiku.

   Při těchto experimentech nejprve zjišťujeme, zda byla detekována částice. Pokud nebyla, je výstupní hodnota obou experimentů n. Pokud byla detekována, zjišťujeme v experimentu A její polohu na x-ové ose - pro například pozice $x \geq 1$ označme výstupní hodnotu r, pro $x < 1$ označme výstupní hodnotu l. V experimentu B obdobným způsobem zjišťujeme hybnost částice v x-ové složce - výstupní hodnotu pro $p_x \geq 1$ označme jako f a výstupní hodnotu pro $p_x < 1$ označme jako s.

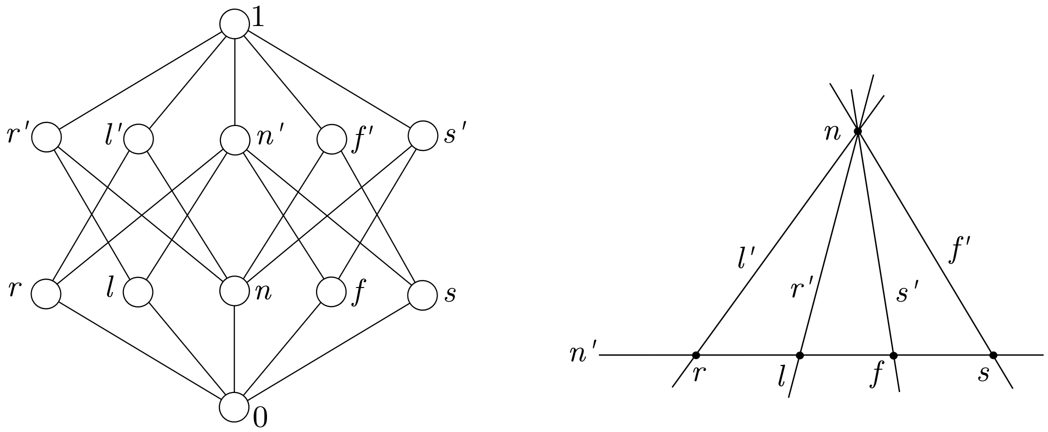
   Tyto čtyři hodnoty spolu s hodnotami 0 a 1 ale stále netvoří svaz. Například zde není hodnota, která by vyjadřovala stav „byla detekována částice“. Tento stav v sobě „obsahuje“ všechny čtyři případy (r, l, f, s) a je to opačný výrok k n. Uvažujme tedy i tuto hodnotu. Označme ji n'. Víme, že musí platit

$$r \leq n', \ l \leq n', \ f \leq n', \ s \leq n'$$
$$n \wedge n' = 0$$
$$n \vee n' = 1$$

   Obdobným způsobem doplníme $0, n, r, l, f, s, n', 1$ o hodnoty r', l', f', s'. Tak nám vznikne svaz znázorněný na 3.5.

   A obdobným způsobem jako v předchozích příkladech pro samostatný qubit a kvantový registr vytvoříme „projektivní prostor“ $P(V)$, který je rovněž možno vidět na 3.5. Tento projektivní prostor je dimenze $n < 3$ a tedy není splněna podmínka Veblenovy-Youngovy věty 3.1.12.

   Jelikož existují v tomto projektivním prostoru přímky, jež neobsahují tři různé body, nejedná se dle axiomatické definice o projektivní prostor. Při hledání vhodného tělesa pro splnění podmínek aritmetického zavedení projektivního prostoru můžeme zjistit, že žádný z prostorů vytvořených nad zbytkovými třídami nevyhovuje. Zde je dobré podotknout, že se dá ukázat (viz [9]), že nad zbytkovou třídou $\mathbb{Z}_p$ můžeme vytvořit těleso, pouze pokud je p prvočíslo. $\mathbb{Z}_p$ pro neprvočíselné p totiž obsahuje prvky $a \neq 0, b \neq 0$ takové, že $a \cdot b = 0$.



Obrázek 3.5: Svaz kvantové logiky pro Foulisovy-Randallovy myšlenkové experimenty

V těchto několika příkladech jsme si tak ukázali, že kvantová logika nemusí být „převeditelná do řeči projektivní geometrie“.

Seznam použité literatury

[1] Jaroslav Peregrin: *Logika a logiky.* Praha: Academia, 2004. ISBN 80-200-1187-0.

[2] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew L. Sands: *The Feynman lectures on physics.* Vol. 3: Quantum mechanics. London: Addison Wesley Publishing Co., 1971. ISBN 0-201-02118-8.

[3] Garrett Birkhoff, John Von Neumann: *The Logic of Quantum Mechanics.* Annals of Mathematics, Second Series. Princeton: Annals of Mathematics, 1936. ISSN 0003-486X.

[4] Andreas de Vries: *Algebraic hierarchy of logics unifying fuzzy logic and quantum logic.* Lecture notes. Cornell University Library, 2007.

[5] Reinhold Meise, Dietmar Vogt: *Introduction to Functional Analysis.* Oxford: Clarendon Press, 1997. ISBN 0-19-851485-9.

[6] Karl Svozil: *Quantum Logic.* Singapore: Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd., 1998. ISBN 981-4021-07-5.

[7] László Rédei: *Foundation of Euclidean and non-Euclidean geometries according to F. Klein.* Budapest: Akadémiai Kiadó, 1968. ISBN 0-08-011965-4.

[8] Veeravalli S. Varadarajan: *Geometry of Quantum Theory.* Second Edition. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1970. ISBN 0-387-96124-0.

[9] Serge Lang: *Algebra.* Revised Third Edition New York: Springer-Verlag, 2002. ISBN 0-387-95385-X

[10] Oswald Veblen, John W. Young: *Projective geometry.* Vol. 1 New York: Ginn and Company, 1910 ISBN 1-4365-6440-9.

[11] Mary Katherine Bennett: *Affine and Projective Geometry.* New York: John Wiley & Sons, 1995. ISBN 0-471-11315-8.