Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Diplomová práce

Nerovnice jako diagnostický nástroj pro odhalení formalismu v různých oblastech školní matematiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Autorka: Václava Dubišarová

Studijní obor: Učitelství pro střední školy (M - FJ)

Praha 2013

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Jarmily Novotné, CSc., a to s využitím literárních pramenů, které jsou uvedeny v závěru mé práce, a na základě analýzy dat pedagogického výzkumu v oblasti didaktiky matematiky uskutečněného na jednom z gymnázií v Praze.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 2. května 2013

Václava Dubišarová

V první řadě bych ráda poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za její cenné rady a zkušenosti, zejména za trpělivost, podporu a vstřícnost, se kterou se mnou jednala po celou dobu vzniku této práce.

Dále bych ráda poděkovala učitelům z Gymnázia Litoměřická v Praze, kteří mi pomohli se sběrem dat a poskytli mi prostor v hodinách matematiky.

Poslední díky patří mé rodině, přátelům a spolubydlícím za jejich podporu během mého studia.

Anotace

Jméno autorky:	Václava Dubišarová
Název diplomové práce:	**Nerovnice jako diagnostický nástroj pro odhalení formalismu v různých oblastech školní matematiky**
Školní rok:	**2012/2013**
Katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**
Vedoucí diplomové práce:	**Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.**

Klíčová slova:

Práce s chybou, klasifikace chyb, nerovnice, matematická symbolika, přenos znalostí, goniometrické nerovnice, strategie řešení nerovnic.

Abstrakt:

Diplomová práce se zabývá různými typy chyb, jejich příčinami při řešení konkrétních nerovnic a formálním užíváním matematické symboliky. Teoretická část se opírá o články zabývající se obtížemi, které se projevují ve studentských řešení nerovnic, a faktory, které vznik těchto obtíží ovlivňují. Odkazuje na základní publikace o teorii chyb. Praktická část podrobněji rozebírá chyby, které se vyskytly v pracích studentů jednoho pražského gymnázia. Cílem práce bylo určit na základě analýzy studentských chyb místa, kde dochází k negativnímu transferu znalostí z jiných oblastí matematiky do oblasti nerovnic. Na základě stanovených chyb lze říci, že nerovnice jsou úzce spjaty s oblastí rovnic, ale vliv mají i znalosti z oblasti funkcí, množin a úprav algebraických výrazů, matematické logiky a číselných oborů.

Anotation

Author:	Václava Dubišarová
Title of the diploma thesis:	**Inequalities as a diagnostical tool for discovering formalism in various domains of school mathematics**
Academic year:	**2012/2013**
Departement:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**
Director:	**Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.**

Keywords:

Work with errors, typology of errors, inequalities, mathematical symbolism, transfer of knowledge, goniometric inequalities, strategies in solving inequalities

Abstract:

This thesis targets various types of errors and their causes, in particular formal using of mathematical symbolism, appearing in students solutions of specific inequalities. The theoretical part refers on articles dealing with the difficulties manifested in students solutions of inequalities and with factors influencing appearence of these difficulties, on the basic publication dealing with the theory of errors and the factors that influence the occurrence of these. In the practical part, I analyze works of students from one secondary school in Prague. The aim of the diploma is to detect domains where negative transfer of knowledge influence the domain of inequalities. Errors identified in these solutions are closely linked with domain of equations, but they are also influenced by knowledge from the domain of function, sets, algebraic expressions, mathematical logic and numbers.

Obsah

1 Úvod

Pro učitele je velmi důležité získávat od studentů zpětnou vazbu. Právě na vzájemné spolupráci a důvěře se zakládají úspěšnější volby způsobu výuky a učení. Je důležité, aby učitel získal co možná nejširší přehled o tom, jakým způsobem studenti přemýšlejí, jak konstruují své poznatky, proč volí způsoby řešení, které volí, jaké dělají chyby a co je jejich příčinou. I přestože se základní struktury úloh často opakují, studenti dělají stejné nebo velmi podobné typy chyb. Co má tedy vliv na výkon studentů?

Během své praxe jsem se setkala s velmi formálním přístupem studentů k nerovnicím. Jednalo se o studenty 3. ročníků středních škol a velmi mě překvapil jejich přístup k řešení základních lineárních nerovnic a celkem široká paleta chyb. Zaujala mě myšlenka, zda by analýza řešení nerovnic studentů mohla učiteli umožnit lépe odhalit, které znalosti ovlivňují výkon studentů u řešení nerovnic.

Hlavním cílem diplomové práce je zjistit, které znalosti a oblasti matematiky ovlivňují výskyt chyb, které studenti dělají při řešení základních typů nerovnic. Vedlejším cílem je získat dostatečný přehled o problematice chyb, které studenti dělají při řešení nerovnic, jak v jednotlivých oblastech nerovnic, tak v nerovnicích obecně. Podrobněji jsem se zaměřila na goniometrické nerovnice. Má práce vychází z několika studií, jejichž autory jsou P. Tsamir, L. Bazzini a N. Almog, a knihy V. Kuliče, které mi poskytly základní oporu při klasifikaci chyb. Pracuji se skupinou studentů, které vyučují různí učitelé matematiky, přesto očekávám, že se tyto vlivy projeví v každé zkoumané třídě. Nejčastěji se bude jednat právě o vliv znalostí z oblasti rovnic na oblast nerovnic.

V první části práce jsem se zaměřila na matematickou symboliku v různých fázích řešení problému a proč studentům může činit potíže. Poté popisuji důležitost chyby ve výuce, nejen jako hodnotícího kritéria, ale i jako ukazatele různého stupně porozumění matematickým pojmům, kterým se mají naučit. Učitelův přístup k chybě ovlivňuje přístup studenta k řešení problémových úkolů, proto je důležité, aby se student s chybou naučil pracovat, podobně jako se snaží pracovat se svými znalostmi. Uvádím některé základní výsledky dosavadních výzkumů vztahujících se k tématu chyb v nerovnicích. V praktické části blíže popisuji, s jakými typy nerovnic jsem pracovala a jaké chyby se v řešeních vyskytly.

V závěru shrnuji, s jakými vlivy jsem se setkala při zadávání logaritmických a goniometrických nerovnic. Ty jsou jádrem mé práce, a proto se jim věnuji nejpodrobněji. Závěry nelze zevšeobecnit na všechny studenty, protože daný vzorek není dostatečně reprezentativní.

2 Formalismus a symbolika

2.1 Míra osvojení symbolického jazyka matematiky

J. Mach (2002) ve své knize *Co je matematika*[1] cituje výrok F. C. Kleina: „Vzorce jsou silné, ale slepé.“, který jasně dokládá, jak může být symbolický jazyk matematiky zrádný, pokud si student pamatuje pouze vzorce a symboly bez vztahu k nějaké situaci či kontextu. Matematika se vyjadřuje symbolickým jazykem, který může být pro některé studenty obtížně přístupný. Formální používání vzorců je jedním z nedostatků, který může ovlivnit kvalitu poznávacího procesu. Poznávací proces lze rozdělit do následujících fází: hladina motivace → tvorba separovaných modelů (získávání zkušeností) → tvorba generických modelů → vznik abstraktního poznatku → hladina krystalizace poznatku (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004).

Přerod separovaných modelů na modely generické je založen na poskytnutí dostatečného množství zkušeností s různými modely, které žák může třídit, organizovat a zapojovat do struktury starších poznatků. Předložíme-li studentovi vzorec nebo symbol, můžeme vznik abstraktního poznatku výrazně zpomalit. Zapamatování jednoduchého vzorce je snazší než pochopení toho, jak se k němu došlo a jaké množství zkušeností k němu vedlo. Student konstruuje poznatky na základě toho, co zná, na základě svých zkušeností. Tato činnost vyžaduje studentovu aktivitu, která je ovlivněna i jeho kognitivními vlastnostmi i osobností.

S nadsázkou lze říci, že míra formalismu nepřímo popisuje hloubku osvojení daného poznatku a jeho přenositelnost na nestandardní situace. Formální

[1] str. 13

poznatky jsou izolované od osobní zkušenosti studenta, mají pro něj smysl jen jako paměťová stopa, kterou je nutno si udržet jen po určitou dobu a která postupně slábne. Student vidí praktické použití poznatku pouze v rámci školní situace.

Různé zdroje (Jiránek, Souček, 1969), (Kulič, 1971), (Kalhous, Obst a kol., 2002) upozorňují na důležitost činnosti, aktivity při učení, provádění myšlenkových operací. Osobní zkušenost a smyslové vnímání, manipulace s objekty a pozorování hrají důležitou roli při trvalejším zapamatování poznatku.

Učitel by měl ve výuce vytvořit podmínky pro to, aby se student setkal s dostatečným množstvím problémových situací, které budou studenta vnitřně motivovat, aby chtěl investovat energii a přebudoval strukturu svých dosavadních znalostí. „Logické vědecké formulky se nemají děti učit znát mechanicky. Jsou cenné a užitečné jen natolik, jak pomáhají rozvoji vědomostí dětí, pojí se organicky s jejich osobní zkušeností, znalostí. Odtud vzniká nezbytnost vrátit logické definice a formulky k oné zkušenosti, z níž historicky vznikly.“ (Skatkin, 1951, str. 39)

Jedním z Bloomových kognitivních cílů vyučování (Kalhous, Obst a kol., 2002) je právě aplikace osvojených znalostí a dovedností. Také Niemierko hovoří o dovednosti používat vědomosti (Kalhous, Obst a kol., 2002). Pokud je poznatek uchopen pouze pamětně a není podepřen dostatečným počtem separovaných modelů, je univerzální model neúplný nebo dokonce nesprávný. Problémy se projeví v situacích, které vyžadují jiný způsob uchopení poznatku, než je pouhá reprodukce. Klasickým případem je vysvětlit některý pojem, jev svými slovy, uvést jiný než citovaný příklad, vysvětlit selhání standardního postupu v nestandardní úloze, aplikovat vzorec atd. (Hejný, 1990). Přenositelnost poznatku je důležitým ukazatelem, zda bude student schopen poznatek použít v jiné situaci. Přenos znalostí však může ovlivnit následující učení nejen pozitivně, ale i negativně (Havigerová, 2007).

Různé stupně a hloubku porozumění popisuje R. R. Skemp, který rozlišuje mezi instrumentálním (procedurálním) porozuměním, jež krátce popisuje jako „rules without reason“[2], a relativním pochopením, kdy student ví, co dělá a proč (Vaiyavutjamai, Clements, 2006). Student je schopen adaptovat získané znalosti na širší okruh problémů bez vnější pomoci. Instrumentální porozumění je nutné k posunu k relativnímu porozumění. Tall (2004) zmiňuje, že existují tři úrovně algebry: evaluační, manipulační, axiomatická. Výuka matematiky ve škole se soustřeďuje na první dvě z nich: popsat matematický problém, sestavit výraz, upravit ho a vyčíslit.

Vnitřní strukturu jazyka matematiky objevuje student postupně, stejně jako se učí jazyku mateřskému nebo cizímu. Je to jedním z důvodů, proč se výzkumy zaměřují na propojenost jazykových a matematických dovedností, např. schopnost číst s porozuměním zadání slovních úloh. Úspěšnost modelování matematické situace tedy souvisí nejen s úrovní matematických dovedností, ale i se schopností pracovat s jazykem. Pro jakýkoliv jazykový systém je důležité, aby student dokázal pracovat s pojmem znak, znak určitého jevu, znak dostačující a znak nutný, byl si vědom logického propojení znaků a jejich symbolického vyjádření (Landa, 1973).

[2] pravidla bez rozmyslu či pravidla bez důvodu

2.2 Přenos znalostí

Výuka nových poznatků se snaží navázat na již osvojené učivo, studentovy zkušenosti a představy. Jedním z ukazatelů, že si student osvojil poznatek nebo dovednost, je to, že je schopen ho uplatnit v jiné situaci, než ve které se s ním potkal.

Vzájemný vliv znalostí a zkušeností na průběh učení je tedy přirozeným jevem. V literatuře se setkáme s rozlišením pozitivního transferu (přenosu) minulého učení na průběh budoucího učení a negativního transferu (přenosu). Někdy se pro negativní přenos užívá pojmu interference či útlum. Pokud obsah a struktura látky obsahuje velmi podobné prvky, hovoříme o specifickém (úzkém) transferu, pokud jsou méně podobné, pak o nespecifickém (všeobecném) transferu (Havigerová, 2007). Ve výuce má potenciál zejména využití specifického transferu. Lze ho usnadnit tím, když nové poznatky a učivo je studováno ve světle dříve osvojenených poznatků. Ty mohou studentům sloužit jako analogie nebo metafora, která jim pomůže při učení (Perkins, 1992).

K využívání transferu musí být student veden, schopnost transferu nevzniká automaticky. S přenosem a zejména negativním se velmi často setkáváme, jsou-li si činnosti podobné. Ve vyučování lze využít dva mechanismy pro učení transferu. Při nácviku mechanických činností, jejichž správnost lze kontrolovat, můžeme u studenta rozvíjet neuvědomělý transfer (reflexive, low road transfer). Důležité je, aby si tuto činnost osvojil bez chyb. Zaměříme-li se na rozvoj abstraktního myšlení a hledání spojitostí, budeme rozvíjet uvědomělý transfer (mindful, highroad transfer) (Perkins, 1992).

Řešení rovnic a nerovnic jsou činnosti, které jsou si velmi blízké svou terminologií, postupy i symbolikou. Mezi těmito dvěma oblastmi dochází často k specifickému transferu. Pokud si student neuvědomí specifika nerovnic a aplikuje znalosti, které se naučil o rovnicích, velmi snadno se projeví negativně, vznikem chyb. Cílem učení je docílit změny v myšlení studentů, tedy k reorganizaci jeho znalostí, kterou doposud považoval za správnou. Učivo samo tedy obsahuje zdroj některých chyb (Brousseau, 1997).

3 Chyba v procesu učení

Chyba byla a je přirozeným prvkem nejen výuky, ale i procesu učení samotného. Ve školním prostředí studenti vnímají chybu spíše negativně (Zítková, 2010), proto se snaží na své potíže upoutat co nejméně (Simon, 2006). „Nepříjemným situacím se podle dosavadních zkušeností může[3] vyhnout tak, že (a) uhodne, co má asi učitel na mysli, (b) bez přemýšlení přijme údajné souvislosti nebo (c) bude předstírat, že rozumí." (Simon, 2006, str. 16)

Nejvíce přínosný je pro žáka, s ohledem na jeho rozvoj, přístup konstruktivistický, který pracuje s chybou jako příležitostí k postupu dál (Hejný, Kuřina, 2001). I paměť při vybavování poznatků pracuje spíše na základě rekonstrukce než přesného obrazu (Havigerová, 2007). Chyby nejsou jen důsledkem neznalosti, nepřesnosti nebo náhody, ale i předchozích znalostí studenta (Brousseau, 1997). Jeho znalosti mohou být nepřesné, zjednodušené nebo použitelné jen na limitovaný počet situací. Chyby, které mají svůj původ ve znalosti, G. Brousseau nazývá překážky. Tyto chyby se budou přizpůsobovat a odolávat úplnému odstranění, jsou stálé a dají se očekávat v různých podobách. Příčinou chyb-překážek jsou znalosti, které v určitých situacích fungují (Brousseau, 1997). Tyto znalosti se tak stávají významným faktorem, který může negativně ovlivnit další učení (Havigerová, 2007), (Perkins, 1992).

Odstraňování tohoto typu chyb vyžaduje v podstatě podobný přístup jako budování nových poznatků nebo náprava formalismu. Učitel musí odhalit nejen, v jakých situacích daná překážka-znalost selhává, ale i kde funguje (Brousseau, 1997). Znamená to maximálně využít pozitivní vliv osvojených znalostí a minimalizovat jejich vliv na budoucí učení (Havigerová, 2007).

[3] Student

Učení je vždy výsledkem interakce mezi základními prvky učebního procesu: učitelem, studentem a systémem poznatků.

Z didaktického hlediska G. Brousseau (1997) rozlišuje původ překážek:

- Ontogenetický původ

  Tyto chyby jsou závislé na úrovni vývoje studenta a jeho schopnostech v daném věku.

- Didaktický původ

  Tyto chyby mají původ ve volbách uvnitř vzdělávacího systému, v socio-kulturním rámci dané společnosti. Jsou to chyby, které mohou mít původ v nepsaných pravidlech, která se vytvoří v rámci komunikace mezi studentem a učitelem.

- Epistemologický původ

  Jedná se o chyby, kterým se nelze vyhnout, protože hrají důležitou informativní roli v různých stupních osvojení poznatků. Lze je odhalit i ve vývoji pojmu samého. Mohou přispět k vyvolání potřeby studentů pochopit hlouběji nějaký problém a motivovat ho tím, že u něj vyvolají vnitřní kognitivní konflikt.

Velmi přehledně je podává i V. Zítková (2010, str. 37), její klasifikace chyb vychází z J.-P. Astolfiho (Astolfi, 2006).

1. Porozumění (neporozumění) zadání

2. Školní návyky a zvyky

   Jedná se o chyby, které vznikají na základě didaktického kontraktu.

3. Žákovy představy

   Nesoulad mezi terminologií a „chudostí“ představ.

4. Rozdíly v logickém uvažování učitelů a studentů

   Tyto chyby lze odstranit podrobnou analýzou zadání. Cílem je zamezit, aby se u studentů vytvořila „signální slova“.

5. Neočekávané způsoby řešení ze strany studenta

6. Zahlcení nebo „stav přetížení“

   Původ chyb je v nižší schopnosti koncentrace.

7. Problém transferu z jiné disciplíny

   Problém transferu se vztahuje nejen k jiné disciplíně, ale dochází k němu i v rámci matematiky samotné.

8. Příliš složitý a spletitý obsah

I v této klasifikaci lze rozpoznat, že častou příčinou chybného výkonu je předchozí znalost studenta či minulá zkušenost.

3.1 Vliv přístupu učitele

Učitelův přístup k chybě ovlivňuje i postoj studenta. Jednou z činností učitele je identifikovat, interpretovat a korigovat chybu. Učiteli je tak přisouzena role garanta správnosti. Cílem vzdělání je však, aby se student naučil tuto roli postupně vykonávat sám, aby rostla jeho autonomie a odpovědnost za výsledky svého studia. Student si musí uvědomit nejen, že udělal chybu, ale i jakou, co bylo její příčinou. „Význam autokorekce tedy spočívá jednak v tom, že je především korekcí nejen výsledku, ale také procesu, který k tomuto výsledku vedl, jednak v tom, že zvyšuje aktivní zapojení subjektu i v této fázi učení.“ (Kulič, 1971, str. 127-128)

Objevení chyby může být studentu zprostředkováno zvnějšku (učitelovo upozornění, porovnání se známým výsledkem) nebo zevnitř (student provede kontrolu operací, tzv. „operační kontrolu výsledku“, nebo provede zkoušku použitím operace inverzní nebo dosazením do původního zadání u řešení rovnic či slovních úloh). Závěry, které formuloval V. Kulič (1971) ve své knize, výrazně přispívají k novému pohledu na funkci chyby ve výuce. „Chybná odpověď, pokud je jako taková včas identifikována, neohrožuje podstatně učení.“ Naopak „Chybný výkon, který není identifikován, efekt učení značně snižuje.“ (Kulič, 1971, str. 118-119)

Učitel musí brát v úvahu množství chyb, charakter chyb a jejich závažnost pro osvojování dalších poznatků. Interpretovat chybu znamená najít její možnou příčinu. Volba reedukace a způsob korekce jsou často ovlivněny způsobem vedení výuky, znalostí struktury a logiky učiva a také mechanismů, jakými si studenti vytvářejí představy o matematických objektech (Kalhous, Obst a kol., 2002). Jinak bude učitel postupovat, pokud se chyba vyskytne během úprav v řešení, ale kdy student správně identifikoval problém; jinou reedukaci zvolí, pokud student neidentifikuje problém již na začátku.

Kritériem pro volbu způsobu nápravy také bude i to, u kolika žáků se vyskytne stejná chyba. V běžné vyučovací hodině je nemožné se zabývat každou chybou zvlášť. S ohledem na četnost použití korekce během hodiny se setkáváme se dvěma základními přístupy učitele. Autoři článku *„New errors“*

and „old errors“: The case of quadratic inequalities (Tsamir, Tirosh, Tiano, 2004) ve svém experimentu pozorovali hodiny zkušeného učitele matematiky. Rozlišují tyto přístupy:

1. ekonomický

   Učitel ignoruje chyby a pokračuje ve výuce, zmiňuje pouze správné řešení a v množství správných a chybných řešení reaguje pouze na ta správná, aby udržel plynulost a tempo výuky.

2. propracovaný

   V tomto případě učitel vyzve studenta, aby zopakoval své nesprávné řešení a vysvětlil své uvažování celé třídě. Pokusí se zjistit, zda i jiní studenti jsou stejného mínění. Dovede studenty k tomu, aby si uvědomili nesprávnost tohoto řešení a příčinu chyby.

Tyto přístupy učitel, s nímž autoři realizovali experiment, kombinoval a zařazoval do výuky na základě toho, zda se vyskytly v rámci nově probíraného tématu nebo v rámci tématu, které žáci měli již ovládat (Tsamir, Tirosh, Tiano, 2004).

Při nápravě chybného řešení, můžeme porovnávat různé prvky: samostatnost odhalení chyby, rozdělení celého procesu práce s chybou na jednotlivé fáze či míru nápovědi, kterou studentovi poskytne vnější činitel. Kulič (1971, str. 128) popisuje metodu odstupňované pomoci. Uvádí tyto konkrétní možnosti korekce.

1. Opakování pokusu o řešení

2. Nová formulace úkolu, příp. rozdělení na řadu dílčích úloh

3. Návrat do historie - zopakování nebo doučení toho, co je předpokladem k úspěšnému zvládnutí úkolu
4. Poskytnutí pomocné informace, odkaz na analogickou úlohu, dřívějšího poznatku
5. Zadání vedlejší pomocné úlohy či otázky, která představuje jednodušší situaci než úloha zadaná na začátku
6. Informace o místě a příčině chyby (fáze identifikace a interpretace)
7. Sdělení správného výsledku pokud selžou předchozí nepřímé pomoci
8. Odložení korekce

Upozorňuje však na to, že tento výčet není kompletní, protože účinnost a vhodnost zvolené korekce volí učitel sám na základě své zkušenosti s výukou a znalosti konkrétní třídy či studenta (Kulič, 1971). Učitel může na základě míry pomoci, která je nutná k vyřešení úlohy, odhadnout, do jaké míry si vytvořil student univerzální myšlenkový model úlohy daného typu.

Nahlédnutí do způsobu, jakým student pojem konstruuje a chápe, je časově méně náročné než odkázání na zopakování látky či rozdělení látky na menší kroky. Rozdělit učivo na menší celky a jednoduché algoritmy je jedním z klasických přístupů programového učení, jak ovlivňovat pravděpodobnost výskytu chybného výkonu. Ale i rozčlenění úlohy na menší kroky nezaručuje, že nedojde k tomu, že student udělá chybu (Kulič, 1971). Důvodů, proč výuku matematiky nelze zcela podřídit požadavkům tohoto typu vyučování, je několik:

- Studenti vnímají elementární operaci různě.

- Epistemologickým chybám se nelze vyhnout, neboť souvisí s vývojem pojmů.
- Rozdělení učiva na malé kroky a jejich nácvik není spolehlivým postupem, jak se vyhnout nejen formalismu, ale i chybám, protože „Operace vytvářejí struktury, nikdy se nevyskytují izolovaně.“ (Jiránek, Souček, 1969, str. 165).

Pokud však učitel pracuje s celou třídou, tomuto rozdělení na jednotlivé kroky se často nevyhne. Doplnění pestřejších separovaných modelů pojmu, se kterým mají studenti potíže, je základem každé reedukace. Ovšem samotné doplnění separovaných modelů nemusí stačit, aby student přehodnotil poznatek, přebudoval ho a propojil pevněji s dalšími poznatky.

Nejobtížnějším úkolem je docílit toho, aby student pochopil, v čem je problém, a chtěl ho odstranit. Skutečné přebudování poznatku vyžaduje studentovu aktivitu. Musí si uvědomit, jak k chybě došlo, co ho vedlo k udělání chyby. I student se musí naučit pracovat s pozitivním a negativním transferem a s různými úrovněmi jazyka matematiky.

3.2 Vliv přístupu studenta

Studentovy znalosti netvoří homogenní skupinu. Podle **Fischbeinovy teorie** je studentův výkon ovlivněn jeho intuitivními, formálními a algoritmickými znalostmi.

„*… formal knowledge is based on propositional thinking. It relates to rigor and consistency in deductive construction, being free of the constraints imposed by concrete or practical characteristics. Intuitive knowledge is a kind* *of cognition, which is accepted directly and confidently as being obvious, imparting the feeling that no justification is required. Algorithmic knowledge is the ability to use theoretically justified procedures*“ (Tsamir, Bazzini, 2002, str. 22). [4]

Pokud bereme v úvahu tuto hypotézu, je reedukace chyby ve své podstatě obdobou kognitivně-behaviorální intervence. Nestačí tedy na studenta působit pouze z kognitivního hlediska, ale i na studentovo prožívání. Učitel musí vzít v úvahu, že velkou roli mají i studentovy potřeby bezpečí, motivace.

Studie (Lim, 2006) se zabývá přizpůsobováním a reakcemi studentů na nové situace, na základě toho, jak studenti rozumí rovnicím a nerovnicím. Lim rozlišuje anticipaci, jakým způsobem studenti vyhodnocují novou situaci, a predikci, co je vede k jejich konečné reakci. Na základě této studie Lim stanovil 5 druhů anticipace a 3 druhy predikce.

1. impulzivní anticipace

   Student reaguje na problémovou situaci zcela spontánně, provede operaci, která ho zrovna napadne, aniž by zvážil vhodnost použití v dané situaci.

2. strnulá anticipace

   Student nepřehodnocuje již vytvořené znalosti a pevně se jich drží,

[4]… formální znalost je založena na výrokové logice. Vztahuje se k přesnosti a ucelenosti v deduktivních konstrukcích, které jsou prosty omezení vnucených konkrétní nebo praktickou povahou. Intuitivní znalost je druhem vědění, které je přijímáno přímo a s jistotou jako zřejmé, vzbuzující pocit, že žádné zdůvodnění/důkaz není třeba. Algoritmická znalost je schopnost používat teoreticky zdůvodněné/prověřené postupy. (Z anglického originálu volně přeložila V. Dubišarová.)

přestože se v problémové situaci vyskytuje nový prvek.

3. explorativní anticipace

   Student jednotlivé nápady zvažuje, aby získal lepší pochopení situace.

4. analytická anticipace

   Student problémovou situaci analyzuje, stanoví si cíl nebo kritéria, která povedou jeho činnost.

5. zvnitřnělá anticipace

   Student řeší problém spontánně bez analýzy, protože vnitřně zpracoval vhodnost použitých operací.

6. predikce založená na asociacích

   Student dělá závěry na základě volné asociace dvou představ, aniž by měl pevnou základnu pro její vytvoření. Tato volná asociace může být jednou z příčin, proč na jeden typ úlohy řešitel reaguje různě.

7. predikce založená na srovnání

   Studentův závěr je založený na srovnání dvou prvků situace.

8. predikce založená na koordinaci

   Závěry jsou dělány na základě koordinace různých veličin a vztahů mezi nimi.

Lim tedy bere v úvahu také intuitivní vlivy, které mohou vést studenta k chybám. Formalismus se může projevit jak v obecném přístupu k řešení problému, tak v chápání konkrétního pojmu (Lim, 2006).

Pro učitele je zvláště důležité rozpoznávat, zda má student tendenci přijímat formálně pouze poznatky z určité oblasti (například pouze z matematiky), nebo je zasažen studentův způsob, jakým přijímá většinu poznatků (tedy i z jiných vyučovacích předmětů). Pokud u studenta převažují intuitivní znalosti nad formálními a algoritmickými, mohou modely, které si student vytvoří pro řešení problémů a úloh, vést k řadě chyb, které se projeví v konzistenci, případně nekonzistenci řešení různých typů nerovnic (Tsamir, Bazzini, 2001).

3.3 Fáze řešení problému

Než přejdeme k různým typům chyb, popíšeme jednotlivé fáze řešení problému, jak k nim přistupují A. Newell a H. A. Simon (Ruisel, 2000).

1. Orientačně-analytická fáze

   V této fázi dochází k aktivnímu zpracování problémové situace a utváření vnitřního modelu. Student identifikuje druh problému, analyzuje počáteční údaje a strukturu problému včetně cíle. Oddělí důležité informace od těch méně důležitých.

2. Strategicko-operační fáze

   V této fázi student určuje směr svého řešení, porovnává použití různých metod a formuluje hypotézy, volí postup (Ruisel, 2000).

   Na kvalitu obou fází má vliv výše zmíněná anticipace (Lim, 2006). Student, který má sklon k formálnímu přejímání poznatků, se soustředí spíše na operativní část řešení problému než na jeho identifikaci a počáteční analýzu.

K problému může řešitel přistupovat jako k algoritmickému nebo nealgoritmickému. Vliv na to, zda úlohu vnímáme jako algoritmickou nebo nikoli, mají jeho předešlé zkušenosti s různými typy úloh a schopnost analyzovat problém (Landa, 1973). Algoritmus je přesný návod či postup, kterým lze vyřešit daný typ úlohy[5]. Po konečném počtu správně provedených operací student dospěje k řešení úlohy určitého typu. Pokud student zná algoritmus, může jeho použití oslabit vlastní myšlenkové procesy studenta (Landa, 1973), zvláště pokud má tendenci k impulzivní anticipaci na základě prvních asociací (Lim, 2006).

Nealgoritmické typy úloh se řeší pomocí heuristiky. Heuristika rozvíjí strategie řešení, které vedou k vyřešení úlohy, ale nezaručují vyřešení, jsou neurčité a umožňují na rozdíl od algoritmů volnější výběr operací (Landa, 1973). Velkou roli zde hraje nejen vhled, ale i schopnost kriticky hodnotit vlastní kroky a postupy.

3. Synteticko-ověřovací fáze

   V této fázi student ověřuje hypotézy a metody s ohledem na stanovený cíl, přehodnocuje vstupní informace. Ověřování může být postupné nebo paralelní, kdy student zvažuje dopředu více možností najednou. Student hodnotí úlohu např. z hlediska správnosti řešení, náročnosti, srovnává s dosavadními zkušenostmi. Pokud úloha obsahuje nový prvek, snaží se ho srovnat s tím, co již zná.

[5] http://cs.wikipedia.org/wiki/Algoritmus

3.4 Typy chyb a logická struktura jazyka

L.N. Landa (1973) rozčlenil chyby z pohledu programového učení. Vztahují se tedy hlavně k formálním a algoritmickým znalostem studentů. Popisuje možnost jak přesněji určit, kde k chybě dochází během prvních fází řešení problémové úlohy. Výhodou je i to, že naznačuje možnou příčinu. K chybám dochází, pokud student během první fáze řešení problému nevyčlení všechny podstatné znaky a nerespektuje logickou strukturu, nebo naopak zahrne znaky, které jsou nepodstatné a neoprávněné. V následujícím výčtu slovo *znak* popisuje vlastnost či podmínku, která popisuje nějaký objekt či situaci.

1. Student nebere v úvahu **všechny** znaky, které jsou nutné

   Příkladem může být tato situace. Student řeší úlohu $\operatorname{tg} 2x > 0 \Leftrightarrow 0 + k\pi < 2x$ a neuvede i podmínku, která plyne z definičního oboru $2x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

2. Student bere v úvahu zbytečné nebo nepodstatné znaky nebo podmínky, což v některých případech vede k chybám.

   Jedním z typických případů ve studentských řešeních je uvedení podmínky, která není nutná, ale která vyloučí některý z kořenů rovnice, nebo naopak studenti např. velmi často vyřazují 0, ačkoli to není nutné.

3. Student nebere v úvahu nutné znaky.

   Příkladem je situace, kdy student neurčí předpoklady, které musí ověřit, aby umocňování bylo ekvivalentní úpravou, viz tab. 14 na str. 89.

4. Správné znaky nejsou spojeny s nutnými operacemi nebo pojmy.

   Příkladem může být situace, kdy student např. zamění pojmy a místo definice limity napíše definici spojitosti.

5. Student nesprávně vyhodnotí logické spojky mezi znaky, což vede k chybným operacím.

   Příkladem může být situace, kdy student řeší soustavu nerovnic. Intervaly, které řeší jednotlivé nerovnice, na závěr řešení sjednotí.

6. Tytéž znaky vyvolávají u studenta různé reakce.

   Příkladem může být situace, kdy student ve stejném typu úlohy jednou podmínky uvede, podruhé neuvede. V tomto případě do úvah studenta pravděpodobně vstupuje nějaký faktor, který není vnějšímu pozorovateli zcela zřejmý.

K chybě mohou vést i neobvyklé, neočekávané vedlejší znaky objektů. Užití zdánlivých modelů, překvapivých modelů a nemodelů hraje důležitou roli ve vytváření pojmů a obohacování představ o objektech (Hejný, 1990). Tyto modely studentům ukazují, jaké znaky, vlastnosti a podmínky kladené na objekty, jsou důležité při jejich definování. Studenti často začínají pracovat na řešení úlohy, např. upravovat výrazy, ostraňovat odmocniny a zlomky, aniž by analyzovali strukturu zadání a její jednotlivé prvky např. podmínky řešitelnosti. Identifikaci úlohy (rozboru, co je řešením, jaké informace potřebuji k vyřešení úlohy, stanovení předpokládaných kroků,...) tak věnují často méně pozornosti než řešení samotnému. Potom řeší úlohu ne na základě důkladné analýzy, ale na základě srovnání libovolných dvou prvků, které úloha zmiňuje, či zahrnutí prvků, které nemusí být pro správné řešení podstatné. O vlivu zanesení nevhodného prvku do řešení úlohy např. na základě záměny kontextu hovoří i C. Spearman (Kulič, 1971). C. Spearman i L. N. Landa tak jen potvrzují, že chyby mohou vznikat během studentovy práce s jednotlivými prvky úlohy i s její vnitřní strukturou.

4 Problematika nerovnic

4.1 Nerovnosti

Student se na základní škole setkává a seznamuje s pojmy číslo a proměnná, rovnice a různé závislosti. I pojem nerovnosti se začíná utvářet na základní škole. Student je schopen porovnávat různé vlastnosti objektů, vnímá pojmy větší a menší. Nerovnice jsou spjaty s různými oblastmi matematiky a zejména algebry. Studenty jsou vnímány spíše jako podtéma rovnic (Tsamir, Bazzini, 2002) a (Boero, Bazzini, Garuti, 2001), proto do řešení velmi často přenášejí znalosti získané při řešení rovnic a neberou v úvahu jejich specifické vlastnosti.

Téma rovnic a nerovnic je vnímáno jako typická část algebry. To ovlivňuje způsob výuky na našich školách, který je převážně soustředěn na algebraické procedury. Ty jsou pro studenty těžko pochopitelné a kontrolovatelné (Boero, Bazzini, 2004), (Radford, 2004), (Garuti, Bazzini, Boero, 2001), pokud je používají bez porozumění a mechanicky.

Studenti, kteří z různých důvodů mají sklon k formálnímu přejímání poznatků, se pak soustřeďují spíše na algebraické úpravy a manipulace s výrazy. Učitelů se ptají spíše na to, jak řešit danou nerovnici, než proč řešit tímto způsobem. Řešení nerovnic je pak vnímáno jako soubor pouček a pravidel, která říkají, co dělat můžete a co ne, a které se musíte naučit nazpaměť. To vede k mechanickému zjednodušování těchto pouček, jejich deformaci a následně k chybám.

Podle studie E. Warrenové (2006), která analyzovala učebnice základních škol v Austrálii, pouze 5 % obsahu učebnic pomáhá rozvíjet koncept termínů

„menší“ a „větší“, které souvisí s rozvojem konceptu nerovnic. V běžném životě často používáme výrazy jako menší, větší, alespoň, přinejmenším, pohybovat se v rozmezí, být mezi, obsahovat nejvýše, kratší než, starší než a mnoho dalších. Rozvoj pojmu nerovnice a nerovnosti má tedy potenciál být ukotven v každodenních životních situacích.

Jazyk matematiky je pro některé studenty těžko přístupný, protože si pod symboly nedokáží vybavit žádnou představu případně je jejich představa nepřesná. I řešení nerovnic je ovlivněno intuitivními představami, které mají oporu v reálném životě. R. Nunez (2000) užívá pojmu *conceptual metaphors*[6]. Tyto metafory mají vliv na naše celkové abstraktní myšlení jako základní kognitivní mechanizmus, kterým utváříme pojmy a představy na základě dedukce. Popsal rozdíl mezi *grounding metaphors*[7] a jinými abstraktními metaforami. *Grounding metaphors* tvoří jádro našich představ a podílí se na projekci struktur z jedné oblasti do druhé. Tedy jejich vliv je zřejmý i v matematice. Z prací R. Nuneze vycházejí P. Boero, L. Bazzini a R. Garuti (2001), kteří se ve svém experimentu zabývali vlivem tzv. *grounding metaphors* při řešení nerovnic. Shromáždili data ze dvou tříd třináctiletých a čtrnáctiletých studentů jedné italské školy a studenty Ph.D. Jejich článek zmiňuje dvě úlohy. Jednou z úloh bylo porovnat výrazy z algebraického a grafického pohledu výraz $y = x^2 - 4x + 4$ a výraz $y = -x^2 + 4$. Zadání druhé úlohy bylo určit, kde je $x \sin x > x^2 - 1$. Konkrétněji popisují fázi hledání *opěrného* bodu, ve které se projevila metafora setkání se, metafora průsečíku a metafora rovnováhy. Část studentů argumentovala rostoucími a klesajícími hodnotami funkcí a nutností

[6]abstraktní koncepční metafory

[7]zakládající metafory

existence bodu, kde se porovnávané funkce protínají. Svá vysvětlení studenti doplnili pohyby rukou vyjadřujícími růst, pohyb nahoru (dynamický přístup) či zkřížení rukou (statický přístup). Jiná část studentů zmiňovala možnost přiblížení se hodnot jednotlivých funkcí, doprovázené pravidelnými pohyby rukou zleva doprava (Boero, Bazzini, Garuti, 2001).

Jedním z důvodů, proč studenti zanedbávají specifika nerovnic, může být, že uplatnění nerovnic v přírodních vědách není tolik zpopularizováno jako uplatnění rovnic (Tsamir, Bazzini, 2002). To ovlivňuje i rozsah transferu znalostí rovnic do oblasti nerovnic. Studenti se denně setkávají s osobami pohybujícími se po schodišti nahoru a dolů, liniemi, které se protínají, přibližují a vzdalují.

Výuka nerovnic může poskytnout doplňující perspektivu k tématu rovnic, funkcím a analytické geometrii.

4.2 Specifika nerovnic

Nerovnice se od rovnice liší v několika ohledech: množství řešení, způsobu řešení a významu zkoušky (Hejný, 1990). Vyřešit nerovnici znamená nalézt obor její pravdivosti. „Riesit nerovnice $f(x) > g(x)$, alebo $f(x) \leq g(x)$ znamená upraviť ich na jeden zo základných štyroch tvaroch $x \leq a$, $x < a$, $x \geq a$, $x > a$.“ (Hejný, 1990, str. 218)

Nechť $f(x) = 0$ je rovnice s oborem pravdivosti P_f, $g(x) = 0$ je rovnice s oborem pravdivosti P_g. Obě rovnice mají společný obor neznámé O. „Rovnice nazývame ekvivalentné, práve vtedy, keď $P_f = P_g$. Ak je $P_f \subset P_g$, tak hovoríme, že rovnica $g(x) = 0$ je dosledkom rovnice $f(x) = 0$. Úpravu $f(x) = 0 \to g(x) = 0$ voláme ekvivalentnou (resp. dosledkovou) práve vtedy, keď rovnica $g(x) = 0$ je ekvivalentná s (resp. dosledkom rovnice) $f(x) = 0$." (Hejný, 1990, str. 200)

Tato definice není pro studenty snadno pochopitelná. Právě nerovnosti, které popisuje tabulka 14 na str. 89 přejatá z publikace Hejného (1990, str. 166), jsou základem ekvivalentních úprav. Studenti si osvojí velmi dobře myšlenku, že rovnice se nezmění, pokud s oběma stranami rovnice udělají ekvivalentní úpravu. Ale nerovnice klade na ekvivalentní úpravy navíc i další podmínky. Pokud tyto podmínky student opomene, často dojde k chybnému řešení, jak ukazují druhy chyb, které popsal L. N. Landa, a jsou uvedeny na str. 20 této práce.

Ekvivalentní úpravy jsou přičtení a odečtení stejného výrazu od obou stran, vynásobení obou stran kladným výrazem, nebo vynásobením záporným výrazem při změně znaménka nerovnosti. Tento výraz však nesmí změnit množinu řešení nerovnice. Výčet není dlouhý, přesto studenti často zaměňují důsledkové úpravy s ekvivalentními. Studenti vnímají ekvivalentní úpravy zjednodušeně jako „provést shodnou úpravu na obou stranách nerovnice" (Tsamir, Bazzini, 2002), (Tsamir, Bazzini, 2001).

4.3 Jak zavést nerovnice?

Ve svém příspěvku C. Kieran (2004) popisuje jednu z úvodních hodin do problematiky nerovnic v Japonsku.

Úloha zní: Ichirova matka je již měsíc v nemocnici. Ichiro se svým mladším bratrem se rozhodli dávat každé ráno příspěvek/zaplatit modlitbičku v místním chrámu, aby se maminka brzy uzdravila. Ichiro má v peněžence 18 desetijenových mincí, jeho mladší bratr má 22 pětijenových mincí. Rozhodli se, že budou dávat do kasičky každý vždy po jedné minci a pokračovat v modlení, dokud nebudou mít oba prázdné peněženky. Jednoho dne po modlidbě se podívali do peněžek a zjistili, že mladší bratr má více než Ichiro. Kolik dní uplynulo od jejich první modlitby?[8]

V článku Kieran (2004) popisuje různé strategie, které studenti volili při řešení této úlohy: předmětnou manipulaci; tabulku s průběžnými hodnotami; rovnice, jejíž řešení je upraveno, aby vyhovovalo zadání; soustava rovnic; nerovnice. Studenti na této úloze velmi dobře vidí, že rovnice v této úloze přesně neodpovídá zadání úlohy. Je jim předložen problém, jehož řešením není zjistit, kdy nastává rovnost, protože rovnost nemusí nastat. Zavedení znaku nerovnosti a pojmu nerovnice není pouze formální. Vychází z potřeby modelovat nový druh problému. Úlohu však studenti zvládli vyřešit i pomocí rovnic. Další výzvou, kterou článek zmiňuje, je dát smysluplný význam úpravám nerovnic. Jednou z možností je kombinovat symboliku s náčrtky a grafy. I zde jsou však úskalí.

4.4 Grafické vs. algebraické řešení

Grafická reprezentace může pomoci si představit vztah, který nerovnice popisuje. Samo sestrojení grafu nebo načrtnutí jeho tvaru není samozřejmou dovedností. Nerovnice popisuje vztah mezi funkčními hodnotami dvou funkcí, řešením je ale podmnožina jejich definičních oborů. Přechod mezi algebraickým a funkčním zápisem se váže s problémy, které popisuje C. Sackur (2004). Jedná se o přechod mezi jednotlivými semiotickými registry matematiky (Duval, 2000). Nerovnici student musí uchopit jako vztah dvou funkcí, re-

[8]přesné znění TIMSS-R 1999 video studie 8th grade, (Hiebert et al., 2003)

prezentovat je pomocí grafu, porovnat funkční hodnoty a určit, jaké obrazy a intervaly odpovídají zadanému vztahu. Jak ukáže rozbor některých studentských prací v praktické části, symbolický zápis řešení, které student dokáže zvýraznit v náčrtku, činí studentům potíže. Porozumění symbolickému zápisu ovlivňuje i prvky, které si student do náčrtku či grafu zvýrazní. Vhodný náčrtek může studentovi poskytnout více informací najednou než algebraický zápis.

Kvalita porozumění symbolickému zápisu pak ovlivňuje i to, zda žák dokáže předpovídat své další kroky. V článku (Lim, 2006) se mluví o „predicting and foreseeing“[9] a právě tento přístup by mohl ovlivnit v pozitivním směru formální přístup k řešení nerovnic. Predicting se váže k předpokládání výsledku, foreseeing k provádění operací.

Míra porozumění algebraické symbolice ovlivňuje i řešení úloh, které obsahují nějaký nový prvek. Podle T. Dreyfuse a M. Hoch (Dreyfus, Hoch, 2004) studenti mají tendenci zaměřovat se více než na struktury na proces řešení samotný. Tedy na postup jak řešit úlohu, než proč řešit zvoleným postupem. Student se soustředí na prvky, které jsou mu povědomé, na prvky, na které může navázat se znalostmi, které již má. Je to přirozená fáze. I algebraický výraz $a + 3$ student chápe nejdříve jako operaci „sčítej“, než se u něho vytvoří abstraktní chápání výrazu jako celku (Jiránek, Souček, 1969). Dreyfus rozlišuje mezi aktuální formou algebraického výrazu, rovnice, nerovnice a potenciální formou, což je forma, na kterou lze daný výraz, rovnici či nerovnici upravit. To, jak student vyhodnotí aktuální formu, ovlivňuje jeho strategii řešení, volbu konkrétních operací a úprav. Předpokladem pro volbu vhodné

[9] odhadování a předpovídání

strategie je tedy rozpoznat shodné třídy objektů, struktury úloh a situací. Pokud má student tendenci zaměřit se spíše na samotný proces řešení než na nerovnici jako celek, může mít tendenci provést úpravu dříve, než zváží její vhodnost v celém kontextu nerovnice, např. roznásobit výrazy než je ponechat v součinovém tvaru. Je pak na učiteli, zda zvolí jednotný přístup k výuce všech nerovnic, nebo několik metod pro různé typy nerovnic.

4.5 Strategie a obtíže

Řešení nerovnic lze rozdělit do tří hlavních kroků: určení kořenů odpovídající rovnice, určení intervalu, jehož body splňují nerovnost, a nakonec zápis řešení. Podle studie, kterou uskutečnily P. Tsamir a N. Almog (2001), mají studenti tendenci dělat neplatné závěry na základě souvislostí mezi řešením rovnice a k ní vztažené nerovnice, nerozlišovat mezi ekvivalentními a důsledkovými úpravami. Právě zde se projevuje negativní transfer znalostí a postupů z oblasti rovnic do oblasti nerovnic. Obtíže studentům dělá i užívání logických spojek a práce s krajními hodnotami (Tsamir, Bazzini, 2001). Podle autorek studie existují tři hlavní strategie, které studenti používají při řešení nerovnic: algebraická manipulace spočívající na úpravách daných nerovnic a jednotlivých výrazů, grafické řešení a použití náčrtku číselné osy v kombinaci s algebraickými úpravami.

V další části se soustředíme na popis základních typů obtíží. P. Tsamir a N. Almog (2001) popisují pět základních typů obtíží. Krátce je zde popíšu.

1. **obtíže s výjimečnými hodnotami**

   Jsou to obtíže s hodnotami na okrajích intervalů, body vyloučenými z řešení na základě podmínek, či případy, kdy neexistuje řešení nebo je řešením množina s jedním prvkem či celý obor reálných čísel. Studie (Tsamir, Bazzini, 2003) popisuje některé koncepty a reakce studentů na otázku, zda řešením nerovnice může být jednoprvková množina. V tomto bodě se projeví chyby vycházející z didaktického kontraktu. Student předpokládá, že řešení bude ve tvaru, se kterým se nejčastěji setkal.

2. **obtíže spojené s logickými spojkami**

   Objevují se v různých fázích řešení, jak na začátku, tak na konci při závěrečné interpretaci výsledné množiny. Studenti si vliv těchto spojek na správnost řešení neuvědomují.

3. **obtíže se znaménkem různých výrazů**

   Tyto výrazy se vyskytují jednotlivě nebo v součinu. Zde zmiňují autorky častou chybu při řešení nerovnosti typu $a.b > 0$, kdy student opomene, že i součin dvou záporných výrazů je výraz kladný. Případně určí obě části řešení, ale v kombinaci s obtíží typu 2 je spojí špatnou logickou spojkou.

4. **obtíže se jmenovatelem racionální nerovnice**

   Studenti často násobí výrazem, který nemusí být nutně kladný v celé množině přípustných řešení. Jednou z metod, jak řešit nerovnici v podílovém tvaru, je násobit obě strany druhou mocninou jmenovatelů a získat tak nerovnici ve tvaru polynomu. Aby studenti nemuseli zkoumat, kdy je daný výraz kladný a kdy záporný, snaží se zajistit, že všechny výrazy jsou kladné, např. tím, že obě strany umocní na druhou.

5. **obtíže ovlivněné pojmem rovnice**

Tato kategorie zahrnuje obtíže vyvolané negativním transferem mezi pojmy rovnice a nerovnice. Studie identifikovala zejména tři typy obtíží:

- Student řeší rovnici místo nerovnice.
- Student používá k řešení procedury pro počítání s rovnicemi. Algebraickým modelem je rovnice a její způsoby řešení. Studie (Tsamir, Bazzini, 2002) popisuje dva způsoby, jak ovlivňuje algebraický model rovnic (model vah) řešení nerovnic. Prvním z nich je provádění shodných úprav na obou stranách nerovnice, bez ohledu na nulové hodnoty či znaménko výrazů.

  Druhým způsobem je vyloučení kořenů výrazů, se kterými řešitel pracuje, a poté provádění shodných úprav na obou stranách. Student nerozlišuje, kde je výraz, se kterým pracuje, kladný a kde záporný. Nezmění znak nerovnosti při násobení záporným číslem. Tuto chybu lze odhalit prostým dosazením do nerovnice. Studenti pak při rozhovorech obhajují správnost své úpravy tím, že je „povolené dělat stejné úpravy na obou stranách“.
- Student vytváří nesmyslné závěry na základě počítání s rovnicemi např. nápodobou zápisu řešení rovnice: $x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$, zapíše řešení nerovnice takto: $x^2 < 25 \Rightarrow x < \pm 5$.

5 Praktická část

5.1 Popis experimentu

Experiment probíhal na dvouch pražských gymnáziích se všeobecným zaměřením. Sběr dat probíhal formou zadávání písemných testů, které jsou přiloženy jako příloha této práce. V prvním ročníku středních škol se studenti setkávají s lineárními a kvadratickými nerovnicemi, příp. iracionálními nerovnicemi. Řeší nerovnice v součinovém či podílovém tvaru, nerovnice s absolutní hodnotou. Ve druhém ročníku se učivo rozšiřuje o nerovnice exponenciální a logaritmické, později i goniometrické. Pro experiment jsem si tedy zvolila studenty 3. a vyšších ročníků středních škol, kteří se setkali se všemi typy zmíněných nerovnic. Počty studentů v jednotlivých třídách jsou uvedeny u jednotlivých rozborů níže. Uvádím i některé další informace o tom, jaké používali studenti pomůcky nebo jaké kladli otázky učiteli. Pracovala jsem s úlohami, kde nebylo třeba použít nutně substituci, aby student vyřešil správně danou úlohu. Sama volba vhodné substituce souvisí s tím, zda student dokáže předvídat dopředu své další kroky. Velice jednoduchým příkladem, který mohu citovat, je například substituce $a = x^2$ v úloze $x^4 - 3x^2 + 2 > 0$, která zjednoduší nerovnici na klasickou kvadratickou nerovnici. Ve třídách jsem nezadávala ani nerovnice s absolutní hodnotou. Z učebnic pro střední školy jsem vybrala základní úlohy pro mnou zvolené typy nerovnic. Předpokládala jsem, že v jednoduchých úlohách se jasněji projeví, které chyby vznikají vlivem přenosu znalostí. Tedy jaké druhy chyb lze ztotožnit s chybou jako překážkou, jak tento termín používá Brousseau (1997).

Nerovnice jsem rozdělila do dvou velkých kategorií, podle druhu funkcí, jež jsou dávané do vztahu pomocí znaku nerovnosti, příp. rovnosti:

- Nerovnice obsahující polynomy - Porovnávané funkce jsou složeny výhradně z polynomů. V této kategorii pracuji s těmito nerovnicemi: lineární, kvadratické, lineární lomenná nerovnice, iracionální nerovnice. Základem řešení je rozložení množiny R (případně množiny, ve které má smysl nerovnici řešit) na intervaly, jejichž hraničními body jsou kořeny polynomů, ze kterých se nerovnice skládají, jsou-li v anulovaném tvaru. Proto je důležité, aby si studenti osvojili různé strategie, jak rozložit polynom na součin a nalézt kořeny.
- Nerovnice, kde aspoň jednou z porovnávaných funkcí je funkce jiná než polynomická.

Analýzu studentských prací jsem zaměřila na určení míst, kde dochází k transferu minulého učiva do oblasti nerovnic. Základ mi poskytla studie P. Tsamir a L. Bazzini (2001), která popisuje obtíže s řešením nerovnic. Podrobněji se věnuji goniometrickým nerovnicím, protože jsem se účastnila hodiny, ve které probíhala oprava testu, a přenos znalostí se projevil nejzřetelněji.

5.2 Lineární nerovnice

Lineární nerovnice jsem zadala 24 studentům sexty a 8 vysokoškolským studentům. Je to vůbec první druh nerovnice, se kterou se studenti ve škole setkávají. Obecný tvar nerovnice v anulovaném tvaru lze zapsat $ax + b < 0$, kde $a, b \in R$ (resp. jiný znak nerovnosti). Nejběžnější strategií, jak řešit tuto nerovnici, je izolovat neznámou na jedné ze stran pomocí ekvivalentních úprav a určit množinu bodů, po jejichž dosazení je nerovnost pravdivá.

V řešení lineárních nerovnic jsem předpokládala chyby, které vyplývají z opomenutí otočení znaménka nerovnosti, používání neekvivalentních úprav a nesprávnou interpretací výsledné jednoduché nerovnosti. Studentské práce obsahovaly chyby v oblastech číselných oborů, v úpravách algebraických výrazů a práci se členy nerovnice.

- **Číselné obory**

  Problémy nastávají již u celých čísel, zejména obsahuje-li výsledná nerovnice koeficient s 0, např. u nerovnic $0x < -3$ a $0x < 3$, které mají nekonečně mnoho řešení. Přesto někteří studenti jako řešení výše uvedených nerovnic napíšou *nemá řešení*. Jednou z příčin může být přenos z rovnic. Dalšími místy, kde studenti dělali chyby, je umístění zlomků na číselné ose, určení znaménka složitějších číselných výrazů, zejména obsahují-li iracionální čísla, např. $\sqrt{2} - 2$, popř. $2 - \sqrt{2}$.

  Dále se vyskytovaly chyby v nerespektování množiny, ve které se daná nerovnice řeší, nebo při zápisu množiny řešení.

- **algebraické výrazy**

  Předpokladem k úspěšnému vyřešení nerovnice je úprava algebraických výrazů. Mnoho chyb se vyskytuje právě při práci s algebraickými výrazy. M. Hejný (1990) pracuje s přehlednou klasifikací chyb, které se vyskytují u úprav algeraických výrazů.

  1. Numerické chyby

     Student soustředí pozornost na několik úkonů současně podle jejich složitosti. Operace, které ještě nejsou plně automatizované, jsou pak náchylnější k chybám. Patří k nim i chyby, které popisuje V. Kulič (1971), kdy student zamění častěji používaný spoj za méně častý.

2. Chybné spojení mezi operací a symbolem

   Symbolické zápisy vybízí studenta k nějaké činnosti, úpravě, vytvoření představy. Pokud např. zapomene vzorce pro umocňování polynomů. Místo, aby zvážil, co daný symbol znamená, a provedl příslušnou operaci, student upravuje výraz $3(a+b)^2$ např. jako $3a^2+3b^2$. Úkon je ovlivněn nesprávným zobecněním distributivního zákona. Navíc naznačuje, že student symbol umocnění dvojčlenu chápe formálně. L. N. Landa (1973) hovoří o špatném spojení mezi operací a symbolem, který k ní vybízí, V. Kulič (1971) o chybě vzniklé na základě podobnosti. Do této kategorie řadím i chyby, které vznikají záměnou parametru a neznámé, záměnou koeficientů různých členů, záměnou znaků nerovnosti, či logických spojek.

3. Grafické chyby

   Chyby vznikají nedbalostí zápisu. Nedbalost zápisu snižuje jeho srozumitelnost často i pro pisatele samotného.

4. Chyby velkých skoků

   Jejich zdrojem je časová tíseň nebo víra studenta, že v přeskočeném kroku neudělá chybu, protože jej již bezchybně zvládá. Míra jistoty, že student ovládá dovednosti a návyky související s řešením základních úloh. Pokud se zvyšuje míra automatizace operací zároveň se správností, roste u studenta vnitřní jistota o správnosti provedené operace. Vnitřní jistota však „není vždy zcela spolehlivým ukazatelem objektivní správnosti výsledku činnosti"(Kulič, 1971, str. 110). Klesá míra vědomé kontroly, kterou student operacím věnuje (Landa, 1973).

5. Strategické chyby

   Volba strategie je ovlivněná studentovými zkušenostmi a vhledem do problému. Příkladem této chyby může být úprava výrazu, která není chybná, ale studenta k řešení nepřiblíží a mnohdy ho zavede do slepé uličky. M. Hejný (1990) upozorňuje, že bychom měli studenta učit předvídat dopředu vhodnost úprav.

6. Bezradnost a bloudění

   Jde o případ, kdy student ztratí orientaci v úpravách, neumí nebo ještě nenašel cestu k řešení.

7. Jiné chyby

   Kromě uvedených chyb se mohou vyskytnout mnohé další chyby např. na základě zápisu, který není formálně správný, ale obsahuje správnou myšlenku, nebo např. na základě špatně opsaného zadání.

- **práce se členy nerovnice**

  Řešitel nepracuje se všemi členy nerovnice, sčítá různé členy nerovnice, koeficienty u lineárních a absolutních členů, při násobení záporným číslem neotočí znak nerovnosti, nerespektuje množinu, ve které má nerovnici řešit.

  Chyby se vyskytují i v závěrečném zápisu řešení nerovnice, kde má podle mé zkušenosti na chyby vliv nejen záměna znaků nerovnosti na základě podobnosti, ale i směr čtení nerovnosti.

U řešení lineárních nerovnic zcela převládalo řešení algebraickými úpravami.

5.3 Nerovnice obsahující polynomy

Test byl zadán ve třídě 8. F (4. ročník). Zadávání jsem byla přítomna. Studenti o testu nevěděli dopředu. Na řešení měli jednu vyučovací hodinu, tedy 45 minut. Třída byla rozdělena na půlky, každý student seděl samostatně, celkem test psalo 21 studentů.

Studenti mohli používat kalkulačku. Paní učitelka napsání testu motivovala jako přípravu na opakování k maturitě. Na začátku zdůraznila, že se jedná o nerovnice.

V první skupině na začátku zazněly dotazy na způsob zápisu řešení („Výsledek musíme zapsat v intervalech?“) a způsob řešení („Nepamatuji si, jestli je to účko nebo stříška.“). Studenti byli několikrát upozorňováni, že se jedná o nerovnice a že to není tak jednoduché, zvláště u úkolu 3 a 5, viz Příloha I. Ve druhé skupině padl dotaz na existenci řešení („Je tam něco, co nemá řešení?“) a zda musí psát podmínky (tento dotaz padl až ke konci hodiny). Druhá skupina byla upozorněna, aby si dala pozor na numerické chyby, převod z jedné strany na druhou a značení při zápisu řešení. Po odevzdání všech testů byla druhá skupina výslovně upozorněna, že nerovnice nemohou řešit násobením do kříže.

V rámci testu (viz Příloha I) jsem zkoumala typy chyb, použití náčrtků a strategie řešení následujících typů nerovnic:

1. Kvadratické nerovnice

   Jsou to nerovnice typu $ax^2 + bx + c < 0$, kde $a, b, c \in R, a \neq 0$.[10] Tento druh nerovnice se řeší rozkladem množiny R na intervaly, jejichž krajními body jsou kořeny polynomu $ax^2 + bx + c = 0$. Studenti upravili nerovnici na anulovaný tvar, určili kořeny polynomu (rozkladem na součin, přes diskriminant), poté určili znaménko jednotlivých faktorů v každém z nich. Tato znaménka si zapsali do pomocné tabulky (v následujícím textu budu používat pro tuto tabulku zkrácený výraz *tabulka se znaménky*) nebo k danému intervalu, který si vyznačili na číselné ose. Někteří studenti si zapisovali znaménko celého výrazu, kterého nabývá v jednotlivých intervalech. Někteří studenti při určování znaménka použili i náčrtek dané kvadratické funkce.

2. Nerovnice ve tvaru $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$

   Jsou to nerovnice tvaru $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$, kde $a, b, c, d \in R \wedge ac \neq 0$. V testu jsem zvolila nerovnici, kterou studenti museli na anulovaný tvar upravit. Strategie, které studenti použili, popíšu u konkrétních úloh.

[10] příp. jiný znak nerovnosti

3. Iracionální nerovnice

   Zde již student musí brát v úvahu, které úpravy jsou ekvivalentní a které ne. Důležité je správně určit definiční obor výrazů. Tyto nerovnice kladou velké nároky na pochopení vztahů zmíněných v tabulce 14 na str. 89.

Chyby, které studenti udělali při řešení polymonických nerovnic, jsou tříděny na základě studie P. Tsamir a N. Almog (2001) a jsou uvedeny v tabulce 1 na str. 39. Číslo uvedené nad sloupci se vztahuje k následujícím chybám.

1. Obtíže s výjimečnými hodnotami
2. Obtíže s logickými spojkami
3. Znaménka
4. Obtíže se jmenovatelem racionální nerovnice
5. Koncept rovnic
   (a) Řeší rovnici místo nerovnice
   (b) Použití procedur pro rovnice
      i. Nevyřadí nulové hodnoty
      ii. Vyřadí nulové hodnoty, ale dál počítá bez ohledu na znaménka
   (c) Chybné závěry učiněné na základě práce s rovnicemi

Sloupec „Jiný typ“ zahrnuje chyby, které mají jiný původ, než chyby popsané v předešlých bodech. Jedná se o chyby numerické, algebraické úpravy, nepřehlednost zápisu, nezapamatování vzorce, špatné dosazení apod.

Tabulka 1 obsahuje i přehled úspěšnosti řešení. Symbol + se vztahuje ke správně vyřešené úloze, symbol - k úloze, kde se vyskytla chyba, případně chyby, které vedly k nesprávnému výsledku. Sloupec označený symbolem 0 udává počet studentů, kteří úlohu nedořešili či neřešili vůbec.

8F		Správnost			**Druh chyby**							
úloha		+	-	0	1	2	3	4	5a	5b (i/ii)	5c	Jiná
1.	$9 - t^2 > t + 3$	4	16	1	1	1	7	0	2	3 (1/2)	0	9
2.	$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} \leq 1$	0	12	9	8	0	1	0	0	4 (2/2)	0	9
3.	$\frac{5-x}{3-x} < \frac{3x-1}{2-x}$	1	14	6	5	1	2	0	2	12 (4/8)	0	4
4.	$\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$	0	11	10	13	0	3	0	1	7 (4/3)	0	6
5.	$-\frac{2}{3} < \frac{3-4x}{5x+2} < \frac{3}{2}$	1	10	11	3	2	0	0	2	8 (2/6)	1	5

Tabulka 1: Úspěšnost a rozložení chyb ve třídě 8. F

Sloupec číslo 4 je prázdný, chyby, které bylo možné zahrnout do této kolonky, jsem zahrnula v kolonce 5b (i), protože chyby vznikly vlivem přenosu postupu, který studenti používali u řešení rovnic. Studenti v tomto případě operovali s výrazem s neznámou či parametrem, aniž by uvažovali nejen o jeho znaménku, ale i o nulových bodech.

Bod 5 se vztahuje k negativnímu transferu z oblasti rovnic do oblasti nerovnic. Ta byla velmi výrazná zejména u nerovnic obsahujících lomenný výraz. Tabulka 1 ukazuje, jak roste počet chyb, kdy student vyřadí pouze kořen výrazu, kterým násobí.

Rozbor jednotlivých úloh

První úloha je klasickou kvadratickou nerovnicí. Ačkoliv je úspěšnost větší než u ostatních úloh, očekávala jsem ji vyšší. S vypočítáním kořenů kvadratické rovnice mělo problém 5 žáků, většinou se jednalo o špatné dosazení nebo použití nesprávného znaménka ve vzorci pro výpočet kořenů kvadratické nerovnice.

Druhá úloha byla zaměřena na úpravu složeného zlomku. Úprava algebraického výrazu na levé straně nerovnice byla hlavním zdrojem chyb. Na správné úpravě záviselo i určení všech podmínek. Někteří studenti správně upravili výraz, v závěru však násobili výrazem s neznámou bez uvažování jeho znaménka.

Ve třetí úloze mohli studenti odečíst algebraické výrazy a upravit nerovnici na anulovaný tvar a nalézt řešení např. pomocí tabulky se znaménky. Druhou možností je násobit výrazem s neznámou. Rozdělit práci do intervalů, jejichž krajními body jsou kořeny výrazu, kterým se násobí. A uvažovat jaký vliv má výraz na znaménko nerovnosti ve vzniklých intervalech. Očekávala jsem, že někteří ze studentů, kteří budou řešit nerovnici „násobením do kříže“. Tuto úpravu zvolilo 12 z 21 studentů. Nicméně i studenti, kteří převedli výrazy na jednu stranu a dané zlomky odečetli (6 studentů), nakonec velmi často vynechali jmenovatel a nebrali v úvahu jeho vliv na znaménko výrazu. V této úloze jsem také očekávala, že studenti použijí tabulku se znaménky, neboť je to jedna z nejvýhodnějších strategií, jak řešit nerovnice v podílovém či součinovém tvaru, kde jsou více než tři výrazy. Pět studentů si zaznamenalo znaménka k intervalům vyznačeným do číselné osy.

Iracionální nerovnici nevyřešil nikdo. Pouze dva studenti určili podmínky i pro odmocninu, jeden je naznačil, ale nerovnici $\sqrt{2x-1} \geq 0$ škrtnul. Paní učitelka mi po hodině řekla, že tento typ úlohy moc nerozebírali. Tvar nerovnice byl jedním z důvodů, proč se velká část studentů úlohu ani nepokusila řešit. Většina studentů, kteří ji zkusili vyřešit, použila jednu z těchto strategií:

- Studenti vše převedli na jednu stranu odečtením čísla 1.

$$\frac{\sqrt{2x-1} - x + 2}{x-2} \leq 0$$

  Výsledný výraz se rozhodl neupravovat dál a vzdát pokus o řešení 1 student.

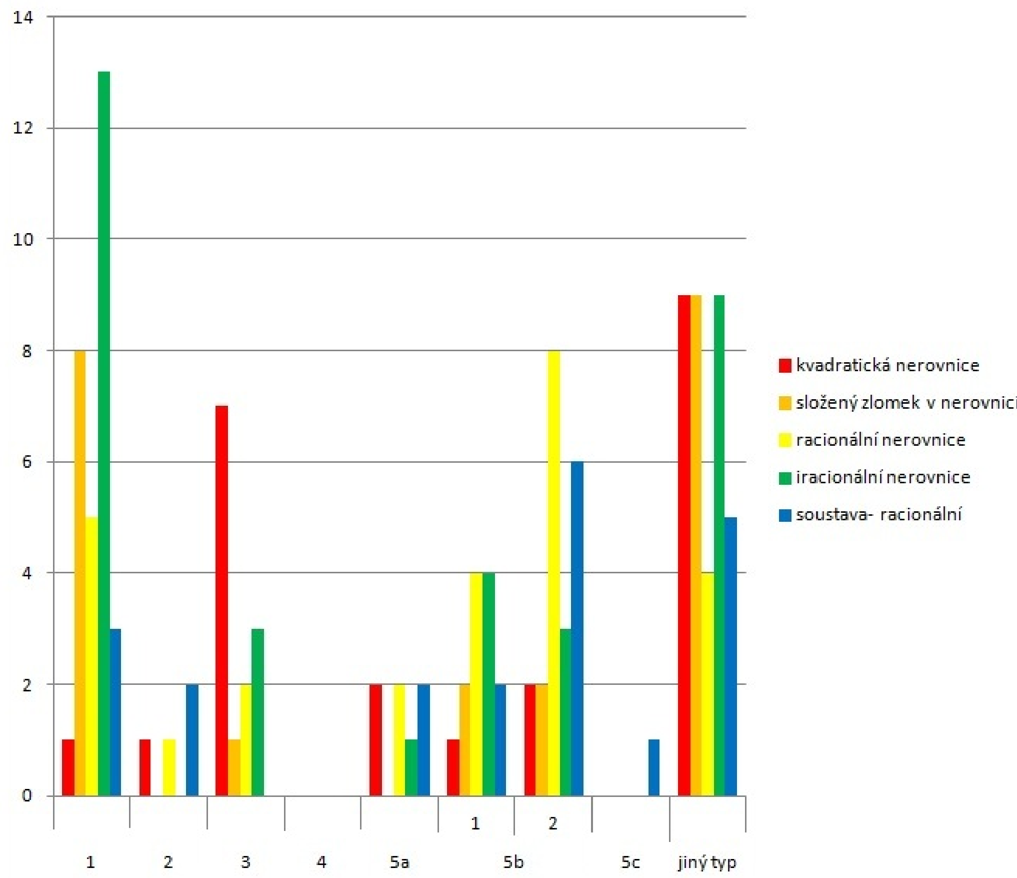
  Dva studenti se pokusili vyřešit úlohu úvahou: číselnou osu rozdělili body 2, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, dosazováním do výrazu na levé straně nerovnice výše zjišťovali znaménko v intervalech $(-\infty, \sqrt{\frac{1}{2}}), (\sqrt{\frac{1}{2}}, 2), (2, +\infty)$. Třetí student počítal dál pouze s čitatelem vzniklého zlomku.

- Student vynásobil celou nerovnici výrazem ve jmenovateli, poté umocňoval.

- Student umocnil celou nerovnici hned na začátku a pak prováděl další operace.

Soustavu nerovnic správně vypočítal jeden student, pět dalších studentů došlo ke správnému intervalu, jednotlivá řešení nerovnic nebyla správná, protože zanedbávali znaménka výrazu ve jmenovateli. Důležitým bodem v mé práci učitele bude dovést studenty k odhalení chyby v postupu, i pokud se dopočítají správného výsledku.

Velká část studentů soustavu neřešila i z časových důvodů. Ve dvou z případů si student neporadil se zápisem soustavy, což vedlo k nerovnosti, která neměla smysl.



Obrázek 1: Rozložení chyb ve třídě 8. F

Jak ukazuje graf na obr. 1, největší množství chyb souvisí s přenášením operací vhodných pro úpravu rovnic i na nerovnice (chyby, které jsou popsány v 5. bodě na str. 38). Druhou nejpočetnější skupinou byly chyby, které mají původ např. ve špatném zapamatování vzorce pro diskriminant, vzorce pro kořeny kvadratické rovnice, v nepřehledném zápisu, neurčení všech nutných podmínek apod.[11]

Z tabulky č. 2 lze vyčíst, jaké procento studentů dělá s nerovnicemi stejné úpravy jako s rovnicemi. Týká se to zejména nerovnic ve tvaru $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$, které byly předmětem úloh 2 až 5.

Úloha	1	2	3	4	5
Počet studentů, kteří dořešili úlohu (správně i špatně)	20	12	15	11	11
Počet studentů, kteří udělali chybu vázanou na úpravu rovnic	3	4	12	7	8
Procentuální vyjádření	15.00 %	33.33 %	80.00 %	63.64 %	72.73 %

Tabulka 2: Chyby vázané na úpravy rovnic

Nyní se zaměříme na užité strategie, které studenti používali v celém testu. Zcela převládala algebraická manipulace s výrazy. Použití číselné osy a náčrtek grafu popisuje tabulka 3. Ve všech případech se jednalo o náčrt paraboly.

[11] Sloupec *Jiný typ*

úloha	**grafická opora**	
	číselná osa	graf
1	5	2
2	2	
3	5	1
4	4	1
5	3	

Tabulka 3: Použití grafické opory

Vliv na úspěšnost řešení má i způsob, jakým je nerovnice zadaná. Na gymnáziu jsem měla možnost zadat studentům oktávy - třídy 8. G (22 studentů) úlohy, které jsou součástí přílohy (viz Příloha III a IV). Test byl zadán v rámci opakování učiva s kombinačními čísly, úlohy byly schváleny předem vyučujícím matematiky této třídy. Byly vytvořeny dvě varianty, aby se zamezilo opisování. Test obsahoval dvě úlohy, jednu úlohu vedoucí k lineární nerovnici a jednu ke kvadratické rovnici. Obě úlohy obsahovaly kombinační čísla, která vyžadovala po studentech, aby uvažovali o množině, ve které jsou tato kombinační čísla definována.

U zadávání samotného testu jsem nebyla. Vliv na úspěšnost měla podle paní učitelky i informace, že test nebude opravován jejich vyučujícím a existuje možnost, že nebude známkován. Po jeho napsání se paní učitelka rozhodla klasifikovat jen ty studenty, kteří chtějí. V následující části rozebírám pouze chyby týkající se úlohy s nerovnicí. Chyby, kterých se studenti dopustili při řešení nerovnic, třídím podle výše zmíněné studie (Tsamir, Almog, 2001).

Obě úlohy správně vyřešili dva studenti. Variantu A řešilo 18 studentů. Zadání úlohy znělo: Pro jakou množinu x, $x \in R$, je daná nerovnost pravdivá?

$$\binom{7}{x+1} \leq 2\binom{7}{x}$$

Správné určení podmínek záviselo na vyřešení soustavy lineárních nerovnic, pouze jeden student použil náčrtek osy. Podmínky pro kombinační čísla neurčilo 5 studentů. Část studentů zaměnila pořadí členů v rozdílu, např. místo nerovnice $7 - x \geq 0$ řešili nerovnici $x - 7 \geq 0$, nebo udělali chybu při počítaní se znaménkem $-$ před závorkou, když rozepisovali kombinační číslo. Variantu B řešili 4 studenti. Podmínky pro kombinační čísla určili pouze dva z nich. Zadání úlohy bylo skoro stejné jako u varianty A:

Pro jakou množinu x, $x \in R$ je daná nerovnost pravdivá?

$$\binom{8}{x} \leq 2\binom{8}{x-1}$$

Obě skupiny studentů používaly výhradně algebraické manipulace. Náčrt číselné osy studenti volili při řešení soustavy lineárních nerovnic při určování podmínek i pro určení znaménka v jednotlivých intervalech kvadratické nerovnice. Rozložení chyb popisuje tabulka 4.

Úloha	**Druh chyby**								
	1	2	3	4	5a	5b	5c	Komb. číslo	Grafic. reprezentace
$\binom{7}{x+1} \leq 2\binom{7}{x}$	5	1	12	-	-	3	-	8	7
$\binom{8}{x} \leq 2\binom{8}{x-1}$	2	-	1	-	-	2	-	2	1

Tabulka 4: Rozložení chyb ve třídě 8G

Správnost řešení rovnic byla ovlivněna numerickými chybami a chybami při práci se znaménky a úpravě kombinačních čísel. Rovnici správně vyřešilo 7 studentů. Studenti používali převážně algebraickou manipulaci, graficky si pomohlo 7 studentů. Číselnou osu použilo 5 studentů, jednalo se o určení řešení soustavy lineárních nerovnic, která vznikla zahrnutím podmínek vycházejících z definice kombinačních čísel. Tabulku se znaménky použili studenti při řešení kvadratické nerovnice.

5.4 Nerovnice obsahující jiné funkce než polynom

Řešení tohoto typu nerovnic již vyžaduje větší zapojení znalostí o funkcích, které se v nerovnicích vyskytují. V experimentu jsem se soustředila na analýzu základních logaritmických a goniometrických nerovnic. Vedly mne tyto důvody. Student potřebuje znát průběh funkce, rozdílnost průběhu pro různé základy a definiční obor, aby nerovnici vyřešil. U určování definičních oborů se projeví i to, zda student umí úspěšně řešit algebraické nerovnice a jejich soustavy. K zjednodušení některých výrazů je důležité správně užívat vzorce pro práci s logaritmy a exponenty. Řešení goniometrických nerovnic má svá specifika. Jedním z nich je určení oboru řešitelnosti logaritmické nerovnice, liší se také práce s argumentem funkce. Předpokladem je znalost základních pojmů z oblasti funkcí jako obraz, vzor, definiční obor, obor hodnot, monotonie, periodicita, body nespojitosti,… a samozřejmě vlastností funkcí.

Studenské práce jsem označila čísly, abych se mohla odkazovat vždy na konkrétního studenta. V následujícím textu budu již uvádět pouze identifikační číslo studenta v kulatých závorkách, aby nedošlo k záměně s počtem.

Goniometrické nerovnice

Test zaměřený na goniometrické nerovnice (viz Příloha VI) byl zadán ve třídě 3. B. Zadání obsahovalo čtyři úlohy, které byly zaměřené na jednoduchý typ goniometrických nerovnic. Přesná podoba testu je uvedena v příloze.

Zejména u goniometrických nerovnic je důležité, aby student znal základní vlastnosti odpovídajících funkcí, protože tvar řešení je ovlivněn průběhem a periodou. Průběh a perioda jsou ovlivněny tvarem argumentu. Pomůckou pro vyřešení goniometrických nerovnic jsou pro studenta grafická znázornění (graf funkce, jednotková kružnice), tabulka se znaménky a hodnotami funkcí pro základní velikosti úhlů, protože usnadňují vybavování znalostí potřebných k vyřešení nerovnic. (Tsamir, Bazzini, 2003)

Ve třídě bylo 24 studentů, povolenými pomůckami byly tabulky se základními hodnotami goniometrických funkcí a vzorci pro dvojnásobný argument a součtovými vzorci, kalkulačky. Test byl zadán paní učitelkou a studenti se obraceli s dotazy na ni. Paní učitelka je ujistila, že by zadávané úlohy měli zvládnout. Jeden ze studentů se zeptal, zda má úlohu řešit jako nerovnici. Odpověď zněla. „Ano. Nebo to můžete řešit jako rovnici a přemýšlet, co s tím, když je to nerovnice.“ Tato rada naznačuje, že při řešení rovnic a nerovnic studenti používají podobné postupy. Paní učitelka se zmíněnou radou snažila upozornit na možnost využití již naučených znalostí. I při své analýze studentských prací se zaměřuji na to, zda je student schopen vyřešit rovnici, která odpovídá zadané nerovnici.

U čtvrté úlohy byli studenti upozorněni na to, že se hledá řešení v omezeném intervalu, který ovlivní počet řešení. Poté již pracovali samostatně. Již během řešení testu dávali studenti najevo, že jsou zaskočeni. Paní učitelka jim slíbila, že v pondělí si projdou opravu. Této hodiny jsem se zúčastnila, abych mohla sledovat zvolenou reedukaci paní učitelky a reakce studentů, které krátce popisuji u jednotlivých úloh. Průběh opravy úlohy a otázky, které paní učitelka pokládala, ukazují základní místa, ve kterých studenti chybují, jednotlivé fáze řešení i místa, kde může dojít k transferu.

Očekávané postupy řešení a chyby uvádím u jednotlivých úloh.

Nerovnice v testu studenti řešili v celém oboru reálných čísel, pokud nebylo uvedeno jinak.

1. $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vzhledem k typu úlohy jsem očekávala, že si většina studentů načrtne jednotkovou kružnici, ze které určí kořeny rovnice a zapíší interval, který je řešením nerovnice. Mezi chybami, které jsem čekala, byly chyby v určení kořene z náčrtku, chyby v převodu mezi jednotlivými mírami a opomenutí periody.

Nejdříve popíši způsoby řešení, které studenti používali. Ve většině úloh studenti byli nuceni opustit aritmetické úpravy a pracovat se znalostmi o daných funkcích. Nejčastěji studenti řešili tuto úlohu užitím náčrtku grafu funkce nebo jednotkové kružnice. Výjimečně se našlo řešení, kdy studenti (7, 10, 12) prováděli s nerovnicí aritmetické úpravy. Jednalo se o tyto úpravy: vynásobení obou stran nerovnice číslem 2, umocňování obou stran nerovnice či substituce za goniometrickou funkci. Úlohy byly voleny záměrně ze středoškolských učebnic, aby číselné hodnoty odpovídaly základním úhlům a k jejich řešení nebyly třeba tabulky ani kalkulačky. Úpravy některých studentů však dokládají, že je takto nevnímali.

Strategie, které jsou používané často u nerovnic obsahujících polynomy a zejména lineární funkci, ovlivnily řešení nerovnic obsahující goniometrické funkce. Příkladem je řešení studenta (7) uvedené obr. 2 na str. 50. Došlo zde k negativnímu transferu z nerovnic obsahující polynomy. Student se nejprve snažil odstranit odmocninu a poté převést nerovnici na anulovaný tvar. V jeho řešení se vyskytují i další obtíže: neekvivalentní úprava nerovnice (umocnění obou stran nerovnice), nevhodná substituce, funkční hodnoty vynesené na osu x, umocnění $-\sqrt{2}$, řešení nerovnice jako rovnice.

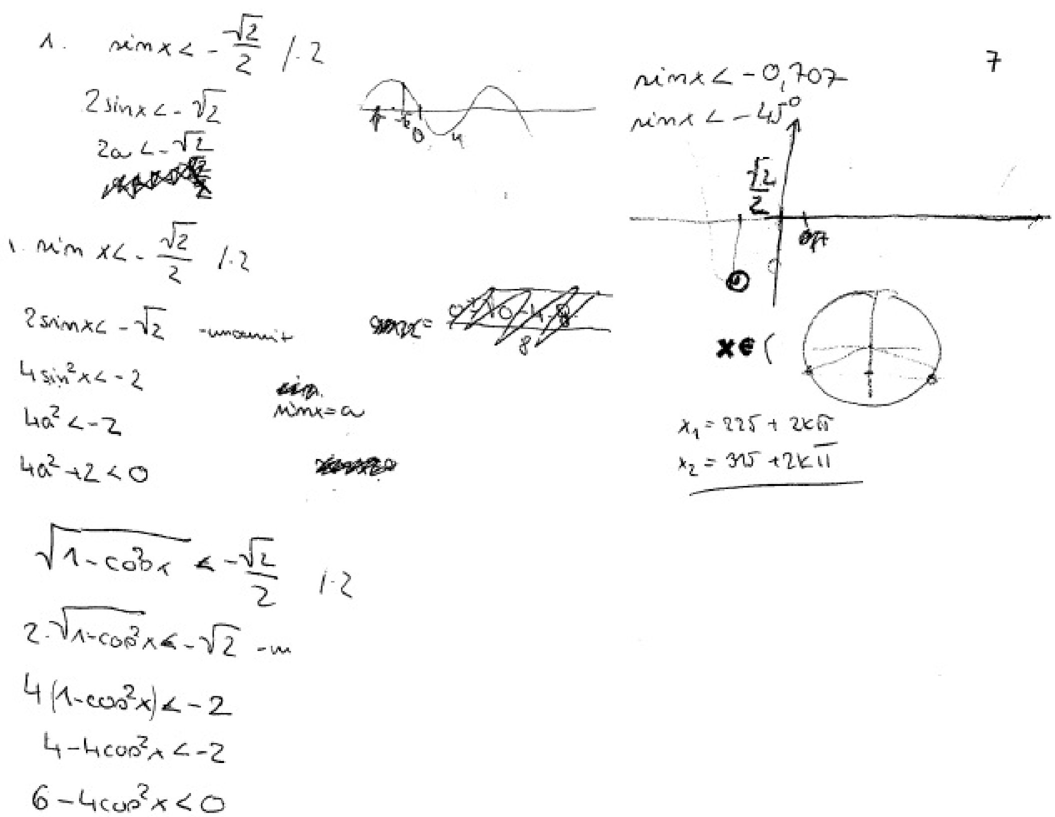
U některých řešení bylo jedinou úpravou přepsání zlomku na pravé straně jako desetinného čísla $\sin x < -0,71$, případně $0,85$.

Většina studentských prací obsahovala náčrtek grafu funkce sinus nebo jednotkové kružnice. Ze svého náčrtku se student snažil určit kořen rovnice $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tabulka 5 zjednodušeně popisuje, který náčrtek student zvolil. Lze vidět, že studenti (1, 2, 7, 18, 20, 23) pracovali s oběma náčrtky.

náčrtek	identifikátor studenta	počet
graf	1, 2, 7, 11, 13, 18, 20, 23	8
jednotková kružnice	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24	15
bez náčrtku	8, 9, 10, 12, 14	5

Tabulka 5: Volby náčrtků funkce sinus

První úlohu vyřešil správně jeden student (6), další tři studenti zapsali místo otevřeného intervalu uzavřený (3, 4, 5). Jeden student úlohu neřešil vůbec (13), ostatních 19 studentů úlohu nedořešilo. Vztah dvou funkcí, který popisuje daná nerovnice, se snažilo graficky načrtnout 15 studentů, z nich 11



Obrázek 2: Různé strategie studenta

studentů se dopustilo nějaké chyby. Následující text popisuje chyby studentů.

- Studenti (1, 2, 7, 11, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23) zakreslili chybně daný vztah nebo zvýraznili špatné části sinusoidy. Přímku popisující rovnost zakreslovali rovnoběžně s osou y. Pokud ji zakreslili rovnoběžně s osou x, zvýraznili část sinusoidy od libovolného průsečíku do nekonečna bez ohledu na to, zda leží nad či pod danou hranicí. Studenti nebrali v úvahu průběh funkce.

- Studenti (1, 13, 15, 16, 17, 19) opomenuli znaménka minus před zlomkem na levé straně.

- Student (24) zaměnil osy jednotkové kružnice. Hodnoty funkce sinus vynášel na osu x. Upravil nerovnici na tvar $x < -45°$, vedle napsal dva kořeny $x_1 = 135° = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ a $x_2 = 225° = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ (tedy kořeny rovnice $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$), ke kterým napsal poznámku *ani jedno není menší*, úloha nemá řešení.

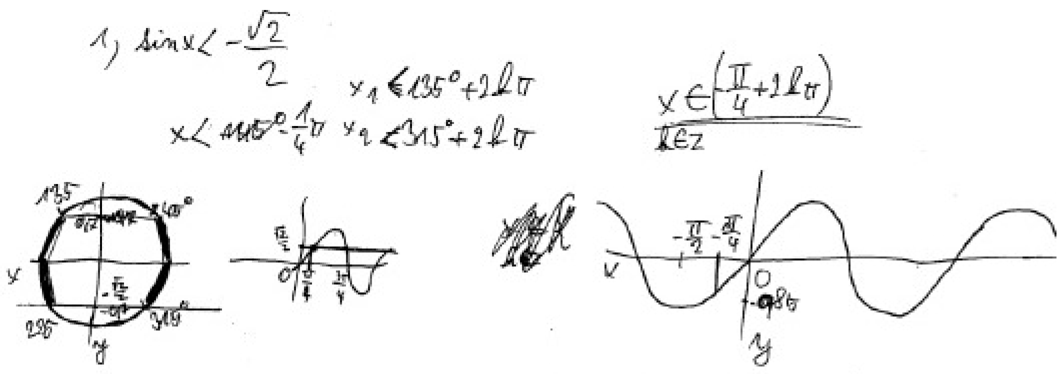
- Student (7) vynesl funkční hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ na osu nezávisle proměnné.

Už zde se projevuje, že student si nemusí být vědom, jak zaznamenat symbolicky či zvýraznit do obrázku „funkční hodnoty dané funkce menší než hodnota zadaná“ či „pro která $x \in D_f$ platí nerovnost“.

Prvním předpokladem pro získání vhledu do vztahu dvou funkcí je, aby byl student schopen správně určit průsečíky těchto funkcí, pokud existují. V našem případě se jedná o vyřešení rovnice $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. V tabulce 6 na str. 53 jsou zaznamenány kořeny, které si studenti označovali do svých náčrtků, a řešení, která zapsali symbolicky. Dodržuji tvar řešení tak, jak jej zapsali studenti, tedy i s tvarem jednotlivých závorek a zápisem velikosti úhlu. V tabulce jsou i studenti, kteří daný kořen označili alespoň graficky (tečkou, čárkou, kolečkem).

Určení průsečíků funkcí je pouze první fází řešení. Řešení studentů byla často neúplná již v této fázi. Správně určilo kořeny rovnice 7 studentů.

Podívejme se podrobněji na některá řešení studentů: Student (1) zvýraznil špatné oblouky, nejspíše na základě symbolického zápisu svého řešení, jak ilustruje obr. 3.



Obrázek 3: Řešení úlohy 1 studentem (1)

Student (2) správně vyčetl řešení ve stupních, dopustil se však chyby při zápisu pravého koncového bodu intervalu v míře obloukové.

Zápis studentských řešení napovídá, že se zde dost významně projevuje vliv řešení lineárních nerovnic. U studentů (1, 11, 17, 19, 20, 22, 23, 24) se v závěrečných krocích vyskytovaly zápisy: $x < -\frac{\pi}{4}$ či $x < 45°$, případně $x_1 < 135° + 2k\pi$, $x_2 < 315° + 2k\pi$. Zavedené zápisy z lineárních rovnic a nerovnic ovlivňují i nerovnice, kde čistě lineární přístup může vést k chybným závěrům. U studentů, kteří úlohu správně vyřešili, se tento zápis neobjevil.

student	kořen v náčrtku	zapsané řešení
1	$45°; 135°; 225°; 315°$	$x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ $x < 135° + 2k\pi; x < 315° + 2k\pi$
2	$225°; 315°$	$x \in \{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\}$
3	$45°; 135°; 225°; 315°$	$x \in \langle\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\rangle$
4, 5	$\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$	$x \in \langle\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\rangle$
6	$225°; 315°$	$x \in (\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$
7	$225°; 315°$	$x_1 = 225° + 2k\pi; x_2 = 315° + 2k\pi$
8		$\sin x < -45°$
9		$x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$
11	$315°$	$x \in (-\infty, 315)$
14		$x \in -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$
15	$45°, 135°$	$x \in \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
16	$45°; 135°$	$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
17	$45°; 135°; 225°; 315°$	$x \in (135° + 2k\pi; 360° + 2k\pi)$
18	$-\frac{\pi}{2}$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad +2k\pi)$
19	$45°, 135°$	$x \in (0, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$
20	$45°; 135°; 315°$	$x \in \langle -\frac{\pi}{4}, 0)$
21		$x \in \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
22	šipka nad částí grafu$(-\infty, -\frac{\pi}{4})$	$x < -0,71$
23	$45°; 315°$	$x < 315°$
24	$135°; 225°$	… nemá řešení

Tabulka 6: Kořeny, které studenti zvýraznili, a řešení, která zapsali

Dalším místem řešení úloh, ve kterém jsem očekávala chyby, bylo převádění ze stupňové do obloukové míry. Sedm studentů ze 13 počítalo během řešení se stupni, získané řešení však zapisovali v obloukové míře. Příčinou může být, podobně jako u zlomků, míra používání různých zápisů pro velikosti úhlů. Chyby, které se vyskytovaly v převodech, nebyly tak časté, jak jsem čekala. Studenti (1, 7, 17) používali smíšené zápisy řešení, např. $135^\circ + 2k\pi$.

V několika řešeních (7, 8, 11, 14, 18, 21, 22) se vyskytl zápis, který obsahoval tyto kroky:

$$\begin{aligned} \sin x &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x &< -45^\circ \quad \text{či} \quad -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Jiný ze studentů (9) zapsal řešení takto:

$$\begin{aligned} \sin x &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -45^\circ &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_1 &= -\frac{\pi}{4} \\ x_2 &= \frac{7}{4}\pi \end{aligned}$$

Tyto zápisy naznačují, že studenti nerozlišovali mezi hodnotami, kterých nabývá funkce sinus, a hodnotami, kterých nabývá argument, tedy výraz s neznámou. Nejlépe daný případ dokládá řešení soustavy nerovnic studenta (19), viz obr. 14 na str. 71 a obr. 15 na str. 72.

Pouze jeden ze studentů (6) dořešil nerovnici správně do konce včetně formálního zápisu řešení (i s tvarem závorek). Koncové body správného intervalu do svého řešení zahrnuli studenti (3, 4, 5). Nicméně formální zápis tvaru závorek může být způsoben nepozorností při četbě zadání.

Nyní popíšu krátce hlavní otázky, které padly při opravě testu.

- U: Říkali jsme si, že nejlepší je řešit z obrázku. Co používáme?

- S: Graf a jednotková kružnice.

  Proběhla krátká diskuse o vhodnosti u jednotlivých příkladů. Byla zvolena jednotková kružnice.

- U: Kde hledáme sinus?

  Vždy některý ze studentů odpověděl nebo pokud odpověď trvala déle, byl někdo vyzván učitelkou.

- U: Beru to nejdříve, jako že se rovná. Jaká kolečka zvolím, prázdná nebo plná.

- U: Kde leží hodnoty menší než $-\frac{\sqrt{2}}{2}$?

- U: Který oblouk je řešením?

- U: Kolik je to stupňů? A v radiánech?

- U: Jaký interval zapíšu? Je otevřený nebo uzavřený? Jak to poznám?

- U: Nezapomenu na periodu.

- U: Co kdyby byl zobáček obráceně? Jak bychom psali odpověď?

Tedy i v rámci reedukace se paní učitelka snažila využít pozitivního transferu znalostí z oblasti rovnic a průběhu funkce do oblasti nerovnic.

2. $\operatorname{tg} 2x > 0$

V této úloze studenti měli pracovat s dvojnásobným úhlem, definičním oborem, který není spojitý, kratší periodou. Strategie, které zde studenti použili, lze rozdělit do dvou kategorií. Podobně jako u první úlohy se zde vyskytla ryze početní řešení a početní řešení opírající se o náčrtek grafu funkce. V této úloze si ani jeden z řešitelů nenačrtnul jednotkovou kružnici. Volby jednotlivých náčrtků a postupů jsou zaznamenány v tabulce 7.

Užitá strategie	Identifikátor studenta	Počet
Graf	3, 4, 5, 8, 11	5
Náčrt grafu s výpočty	1, 2, 7, 18, 22, 23, 24	7
Ryze početně	9, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21	9
Neřešilo	10, 14	2

Tabulka 7: Přístupy k řešení 2. úlohy

Ve většině případů si studenti načrtávali graf funkce $\operatorname{tg} x$ místo grafu $\operatorname{tg} 2x$. Pouze (3) se pokusil načrtnout graf funkce s dvojnásobným argumentem a do jedné periody vkreslil dvě větve. Některé postupy naznačovaly, že studenti v zadání nevidí vhodnost zjednodušení pomocí substituce za argument. Ve dvou případech (13, 16) se vyskytlo v řešení použití vzorce pro dvojnásobný úhel $\operatorname{tg} 2x = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}$. Student (13) úlohu po tomto kroku nedořešil a student (16) vynásobil celou nerovnost výrazem ve jmenovateli, získal nerovnost $2 > 0$, ze které neučinil žádný závěr.

Pokud se zaměříme na správnost řešení, viz tabulka 8, pak tuto úlohu vyřešil správně pouze student (2), který v zápisu řešení pouze nahradil kulaté závorky složenými. Formálně tedy zapsal dva body. Zvýrazněná část grafu a užití nerovnosti naznačuje, že složenými závorkami nezapisoval dva body.

Asymptoty pro funkci $\operatorname{tg} x$ neuvedlo 9 studentů (7, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 31, 24), správně je pro tuto funkci uvedlo dvanáct studentů. Přímou substituci $2x = a$ použili dva studenti (1, 2), jeden student (7) použil substituci za celou goniometrickou funkci.

	identifikátor studenta	počet
Správné řešení	2	1
Řešení s chybou	1, 6, 7, 9, 12, 17,18, 19, 20, 21, 22, 24	12
Nedořešeno		
Graf $\operatorname{tg} 2x$	3	1
Graf $\operatorname{tg} x$ se správnými asymptotami	4, 5, 11	3
Graf $\operatorname{tg} x$ s nesprávnými asymptotami	8, 23	2
Užití vzorce pro dvojnásobný úhel	13, 16	2
Nedovolená operace s argumentem	15	1
Neřešeno	10, 14	2

Tabulka 8: Přehled řešení 2. úlohy

I zde se zaměřím na to, zda studenti dokázali vyřešit rovnici $\operatorname{tg} x = 0$, neboť většina studentů si načrtla tento graf. Z tabulky 9 lze vyčíst, že studenti si jsou vědomi, kde leží některé kořeny rovnice. I v této úloze se ukázalo, že studenti neberou v úvahu všechny možné kořeny rovnice. Student (2) řešení rovnice nezaznamenal, z jeho řešení je zjevné, že dané kořeny v úvahu vzal.

Studenti (1, 2, 19, 20, 22) úspěšně dokázali vyřešit nerovnici $\operatorname{tg} x > 0$. Student (1) ve svém řešení správně zvýraznil část grafu, která splňuje daný

Určené kořeny	**Student**	
$x \in \{0 + k\pi\}$	1, 2 , 17, 20, 22	
$x = 0$	Graficky	3, 6, 7, 24
	Početně	19, 20
$x = \{0, \pi\}$	11, 18	
$x = \{0, -\pi\}$	4, 5	
$x = \pi$	9	
$x = \{0, 2\pi\}$	23	
Neoznačené body v intervalech $(0, \pi)$ a $(\pi, 2\pi)$	8	

Tabulka 9: Kořeny rovnice $\operatorname{tg} x = 0$

vztah, a správně zapsal všechny kořeny rovnice $\operatorname{tg} x = 0$. Ve svém řešení neuvažoval o bodech, ve kterých není funkce tangens definována. Jeho řešením jsou všechna $x > 0$, nikoli sjednocení intervalů.

Studenti (19, 20) použili tento postup:

$$\operatorname{tg} 2x > 0$$

$$\operatorname{tg} x > 0$$

$$x > 0$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

Periodu studenti připsali pouze k jednomu z bodů a nezahrnuli zkrácení periody. Jiný druh písma a stopa po smazané závorce naznačuje, že studenti připsali periodu na konci řešení.

Student (22) správně začal zapisovat intervaly

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$$

Následně je zapsal takto $x \in (0, \frac{\pi}{2}) + k\pi$.

Nyní popíšu základní aktivity a poznámky, které zmínila paní učitelka při opravě této úlohy.

- Uvnitř argumentu není pouze x, použiji tedy substituci $2x = a$. Na tabuli načrtla graf funkce tangens.

- Je mi jasné, že se větve opakují. Pak to opáknu s periodou $k\pi$.

- Bod 0 patří do řešení nebo ne? Kde je tangentoida kladná? (zvýraznila část grafu nad osou x)

- Pro jaká a to nastává? Zapsala na tabuli nerovnost:

$$0 < a < \frac{\pi}{2}$$

  Připsala periodu $k\pi$. Zápis na tabuli vypadal následovně:

$$0 + k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

- Můžete to nechat takto nebo zapsat pomocí intervalu takto:

$$x \in (\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})$$

Oprava úlohy proběhla ve velkém tempu, většinu operací zapisovala paní učitelka na tabuli sama z důvodu časové tísně.

$$3. \qquad \cos(x - \tfrac{\pi}{6}) \leq \tfrac{1}{2}$$

Tuto úlohu neřešili čtyři studenti (4, 10, 12, 14). Úlohu nedořešil správně ani jeden student.

náčrtek nebo užitá strategie	Identifikátor studenta	Počet
Graf	1, 23	2
Náčrt jednotkové kružnice s výpočty	1, 2, 3, 7, 17, 19, 20	7
Početně	5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24	12
Neřešilo	4, 10, 12, 14	4

Tabulka 10: Náčrtky a postupy použité v 3. úloze

Substituci za argument použilo 5 studentů (1, 5, 6, 17, 21). Student (6) položil v průběhu řešení substituci $a = x - \frac{\pi}{6}$ rovnu nule, tj. $a = 0$.

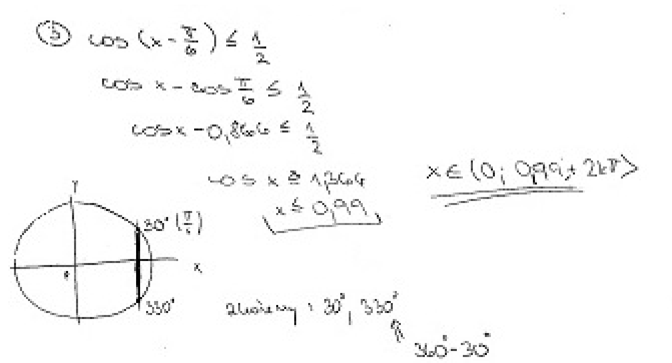
Při řešení úlohy bylo třeba určit kořeny rovnice $\cos a = \frac{1}{2}$. Student (1) určil graficky dva kořeny 60°, 300°, do řešení však použil pouze kořen z prvního kvadrantu. Studenti (9, 17) pracovali ve svém řešení s kořenem $\frac{\pi}{3}$, student (19) pracoval v náčrtku s kořeny 30° a 330°, nelze je však považovat za kořeny rovnice, protože základem jeho řešení byla tato úprava:

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos x - \cos\frac{\pi}{6}$$

Popsanou úpravu použili i studenti (5, 8, 11, 15, 16, 19, 20, 22, 24). To může být ovlivněno např. vlivem distributivního zákona, kdy student roznásobuje argument, nebo nepřesným použití vzorce.

Jiní studenti (3, 7, 13, 18) rozepsali levou stranu takto:

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6}$$



Obrázek 4: Řešení 3. úlohy studentem (19)

Student(3) tento výraz dále upravil, jak ukazuje obr. 5 na str. 62.

$$0,87 \cos x + \frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2}$$

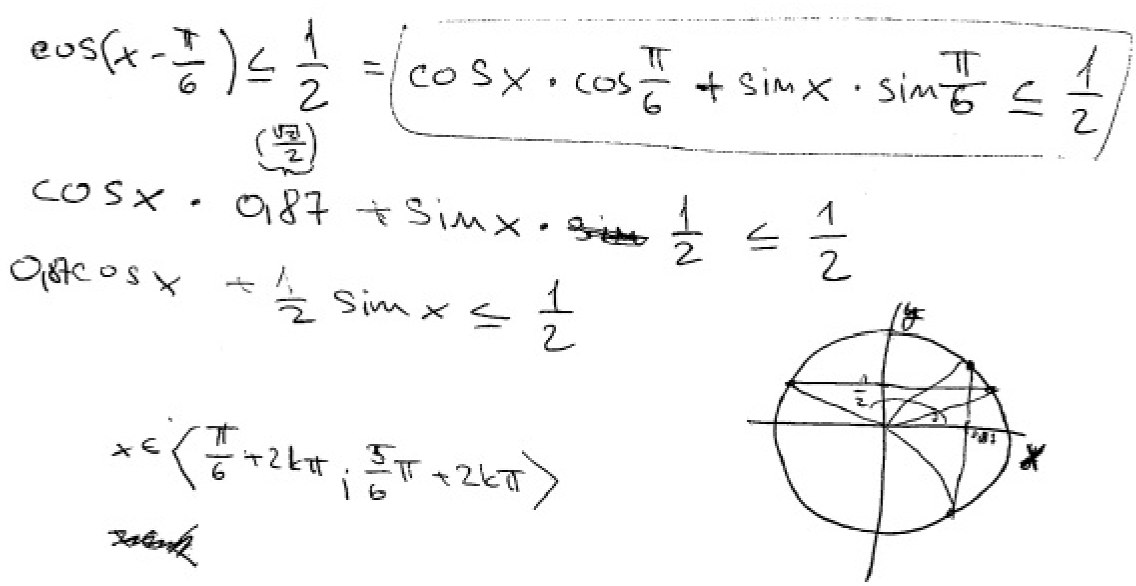
Takto vzniklou nerovnici se snažil vyřešit na základě obrázku i jiný student (7), jeho náčrtek je překreslen na obr. 6[12] na str. 62.

Formálně jsou úpravy levé strany nerovnice správné, studentovi ale najít řešení neusnadní. V této úloze si lze všimnout i jiné úpravy - zaokrouhlení zlomku $\frac{\sqrt{2}}{2}$. I jiní studenti pracovali spíše s desetinnými čísly než se zlomky.

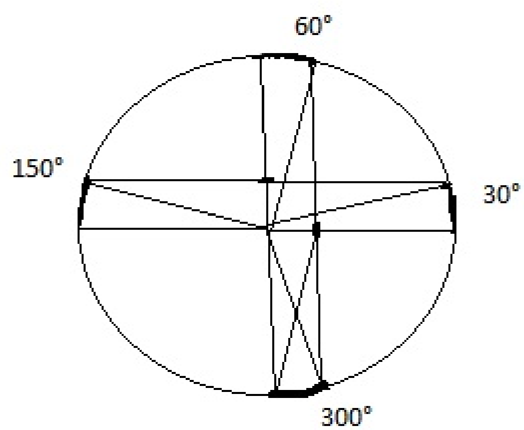
Tabulka 11 na str. 63 ukazuje, k jakým řešením jednotliví studenti dospěli. Řešení zapisuji tak, jak je napsali studenti ve svých pracích. Řešení rovnice $\frac{\pi}{2}$ se zde vyskytuje jako krajní bod intervalu ve 4 případech z 6. Intervaly zapsané jako řešení se neshodují ani u jednoho studenta. I v tomto malém vzorku se vyskytlo nedodržování korektního zápisu intervalů a volný přechod mezi různými mírami pro popis velikosti úhlu.

V několika řešeních se projevily rozpory mezi jednotlivými myšlenkami. Dokládá to např. řešení třetí úlohy studenta (1), viz obr. 7 na str. 63.

[12]Náčrtek byl nakreslen tužkou příliš slabě, aby mohl být naskenován.



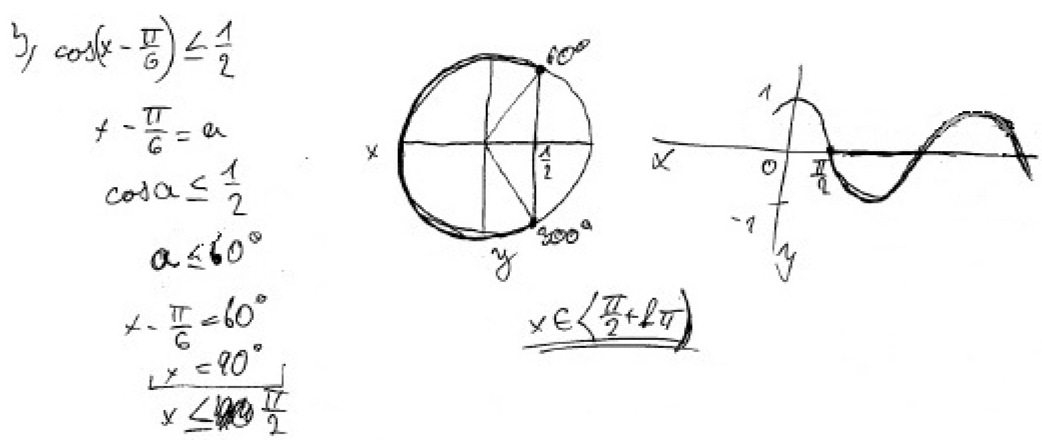
Obrázek 5: Řešení 3. úlohy studentem (3)



Obrázek 6: Náčrtek studenta (7)

Zapsaný kořen	student
$x \in \langle \frac{\pi}{2} + k\pi)$	1
$x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$	2
$x \in \langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \rangle$	3
$x \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$	9
$x \in \langle 0^\circ + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$	17
$x \in (0; 0,99 + 2k\pi)$	19

Tabulka 11: Zapsané tvary řešení 3. úlohy



Obrázek 7: Řešení 3. úlohy studentem (1)

Student (1) správně graficky určil řešení nerovnice $\cos a \leq \frac{1}{2}$ na jednotkové kružnici, nicméně hned vedle zvýraznil v grafu funkce, že řešením jsou všechna $x \leq \frac{\pi}{2}$. Řešení zvýrazněné v grafu funkce bylo ovlivněno symbolickým zápisem. Právě toto studentské řešení ukazuje i jiný fakt. Pro studenta může být práce s jednotkovou kružnicí mnohem snazší než práce s grafem. Lépe z ní může vyčíst hodnoty kořenů a určí hodnoty kosinu menší než $\frac{1}{2}$, přesto jeho představa není zcela správná, jak dokládá graf nakreslený hned vedle.

Oprava této úlohy probíhala následujícím způsobem. Paní učitelka doporučila užití substituce za argument a užití jednotkové kružnice. Následovaly otázky:

- U: Kam se vynáší kosinus?

- S: Osa x.

- U: Jaké body jsou v průsečících, jaká kolečka?

- S: Plná.

- U: Kde jsou hodnoty menší než $\frac{1}{2}$?

- S: Oblouk vlevo.

- U: Kolik je to stupňů? A v radiánech?

- S: $60^\circ \ldots\ldots \frac{\pi}{3}$

- U: A druhý bod?

- S: $\frac{5}{3}\pi \ldots\ldots 300^\circ$

- U: Kde jsme s hodnotami a? Zde napsala na tabuli nerovnosti:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq a \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

- U: No a chci osamostatnit x. Řešením jsou všechna x splňující nerovnost:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

- U : Nebo zapsané jako interval.

$$x \in \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \rangle$$

  Poslední úprava a kroky proběhly velmi rychle. Jedna studentka se zeptala přímo:

- S: Jak jsem získala ten druhý řádek?

I další studenti měli podobný problém. Paní učitelka ukázala na substituované a a vysvětlila, že si místo něj má představit $x - \frac{\pi}{6}$, vzít to celé jako dvě nerovnice a přičíst $\frac{\pi}{6}$ na obě strany. Upozorňuji na otázku „Kde jsme s hodnotami a?“ Většina studentů měla problém právě s tímto krokem i v úloze předešlé. Studenti nezapsali, mezi kterými hodnotami se pohybuje jimi zvolená substituce za $2x$ ve 2. úloze.

Zejména poslední otázky, které paní učitelka položila, ukazují na kroky, které pro studenty byly obtížné. Tvar řešení neodpovídá základním nerovnostem $x \leq a$, $x < a$, $x \geq a$, $x > a$ (příp. $f(x) < a$, $f(x) \leq a$, $f(x) > a$, $f(x) \geq a$). Objevuje se zde nový typ závěrečné nerovnosti $a < x < b$, příp. $a < f(x) < b$, kdy je neznámá sevřena z obou stran.

4. Poslední úlohou byla soustava nerovnic. Obtížnost jsem se snažila snížit omezením řešení na uzavřený interval v délce periody.

Řešte soustavu nerovnic v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\begin{cases} \sin x \geq -\frac{1}{2} \\ \operatorname{cotg} x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Tuto úlohu neřešilo 13 studentů, úspěšně ji nedořešil ani jeden ze studentů. Většina těch, kteří ji řešili, použila některý z náčrtků, jak popisuje tabulka 12.

Užitá strategie	Identifikátor studenta	Počet
Graf funkce sinus	2, 3, 4, 5, 6, 17, 18, 22	8
Graf funkce kotangens	5, 18, 19, 22, 23	5
Náčrt jednotkové kružnice	2, 3, 19, 22, 23	5
Číselná osa	2	1
Početně	11	1

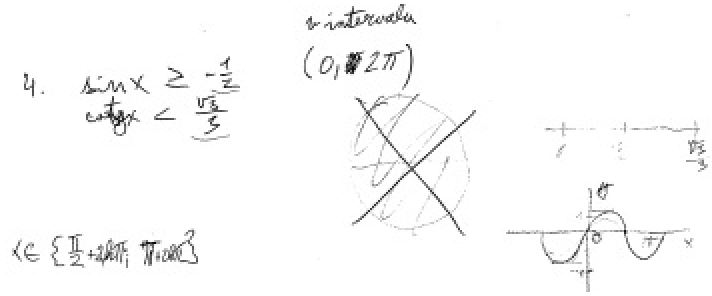
Tabulka 12: Náčrtky použité v řešení 4. úlohy

Vzhledem k malému počtu studentů, kteří se pokusili danou úlohu vyřešit, popíši jednotlivá řešení.

- Student (2) si načrtnul jak jednotkovou kružnici, kterou škrtnul, graf funkce sinus a část číselné osy s body $0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$. Jako řešení zapsal

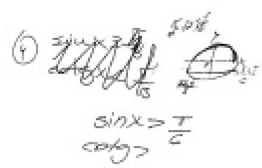
$$x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\}$$

Tento interval je podmnožinou řešení. I těchto pár kroků ukazuje, že student často hledá různé možnosti, jak do problému lépe nahlédnout. Viz obr. 8



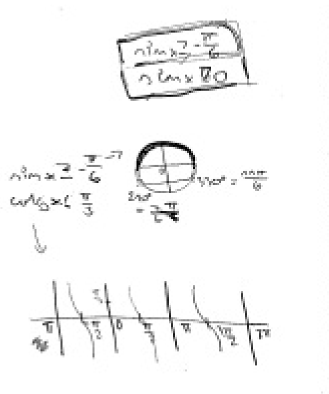
Obrázek 8: Řešení 4. úlohy studentem (2)

- Student (4) si poznamenal k náčrtku jednotkové kružnice $\sin x > \frac{\pi}{6}$, určil správně kořen $\frac{11}{6}\pi$, druhý kořen je graficky správně, číslo je však nečitelné. Viz obr. 9



Obrázek 9: Řešení 4. úlohy studentem (4)

- Student (5) graficky správně vyřešil nerovnici $\sin x \geq -\frac{1}{2}$, do grafu funkce kotangens vynesl na osu y hodnotu $\frac{\pi}{3}$. Zaměnil bod z definičního oboru a hodnotu funkce. Dopočítat úlohu však nestihnul. Viz obr. 10

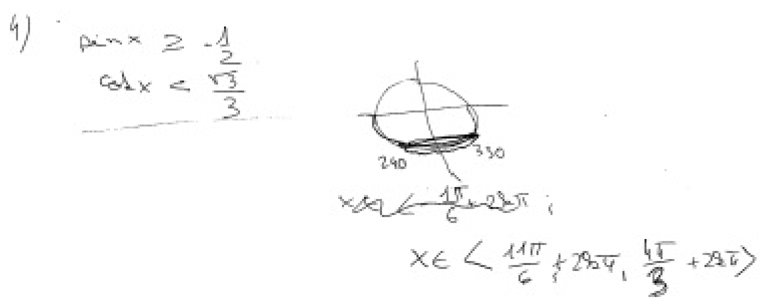


Obrázek 10: Řešení 4. úlohy studentem (5)

- Student (6) načrtnul jednotkovou kružnici a zvýraznil oblouk s krajními body 240° a 330°. Výsledným řešením byl interval

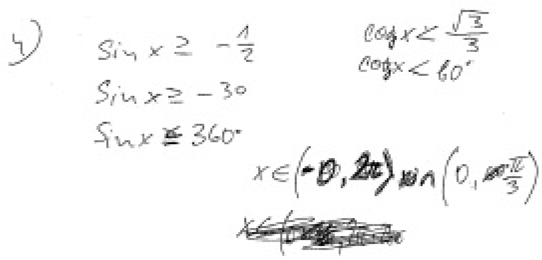
$$\langle \frac{11}{6}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \rangle$$

Levým krajním bodem je jeden z kořenů $\sin x = -\frac{1}{2}$, pravým krajním bodem kořen rovnice $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. I řazení kořenů odpovídá úvaze: „body větší nebo rovny $-\frac{1}{2}$ a zároveň menší než $\frac{\sqrt{3}}{3}$“. Viz obr. 11



Obrázek 11: Řešení 4. úlohy studentem (6)

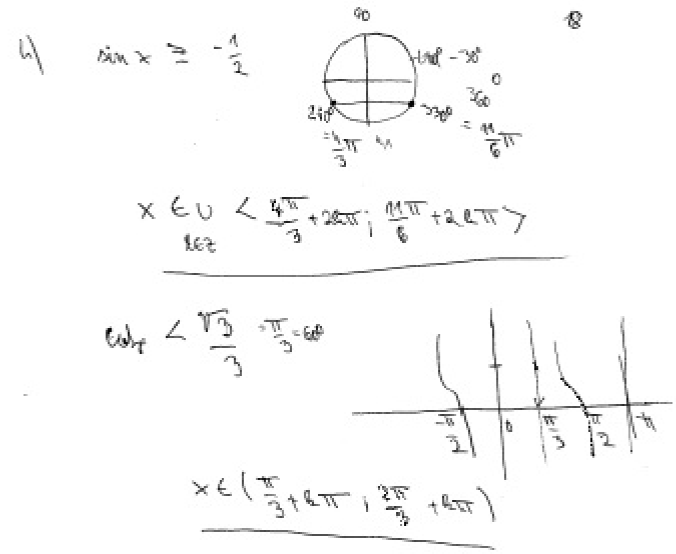
- Student (11) se pokusil vyřešit jednotlivé nerovnice. Jeho zápis potvrzuje tendenci studentů nerozlišovat mezi hodnotami, které nabývá goniometrická funkce, a hodnotami, kterých nabývá argument. Student si zapsal $\sin x \geq -30°$, ihned poté $\sin x \leq 360°$ vedle $\operatorname{cotg} x < 60°$. Z těchto zápisů odvodil interval $(0, \frac{\pi}{3})$. Na řešení tohoto studenta oceňuji jeho úvahu o tom, zda tento interval je prvkem zadané množiny, již naznačil zápisem $x \in (-0, 2\pi\rangle \cap (0, \frac{\pi}{3})$. Viz obr. 12



Obrázek 12: Řešení 4. úlohy studentem (11)

- Student (17) uvedl podmínky pro funkci kotangens. I tento student použil nekorektní zápis při řešení nerovnic.

- Řešení studenta (18) se budu věnovat trochu podrobněji, protože obsahuje řadu chyb, které se vyskytly u většího počtu studentů. Obsahuje náčrtek jednotkové kružnice se zvýrazněnými kořeny 240°, 330°. Řešení nerovnice $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ je podle studenta sjednocení intervalů, které zapsal takto:
$$x \in \bigcup_{k \in \mathcal{Z}} \langle \frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \rangle$$
Viz obr. 13 na str. 70.



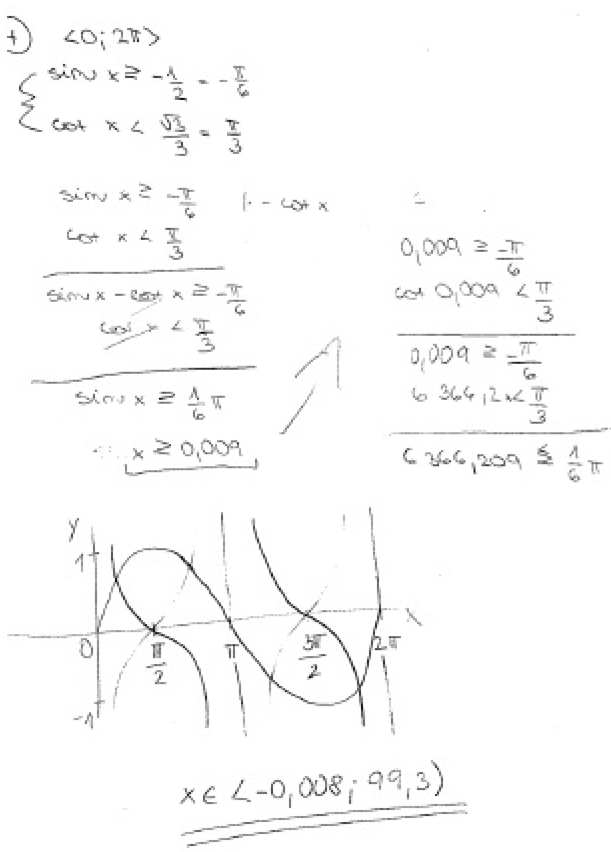
Obrázek 13: Řešení 4. úlohy studentem (18)

V řešení této nerovnice se vyskytla dvě místa, kde student chyboval. První z nich - přepočet kořene ve třetím kvadrantu - není z hlediska nerovnic tak závažný. Druhým místem je volba oblouku, který splňuje nerovnost. Student zvolil oblouk opačný. Možných příčin může být několik: od chápání uspořádání záporných čísel, polohu hodnot menších či větších než $-\frac{1}{2}$, až po nesprávnou volbu intervalu, ve němž je splněna nerovnost, nesprávně načrtnuté větve funkce kotangens. Vedle nerovnice si student tužkou poznamenal

$$\operatorname{cotg} x < \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

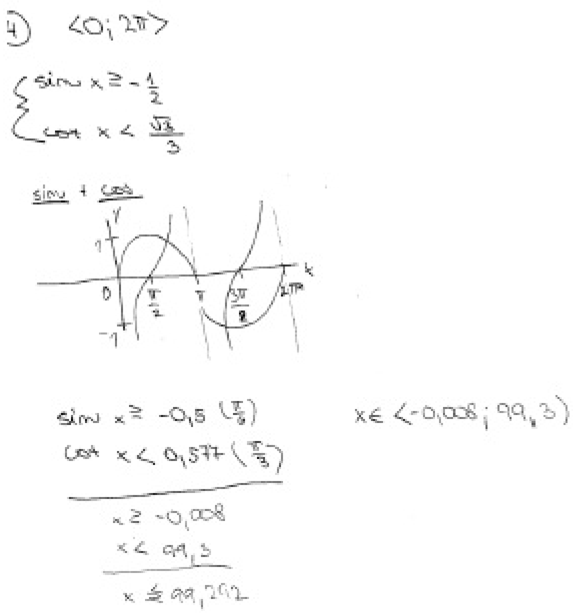
Hranici $\frac{\pi}{3}$ si správně označil i do grafu funkce. Jako řešení nerovnice však zapsal $x \in (\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi)$. Z těchto jednotlivých řešení však již nezapsal průnik.

- I v řešení studenta (19) se vyskytuje zápis $\sin x \geq -\frac{\pi}{6}$ a cotg $< \frac{\pi}{3}$. V tomto řešení se objevuje náčrt obou grafů do jedné soustavy, nicméně s nimi student nepracuje. K soustavě přistupuje ryze početně a algebraicky. Také hodnoty, které vypočítal, dokazují, že si není zcela vědom, zda na kalkulačce použít funkci nebo funkci k ní inverzní. Za π dosazuje hodnotu 3,14. Viz obr. 14 na str. 71 a obr. 15 na str. 72.



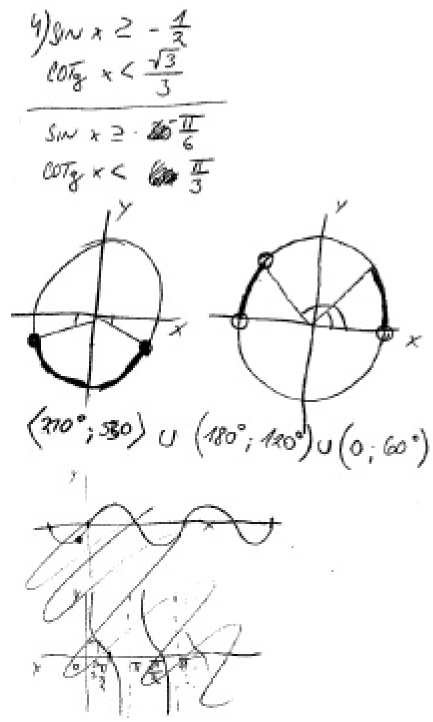
Obrázek 14: 1. část řešení 4. úlohy studenta (19)

- Student (22) použil podobný zápis nerovnosti $\sin x \geq -\frac{\pi}{6}$ jako student(19), ale k řešení soustavy použil náčrtky funkcí. U první nerov-



Obrázek 15: 2. část řešení 4. úlohy studenta (19)

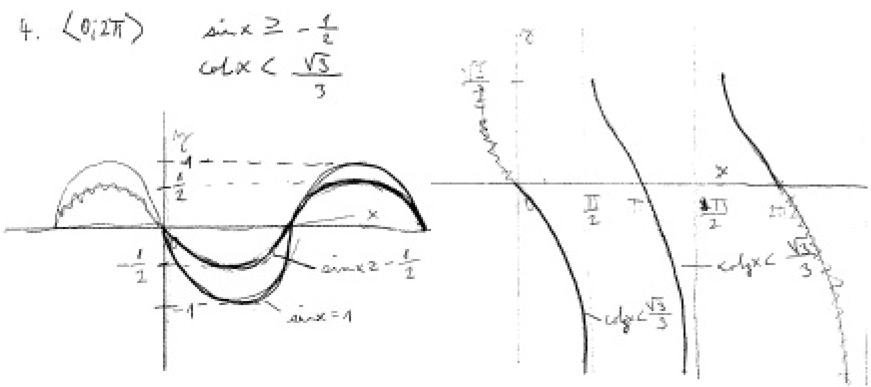
nice zvýraznil opačný oblouk, u druhé nerovnice lze pozorovat pokus o použití jednotkové kružnice i pro funkci $\operatorname{cotg} x$. Pod kružnicemi jsou dva náčrtky průběhu funkcí. V přeškrtaném náčrtku funkce kotangens je zanesen bod $\frac{\pi}{3}$. I zde k správnému dořešení druhé nerovnice chyběl pouze kousek. Viz obr. 16



Obrázek 16: Řešení 4. úlohy studentem (22)

Student (22) si načrtnul několik obrázků, se kterými pracoval, což naznačuje, že hledal vhodné grafické znázornění situace. V jednotkové kružnici si vyznačil oblouk $\langle 210°, 330° \rangle$, tedy opačný, než vyžaduje nerovnost. Vedle této kružnice načrtnul ještě jednu, kde zvýraznil oblouky $(0°, 60°)$ a $(120°, 180°)$. Zvýrazněný oblouk odpovídá řešení, kdy student vypočítá kořen rovnice a mechanicky zachová znak nerovnosti cotg $< \frac{\pi}{3}$. Je to jediný student, který se rozhodl u funkce kotangens pracovat s náčrtkem jednotkové kružnice. Pod oběma obrázky sjednotil dané intervaly. Toto řešení obsahuje typ obtíží, které identifikovali P. Tsamir a N. Almog (2001), kdy studenti mají problémy s logickými spojkami mezi jednotlivými intervaly, se kterými pracují.

- Student (23) se snažil řešit soustavu graficky. Do grafu si načrtnul funkci sinus, jako další krok zmenšil amplitudu a načrtnul do grafu funkci $\frac{1}{2}\sin x$. Viz obr. 17



Obrázek 17: Řešení 4. úlohy studentem (23)

Oprava této úlohy se soustředila na několik kroků. Nejdříve paní učitelka zdůraznila logickou spojku mezi nerovnicemi.

$$\sin x \geq -\frac{1}{2} \wedge \operatorname{cotg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Studentům doporučila pro vyřešení první nerovnice jednotkovou kružnici, pro funkci kotangens graf funkce. Pod jednotlivé nerovnice načrtla obrázky s řešeními. Poté se studentů zeptala, co budou dělat s jednotlivými výsledky nerovnic: průnik nebo sjednocení. Nejzřetelněji bylo slyšet sjednotíme, proto se opět zdůraznila spojka **zároveň**, tedy **proniknout**. Otázkou: „Hodnoty menší než $\frac{\sqrt{3}}{3}$ budu vytahovat nahoru nebo dolů?" dokazuje, že i zde mají vliv pojmy z reálného života, které budou ovlivňovat vždy představy studentů. Velmi jsem ocenila, že pro lepší názornost paní učitelka přešla k číselné ose, na kterou vynesla jednotlivá řešení, použila obě možnosti pro velikosti úhlů. Na tabuli byly nakonec zapsány obě varianty řešení v radiánech i stupních.

Řešení, kdy student použije jeden z kořenů rovnice a automaticky zachová směr nerovnosti bez ohledu na průběh funkce či obrázek, který si načrtnou, použilo 7 studentů z 11.

Shrnutí analýzy řešení goniometrických nerovnic

Z hlediska znalostí funkcí byly překvapivé nedostatečné znalosti průběhu jednotlivých goniometrických funkcí, zasahování do argumentu funkce a nerozlišování mezi bodem z definičního oboru a funkční hodnotou odpovídající tomuto bodu.

Dalším výrazným problémem bylo užívání symbolického jazyka. Nepřesné zápisy se vyskytly nejen v oblasti zápisu funkcí, ale i zápisu množin. Studenti často nedbali na význam jednotlivých typů závorek. Při zápisu pracovali s oběma mírami najednou: stupni i radiány. V průběhu řešení se proto vyskytovaly smíšené zápisy. Výsledky nerovnic ve stupních jsou pro studenty snadněji přístupné, protože jsou reprezentovány celými čísly, nikoli zlomky jako při použití radiánů. Student pracuje se stupni, periodu ale použije v radiánech, protože je zvyklý používat slovní spojení perioda je 2π, příp. $k\pi$.

Negativní transfer znalostí se projevil ve stejném přístupu ke goniometrickým nerovnicím jako k lineárním nerovnicím, příp. ryze monotonním nerovnicím. Studenti určili kořeny, některý z nich zapsali na jednu ze stran nerovnice. Jednou z příčin může být i nejasná představa, co symbolický zápis dané nerovnosti znamená. Chybí propojení s daným vztahem vyznačeným do grafu funkce.

Má očekávání toho, které chyby studenti udělají, byla ovlivněna tím, s jakými chybami jsem se setkala dříve. Během studia na střední škole jsme základní hodnoty funkcí znali nazpaměť nebo je odvozovali z obrázku jednotkové kružnice či grafu, proto naše paní učitelka dbala na přesnost náčrtků. Náčrtek jednotkové kružnice obsahoval dostatek informací, díky kterým bylo snazší rozpomenout se na průběh funkce, hodnoty v základních bodech definičního oboru. Všechny čtyři úlohy byly zaměřené na práci s náčrtkem, proto mohli být studenti, kteří patří k zrakovému představovému typu výrazně zvýhodněni před ostatními. Asocianistická psychologie rozlišuje zrakový, sluchový, motorický a smíšený představový typ. Základem tohoto dělení je to, jaký typ předtav převažuje u tvoření, vybavování a zpracování informací (Jiránek, Souček, 1969).

Logaritmické nerovnice

Logaritmické nerovnice jsem zadala ve třídě 7. F (3. ročník), celý test byl konzultován s paní učitelkou a je součástí přílohy (viz Příloha V). V zadání byly základní logaritmické nerovnice a jedna méně standardní úloha. Zadávání bylo přítomno 24 žáků (14 dívek a 10 chlapců). Test nebyl hlášen předem, studenti si tedy učivo vztahující se k logaritmickým funkcím nezopakovali. To ovlivnilo jejich motivaci test psát. Většina chlapců se rozhodla, že test vyplňovat nebudou: 4 vůbec (nejsou zahrnuti), ostatní se pokusili alespoň o první úlohu (ti již zahrnuti jsou).

Pokud bych se měla zpětně vyjádřit k výběru úloh, nebyl dobrý. Musím podotknout, že první dvě úlohy jsou řešitelné správně i bez vlivu definičního oboru pouhým vynecháním logaritmu, protože obor pravdivosti dané nerovnice byl vlastní podmnožinou množiny, ve které mělo smysl nerovnici řešit. Správné řešení úlohy neukazuje, že student si je vědom všech podmínek, které musí vzít v úvahu u náročnějších úloh: určení oboru řešitelnosti (podmínek) a základu logaritmu. Vliv definičního oboru na řešení je zřejmý až ve třetí úloze.

Tabulka č. 13 popisuje úspěšnost studentů v jednotlivých úlohách. Vykřičník u čísla v prvním sloupci znamená, že student neurčil podmínky pro řešitelnost nerovnice, výsledný interval byl však správný.

Úloha	Úspěšnost		
	True	False	Ne(do)řešené
$\log_2(x+2) > 3$	1 + 11!	5	3
$\log_2(x^2-10) > \log_2 1$	8!	7	5
$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x) > \log_{\frac{1}{2}} 3$	0	18	6
$\log_{2x-3} x > 1$	0	13	7

Tabulka 13: 7. F - úspěšnost

Nyní se krátce vyjádřím k jednotlivým úlohám.

V první úloze $\log_2(x+2) > 3$ napsalo správný interval řešení 12 studentů, pouze jeden z nich však zapsal i podmínky řešitelnosti na základě definičního oboru.

Ve druhé úloze jeden student zapsal neúplné podmínky řešitelnosti. Tento student neuvažoval o záporných hodnotách, které řeší nerovnici $x^2 - a > 0$, kde $a \in R$ (příp. jiný znak nerovnosti), chyba pak vznikla nejen při určení definičního oboru, ale i v závěru samotném. Vyskytla se chyba, kterou popisují P. Tsamir a N. Almog (2001). Řešení rovnice $x^2 = 25$ lze zapsat $x = \pm 5$. Studenti zápis $x > \pm\sqrt{11}$ považují za korektní i v při řešení nerovnic. Tento zápis řešení nerovnice $x^2 > 11$, která vznikla úpravou druhé úlohy, se vyskytoval velmi často. Zápis $x > \pm\sqrt{11}$ se vyskytl ve 4 případech (1, 9, 15, 20), tito studenti však zapsali správné intervaly řešení nakonec takto $x \in (-\infty, -\sqrt{11}) \bigcup (\sqrt{11}, \infty)$, případně nepoužili symbol $\bigcup$, ale spojku *a*. Částečné řešení $x > \sqrt{11}$ se vyskytlo dvakrát (10, 16), pouze student (10) zapsal jako řešení interval $(11, \infty)$. Dva studenti (8, 14) zasáhli do základu logaritmické funkce a pracovali s ním jako s operátorem (8) či argumentem (14). Student (8) upravil nerovnici v zadání na tvar:

$$\log \quad 2x^2 - 20 > \log 2$$

Druhý student (14) odstranil logaritmus tak, že na kalkulačce vypočítal $\log 2 = 0,301$, kterým logaritmus nahradil, a roznásobil jím argument.

Ve třetí úloze neotočilo znak nerovnosti 7 studentů (9, 10, 11, 12, 16, 17, 20). Studenti (9, 10, 11, 20) své řešení ukončili ve fázi určení nulových bodů (kořenů rovnice $x^2 - 2x < 3$). Určení definičního oboru ovlivnilo správnost řešení u 4 studentů (1, 12, 14, 15), jejichž řešením byl interval $(-1, 3)$.

Ve čtvrté úloze se studenti, kteří úlohu řešili, rozdělili do dvou skupin. První skupina (2, 10, 15, 16, 17, 18) začala uvažovat o podmínkách pro základ a argument logaritmu; druhá skupina (1, 9, 11, 12, 13, 19, 20) řešila úlohu bez těchto podmínek. Obor řešitelnosti rovnice určili dva studenti (2, 15). Pouze student (2) rozdělil svá řešení dvou intervalů podle hodnoty základu, odstranil však chybně logaritmus. Objevovala se tato řešení:

- $x > 3$ u studentů (1, 19)
- $x < 3$ u studentů (9, 10, 11, 12, 15, 20), kteří zachovali znak nerovnosti a nezahrnuli do úvahy podmínky, ačkoliv je někteří určili.
- $x \in (\frac{3}{2}, 3)$ u studentů (16, 17, 18), kteří podmínky v úvahu vzali, ale nerozdělili práci do intervalů podle hodnoty základu. Studenti (16, 18) nevyloučili $x = 2$, hodnotu, kdy je základ roven jedné.

U logaritmických nerovnic není vliv poznatků z rovnic tak výrazný. Logaritmická funkce je na svém základním definičním oboru ryze monotonní. Při řešeních logaritmických nerovnic se objevily chyby, které měly původ v odstranění logaritmu.

6 Závěr

Chyby jsou součástí výuky a tvoří důležitou součast procesu učení. Jejich zdrojem je i učivo samo (Brousseau, 1997), ale i studentův přístup. Učitel by měl vést své studenty k tomu, aby používali způsoby myšlení, které mají blíže ke kritickému myšlení založenému na analýze, tedy spíše k anticipaci analytické a explorativní, než spontánnímu jednání založeného na signálech. Přesto jsou intuitivní a spontánní nápady předpokladem k vytváření nových a překvapivých řešení. Volba vhodné strategie, kterou student použije, by měla být založena na koordinaci různých prvků a vztahů.

Mým cílem bylo určit, jaké znalosti a jaké oblasti matematiky ovlivňují výskyt chyb v řešení nerovnic. Výskyt chyb byl ovlivněn schopností porozumět matematickému jazyku. Většinou se v literatuře (Kieran, 2004) doporučuje algebraickou symboliku doplnit grafickým znázorněním, které usnadňuje studentovi lépe nahlédnout pod někdy hůře přístupnou symboliku matematiky.

Obtíže s matematickou symbolikou se týkaly těchto oblastí: číselné obory, úpravy algebraických výrazů, oblast funkcí. Studenti nedodržovali korektní tvar závorek při psaní intervalů. Chyby se vyskytly při používání základních pojmů jako funkční hodnota, inverzní funkce, definiční obor, argument funkce. Studenti chybně náčrtávali i grafy funkcí. Často neurčili všechny kořeny. Dovednost řešit rovnice souvisí i s dovedností řešit nerovnice. Počet průsečíků porovnávaných funkcí je ovlivněn právě faktory, jako je průběh funkce, perioda funkce a tvar argumentu.

Vyskytly se i chyby vzniklé špatným dosazením, zapamatováním vzorce pro diskriminant a vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice, chyby vzniklé nesprávnou algebraickou úpravou a numerické chyby.

V řešeních studentů se vyskytl tento negativní transfer znalostí z oblasti rovnic do oblasti nerovnic. Projevil se přístupem k nerovnici jako speciálnímu případu rovnice. Patrný byl zejména při úpravách, kdy student násobil algebraickým výrazem a neuvažoval o jeho vlivu na znaménko nerovnosti. Odpovídá obtížím s pojmem rovnice popsaných v (Tsamir, Almog, 2001).

Goniometrické nerovnice se ukázaly být více náchylné k negativnímu transferu z lineárních nerovnic. Studenti počítali s goniometrickými nerovnicemi podobně jako s lineárními nerovnicemi, příp. ryze monotonními nerovnicemi. Určili kořeny, některý z nich zapsali na jednu ze stran nerovnice.

7 Literatura

ASTOLFI, J.-P., 2006 převzato ze ZÍTKOVÁ, V. *Práce s chybou v hodinách matematiky na francouzských školách.* [Diplomová práce] Praha: UK-PedF, 2010.

BACHELARD, G. *Psychoanalýza ohně.*. Naladatelství Mladá Fronta. Praha 1994. ISBN 80-204-0505-4.

BAZZINI, L., TSAMIR, P. Connections between theory and research findings: The Case of inequalities. [on-line] *European Research in mathematics Education III* [cit. 24. 10. 2012]. Dostupné z:

`http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_bazzini_cerme3.pdf`

BOČEK, L. *Matematika pro gymnázia.* Prometheus. Praha 1995. ISBN 978-80-7196-362-2.

BOERO,P., BAZZINI,L. Inequalities in mathematics education: The need for complementary perspectives. [on-line] in Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) (28th, Bergen, Norway, July 14-18, 2004). Volume 1, p.139-143. [cit. 27. 6. 2012]. Dostupný z:

`http://www.eric.ed.gov`

BOERO, P., BAZZINI, L., Garuti, R. Metaphors in teaching and learning mathematics: A case study concerning inequalities. [on-line] PME 25, 2001 [25. 7. 2012]. Dostupné z:

`http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_boero/BOERO$%$26C_PME_XXV.pdf`

BROUSSEAU, G. *Theory of didactical situations in mathematics*, Kluwer Academic Publishers, London 1997 ISBN 978-0-7923-4526-8.

DREYFUS, T., HOCH, M. [on-line] Equations - a structural approach. Proceedings of PME28 (Bergen, Norway, July 14-18, 2004). Volume 1, p. 152-155 [cit. 27. 6. 2012].

DUVAL, R. Basic issues for research in mathematics, education. Proceedings of PME 24. 2000 [cit. 26. 7. 2012].

GARUTI, R., BAZZINI, L., BOERO, P. Revealing and promoting the students' potential: A case study concerning inequalities. [on-line] Proceedings of PME 25 [cit. 2. 8. 2012] dostupný na

`http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_boero/GARUTI$%$26C_PME_XXV.pdf`

HAVIGEROVÁ, J.M. *Školní psychologie* Dostupné z:

`\http://lide.uhk.cz`

[cit. 27.4.2013]

HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.*, Státní pedagogické nakladatelství. Bratislava 1990. ISBN 80-08-01344-3.

HEJNÝ, M., KUŘINA, Fr. *Dítě škola matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Portál. Praha 2001. ISBN 80-7178-581-4.

HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta. Praha 2004. ISBN 80-7290-189-3.

JANEČEK, Fr. *Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy.* Prometheus. Praha 1995. ISBN 80-7015-300-8.

JIRÁNEK, F., SOUČEK, J. *Úvod do obecné psychologie.* Státní pedagogické nakladatelství. Praha 1969. ISBN 80-7066-342-1.

KALHOUS, Z., OBST, O. a kol. *Školní didaktika.* Portál. Praha 2002. ISBN 80-7178-253-X.

KIERAN, C. The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. [on-line] Proceedings of PME28 (Bergen, Norway, July 14-18, 2004). Volume 1, p.143-147 [cit. 25. 7. 2012].

KUBÁT, J. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijimacím zkouškám na VŠ.* Victoria Publishing. Praha 1993. ISBN 80-85605-27-9.

KULIČ, V. *Chyba a učení.* Státní pedagogické nakladatelství. Praha 1971. ISBN 14-299-71.

LANDA,L.N. *Algoritmy a učení.* Státní pedagogické nakladatelství. Praha 1973. ISBN 14-544-73.

LEGRAND, P. *Les maths en college et en lyceé.* Hachette Education 1997, p. 316-325, ISBN 2-01-170485-5.

LIM, Kien H. Characterizing studentsthinking: Algebraic,inequalities and equations. *Proceedings of PME-NA*, Vol.2, 102-109. 2006 [cit. 11. 9. 2012]. Dostupné z:

`http://works.bepress.com/cgi/viewcontent.cgi?article=1002&context=kien_lim`

MACH, J. *Co je matematika.* Technická univerzita v Liberci. Liberec 2002. ISBN 80-7083-610-5.

PERKINS, D. N. Transfer of learning. *International Encyclopedia of Education, Second Edition.* Oxford, England 1992. [cit. 30.4.2013]

PETÁKOVÁ, J. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Prometheus. Praha 1998. ISBN 80-7196-099-3.

RADFORD, L. Syntax and meaning. [on-line] Proceedings of PME28 (Bergen, Norway, July 14-18, 2004). Volume 1, p.161-165, 2004 [cit. 27. 6. 2012].

ROWNTREE, R.V. Students' Understandings and Misconceptions of Algebraic Inequalities. [on-line] School Science and Mathematics. Vol.109, p. 311-312, 2009 [cit. 17. 10. 2012]. Dostupné na:

http://www.eric.ed.gov

RUISEL, I. *Základy psychologie inteligence.* Portál,s.r.o., Praha 2000. ISBN 80-7178-425-7.

SACKUR, C. Problems related to the use of graphs in solving inequalities. [on-line] Proceedings of PME28 (Bergen, Norway, July 14-18, 2004). Volume 1, p. 148-151 [cit. 27. 6. 2012].

SIMON, H. *Dyskalkulie. Jak pomáhat dětem, které mají potíže s početními úlohami.* Portál, s.r.o., Praha 2006. ISBN 80-7367-104-2.

SKATKIN, M. N. *Formalismus ve vědomostech žáků a jeho překonávání.* SPN edice Dědictví Komenského, Praha 1951. ISBN 30102-108-94.

ŠMÁKAL, S., BUDINSKÝ, B. *Goniometrické funkce.* nakl. Mladá Fronta, edice Škola mladých matematiků. Praha 1968. ISBN 23-034-68O3-2.

TALL, D. Reflections on research and teaching of equations and inequalities. [on/line] Proceedings of PME28, Volume 1, p. 158-161, 2004 [cit. 27. 6. 2012].

TSAMIR, P., ALMOG, N. Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. [on-line] *INT.J.MATH.EDUC.SCI.TECHNOL.*, VOL.32, NO.4, p. 513-524, 2001 [cit. 27. 5. 2012]. Dostupné z:

http://www.csun.edu/~snc29874/files/pdf/Math%20Article.pdf

TSAMIR, P., BAZZINI, L. Consistencies and inconsistencies in studentssolutions to algebraic 'single-value' inequalities. [on-line]

INT.J.MATH.EDUC.SCI.TECHNOL., 2004, VOL. 35, NO.6, p. 739-812, 2003 [cit. 27. 7. 2012].

TSAMIR, P., BAZZINI, L. Algorithmic models: Italian and Israeli students-solutions to algebraic inequalities. [on-line] Proceedings of PME 26, p. 289-296, 2002 [cit. 25. 8. 2012].

http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_bazz/TSAMI&02.pdf

TSAMIR, P., BAZZINI, L. Student' algorithmic, formal and intuitive knowledge: The case of inequalities [cit. 27. 6. 2012]. Dostupné z:

http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap511.pdf

TSAMIR, P., BAZZINI, L. Can x=3 be the solution of an inequality? a study of Italian and Israeli students. [on-line] Proceedings of PME 25, Utrecht, The Netherlands, Vol.IV, 303-310, 2001 [cit. 1. 9. 2012].

TSAMIR, P., TIROSH, D., TIANO, S. „New errors“ and „old errors“: The case of quadratic inequalities. Proceedings of PME28 (Bergen, Norway, July 14-18, 2004). Volume 1, p. 155-158 [cit. 27. 7. 2012].

VAIYAVUTJAMAI, P., CLEMENTS, M.A. Effects of Classroom Instruction on Student Performance on, and Understanding of, Linear Equations and Linear Inequalities. *Mathematical thinking and learning*, 8 (2), p.113-147, 2006 [cit. 7. 10. 2012].

WARREN, E. Comparative mathematical language in the elementary school: A longitudial study. *Educational Studies in Mathematics* 2006 [cit. 12. 11. 2012]. Dostupné z:

http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-006-4627-5#page-1

ZÍTKOVÁ, V. *Práce s chybou v hodinách matematiky na francouzských školách.* [Diplomová práce] Praha: UK-PedF, 2010.

8 Přílohy

8.1 Příloha I - Tabulka základních nerovností

„Pro všechna $a, b, c \in R, n \in N$“

za předpokladu	platí
	$a^2 \geq 0$, $\lvert a\rvert \geq 0$,$\lvert a\rvert \geq a$,$\lvert a\rvert \geq -a$, rovnost nastává právě, když $a = 0$
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$
	$0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
n liché	$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$
n sudé	$0 \leq a < b \Rightarrow a^n < b^n$
n sudé	$a^n < b^n \Rightarrow \lvert a\rvert < \lvert b\rvert$
	$(a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow a + c < b + d$
	$(0 \leq a < b) \wedge (0 \leq c < d) \Rightarrow ac < bd$
	$\lvert a\rvert < b \Leftrightarrow (-b < a) \wedge (a < b)$

Tabulka 14: Základní nerovnosti

8.2 Příloha II - Vzor testu třída 8.F

Gymnázium Litoměřická,Praha

Třída:

Jméno: Vyučující:

Datum:

Dané nerovnice řešte v oboru reálných čísel:

1. $$9 - t^2 > t + 3$$

2. $$\frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}} \leq 1$$

3. $$\frac{5-x}{3-x} < \frac{3x-1}{2-x}$$

4. $$\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$$

5. Vyřešte soustavu nerovnic v oboru reálných čísel:

$$-\frac{2}{3} < \frac{3-4x}{5x+2} < \frac{3}{2}$$

8.3 Příloha III - Vzor testu třída 8.G, varianta A

Gymnázium Litoměřická,Praha

Třída:

Jméno: Vyučující:

Datum:

Varianta A

1. Pro jakou množinu x, $x \in R$ je daná nerovnost pravdivá?

$$\binom{7}{x+1} \leq 2\binom{7}{x}$$

2. Řešte rovnici s neznámou $x \in R$

$$\binom{x}{x-3} + \binom{x+1}{x-2} = \frac{1}{3}[x^3 - \binom{7}{4}]$$

8.4 Příloha IV - Vzor testu třída 8.G, varianta B

Gymnázium Litoměřická,Praha

Třída:

Jméno: Vyučující:

Datum:

Varianta B

1. Pro jakou množinu x, $x \in R$ je daná nerovnost pravdivá?

$$\binom{8}{x} \leq 2\binom{8}{x-1}$$

2. Řešte rovnici s neznámou $x \in R$

$$\binom{4x+2}{4x} + \binom{3x}{2} - \binom{2x+1}{2x} = 5[\binom{5x}{1} + \binom{5x}{5x}]$$

8.5 Příloha V - Vzor testu třída 7. F

Gymnázium Litoměřická,Praha

Třída:

Jméno: Vyučující:

Datum:

Dané nerovnice řešte v oboru reálných čísel:

1.

$$\log_2 (x+2) > 3$$

2.

$$\log_2 (x^2 - 10) > \log_2 1$$

3.

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 2x) > \log_{\frac{1}{2}} 3$$

4.

$$\log_{2x-3} x > 1$$

8.6 Příloha VI - Vzor testu třída 3. B

Gymnázium Litoměřická,Praha

Třída:

Jméno: Vyučující:

Datum:

Dané nerovnice řešte v oboru reálných čísel:

1.

$$\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.

$$\operatorname{tg} 2x > 0$$

3.

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) \leq \frac{1}{2}$$

4. Řešte soustavu nerovnic v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\begin{cases} \sin x \geq -\frac{1}{2} \\ \operatorname{cotg} x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

8.7 Příloha VII

Seznam obrázků

8.8 Příloha VIII

Seznam tabulek