Matematický ústav AVČR, v.v.i.
Žitná 25, 115 67 Praha 1
Česká republika

Posudek na disertační práci

Jan Vršovský: Pologrupy operátorů a jejich orbity

Práce podává přehled výsledků týkajících se orbit operátorů. Orbitou spojitého operátoru T v Banachově prostoru rozumíme posloupnost $\{T^n x: n=0,1,\dots\}$, kde x je pevný vektor. Tento pojem úzce souvisí s řadou problémů studovaných v teorii operátorů a příbuzných oborech, např. v teorii dynamických systémů, ergodické teorii, problému invariantního podprostoru/podmnožiny, lokální spektrální teorii apod. Pojem orbity je možné rovněž přirozeným způsobem definovat pro silně spojité pologrupy operátorů $(T(t))_{t\geq 0}$ v Banachově prostoru.

Chování orbity obvykle závisí podstatně na volbě počátečního bodu. V typických případech existuje hustá množina bodů jejichž orbity se chovají pravidelným způsobem, ale též hustá množina bodů, jejichž orbity jsou velmi nepravidelné. Oba tyto mezní případy jsou velmi zajímavé a intenzivně se studují.

Předkládaná práce se skládá v podstatě ze tří částí.

Kapitola II se věnuje studiu pravidelných orbit operátorů, splňujících například $\|T^n x\| \to 0$ nebo $\|T^n x\| \to \infty$. Oba tyto typy dávají příklad nejjednodušší invariantní uzavřené množiny.
Je zde ukázáno, že pokud $\sum \|T^n\|^{-1} < \infty$, pak existuje hustá množina bodů x takových, že $\|T^n x\| \to \infty$. Speciálně takovýto operátor má netriviální uzavřenou invariantní podmnožinu. V případě komplexního Hilbertova prostoru stačí slabší předpoklad $\sum \|T^n\|^{-2} < \infty$. Oba tyto výsledky jsou nejlepší možné.

Kapitola III studuje vektory s nepravidelnými orbitami. V extrémním případě, že orbita $\{T^n x: n=0,1,\dots\}$ je hustá, se takovýto vektor nazývá hypercyklický. Problematika hypercyklických vektorů se v současné době bouřlivě rozvíjí a tvoří již samostatný obor "Lineární dynamika". Kapitola III podává přehled základních výsledků v tomto směru.

Kapitola IV studuje pojem orbitální reflexivity, který úzce souvisí s problémem invariantního podprostoru/podmnožiny. Příbuzný pojem reflexivity operátoru, který je již klasický, znamená, že operátor má "dostatečně mnoho" invariantních podprostorů. Analogicky operátor je orbitálně reflexivní, jestliže má "dostatečně mnoho" invariantních podmnožin.

Tento pojem je velmi slabý, donedávna jediný známý operátor, který není orbitálně reflexivní byl tzv. Readův operátor (který nemá žádnou netriviální uzavřenou invariantní podmnožinu). Nebylo známo, zda v Hilbertově prostoru existuje operátor, který není orbitálně reflexivní. Zde je podán příklad takového operátoru (jiný, mnohem složitější operátor s touto vlastností sestrojily nezávisle S. Grivaux a M. Roginskaya).

Puvodní výsledky jsou obsaženy především v kapitolách II a IV. Hlavními výsledky jsou existenční věty pro orbity jdoucí do nekonečna (Proposition 1.3 a 1.6) a příklady, že tyto výsledky nelze zlepšit (Example 3.1, 4.1). V kapitole IV jsou hlavním původním výsledkem příklady 13.3 a 13.5, kde se konstruují operátory, které nejsou orbitálně reflexivní. Tyto výsledky jsou publikovány v článcích [61] a [62]. Práce dále obsahuje některé další nepublikované výsledky.

Doporučuji, aby disertační práce byla přijata k obhajobě.

Vladimír Müller

Praha, 11.5.2011

Vladimír Müller

tel.: +420-222 090 711 e-mail: mathinst@math.cas.cz bank.spoj.: ČNB Praha IČO: 67985840
fax: +420-222 211 638 www: http://math.cas.cz č.ú.: 69623011/0710 DIČ: CZ67985840