Posudek na bakalářskou práci Katrin Přikrylové:

Pojem ideálu a filtru v algebře a logice

Bakalářská práce Katrin Přikrylové podává základní přehled teorie ideálů a filtrů v algebře a logice. Zaměřuje se přitom zejména na ty partie, které jsou důležité pro studenty logiky, jimž je text primárně určen. První kapitola je věnována okruhům a ideálům v okruzích. Obsahuje základní definice a důkazy důležitých vět včetně vět o isomorfismu. Druhá kapitola pojednává o ideálech a filtrech ve svazech, a to především v Booleových algebrách. Podává mj. důkaz základní věty o ultrafiltrech a Stoneovy věty o reprezentaci a ukazuje vztah mezi Booleovými algebrami a Booleovými okruhy. Ve třetí kapitole jsou zavedeny a studovány Lindenbaum-Tarského algebry a pomocí nich je méně známým způsobem dokázána věta o úplnosti výrokové logiky. Poslední kapitola pak ukazuje, jakým způsobem byl do matematiky zaveden pojem *ideál.*

Cílem práce nebylo podat nové matematické výsledky, ale zprostředkovat studentům, kteří jsou na začátku studia logiky a matematiky, základní poznatky týkající se ideálů a filtrů. Tento cíl autorka zajisté splnila, i když by pro použití textu bylo vhodné ještě opravit některé drobné typografické a formulační nedostatky, kterých ovšem vzhledem k rozsahu textu není mnoho.

K obsahu práce mám jen několik poznámek, které zde uvádím především s ohledem na její plánované využití. Je přirozené, že četba textu předpokládá určité základní znalosti. Možná by ale přece jen bylo pro čtenáře užitečné připomenout i pojmy *grupa* a *podgrupa*, když už jsou uvedeny definice *okruhu*, *tělesa* či *ideálu*. V souvislosti s definicí *homomorfismu* by pak čtenáře-začátečníka mohlo zmást, že je uvedena definice *homomorfismu okruhů* a poté následuje poznámka, že vzhledem k tomu, že se „nepohybujeme v obecné algebře, ale soustředíme se jen na okruhy, můžeme vystačit s mírnějšími podmínkami.“ Zde bych doplnila poznámku o tom, co je to homomorfismus algebraických struktur.

U definic ve čtvrté kapitole, která nahlíží do historie, by bylo dobré odlišit definice z doby před Kummerem a definice z doby pozdější, kdy se mj. začaly rozlišovat pojmy *ireducibilní prvek* jako prvek, který nemá jiný než triviální rozklad, a *prvočinitel* jako prvek různý od jednotky s tou vlastností, že je-li jím dělitelný součin dvou prvků dané struktury, pak je jím dělitelný alespoň jeden z činitelů; popř. alespoň poznámku o ireducibilních prvcích, která je v samém závěru práce, uvést u definice algebraického prvočísla. K této části bych ještě doplnila poznámku pro autorku, že jedním z těch, kteří nesdíleli optimismus Cauchyho a Lamého, byl Joseph Liouville. Ten poté, co Lamé přednášel v pařížské akademii o „obecném důkazu“ velké Fermatovy věty pro $n>2$, vystoupil, nastíněný důkaz vážně zpochybnil a upozornil na to, že předpokládá jednoznačnou faktorizaci, která zatím nebyla dokázána. Když pak Lamé a Cauchy usilovali o odstranění uvedené mezery v důkazu, poznamenal si Liouville do zápisníku příklad:

$$13 \cdot 13 = 169 = \left(4+3\sqrt{-17}\right)\left(4-3\sqrt{-17}\right).$$

Později je také upozornil na Kummerův dopis obsahující kopii pojednání, které vyšlo již o tři roky dříve (ovšem v nepříliš dobře dostupném spise vydaném Vratislavskou universitou) a v němž je dokázáno, že jednoznačná faktorizace pro cyklotomická celá čísla obecně neplatí. Kdyby se autorka chtěla tématem dále zabývat, doporučila bych jí vedle citované, spíše populárně zaměřené knihy S. Singha také práce H. M. Edwardse: *The Background of Kummer's Proof of Fermat's Last Theorem for Regular Primes* (Archive for Exact Sciences 14 (1974/75), str. 219–236), *Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic*

Number Theory (Springer, 1977) a *The Genesis of Ideal Theory* (Archive for History of Exact Sciences 23 (1980), str. 321–378), které jsou velmi zajímavé z matematického i historického hlediska. Co se týče samotné velké Fermatovy věty, autorka správně poznamenala, že není známo, zda ji Fermat opravdu dokázal. K tomu bych jen chtěla poznamenat, že Fermat sám později tuto větu dokázal pro některé speciální případy, což by asi nečinil, kdyby měl obecný důkaz. Proto se kloním spíše k názoru, že si Kummer později uvědomil, že jeho důkaz nebyl správný či zcela obecný, jen neměl potřebu svou poznámku vepsanou do Diofantovy *Aritmetiky* škrtat či uvádět na pravou míru a nenapadlo ho, že tato kniha i s poznámkami bude po jeho smrti zveřejněna.

Předložená bakalářská práce je psána srozumitelně a kultivovaně, splnila vytyčený cíl a podle mého názoru bude představovat užitečnou studijní pomůcku. Proto ji navrhuji ohodnotit známkou **výborně**.

V Praze dne 21. 6. 2013

Magdalena Hykšová

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: hyksova@fd.cvut.cz