Oponentský posudek bakalářské práce T. Lávičky
“Zobecněné Booleovské modely a klasická predikátová logika”
zpracovala RNDr. Zuzana Haniková, Ph.D., Ústav informatiky AV ČR, v.v.i.

Práce pojednává o zúplňování Booleových algeber a o využití úplných Booleových algeber pro zobecnění sémantiky klasické predikátové logiky 1. řádu a důkazu úplnosti vůči této sémantice. Práce má čtyři části: úvod, dvě sekce pojednávající o výše zmíněných tématech, závěr. Kombinuje poznatky z několika zdrojů, uvedených v seznamu literatury. Práce je psána anglicky.

Sekce 2 pojednává o zúplňování Booleových algeber: libovolnou (netriviální) Booleovu algebru B lze vnořit do úplné Booleovy algebry B' tak, že obraz B^+ je v B' hustou množinou; B' je algebrou B určena jednoznačně až na izomorfismus. V práci je vyloženo, že na B' lze nahlížet jako na Booleovu algebru regulárních otevřených množin v topologii dolních množin kanonického uspořádání B^+, přičemž každý prvek $b \in B^+$ se zobrazí na dolní množinu určenou b. Autor k výsledku dospívá výkladem potřebných partií z topologie (sekce 2.2), pojmu topologie dolních množin daného uspořádání (sekce 2.5), z teorie uspořádání, zejména separovanosti (sekce 2.3), pojmu husté množiny (sekce 2.4), a konečně výsledek o zúplňování je v sekci 2.6. K výkladu sekce 2 je užitečné nahlížet rovněž do úvodní sekce, kde je vysvětlen plán postupu.

Sekce 3 pojednává o tzv. booleovských modelech, tj. strukturách pro zvolený jazyk 1. řádu, kde je obvyklá interpretace predikátových symbolů relacemi nahrazena funkcemi nabývajícími hodnot v dané (netriviální) úplné Booleově algebře B, kterou rovněž volíme libovolně. Formalizace tohoto sdělení je patrně cílem definice 3.4. Definici lze rozšířit tak, aby funkce přiřazující hodnoty v B byly definovány pro libovolnou formuli jazyka (sekce 3.4). Sekce 3.5 definuje tzv. plné booleovské modely a věta 3.15 říká, že každý booleovský model lze vnořit do plného. Věta 3.24 postuluje úplnost klasické predikátové logiky 1. řádu vůči booleovským modelům nad libovolnou pevně zvolenou (netriviální) úplnou Booleovou algebrou B. Důkaz využívá výsledku úplnosti tohoto kalkulu vůči klasické dvouhodnotové sémantice. Sekce 3.8 si klade za cíl vyložit, jak provést popsanými metodami alternativní důkaz úplnosti vůči klasické dvouhodnotové sémantice.

Práce je rozsahem přiměřená (44 stran) a její zpracování vyžadovalo nepochybně mnoho úsilí a také zběhlost v práci s vybranými pojmy z topologie, algebry, teorie uspořádání, apod. S tímto nárokem se autor vyrovnává poměrně dobře. Obsáhlost tématu je nicméně na úkor preciznosti zpracování. Autor se sice obeznámil s pojmy a nahlédl do struktury důkazů některých důležitých tvrzení, nicméně výklad v jeho podání obsahuje celou řadu nepřesností a drobných chyb, které komplikují pochopení, obtěžují a vzbuzují jisté rozpaky. Zejména, podaný výklad podle mého názoru stěží může posloužit jako zdroj informace pro čtenáře, který problematiku nezná. Dalším, avšak menším problémem je jistá nevyváženost výkladu.

Autor patrně neučinil ani tak samozřejmou věc, jako je závěrečná kontrola textu prostým čtením. Asi už také nezbyl čas na zasazení zpracovávaného tématu do širších souvislostí, jakými by mohla být například diskuse role axiomu výběru, diskuse jiných způsobů zúplňování, dohledání některých původních pramenů, apod., což je myslím u této práce škoda (ačkoli toto nebylo součástí zadání a nemůže tedy mít vliv na hodnocení práce).

Dovolím si uvést příklady problematických míst; obsáhlejší (bez nároku na úplnost) seznam problémů a otázek je v příloze.

1. Def. 2.1 (Booleova algebra): není jasné, zda požadavky (i) až (v) jsou identity v algebraickém jazyce, které Booleovy algebry musejí splňovat (pak by tento jazyk měl být v definici nebo někde před ní zmíněn), nebo zda jde o požadavky na uvedené operace konkrétní algebry B (pak by x, y, z měly být kvantifikovány jako lib. prvky z univerza B). (Ještě poznamenám, že indexace poznámek pod čarou v definici supréma působí dost rušivě.)

2. Definice 2.33: “We say that a complete Boolean algebra B is *completion* of a Boolean algebra A and we write $B = \mathrm{cm}(A)$ if A is a dense subalgebra of B.” Za prvé, domnívám se, že je správné požadovat, aby A byla podalgebra B *a zároveň* A^+ (a nikoli A) byla hustá v B. (To vzhledem k definici 2.22.) Podstatnější však je otázka, co se zde vlastně definuje. Jde zřejmě o relaci mezi algebrami A a B; pak ale není úplně na místě zápis $B = \mathrm{cm(A)}$, neboť

vzbuzuje dojem, že jde o relaci s funkční vlastností, což ale nebylo (dosud) dokázáno. (Zde je také patrné, jak podstatnou roli v interpretaci textu hraje taková maličkost, jako je člen před slovem 'completion', který v definici chybí.)

3. Důkaz věty 2.36 je založen na faktu, že pro libovolnou Booleovu algebru B je uspořádání B^+ separované. Tento fakt je nicméně zmíněn pouze v úvodu sekce, ale nikoli v důkazu samém, a nenašla jsem jej ani v mezilehlých sekcích (např. v sekci 2.3 o separovaných uspořádáních). (Navíc, při využití stávající formulace věty 2.34 je nepřesné tvrdit, že A je podalgebrou B: A je vnořitelná do B, tedy izomorfní podalgebře B.)

4. Fakt 3.2 předpokládá úplnost algebry nebo aspoň existenci zmíněných průseků a spojení na jedné straně rovnosti.

5. Co je předmětem definice 3.4?

6. V definici 3.6, stejně jako v mnoha dalších definicích, chybí předpoklady: o M (je univerzem), B (je (netriviální) úplnou Booleovou algebrou), VAR (je množinou proměnných), t (je termem jazyka $\mathcal{L}$). (Proč se v této definici bere v úvahu spojka $\vee$, ale nadále se pro ni nikdy nic nedokazuje?)

7. V tvrzení pod definicí 3.9 je nutno předpokádat existenci, než začneme tvrdit jednoznačnost.

8. Podmínce (N) v definici 3.11 moc nerozumím. Co je a? Pokud uvažujeme formální výrazy, není nutné rozklady 1 nějak indexovat?

9. V důkazu věty 3.15 není ukázáno, že jde o vnoření.

10. Co je e v ostavci "By Theorem 3.15..." na str. 39?

11. Autor práce s daným zadáním mohl uplatnit svou tvořivost např. zavedením jednotného a precizního značení a terminologie pro poznatky z různých zdrojů.

    - Autor poměrně konzistentně používá konvenci značení nosiče struktury stejným symbolem jako struktury samé. Výjimkou je definice 2.28, která si klade za cíl definovat izomorfní struktury, kde je pro struktury použit jiný font. Proč? Kromě vybočení ze zmíněné konvence tato definice vykazuje další nepřesnosti. **Uvítám, když autor u obhajoby definici izomorfních struktur přednese precizněji.**
    - Rozvolněnost značení se projevuje i v používání stejných znaků pro symboly jazyka a pro jejich realizace, nebo pro logické spojky a jim analogické metamatematické úvahy. Obojí je akceptovatelné, pokud všichni zúčastnění vědí, co se daným zápisem míní. **Uvítám, když autor u obhajoby vysvětlí významy znaku '=' v požadavku (D) na str. 25:** " if $\|a = b\| = 1$, then $a = b$".

Fakt, že práce je psána anglicky, mne poněkud překvapil, protože jako komunikační nástroj osob vesměs hovořících plynně česky se angličtina míjí účinkem, navíc tento jazyk autorovi zjevně nesedí. Je možno to chápat jako jazykové cvičení (snad vhodné například k udělení zápočtu z odborné komunikace v cizím jazyce), ovšem pro důležité příležitosti, jakými snad je kupříkladu sepsání bakalářské práce, bych do budoucna doporučovala volit jazyk, v němž se autor cítí jako doma. Výčet jazykových prohřešků zde nebudu vypisovat, nejsou předmětem hodnocení.

Navrhuji hodnotit předloženou práci známkou 2 nebo 3 v závislosti na průběhu obhajoby.

V Praze dne 17.6.2013
Zuzana Haniková

Příloha:

- Českým překladem anglického ‘with respect to’ je ‘vůči’, spíše než ‘s ohledem na’, jak je to použito v českém překladu abstraktu. Rovněž pojem ‘Booleovsky- ohodnoceného modelu’ je problematický.
- Je-li vůbec v odborném textu vhodné používat místo termínu ‘Boolean algebra’ akronym ‘BA’, pak v názvech sekcí už to vhodné není (viz sekce 2.1).
- V definicích 2.4 a 2.5 dochází k záměnám $\in$ a $\subseteq$.
- V definici 2.5 se hovoří o nejmenší uzavřené nadmnožině. Nejmenší vůči jaké relaci?
- Co je A ve faktu 2.6?
- V textu na str. 10 dole, jakou topologii na množině reálných čísel máte na mysli?
- Pozorování 2.8 má jako důkaz pouze odkaz na fakt 2.6, který ale dokázán nebyl.
- V důkazu 2.13 mám dojem, že důkaz asociativity pro spojení by si zasloužil být uveden.
- V definici 2.18 je případ $x = y$ nadbytečný.
- Na str. 15 nahoře jsou pojmy ‘separated’, ‘separative’ a ‘separately’, to by chtělo sjednotit.
- V jakém smyslu je bod (ii) na str. 16 příkladem husté množiny?
- Na str. 17, Proof má být ‘least upper bound’ místo ‘lowest upper bound’.
- důkaz na str. 18, poslední řádek předposledního odstavce, by si zasloužil podrobnější zdůvodnění.
- Za vyloženě nešikovnou považuji dvojí definici disjunktnosti prvků (2.3 a 2.20(i)).
- Na str. 21 nahoře, ‘disjointness’, nikoli ‘disjunction’
- Na str. 24 v horní části, ‘We speak of ... ’ je ‘refinement’ místo ‘partition’.
- Důkaz věty 2.36 by asi mohl být podrobnější.
- V definici 3.6, co se myslí požadavkem ‘t=x’?
- V definici 3.7, co je R?
- Kde platí tvrzení lemmatu 3.8?
- Nelíbí se mi formulace “we consider only 2-ary predicate a function symbols” str. 32 dole.
- Na str. 33 nahoře, jaký jiný než volný výskyt by dané proměnné mohly mít v termu t?
- Definice 3.16 by měla končit ‘$0 \notin F$’, nikoli ‘X’.
- Je definice uvedená první formulí shora na str. 38 korektní?
- Patrně místo odkazu do literatury na větu Rasiowy a Sikorskeho by bylo vhodnější větu uvést.
- Celá sekce 3.8 je podle mého názoru příliš neformální.
- Slovní formulace věty 3.24, jako např. v závěru, je patrně nepřesná. Jde o důkaz úplnosti vůči libovolné, ale jedné, pevně zvolené (úplné, netriviální), Booleově algebře, nikoli vůči všem takovým algebrám.