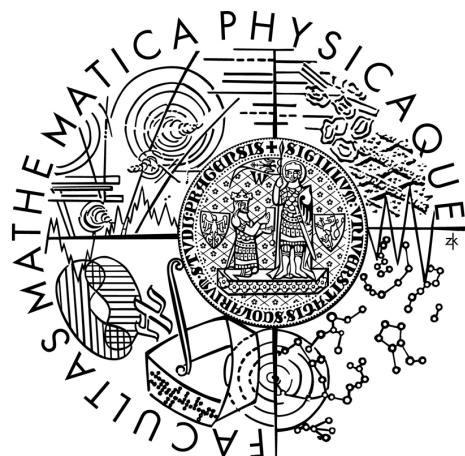


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Diana Fašungová

Optimalizace a zátěžové testy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2013

Na tomto mieste by som rada pod'akovala Prof. RNDr. Jitke Dupačovej, DrSc. za jej odborné vedenie, rady a čas, ktorý mi venovala pri tvorbe tejto práce. Takisto by som rada pod'akovala členom fakulty za poskytnuté kvalitné vzdelanie. V neposlednom rade d'akujem mojej rodine a blízkym za ich podporu, bez ktorej by táto práca nemohla vzniknúť'.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2. 8. 2013

Podpis autora

Název práce: Optimalizace a zátěžové testy

Autor: Diana Fašungová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V práci aplikujeme techniku kontaminačních mezí na úlohu optimalizace portfolia akcií při rizikové míře CVaR. Úlohu uvažujeme z pohledu rizikového manažera. Používáme vhodně zvolená data a dva typy zátěžových scénářů generovaných za účelem stresování korelační struktury dat a výnosu jednotlivých akcií. Z numerické aplikace vyvozujeme na základě chování rizikové míry CVaR vzhledem ke kontaminačním mezím doporučení pro řízení rizik pro úlohu optimalizace portfolia. Tato doporučení interpretujeme pro oba typy scénářů. Na závěr diskutujeme omezení zvoleného modelu a možnosti dalšího vylepšení.

Klíčová slova: kontaminační meze, zátěžové testy, optimalizace portfolia, řízení rizik

Title: Optimization and stress tests

Author: Diana Fašungová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In the thesis we apply contamination technique on a portfolio optimization problem using minimization of risk measure CVaR. The problem is considered from a risk manager point of view. We stress correlation structure of data and of revenues using appropriately chosen data for this kind of problem and for generated stress scenarios. From behaviour of CVaR with regard to contamination bounds, we formulate recommendations for the risk manager optimizing his portfolio. The recommendations are interpreted for both types of stress scenarios. In the end, limitations of the model and possible ways of improvement are discussed.

Keywords: contamination bounds, stress tests, portfolio optimization, risk management

Názov práce: Optimalizácia a zát'ažové testy

Autor: Diana Fašungová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V práci aplikujeme techniku kontaminačných medzí na úlohu optimalizácie portfólia akcií vzhľadom k rizikovej miere CVaR. Úlohu uvažujeme z pohľadu rizikového managera. Používame vhodne zvolené dátá a dva typy zát'ažových scenárov generovaných na stresovanie korelačnej štruktúry dát a výnosov jednotlivých akcií. Z numerickej aplikácie vyvodíme na základe správania sa rizikovej miery CVaR vzhľadom ku kontaminačným medziam doporučenia v riadení rizika pre úlohu optimalizácie portfólia. Tieto doporučenia interpretujeme pre oba typy scenárov. Na záver diskutujeme obmedzenia zvoleného modelu a možnosti ďalšieho vylepšenia.

Kľúčové slová: kontaminačné medze, zát'ažové testy, optimalizácia portfólia, riadenie rizík

Obsah

1	Úvod	2
2	Kontaminačné medze	4
3	Podmienená hodnota v riziku	10
3.1	Vlastnosti CVaR	12
4	Generovanie scenárov	16
5	Numerická aplikácia	20
5.1	Popis dát	20
5.2	Numerický príklad	21
6	Záver	34
	Literatúra	35
	Zoznam obrázkov	37
	Zoznam tabuliek	38
A	Zdrojový kód	39

Kapitola 1

Úvod

Zát'ažové testy sú v dnešnej dobe veľmi aktuálnou tému, ich dôležitosť vzrástla najmä po finančnej kríze z roku 2008. Tento nástroj analýzy rizika sa používa na kvantifikáciu strát alebo rizík pri simulovanom zhoršení podmienok na trhu. Zhoršenie podmienok sa popisuje zát'ažovými scenármi, ktoré sa môžu voliť historické alebo na základe expertného odhadu.

Vol'ba vhodného zát'ažového scenára hrá pri zát'ažových testoch veľmi dôležitú úlohu. Pomocou neho určujeme nás odhad miery zhoršenia tržných podmienok, ktorým môžeme byť vystavení. Teda je zrejmé, že výber scenára ovplyvňuje závery vyvodené z výstupu testu, a tým priamo pôsobí na prípadné opatrenia, ktorými by sme sa snažili znížiť dopad daného stresu.

V predloženej práci sa venujeme použitiu kontaminačnej techniky na úlohu stochastického programovania. Kontaminačnou technikou sledujeme robustnosť optimálneho riešenia úlohy vzhľadom k zvolenému pravdepodobnostnému rozdeľeniu.

Práca je členená do piatich kapitol. V druhej kapitole zavedieme úlohu stochastického programovania pre kontaminované rozdelenie a dokážeme konkávnosť jej optimálneho riešenia vzhľadom ku kontaminačnému parametru. Ďalej odvodíme existenciu a tvar derivácie optimálnej hodnoty pre konkrétnu hodnotu kontaminačného parametra. Následne na stochastickú úlohu aplikujeme kontaminačnú techniku a pre optimálne riešenie danej úlohy odvodíme hornú a dolnú kontaminačnú medzu. Rozoberieme voľbu parametra a správanie medzí v prípade nedodržania základných predpokladov kontaminačnej techniky.

V tretej kapitole definujeme hodnotu v riziku VaR a podmienení hodnotu v riziku CVaR. Ukážeme základné vlastnosti podmienenej hodnoty v riziku a jej výhody oproti v praxi rozšírenej rizikovej miere VaR. Uvedieme minimalizačný vzorec pre CVaR a tvar úlohy definovanej v kapitole 2 pre rizikovú mieru CVaR a diskrétnu rozdelenie tvorené scenármi. Využitím minimalizačného vzorca pre CVaR odvodíme tvar kontaminačných medzí.

Kapitola 4 je venovaná generovaniu zát'ažových scenárov. Predstavíme tvorbu scenárov na stresovanie výnosov a korelácií. V prípade, že novovytvorená variančná matica stresujúca korelácie nie je pozitívne definitná, ukážeme algoritmus na nájdenie pozitívne definitnej matice k variančnej matici. Takisto uvedieme spôsob generácie scenárov momentovou metódou.

V piatej kapitole ilustrujeme zavedené metódy na numerickom príklade optimalizácie portfólia akcií. Túto investičnú úlohu budeme riešiť z pohľadu riziko-

vého managera. Úlohu počítame na reálnych dátach z newyorskej burzy NYSE z krízových období z roku 2001 po útoku na Dvojičky a z finančnej krízy roku 2008. Vyhodnotíme výstup kontaminačnej techniky a formulujeme doporučenia pre rizikového managera.

V závere práce zhrnieme závery z finančnej aplikácie a diskutujeme možné vylepšenia.

Kapitola 2

Kontaminačné medze

V nasledujúcej kapitole predstavíme jeden zo spôsobov stresového testovania, a to kontaminačnú techniku uplatnenú na úlohu stochastického programovania. Využitím tejto postoptimalizačnej metódy sledujeme vplyv zmeny pravdepodobnostného rozdelenia na optimálne riešenie úlohy. Tento prístup je bližšie popísaný v článkoch [3] a [6].

Majme úlohu stochastického programovania

$$\min F(\mathbf{x}, P), \quad (2.1)$$

kde minimalizujeme cez \mathbf{x} z nepráznej uzavretej konvexnej množiny X nezávislej na rozdelení P a kde funkcia F je lineárna v rozdelení P .

Chceme zistiť robustnosť optimálneho riešenia úlohy (2.1) v prípade, že príde k zmene v rozdelení. Pre tento účel zavedieme kontaminované rozdelenie

$$P_\lambda = (1 - \lambda)P + \lambda Q, \quad (2.2)$$

kde Q je alternatívne pravdepodobnostné rozdelenie a λ je parameter z $[0,1]$. Označme optimálnu hodnotu účelovej funkcie úlohy s kontaminovaným rozdelením ako

$$\varphi(\lambda) := \min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, P_\lambda). \quad (2.3)$$

Všimnime si, že pre $\lambda = 0$ dostávame optimálnu hodnotu $\varphi(0) = \varphi(P)$ pre rozdelenie P .

Tvrdenie 1. (Konkávnosť optimálnej hodnoty $\varphi(\lambda)$) *Uvažujme úlohu (2.1). Nech pre $\forall \lambda \in [0,1] \exists \varphi(\lambda)$. Potom optimálna hodnota účelovej funkcie $\varphi(\lambda)$ je konkávna v parametri λ .*

Dôkaz. V dôkaze použijeme linearitu funkcie $F(\mathbf{x}, P_\lambda)$ v rozdelení.

$$\begin{aligned} \varphi((1-t)\lambda + t\gamma) &= \min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, (1-t)P_\lambda + tP_\gamma) = \\ &= \min_{\mathbf{x} \in X} \{F(\mathbf{x}, (1-t)P_\lambda) + F(\mathbf{x}, tP_\gamma)\} \geq \\ &\geq (1-t) \min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, P_\lambda) + t \min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, P_\gamma) = \\ &= (1-t)\varphi(\lambda) + t\varphi(\gamma) \end{aligned}$$

□

Dôsledok. Z konkávnosti plynie spojitosť a existencia derivácií $\varphi(\lambda)$ na otvorenom intervale $(0,1)$.

Definícia. Funkcia $z(t)$ je zhora (zdola) polospojité v bode t_0 , ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |t - t_0| \leq \delta : \quad z(t) \leq (\geq) z(t_0) + \varepsilon.$$

Tvrdenie 2. Nech platia predpoklady tvrdenia 1. Potom $\varphi(\lambda)$ je zdola polospojité.

Dôkaz. Plynie z konkávnosti $\varphi(\lambda)$. Vid' veta 10.2 v [15]. \square

Veta 3. Majme X uzavretú konvexnú množinu nezávislú na parametre $\lambda \in [0,1]$. Nech pre $\lambda_0 = 0$ je množina optimálnych riešení úlohy $X^*(P) = X^*(0)$ neprázdná a obmedzená, $F(\cdot, \lambda)$ je konvexná v \mathbf{x} a nech F je zdola polospojité na $X \times \{\lambda_0\}$. Potom $\varphi(\lambda)$ je zhora polospojité v λ_0 .

Dôkaz. Modifikácia vety 4.3.3 z [2]. \square

Dôsledok. (Spojitosť $\varphi(\lambda)$ v nule sprava) Z tvrdenia 2 a vety 3 plynie polospojitosť zhora a zdola v 0_+ , čo implikuje spojitosť $\varphi(\lambda)$ v 0_+ .

Definícia. Uvažujme úlohu (2.1) s množinou prípustných riešení

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, m, h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p\},$$

kde funkcie $g_k(\mathbf{x})$ a $h_j(\mathbf{x})$ sú spojito diferencovateľné na \mathbf{R}^n pre všetky k a j . Lagrangeova funkcia má tvar

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \lambda) = F(\mathbf{x}, P_\lambda) + \sum_j v_j h_j(\mathbf{x}) + \sum_k u_k g_k(\mathbf{x}),$$

kde \mathbf{v} , \mathbf{u} sú Lagrangeove multiplikátory. Označme množinu indexov aktívnych obmedzení

$$B(\mathbf{x}) = \{k = 1, \dots, m : g_k(\mathbf{x}) = 0\}$$

a množinu smerov

$$Z = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} \mathbf{z}^T \nabla_x g_k(\mathbf{x}) \leq 0, & k \in B(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}^T \nabla_x h_j(\mathbf{x}) = 0, & j = 1, \dots, p \\ \mathbf{z}^T \nabla_x F(\mathbf{x}, P_\lambda) < 0 \end{array} \right\}.$$

Potom

(i) bod $\hat{\mathbf{x}} \in X$ splňuje podmienku lineárnej nezávislosti, ak sú vektory

$$\nabla_x g_k(\hat{\mathbf{x}}), k \in B(\hat{\mathbf{x}}), \nabla_x h_j(\hat{\mathbf{x}}), j = 1, \dots, p$$

lineárne nezávislé;

(ii) v bode $\hat{\mathbf{x}} \in X$ je splnená podmienka silnej komplementarity, ak platí

$$\forall k \in B(\hat{\mathbf{x}}) : \hat{\mathbf{u}}_k > 0;$$

- (iii) nech funkcie $F(\mathbf{x}, P_\lambda)$, $g_k(\mathbf{x})$ a $h_j(\mathbf{x})$ nadobúdajú reálnych hodnôt a majú druhé parciálne derivácie. Potom pre trojicu $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ je splnená podmienka druhého rádu SOSC, ak pre $\hat{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$ a l'ubovoľný smer $\mathbf{z} \neq 0$ splňujúci

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^T \nabla_x g_k(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 && \text{pre } k \in B(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{u}}_k > 0 \\ \mathbf{z}^T \nabla_x g_k(\hat{\mathbf{x}}) &\leq 0 && \text{pre } k \in B(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{u}}_k = 0 \\ \mathbf{z}^T \nabla_x h_j(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 && \text{pre } j = 1, \dots, p\end{aligned}$$

platí

$$\mathbf{z}^T \nabla_{xx}^2 L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{z} > 0.$$

Veta 4. (Existencia $\varphi'(0_+)$ pre jednoprvkovú $X^*(P)$) Definujme množinu $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, m, h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p\}$, kde funkcie $g_k(x)$ a $h_j(x)$ sú spojito diferencovateľné na \mathbb{R}^n pre všetky k a j . Majme odpovedajúcu Lagrangeovu funkciu $L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \lambda) = F(\mathbf{x}, P_\lambda) + \sum_j v_j h_j(\mathbf{x}) + \sum_k u_k g_k(\mathbf{x})$, kde \mathbf{v} , \mathbf{u} sú Lagrangeove multiplikátory.

Nech sú splnené predpoklady tvrdenia 1 a nech pre $\lambda_0 = 0$ platí, že $w(\lambda_0) = (\mathbf{x}(\lambda_0), \mathbf{v}(\lambda_0), \mathbf{u}(\lambda_0))$ splňuje podmienky lineárnej nezávislosti, silnej komplementarity a podmienku druhého rádu SOSC. Ďalej nech na okolí bodu $[\mathbf{x}^*(\lambda_0), \lambda_0]$ existujú spojité zmiešané parciálne derivácie $\frac{\partial F(\mathbf{x}, P_\lambda)}{\partial x_j \partial \lambda}$.

Potom

- (i) $\mathbf{x}^*(\lambda_0) = \mathbf{x}^*(P)$ je bod izolovaného lokálneho minima pre úlohu $\min_{x \in X} F(\mathbf{x}, P_{\lambda_0})$ a $\mathbf{u}(\lambda_0)$, $\mathbf{v}(\lambda_0)$ sú dané jednoznačne;
- (ii) na okolí $\mathcal{U}(\lambda_0)$ existuje spojito diferencovateľná funkcia $w(\lambda) = (\mathbf{x}(\lambda), \mathbf{v}(\lambda), \mathbf{u}(\lambda))$, $w : \mathcal{U}(\lambda_0) \rightarrow \mathcal{U}(w(\lambda_0))$ splňujúca podmienky lineárnej nezávislosti, silnej komplementarity a podmienku druhého rádu SOSC.

Dôkaz. Modifikácia vety 2.1 z [8]. □

Dôsledok. Z vety 4 plynie, že optimálnu hodnotu účelovej funkcie môžeme zapísat' ako

$$\varphi(\lambda) = F(\mathbf{x}^*(\lambda), P_\lambda)$$

pričom optimálna hodnota \mathbf{x}^* je na okolí $\mathcal{U}(\lambda_0)$ spojito diferencovateľnou funkciou λ .

Deriváciou podľa parametru získame

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial F(\mathbf{x}^*(\lambda), P_\lambda)}{\partial \mathbf{x}^*} \frac{\partial \mathbf{x}^*(\lambda)}{\partial \lambda} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \lambda} [(1 - \lambda)F(\mathbf{x}^*(\lambda), P) + \lambda F(\mathbf{x}^*(\lambda), Q)]\end{aligned}$$

Z nutnej podmienky pre existenciu minima je prvý člen rovný nule. Pre $\lambda = 0_+$ dostávame

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(0_+) = F(\mathbf{x}^*(P), Q) - F(\mathbf{x}^*(P), P)$$

Veta 5. (Existencia a tvar $\varphi'(0_+)$ pre viacznačné optimálne riešenie) Nech pre $\lambda = 0$ je množina optimálnych riešení $X^*(P) = X^*(0)$ neprázdná a obmedzená, funkcia $F(x, \lambda)$ je sprava differencovateľná podľa λ v bode $\lambda = 0$ pre $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, kde \mathcal{U} je okolie množiny $X^*(P)$, a nech derivácia $\frac{\partial F(\mathbf{x}, P_\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0_+}$ splňa

$$\frac{F(\mathbf{x}, P_\lambda) - F(\mathbf{x}, P)}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0_+} \frac{\partial F(\mathbf{x}, P_\lambda)}{\partial \lambda}$$

Potom existuje $\varphi'(0_+)$ a platí

$$\varphi'(0_+) = \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} \left. \frac{\partial F(\mathbf{x}, P_\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0_+}.$$

Dôkaz. Veta 17 z [10]. □

Poznámka. Pre úlohu (2.1) z linearity funkcie $F(\mathbf{x}, P_\lambda)$ v rozdelení máme

$$\begin{aligned} \frac{F(\mathbf{x}, P_\lambda) - F(\mathbf{x}, P)}{\lambda} &= \frac{(1-\lambda)F(\mathbf{x}, P) + \lambda F(\mathbf{x}, Q) - F(\mathbf{x}, P)}{\lambda} \\ &= F(\mathbf{x}, Q) - F(\mathbf{x}, P) \\ &= \frac{\partial F(\mathbf{x}, P_\lambda)}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Tým je splnený predpoklad rovnomernej konvergencie z vety 5.

Dôsledok. Na základe vety 5 odvodíme tvar derivácie optimálnej hodnoty účelovej funkcie v $\lambda = 0_+$

$$\begin{aligned} \varphi'(0_+) &= \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} \left. \frac{\partial F(\mathbf{x}, P_\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0_+} = \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} \{F(\mathbf{x}, Q) - F(\mathbf{x}, P)\} \\ &= \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} F(\mathbf{x}, Q) - \varphi(0) \end{aligned}$$

Veta 6. (Kontaminačné medze) Z konkávnosti $\varphi(\lambda)$ získavame

$$\varphi(P) + \lambda \varphi'(0_+) \geq \varphi(P_\lambda) \geq (1-\lambda)\varphi(P) + \lambda\varphi(Q). \quad (2.4)$$

Dosadením za $\varphi'(0_+)$ máme

$$(1-\lambda)\varphi(P) + \lambda \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} F(\mathbf{x}, Q) \geq \varphi(P_\lambda) \geq (1-\lambda)\varphi(P) + \lambda\varphi(Q). \quad (2.5)$$

Nerovnosti (2.4) a (2.5) nazývame kontaminačnými medzami.

Poznámka. Pre ľubovoľné optimálne riešenie $\mathbf{x}^*(P) \in X^*(P)$ platí nerovnosť

$$(1-\lambda)\varphi(P) + \lambda F(\mathbf{x}^*(P), Q) \geq \varphi(P_\lambda).$$

Predpokladajme, že množina optimálnych riešení $X^*(Q)$ je neprázdná a obmedzená. Ked' v úlohe (2.1) uvažujeme kontamináciu rozdelenia Q rozdelením P , môžeme analogicky odvodiť kontaminačné medze pre Q . Získame tak nižšiu hornú hranicu pre $\varphi(P_\lambda)$

$$\begin{aligned} \min \left\{ (1-\lambda)\varphi(P) + \lambda \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} F(\mathbf{x}, Q), \lambda\varphi(Q) + (1-\lambda) \min_{\mathbf{x} \in X^*(Q)} F(\mathbf{x}, P) \right\} &\geq \\ &\geq \varphi(P_\lambda) \geq (1-\lambda)\varphi(P) + \lambda\varphi(Q). \end{aligned}$$

Vol'ba vhodného kontaminačného parametra λ pre danú úlohu nie je jasne definovaná. Parameter vyberáme na základe dôvery v zát'ažové rozdelenie Q . Váhu pri hodnotení dôveryhodnosti Q má najmä zdroj rozdelenia a vlastný úsudok o tom, s akou pravdepodobnosťou stresový scenár môže nastat'. Pokial' považujeme za pravdepodobné, že stres nastane, volíme $\lambda > 0,5$. Naopak, ak si myslíme, že nedôjde k zát'ažovej situácii, vyberáme λ z intervalu $[0, 0,5)$. Špeciálnym prípadom je voľba $\lambda = 0,5$, ked' máme pre rozdelenie P tvorené scenármami $\omega^1, \dots, \omega^S$ a rozdelenie Q so scenármami $\omega'^1, \dots, \omega'^{S'}$ rovnaký počet scenárov $S = S'$ s rovnomernými pravdepodobnosťami $p_s = q_s \forall s$. Dostaneme tak kontaminované rozdelenie P_λ s $2S$ scenármami s pravdepodobnosťami $p_s = q_s = 0,5 \cdot 1/S$.

Doteraz sme predpokladali pevnú množinu X , ktorá nezávisí na rozdelení. Za tejto podmienky sme odvodili globálne kontaminačné medze. Ak uvoľníme predpoklady na X , konkrétnie uvažujeme množinu X závislú na rozdelení, strácame konkávnosť optimálnej hodnoty účelovej funkcie $\varphi(\lambda)$. V tomto prípade nedokážeme odvodiť globálne kontaminačné medze a získavame lokálne kontaminačné medze ako je ukázané v článku [5] na príklade tvarovania rizika (tzv. risk shaping).

Rozoberme, čo sa stane v prípade uvoľnenia linearity funkcie $F(\mathbf{x}, P_\lambda)$ vzhľadom k rozdeleniu. Preformulujeme tvrdenie 1.

Tvrdenie 7. Majme úlohu (2.1) a nech je funkcia $F(\mathbf{x}, P_\lambda)$ konkávna v rozdelení. Nech pre $\forall \lambda \in [0,1] \exists \varphi(\lambda)$. Potom optimálna hodnota účelovej funkcie $\varphi(\lambda)$ je konkávna v parametri λ .

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \varphi((1-t)\lambda + t\gamma) &= \min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, (1-t)P_\lambda + tP_\gamma) \geq \\ &\geq (1-t) \min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, P_\lambda) + t \min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, P_\gamma) = \\ &= (1-t)\varphi(\lambda) + t\varphi(\gamma) \end{aligned}$$

V dôkaze sme využili konkávnosť $F(\mathbf{x}, \cdot)$. □

Za účelovú funkciu F môžeme dosadiť mnoho rôznych rizikových mier. V nasledujúcej časti odvodíme tvar kontaminačných medzi pre niekoľko vybraných funkcií. Ďalej predpokladáme, že množina optimálnych riešení $X^*(P)$ je neprázdná a obmedzená.

Majme konkávnu diferencovateľnú úžitkovú funkciu u . Účelovú funkciu si zadefinujeme ako

$$F(\mathbf{x}, P) = -\mathbf{E}_P u(\mathbf{x}).$$

Vidíme, že funkcia F je konvexná v \mathbf{x} a z vlastnosti strednej hodnoty lineárna v rozdelení. Použitím dôsledku vety 5 dostávame tvar derivácie optimálnej hodnoty účelovej funkcie v 0_+ . Z vety 6 máme

$$\begin{aligned} (1-\lambda) [-\mathbf{E}_P u(\mathbf{x}^*(P))] + \lambda \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} -\mathbf{E}_Q u(\mathbf{x}) &\geq \\ \geq \varphi(P_\lambda) &\geq (1-\lambda) [-\mathbf{E}_P u(\mathbf{x}^*(P))] + \lambda [-\mathbf{E}_Q u(\mathbf{x}^*(Q))]. \end{aligned}$$

Uvažujme investíciu do N akcií s výnosmi \mathbf{r} . Výnosy sa riadia rozdelením so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a variančnou maticou Σ . Vektor váh $\mathbf{x} : \sum_{i=1}^N x_i = 1$ predstavuje zastúpenie jednotlivých titulov v portfóliu. Minimalizujme rozptyl

$$\min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, P) = \min_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{x}^T \text{var}_P(\mathbf{r}) \mathbf{x} = \min_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{x}^T \Sigma_P \mathbf{x},$$

kde Σ_P je pozitívne definitná matica. Z pozitívnej definitnosti matice Σ_P plynie, že kvadratická forma $\mathbf{x}^T \Sigma_P \mathbf{x}$ je konvexná v \mathbf{x} . Účelová funkcia je lineárna v rozdelení. Dostávame kontaminačné medze

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) (\mathbf{x}^*(P)^T \Sigma_P \mathbf{x}^*(P)) + \lambda \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} \mathbf{x}^T \Sigma_Q \mathbf{x} &\geq \\ \geq \varphi(P_\lambda) &\geq (1 - \lambda) (\mathbf{x}^*(P)^T \Sigma_P \mathbf{x}^*(P)) + \lambda (\mathbf{x}^*(Q)^T \Sigma_Q \mathbf{x}^*(Q)). \end{aligned}$$

Majme opäť úlohu optimalizácie portfólia ako bola zavedená vyššie. Za rizikové kritérium použijeme minimalizáciu rozptylu pri maximálnom výnose

$$\min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, P) = \min_{\mathbf{x} \in X} \{-\mathbf{E}_P(\mathbf{r}^T \mathbf{x}) + \mathbf{x}^T \text{var}_P(\mathbf{r}) \mathbf{x}\} = \min_{\mathbf{x} \in X} \{-\boldsymbol{\mu}_P^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Sigma_P \mathbf{x}\}.$$

Účelová funkcia s kontaminovaným rozdelením nadobúda tvar

$$-(\boldsymbol{\mu}_P + \boldsymbol{\mu}_Q)^T \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^T \Sigma_P \mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}^T \Sigma_Q \mathbf{x}.$$

Všimnime si, že parameter λ reprezentujúci investorov vzťah k riziku neovplyvňuje strednú hodnotu. Funkcia je konkávna v rozdelení a konvexná v \mathbf{x} . Aby bol splnený predpoklad vety 5 o rovnomernej konvergencii, musí platiť $\boldsymbol{\mu}_Q = 0$. V takom prípade získavame kontaminačné medze

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) (-\boldsymbol{\mu}_P^T \mathbf{x}^*(P) + \mathbf{x}^*(P)^T \Sigma_P \mathbf{x}^*(P)) + \lambda \min_{\mathbf{x} \in X^*(P)} \mathbf{x}^T \Sigma_Q \mathbf{x} &\geq \\ \geq \varphi(P_\lambda) &\geq (1 - \lambda) (-\boldsymbol{\mu}_P^T \mathbf{x}^*(P) + \mathbf{x}^*(P)^T \Sigma_P \mathbf{x}^*(P)) + \lambda (\mathbf{x}^*(Q)^T \Sigma_Q \mathbf{x}^*(Q)). \end{aligned}$$

Ďalšou rizikovou mierou, pre ktorú skonštruujeme kontaminačné medze je podmienená hodnota v riziku CVaR. Riziková miera CVaR nie je lineárna v rozdelení, ale je možné ju na lineárny tvar previesť. Odvodeniu kontaminačných medzí pre CVaR venujeme nasledujúcu kapitolu.

Kapitola 3

Podmienená hodnota v riziku

V tejto kapitole sa oboznámime s rizikovými mierami hodnota v riziku (value at risk) a podmienená hodnota v riziku (conditional value at risk). Obe sú hojne využívané pri riadení rizík v praxi, napríklad VaR sa nachádza v doporučení pre bankový sektor Basel II v sekcií o kvantifikácii tržného rizika portfólia držaného bankou [1]. Banky sledujú citlivosť miery rizika v závislosti na úrokovej sadzbe a výmennom kurze. Bohužiaľ detail týchto stresových scenárov nie je verejná informácia.

Pred definovaním podmienenej hodnoty v riziku musíme najprv zaviesť niekoľko pojmov. Označme

$g(\mathbf{x}, \omega)$ stratu, ak vyberieme $\mathbf{x} \in X$ a nastane scenár ω

$G(\mathbf{x}, P; k) := P\{\omega : g(\mathbf{x}, \omega) \leq k\}$ distribučnú funkciu straty pri pevnom \mathbf{x}
 $\alpha \in (0,1)$ určenú hladinu spoľahlivosti.

Definícia. (VaR) Pod hodnotou v riziku VaR_α rozumieme

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) &= \min \{k \in \mathbb{R} : G(\mathbf{x}, P; k) \geq \alpha\} \\ \text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P) &= \inf \{k \in \mathbb{R} : G(\mathbf{x}, P; k) > \alpha\}.\end{aligned}$$

Definícia. (CVaR) Podmienená hodnota v riziku CVaR_α je očakávaná hodnota rozdelenia α -chvosta H_α straty $g(\mathbf{x}, \omega)$

$$\begin{aligned}H_\alpha(\mathbf{x}, P; k) &= 0 && k < \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) \\ H_\alpha(\mathbf{x}, P; k) &= \frac{G(\mathbf{x}, P; k) - \alpha}{1 - \alpha} && k \geq \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P).\end{aligned}$$

Veta 8. (Minimalizačný vzorec pre CVaR)

Predpokladajme $\mathbf{E}_P|g(\mathbf{x}, \omega)| < \infty \forall \mathbf{x} \in X$. Potom zavedieme funkciu

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}, \psi, P) = \psi + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbf{E}_P (g(\mathbf{x}, \omega) - \psi)^+, \quad (3.1)$$

kde $\mathbf{x} \in X$, $\psi \in \mathbb{R}$ a $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$.

Funkcia $\phi_\alpha(\mathbf{x}, \psi, P)$ premennej ψ je konečná a konvexná, a teda spojité. Platí

$$\min_\psi \phi_\alpha(\mathbf{x}, \psi, P) = \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) \quad (3.2)$$

a d'alej pre argument minima máme

$$\arg \min_{\psi} \phi_{\alpha}(\mathbf{x}, \psi, P) = [\text{VaR}_{\alpha}(\mathbf{x}, P), \text{VaR}_{\alpha}^{+}(\mathbf{x}, P)] .$$

Dôkaz. Veta 10 z [14]. □

Dôsledok. Minimalizujme CVaR $_{\alpha}(\mathbf{x}, P)$ na uzavretej nepráznej množine $X \in \mathbb{R}^n$. Zo vztahu (3.2) získame

$$\min_{\psi, \mathbf{x} \in X} \phi_{\alpha}(\mathbf{x}, \psi, P) = \min_{\mathbf{x} \in X} \text{CVaR}_{\alpha}(\mathbf{x}, P). \quad (3.3)$$

Poznámka. Formulácia (3.3) nám umožňuje použiť techniku kontaminačných medzi. CVaR je konkávny v rozdelení P , ale nie je v rozdelení lineárny. Úpravou (3.3) transformujeme minimalizačnú úlohu na tvar, v ktorom podmienka linearity v rozdelení ostáva neporušená. Táto úprava si vyžiada cenu v podobe dodatočnej premennej ψ .

Lemma 9. Nech je funkcia $z(y, u)$ konvexná na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Označme $p(u) = \inf_y z(y, u)$. Potom p je konvexná na \mathbb{R}^m .

Dôkaz. Tvrdenie 2.22 z [16]. □

Tvrdenie 10. (Konvexnosť CVaR $_{\alpha}(\mathbf{x}, P_{\lambda})$ v \mathbf{x}) Nech X je neprázdná uzavretá konvexná množina a nech funkcia $g(\mathbf{x}, \omega)$ je konvexná v \mathbf{x} pre všetky ω . Potom CVaR $_{\alpha}(\mathbf{x}, P_{\lambda})$ je konvexný v \mathbf{x} .

Dôkaz. Využijeme vyjadrenie CVaR z (3.2). Konvexnosť $g(\mathbf{x}, \omega)$ v \mathbf{x} a lemma 9 zaručujú konvexnosť $\phi_{\alpha}(\mathbf{x}, \psi, P_{\lambda})$ v (\mathbf{x}, ψ) . □

Tvrdenie 11. (Linearita $\phi_{\alpha}(\mathbf{x}, \psi, P_{\lambda})$ v λ) Nech X je neprázdná uzavretá konvexná množina nezávislá na rozdelení a nech funkcia $g(\mathbf{x}, \omega)$ je konvexná v \mathbf{x} pre všetky ω . Potom funkcia $\phi_{\alpha}(\mathbf{x}, \psi, P_{\lambda})$ je lineárna v P .

Dôkaz. Jednoduchý dôsledok linearity strednej hodnoty. □

Rozoberme špeciálny prípad, ked' P je diskrétné rozdelenie s pravdepodobnosťami p_s odpovedajúcimi scenárom ω^s , $s = 1, \dots, S$. Majme $\mathbf{x} \in X$ pevné. Prepíšme (3.1) do tvaru

$$\min_{\psi} \phi_{\alpha}(\mathbf{x}, \psi, P) = \min_{\psi} \left\{ \psi + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{s=1}^S p_s (g(\mathbf{x}, \omega^s) - \psi)^+ \right\}.$$

Zavedením sklzových premenných máme

$$\begin{aligned} & \min_{\psi, y_1, \dots, y_S} \left\{ \psi + \frac{1}{1-\alpha} \sum_s p_s y_s \right\} \\ & \text{za podmienky } y_s + \psi \geq g(\mathbf{x}, \omega^s) \quad \forall s \\ & \quad y_s \geq 0 \quad \forall s \end{aligned} \quad (3.4)$$

Odtiaľ dosadením (3.4) do (3.3) získame

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in X} \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) &= \min_{\psi, y_1, \dots, y_S, \mathbf{x} \in X} \left\{ \psi + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{s=1}^S p_s y_s \right\} \\ &\text{za podmienky } y_s + \psi \geq g(\mathbf{x}, \omega) \quad \forall s \\ &\quad y_s \geq 0 \quad \forall s \\ &\quad \mathbf{x} \in X \end{aligned} \quad (3.5)$$

Veta 12. (Kontaminačné medze pre CVaR) *Nech platia predpoklady vety 8. Nech je množina X neprázdna, uzavretá, konvexná a nezávislá na rozdelení, funkcia $g(\mathbf{x}, \omega)$ je konvexná v \mathbf{x} a nech množina optimálnych riešení $X^*(P)$ úlohy (3.3) je kompaktná.*

Potom pre $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P_\lambda)$ existujú kontaminačné medze v tvare

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\phi_{C_\alpha}(P) + \lambda\phi_\alpha(\mathbf{x}^*(P), \psi^*(P), Q) &\geq \\ \geq \phi_{C_\alpha}(P_\lambda) &\geq (1-\lambda)\phi_{C_\alpha}(P) + \lambda\phi_{C_\alpha}(Q), \end{aligned}$$

kde $\psi^(P)$, $\mathbf{x}^*(P)$ označuje optimálne riešenie úlohy (3.3) a $\phi_{C_\alpha}(P)$ jej optimálnu hodnotu.*

Dôkaz. Vychádza z vety 6. □

3.1 Vlastnosti CVaR

V nasledujúcej sekcií ukážeme vlastnosti podmienenej hodnoty v riziku a jej výhod oproti v praxi častejšie používanej miere rizika VaR.

Popíšme správanie VaR pri diskrétnom rozdelení, ktorého distribučná funkcia G má skokovitý tvar. Rozoberieme ako sa zachová VaR v skoku distribučnej funkcie G a na úseku, kde je distribučná funkcia konštantná $G(\mathbf{x}, P, k) = \alpha$. Príklad takejto distribučnej funkcie je ilustrovaný na obrázku 3.1. Pod skokom v distribučnej funkcií rozumieme

$$P(\omega : g(\mathbf{x}, \omega) \leq k) - P(\omega : g(\mathbf{x}, \omega) < k) = P(\omega : g(\mathbf{x}, \omega) = k) > 0.$$

V prvom prípade rovnica $G(\mathbf{x}, P, k) = \alpha$ nemá riešenie pre α z intervalu $(G(\mathbf{x}, P, P(\omega : g(\mathbf{x}, \omega) < k)), G(\mathbf{x}, P, \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)))$. V druhom prípade je riešením $G(\mathbf{x}, P, k) = \alpha$ interval $[\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P), \text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P)]$. Ak sa v distribučnej funkcií pre danú hladinu α nachádza skok, tak je riešením interval $[\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P), \text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P)]$. Teda malá zmena v α bude mať za následok veľký posun v hodnote rizika.

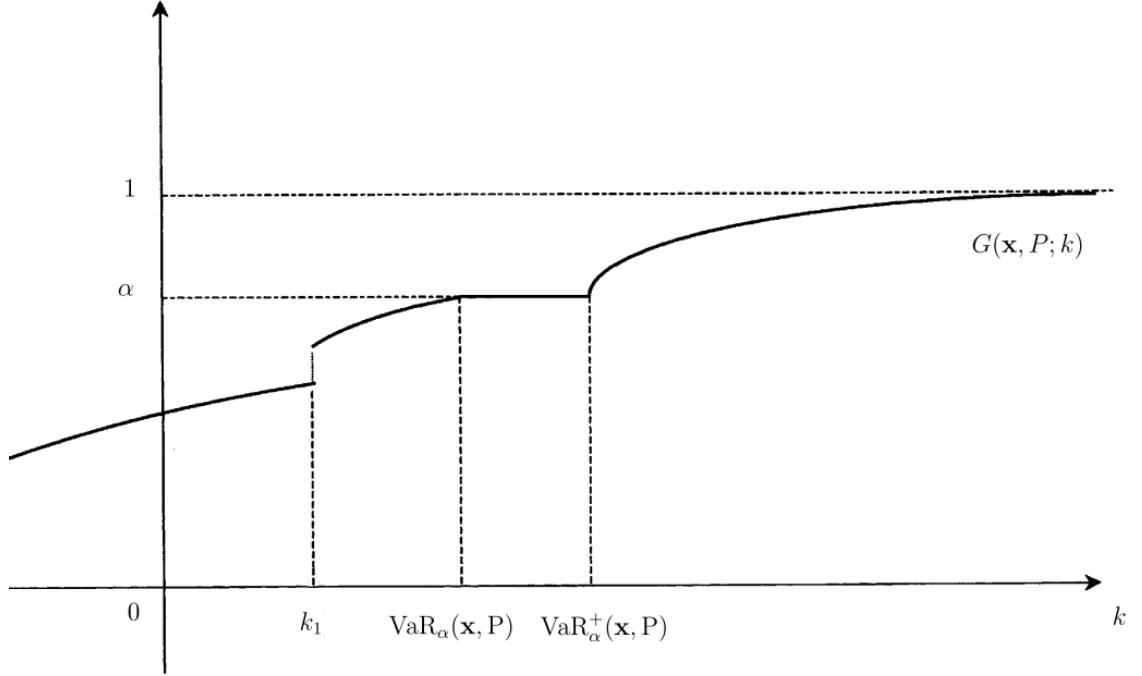
Interval $[\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P), \text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P)]$ bude z definície $\text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P)$ vždy konečný. Pre absolútne spojité rozdelenie sa $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)$ a $\text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P)$ rovnajú.

Tvrdenie 13. *Zadefinujme dva nové pojmy*

$$\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P) = \mathbf{E}\{g(\mathbf{x}, \omega) | g(\mathbf{x}, \omega) \geq \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)\}$$

a

$$\text{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P) = \mathbf{E}\{g(\mathbf{x}, \omega) | g(\mathbf{x}, \omega) > \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)\}.$$



Obr. 3.1: Príklad nerýdzo monotónnej distribučnej funkcie so skokom v k_1 . Zdroj [14].

Pre CVaR platí:

(i) ak vo $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)$ nie je skok, tak

$$\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P) = \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) = \text{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P);$$

(ii) ak sa vo $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)$ nachádza skok, tak

$$\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P) < \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) = \text{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P);$$

(iii) ak sa vo $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)$ nachádza skok a zároveň $G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)) = 1$, tak

$$\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P) = \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P);$$

(iv) pre ostatné prípady

$$\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P) < \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) < \text{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P).$$

Teda CVaR má pre skokovité distribučné funkcie výhodnejšie vlastnosti ako VaR s ohľadom na vyššie spomenuté situácie.

Dôkaz. Pre skok distribučnej funkcie G v bode $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)$ zadefinujeme

$$\begin{aligned} \alpha^+(\mathbf{x}) &= G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)) \\ \alpha^-(\mathbf{x}) &= G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P)), \end{aligned}$$

kde $G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P))$ je ľavá limita $G(\mathbf{x}, P; \cdot)$, teda

$$G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P)) = P(\omega : g(\mathbf{x}, \omega) < \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)).$$

$\text{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P)$ je stredná hodnota straty $g(\mathbf{x}, \omega)$ s distribučnou funkciou

$$\begin{aligned} H_\alpha^+(\mathbf{x}, P; k) &= 0 & k < \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) \\ H_\alpha^+(\mathbf{x}, P; k) &= \frac{G(\mathbf{x}, P; k) - \alpha^+(\mathbf{x})}{1 - \alpha^+(\mathbf{x})} & k \geq \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P), \end{aligned}$$

a podobne $\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P)$ je stredná hodnota straty $g(\mathbf{x}, \omega)$ s distribučnou funkciou

$$\begin{aligned} H_\alpha^-(\mathbf{x}, P; k) &= 0 & k < \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) \\ H_\alpha^-(\mathbf{x}, P; k) &= \frac{G(\mathbf{x}, P; k) - \alpha^-(\mathbf{x})}{1 - \alpha^-(\mathbf{x})} & k \geq \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P). \end{aligned}$$

V prípade, že sa vo $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)$ nenachádza skok, tak máme $\alpha^-(\mathbf{x}) = \alpha = \alpha^+(\mathbf{x})$. Teda distribučné funkcie straty sú rovnaké pre $\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P)$, $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)$ aj $\text{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}, P)$. Tým je dokázaná požadovaná rovnosť v (i).

Ak vo $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)$ skok je, tak máme $\alpha = \alpha^+(\mathbf{x})$, a teda $\alpha^-(\mathbf{x}) < \alpha^+(\mathbf{x}) < 1$. Z toho je zrejmá platnosť tvrdenia (ii).

V (iii) predpokladáme $G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)) = 1$. Z toho plynie, že vztah z (ii) $\alpha^-(\mathbf{x}) < \alpha^+(\mathbf{x}) < 1$ nie je platný. Vyjdeme z

$$G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P)) < \alpha \leq G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)) = 1$$

a z definície $\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P)$. Dostávame rovnosť $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) = \text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P)$.

Ostatné situácie sú definované nerovnosťou

$$G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha^-(\mathbf{x}, P)) < \alpha < G(\mathbf{x}, P; \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}, P)),$$

vychádzajúc z tvarov distribučných funkcií jednotlivých CVaR-ov teda dostávame tvrdenie (iv). \square

Definícia. (Koherentná miera rizika) Miera rizika ρ sa nazýva koherentnou, ak platí

$$\rho(y + y') \leq \rho(y) + \rho(y') \tag{3.6}$$

$$\rho(\gamma y) = \gamma \rho(y) \quad \gamma \geq 0 \tag{3.7}$$

$$\rho(y) \equiv c \quad y \equiv c = \text{konst} \tag{3.8}$$

$$y \leq y' \Rightarrow \rho(y) \leq \rho(y'). \tag{3.9}$$

Podmienka (3.6) hovorí, že zlúčenie dvoch portfólií nesie menšie riziko ako súčet rizík týchto dvoch portfólií. Teda diverzifikácia znížuje rizikosť. Podmienka (3.7) má za následok $\rho(0) = 0$.

Definícia. (Sublineárna miera rizika) Mieru splňujúcu podmienky (3.6) a (3.7) nazývame sublineárnu mierou rizika.

Tvrdenie 14. (Koherentnosť CVaR) Nech $g(\mathbf{x}, \omega)$ je lineárne v \mathbf{x} . Potom je CVaR koherentou mierou rizika.

Dôkaz. Vyjdime z minimalizačného vzorca pre CVaR (3.1). Dokážeme sublinearitu funkcie $(g(\mathbf{x}, \omega) - \psi)^+$ v (\mathbf{x}, ψ) , z čoho plynie sublinearita $\phi_\alpha(\mathbf{x}, \psi, P)$ v (\mathbf{x}, ψ) . Použijeme linearitu $g(\mathbf{x}, \omega)$

$$\begin{aligned} (g(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \omega) - (\psi + \psi'))^+ &= (g(\mathbf{x}, \omega) + g(\mathbf{x}', \omega) - \psi - \psi')^+ = \\ &= \max\{g(\mathbf{x}, \omega) + g(\mathbf{x}', \omega) - \psi - \psi', 0\} \leq \\ &\leq \max\{g(\mathbf{x}, \omega) - \psi, 0\} + \max\{g(\mathbf{x}', \omega) - \psi', 0\} = \\ &= (g(\mathbf{x}, \omega) - \psi)^+ + (g(\mathbf{x}', \omega) - \psi')^+ \\ (g(\gamma \mathbf{x}, \omega) - \gamma \psi)^+ &= (\gamma g(\mathbf{x}, \omega) - \gamma \psi)^+ = \gamma(g(\mathbf{x}, \omega) - \psi)^+. \end{aligned}$$

Z vyššie uvedených rovností a z vlastností strednej hodnoty popísaných napríklad v [12] vyplýva sublinearita funkcie $\phi_\alpha(\mathbf{x}, \psi, P)$ v (\mathbf{x}, ψ) . Tým sú dokázané podmienky (3.6) a (3.7).

Predpokladajme $g(\mathbf{x}, \omega) \equiv c$, kde c je konštanta. Potom

$$\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P) = \min_{\psi} \left\{ \psi + \frac{1}{1-\alpha} (c - \psi)^+ \right\} = c,$$

teda platí podmienka (3.8).

Podmienka (3.9) je dôsledkom tvaru minimalizačného vzorca (3.1). \square

Poznámka. VaR nie je v obecnom prípade koheretný, pretože nevyhovuje podmienke (3.6). Táto podmienka je splnená napríklad pre eliptické rozdelenia, teda špeciálne pre normálne rozdelenie (vid' [7]).

Kapitola 4

Generovanie scenárov

V tejto kapitole popíšeme vybrané spôsoby generovania scenárov, ktoré spĺňajú predpoklady kontaminačnej techniky. Budeme vychádzat z článkov [11] a [13].

Uvažujme úlohu optimalizácie portfólia vzhľadom k riziku. Investujeme do N vopred vybraných akcií. Jednotlivé akcie budeme označovať indexom i . Portfólio je charakterizované obmedzeniami na váhy jednotlivých akcií $x_i \leq K$, $K \in (0,1)$, a sumu váh akcií z jedného hospodárskeho odvetvia $\sum_{i \in I_{odv}} x_i \leq K$, kde I_{odv} je množina indexov akcií z daného odvetvia. Pre váhy akcií platí $\sum_{i=1}^N x_i = 1$. Okrem toho nepovolujeme predaj nakrátko, teda $x_i \geq 0$.

Označme $\mathbf{P}_t = (P_{1t}, \dots, P_{Nt})^T$ vektor cien akcií portfólia v deň t a $\mathbf{X}_t = (x_{1t}, \dots, x_{Nt})^T$ vektor váh celého portfólia odpovedajúcich \mathbf{P}_t . Definujme pre denné zmeny cien akcií

$$\tilde{r}_{it} = \frac{P_{i,(t+1)} - P_{it}}{P_{it}}. \quad (4.1)$$

Predpokladáme, že náhodný vektor $\tilde{\mathbf{R}}_t = (\tilde{r}_{1t}, \dots, \tilde{r}_{Nt})^T$ má mnohorozmerné normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu}_t$ a variančnou maticou Σ_t .

Zmena hodnoty portfólia

$$\Delta \mathbf{V}_t = \mathbf{X}_t \tilde{\mathbf{R}}_t^T$$

sa riadi rozdelením

$$\Delta \mathbf{V}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{X}_t \Sigma_t \mathbf{X}_t^T).$$

Chceme výnosy vystaviť zát'aži. Označme vektorom $\tilde{\mathbf{R}}_{2t}$ dimenzie $(k \times 1)$ výnosy pod stresom. Ostatné výnosy predstavuje vektor $\tilde{\mathbf{R}}_{1t}$ dimenzie $((N - k) \times 1)$. Predpokladajme, že variančná matica Σ_t ostala nezmenená stresovým scenárom a že vektor zat'ažovaných výnosov nadobúda hodnoty

$$\tilde{\mathbf{R}}_{2t} = \mathbf{R}_2 = (r_1, \dots, r_k)^T.$$

Za týchto predpokladov dostávame pre nestresované výnosy podmienené rozdelenie

$$\tilde{\mathbf{R}}_{1t}|_{\tilde{\mathbf{R}}_{2t}=\mathbf{R}_2} \sim N(\boldsymbol{\mu}_c, \Sigma_c),$$

kde $\boldsymbol{\mu}_c = \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \mathbf{R}_2$ a $\Sigma_c = \Sigma_{11} - (\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21})$.

Využitím tohto podmieneného rozdelenia dostávame strednú hodnotu zmeny hodnoty portfólia

$$\mathbf{E} \Delta \mathbf{V}_t = \mathbf{X}_{2t} \mathbf{R}_{2t} + \mathbf{X}_{1t} \boldsymbol{\mu}_c$$

a jej rozptyl

$$\mathbf{X}_{1t} \Sigma_c \mathbf{X}_{1t}^T.$$

Doteraz sme predpokladali nemennosť variančnej matice Σ_t v zát'ažovom teste. Ak tento predpoklad uvoľníme, môžeme okrem výnosov stresovať aj volatility a korelácie medzi výnosmi. Vyjdime z rozkladu variančnej matice

$$\Sigma_t = D_t \Omega_t D_t, \quad (4.2)$$

kde $\Omega_t = (\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ je korelačná matica výnosov akcií a $D_t = \text{diag}\{\sigma_{1t}, \dots, \sigma_{Nt}\}$ diagonálna matica smerodajných odchýlok výnosov.

Prejdime k scenáru, v ktorom chceme zmeniť hodnoty smerodajných odchýlok. Zostrojme maticu Δ dimenzie $(N \times N)$, ktorej prvky sa rovnajú rozdielu historických smerodajných odchýlok a smerodajných odchýlok stresového scenára. Dostávame

$$\Sigma' = (D_t + \Delta) \Omega_t (D_t + \Delta)^T = \begin{pmatrix} \Sigma'_{11} & \Sigma'_{12} \\ \Sigma'_{21} & \Sigma'_{22} \end{pmatrix}$$

Tento typ stresovania ale nesplňa podmienku linearity v rozdelení nutnú pre koncept kontaminačných medzí:

$$\Delta \neq \mathbf{0}_{N \times N} \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \quad (D_t + \gamma \Delta) \Omega_t (D_t + \gamma \Delta) \neq \gamma (D_t + \Delta) \Omega_t (D_t + \Delta).$$

Z rozkladu variančnej matice (4.2) budeme vychádzat aj pri stresovaní korelácií medzi akciami. Označme $\tilde{\mathbf{R}}_{at}$ vektor $(g \times 1)$ výnosov, ktoré sú vystavené korelačným šokom, a $\tilde{\mathbf{R}}_{bt}$ vektor ostatných výnosov dimenzie $((N-g) \times 1)$. V prípade potreby výnosy preusporiadame tak, aby šokované výnosy boli na prvých g miestach. Platí

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{at} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{bt} \end{pmatrix} \sim N \left(\mathbf{0}_{N \times 1}, \begin{pmatrix} D_{at} & 0 \\ 0 & D_{bt} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Omega_{aat} & \Omega_{abt} \\ \Omega_{bat} & \Omega_{bbt} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_{at} & 0 \\ 0 & D_{bt} \end{pmatrix} \right).$$

Zat'ažujeme len korelácie medzi vybranými stresovanými výnosmi. Korelácie medzi stresovanými a nestresovanými výnosmi ponecháme nezmenené. Označme Ω'_{aat} maticu šokovaných korelácií. Dosadíme ju do vyjadrenia pre korelačnú maticu a dostávame

$$\Omega'_t = \begin{pmatrix} \Omega'_{aat} & \Omega_{abt} \\ \Omega_{bat} & \Omega_{bbt} \end{pmatrix}.$$

Problém nastáva, ak variančná matica Σ'_t nie je pozitívne definitná. V takom prípade sa odporúča nájsť vyhovujúcu maticu pomocou tzv. Fingerovho algoritmu. Tento algoritmus je založený na fakte, že matica je pozitívne definitná práve vtedy, keď všetky jej vlastné čísla sú pozitívne. Algoritmus prebieha v štyroch krokoch s nultým krokom na nastavenie počiatočnej hodnoty:

Krok 0:

Počiatočná hodnota parametra c je blízka 0.

Krok 1:

Zvoľme $c \in (0,1)$.

Krok 2:

Zostrojme maticu $\hat{\Omega}_t = c_i \Omega_t + (1 - c_i) \Omega'_t$.

Krok 3:

Vypočítajme vlastné čísla matice $\hat{\Omega}_t$.

Krok 4:

Ak sú vlastné čísla pozitívne, pokračujeme krokom 1 s hodnotou $c_{i+1} := c_i - \Delta$.

Ak sú vlastné čísla záporné alebo rovné nule, vrátim sa do kroku 1 pre hodnotu $c_{i+1} := c_i + \Delta$.

Veľkosť posunu parametra Δ volíme vhodne malú. Algoritmus ukončíme pri návratení do hodnoty c , ktorú algoritmus už raz prešiel.

Normálne rozdelenie so známou strednou hodnotou a takto zostrojenou variančnou maticou neporušuje predpoklad linearity v rozdelení, a teda môžu byť skonštruované kontaminačné medze.

Predstavme spôsob generovania scenárov podľa momentovej metódy ako je popísaný v [4]. Uvoľníme predpoklad normálneho rozdelenia výnosov $\mathbf{R} = (r_1, \dots, r_N)^T$ a označme strednú hodnotu náhodnej veličiny r_i , $i = 1, \dots, N$, ako μ_i a jej rozptyl ako σ_i^2 . Korelácie medzi náhodnými veličinami r_i a r_j budeme nadále značiť ρ_{ij} . Predpokladajme, že výnosy pochádzajú z diskrétneho rozdelenia s S scenármi s pravdepodobnosťami $p_s \geq 0 \forall s : \sum_{s=1}^S p_s = 1$. Hľadáme teda vektory

$$(r_1^s, \dots, r_N^s)^T$$

také, že platí

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S p_s r_i^s &= \mu_i & \forall i = 1, \dots, N \\ \sum_{s=1}^S p_s (r_i^s)^2 &= \sigma_i^2 & \forall i = 1, \dots, N \\ \sum_{s=1}^S p_s ((r_i^s - \mu_i)(r_j^s - \mu_j)) &= \rho_{ij} & \forall i, j \\ \sum_{s=1}^S p_s &= 1 \\ p_s &\geq 0 & \forall s. \end{aligned}$$

Vyššie popísané rovnosti majú riešenie pre konzistentné momenty a dostatočne veľké S . V prípade nesplnenia aspoň jedného z týchto predpokladov, riešime minimalizačnú úlohu

$$\min \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[\left(\sum_{s=1}^S p_s r_i^s - \mu_i \right)^2 + \left(\sum_{s=1}^S p_s (r_i^s)^2 - \sigma_i^2 \right)^2 \right] \quad (4.3)$$

$$\sum_{i,j=1:i \neq j}^N \beta_{ij} \left[\sum_{s=1}^S p_s (r_i^s - \mu_i)(r_j^s - \mu_j) \right]^2$$

za podmienok $\sum_{s=1}^S p_s = 1$

$$p_s \geq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S$$

(4.4)

Parametre α_i a β_{ij} volíme podľa dôležitosti. Ak chceme dat' obecne väčší dôraz na korelácie, zvolíme $\beta_{ij} > \alpha_i \forall i, j$. Pri výbere hodnôt parametrov zohráva úlohu aj kvalita ich odhadu - vyberieme väčšiu hodnotu parametra, ktorého odhad je presnejší.

Úloha (4.3) je nekonvexná a nelineárna a môže mať viacero lokálnych miním. Ak by však bol predpoklad konzistencia neporušený a S je dostatočne veľké, tak optimálna hodnota úlohy je nula.

Kapitola 5

Numerická aplikácia

V tejto kapitole aplikujeme kontaminačnú techniku na úlohu optimalizácie portfólia akcií pomocou rizikovej miery CVaR.

5.1 Popis dát

Predtým ako prejdeme k samotnému numerickému príkladu, popíšeme najprv dátá, na ktorých budeme úlohu ilustrovať'. Klúčovú rolu pri výbere dát zohrávala dostupnosť historických cien akcií a prítomnosť aspoň dvoch období výrazného poklesu cien akcií na danom trhu. Z týchto dovodov sme vyberali akcie obchodované na newyorskej burze New York Stock Exchange (NYSE), ktorá je považovaná za jednu z najväčších a najlikvidnejších búrz na svete. Za zdrojové dátá sme zvolili dennú záverečnú cenu akcií upravenú o výplatu dividend a štiepenie akcií z portálu www.finance.yahoo.com. Z cien akcií P_{it} , kde index $i = 1, \dots, N$ označuje akciu a $t = 1, \dots, T$ deň, sa potom jednoduchou úpravou (4.1) vypočítali medzidenné výnosy r_{it} .

Za krízové obdobia sme vybrali dva časové úseky:

- krízu roku 2001 po útoku na Dvojičky, teda ceny akcií od 10. 9. 2001 do 31. 10. 2001
- finančnú krízu z roku 2008, teda ceny akcií od 1. 8. 2008 do 31. 12. 2008.

Za nekrízové dátá sme vybrali ceny akcií:

- z roku 2001 od 1. 3. 2001 do 31. 8. 2001
- z roku 2008 od 1. 2. 2008 do 31. 7. 2008
- súčasné dátá od 2. 4. 2012 do 28. 3. 2013.

Volba titulov použitých v numerickom príklade je sčasti podmienená výberom krízových období. Predpokladáme, že v roku 2001 boli zasiahnuté najmä letecké spoločnosti. Preto do vybraných titulov zaradíme Southwest Airlines Co., tretiu najväčšiu leteckú spoločnosť v Severnej Amerike. Pre rok 2008 je typická kríza v bankovom sektore, kvôli čomu do zoznamu titulov zaradíme veľkých hráčov na poli investičného bankovníctva Goldman Sachs Group Inc. a Morgan Stanley. Okrem toho do výberu akcií pridáme banku s druhým najväčším počtom depozít

Odvetvie	Názov spoločnosti	Ticker symbol
Automobilový priemysel	Ford Motor Company	F
Bankový sektor	Goldman Sachs Group Inc.	GS
Bankový sektor	Morgan Stanley	MS
Bankový sektor	Wells Fargo & Company	WFC
Farmaceutický priemysel	Pfizer Inc.	PFE
Letecké spoločnosti	Southwest Airlines Co.	LUV
IT	Apple Inc.	AAPL
IT	Microsoft Corporation	MSFT
Maloobchod	Wal-Mart Stores Inc.	WMT
Potravinársky priemysel	PepsiCo Inc.	PEP

Tabuľka 5.1: Prehľad akcií použitých v numerickej aplikácii.

a hypoték Wells Fargo & Company. Wells Fargo & Company mala ako jediná z bánk v Spojených štátach v roku 2007 od agentúry Standard & Poor's rating AAA.

Zvyšné akcie sme volili z rôznych hospodárskych odvetví, a to z automobilového priemyslu, IT, maloobchodu a farmaceutického a potravinárskeho priemyslu. Automobilový priemysel zastupuje spoločnosť Ford Motor Company, piaty najväčší výrobca áut na svete. Informačné technológie reprezentujú firmy Apple Inc. a Microsoft Corporation. Ako predstaviteľa potravinárskeho priemyslu sme zvolili firmu PepsiCo Inc. Zoznam akcií uzatvára Pfizer Inc., ktorý patrí medzi najväčšie farmaceutické spoločnosti v USA ale i celosvetovo, a najväčšia maloobchodná siet' na svete Wal-Mart Stores Inc.

Všetky akcie sú súčasťou indexu S & P 500, ktorý sleduje 500 spoločností s najvyššou tržnou kapitalizáciou, ktoré sa voľne obchodujú na americkej burze. Súhrnný prehľad vybraných titulov a ich odvetví je k dispozícii v tabuľke 5.1.

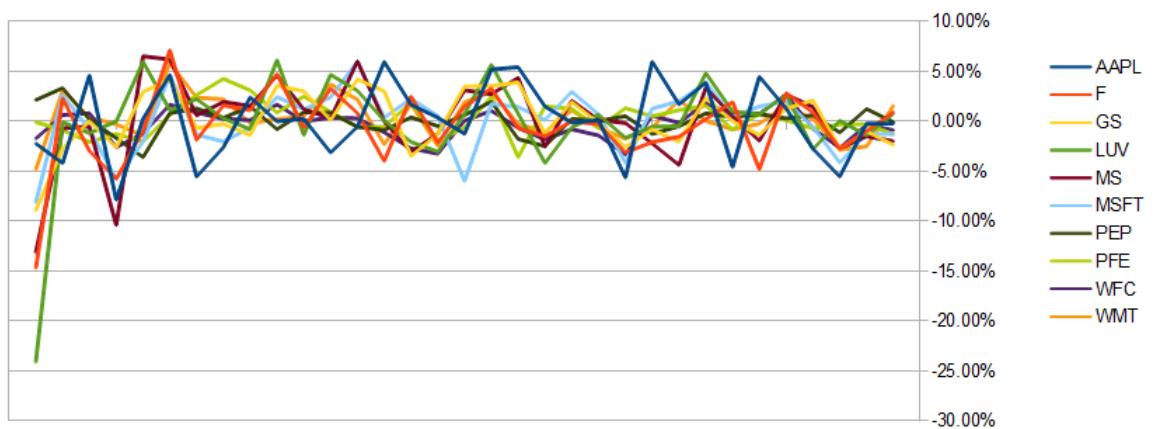
Pri analýze správania výnosov v krízových obdobiach si všimneme odlišnosti vo volatilite výnosov. Počas krízy v roku 2001 došlo v deň otvorenia burzy po útoku z 11. septembra k prepado u všetkých akcií okrem akcií PepsiCo. U vybraných titulov došlo dokonca k poklesu o viac ako 13 %, pre leteckú spoločnosť dosiahol medzidenný pokles výnosov hodnoty až 24 %. Po zvyšok obdobia sa až na jednu výnimku absolútnej hodnoty výnosov pohybuje okolo 5 % (vid' Obr. 5.1).

U výnosov z roku 2008 pozorujeme vyššiu volatilitu výnosov a až na akcie Morgan Stanley nedochádza k výrazným jednorázovým poklesom (vid' Obr. 5.2). Náhly prepad výnosov u akcie Morgan Stanley bol spôsobený neistotou na trhu o dokončenie investície 9 miliárd dolárov do Morgan Stanley. Následná extrémna hodnota výnosu až 87 % nastala po prevedení investície.

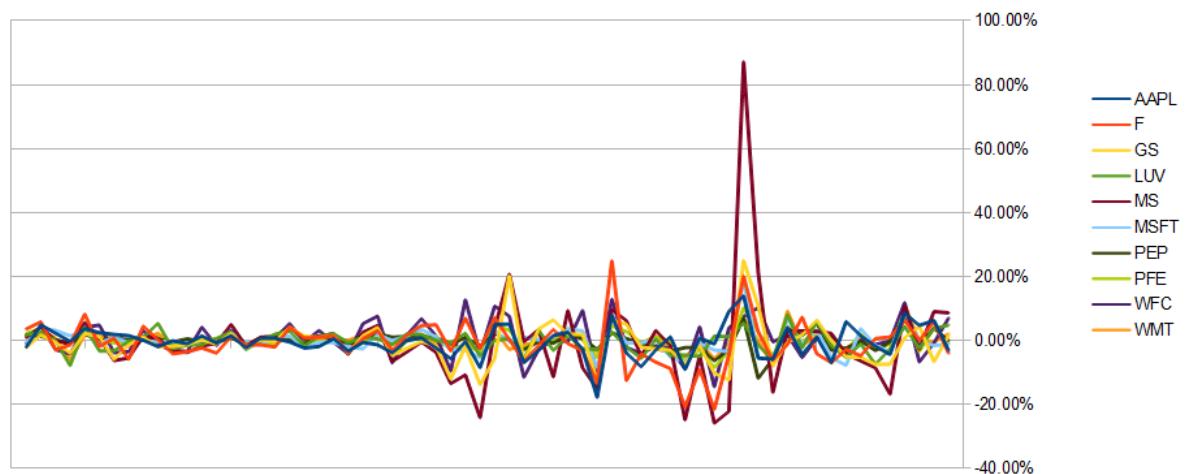
Na výpočet základných štatistických ukazateľov a generáciu scenárov sme použili matematický software MATLAB. Na optimalizáciu portfólia sme využili optimalizačný software GAMS.

5.2 Numerický príklad

Pre výpočet kontaminačných medzí potrebujeme dve pravdepodobnostné rozdelenia, pôvodné rozdelenie P a rozdelenie Q , ktorým budeme rozdelenie P kon-



Obr. 5.1: Výnosy akcií počas krízového obdobia v roku 2001.



Obr. 5.2: Výnosy akcií počas krízového obdobia v roku 2008.

taminovať'. Vzhľadom k dostatočnému počtu pozorovaní z nekrízových období použijeme za rozdelenie P historické scenáre \mathbf{r}_t , kde $t = 1, \dots, T$ a T značí počet historických scenárov. Predpokladáme, že scenáre majú rovnakú pravdepodobnosť $p_t = 1/T \quad \forall t$. Rozdelenie Q získame pomocou scenárov vygenerovaných z dát z krízového obdobia. V numerickom príklade budeme používať dva typy stresových scenárov.

Predpokladáme, že výnosy pôvodného rozdelenia P pochádzajú z mnohorozmerného normálneho rozdelenia

$$N_{10}(\boldsymbol{\mu}_P, \Sigma_P).$$

Parametre normálneho rozdelenia odhadneme pomocou výberovej strednej hodnoty $\hat{\boldsymbol{\mu}}_P$ a výberovej variančnej matice $\hat{\Sigma}_P = \hat{D}_P \hat{\Omega}_P \hat{D}_P$. Chceme podrobit' záťaži koreláciu medzi akciami. Teda chceme skúmať zvýšenie rizika pri znížení diverzifikácie portfólia. Na to využijeme spôsob odvodený v kapitole 4. Predpokladáme, že krízové výnosy sa takisto riadia mnohorozmerným normálnym rozdelením s parametrami $\boldsymbol{\mu}_{kriza}$ a Σ_{kriza} . Parametre odhadneme výberovými odhadmi. Aby sme mohli odsledovať vplyv zmeny v závislostiach medzi akciami, tak ponecháme strednú hodnotu výnosov nezmenenú. Nahradíme odhad korelačnej matice pôvodného rozdelenia $\hat{\Omega}_P$ korelačnou maticou získanou z krízových dát $\hat{\Omega}_{kriza}$. Ak variančná matica $\hat{D}_P \hat{\Omega}_{kriza} \hat{D}_P$ novozískaného rozdelenia nie je pozitívne semidefinítina, použijeme Fingerov algoritmus popísaný v kapitole 4. Dostávame záťažové rozdelenie Q

$$Q \sim N_{10}(\boldsymbol{\mu}_P, \hat{D}_P \hat{\Omega}_{kriza} \hat{D}_P).$$

Z tohto rozdelenia následne vygenerujeme stresové scenáre. Ich počet S položíme rovný 100. Tým získame prvý typ stresových scenárov \mathbf{r}'^s , $s = 1, \dots, 100$ s odpovedajúcimi pravdepodobnosťami $q_s : \sum_{s=1}^S q_s = 1$. Pre zjednodušenie pokladáme $q_s = 1/S = 1/100$.

V druhom type stresových scenárov budeme zat'ažovať výnosy. Kladné výnosy ponecháme nezmenené a záporné výnosy vystavíme stresu. Predpokladáme, že záporný výnos akcie i pôvodného rozdelenia sa zníži o nejakú hodnotu. Teda simulujeme situáciu, kedy prepad vo výnosoch je väčší ako v nekrízovom období, ale kladné výnosy ostávajú nedotknuté. Potrebujeme approximovať veľkosť zmeny negatívnych výnosov. Pre každú akciu nájdeme najnižšiu hodnotu výnosu z celého krízového obdobia a označíme ju ako r_{min_i} , $i = 1, \dots, 10$. Prehľad hodnôt r_{min_i} uvádzame v tabuľke 5.2. Záťažové scenáre vytvoríme prenásobením záporných historických scenárov koeficientom $(1 - r_{min_i})$

$$\begin{aligned} \text{ak } r_i^t < 0 : r_i'^s &= (1 - r_{min_i}) \cdot r_i^t & \forall i = 1, \dots, 10 \\ \text{ak } r_i^t \geq 0 : r_i'^s &= r_i^t & \forall i = 1, \dots, 10 \end{aligned}$$

Počet scenárov S rozdelenia Q sa rovná počtu scenárov pôvodného rozdelenia T . Opäť predpokladáme, že scenáre nastávajú s rovnakou pravdepodobnosťou $q_s = 1/S = 1/T$.

Upozorníme, že pre rôzne akcie pozorujeme minimálny výnos r_{min_i} v rôzne dni. Dochádza tak k porušeniu časovej štruktúry výnosov, čo ale pre tento typ scenára nepovažujeme za podstatné.

	2001	2008
AAPL	-7,87 %	-17,92 %
F	-14,68 %	-21,62 %
GS	-8,92 %	-13,92 %
LUV	-24,09 %	-7,93 %
MS	-13,10 %	-25,94 %
MSFT	-8,13 %	-8,70 %
PEP	-3,60 %	-11,92 %
PFE	-3,59 %	-8,55 %
WFC	-3,33 %	-14,57 %
WMT	-4,84 %	-8,07 %

Tabuľka 5.2: Hodnoty najnižšieho medzidenného poklesu akcií pre krízové obdobia v percentách.

rozd. P / rozd. Q	scenáre z krízy v 2001	scenáre z krízy v 2008
nekrízové dátá z 2001	X	
nekrízové dátá z 2008		X
súčasné dátá 2012-2013	X	X

Tabuľka 5.3: Tabuľka dvojíc rozdelen použitých na výpočet kontaminačných medzi.

Úlohu optimalizácie portfólia vzhľadom k riziku a výpočet kontaminačných medzi prevedieme dohromady na ôsmych dvojiciach rozdelení (P, Q). Rozdelenie z obdobia pred krízou z roku 2001 budeme kontaminovať dvomi rozdeleniami generovanými vyššie popísaným postupom z krízových dát z toho istého roka. Analogicky postupujeme pre rok 2008. Pre súčasné dátá použijeme na generovanie scenárov obe krízové dátá (vid' tabuľku 5.3). Teda pre každé nekrízové obdobie budeme zatážovať korelácie medzi akciami a výnosy.

Prejdime k finančnej aplikácií. Chceme investovať do portfólia vopred vybraných desiatich akcií $i = 1, \dots, 10$. Každej akcii priradíme váhu zastúpenia v portfóliu. Túto váhu označíme ako $x_i : \sum_{i=1}^{10} x_i = 1$. Nepovoľujeme predaj nakrátko, takže $x_i \geq 0$. Aby sme diverzifikáciou mitigovali riziko, nastavíme pre každú váhu hornú hranicu

$$x_i \leq 0,33.$$

Rovnako postupujeme pri akciách patriacich do istého odvetvia. Pre bankový sektor a IT máme

$$\begin{aligned} x_{GS} + x_{MS} + x_{WFC} &\leq 0,33 \\ x_{AAPL} + x_{MSFT} &\leq 0,33. \end{aligned}$$

Hladinu spoľahlivosti α volíme 5 %. Pre rozdelenie P so scenármi r_i^t , $i = 1, \dots, 10$,

$t = 1, \dots, T$ a ich pravdepodobnosťami $p_t = 1/T$ dostávame úlohu

$$\begin{aligned} & \min \quad \text{CVaR}_{0.95}(\mathbf{x}, P) \\ & \text{za podmienok } x_i \leq 0,33 \quad \forall i \\ & \quad x_{GS} + x_{MS} + x_{WFC} \leq 0,33 \\ & \quad x_{AAPL} + x_{MSFT} \leq 0,33 \\ & \quad \sum_{i=1}^{10} x_i = 1 \\ & \quad x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Ekvivalentne môžeme prepísat' do tvaru (3.5) s pomocnými premennými

$$\begin{aligned} & \min \quad \left\{ \psi + \frac{1}{1 - 0,95} \sum_{t=1}^T \frac{1}{T} y_t \right\} \tag{5.1} \\ & \text{za podmienok } x_i \leq 0,33 \quad \forall i \\ & \quad x_{GS} + x_{MS} + x_{WFC} \leq 0,33 \\ & \quad x_{AAPL} + x_{MSFT} \leq 0,33 \\ & \quad \sum_{i=1}^{10} x_i = 1 \\ & \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 10 \\ & \quad y_t + \psi \geq - \sum_{i=1}^{10} r_i^t x_i \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & \quad y_t \geq 0 \quad \forall t = 1, \dots, T \\ & \quad \psi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Reformulácia úlohy je potrebná, aby sme získali účelovú funkciu lineárnu v rozdelení (vid' Kapitola 3).

Analogicky odvodíme úlohu pre zát'ažové rozdelenie Q so scenármami r_i^{s*} , $i = 1, \dots, 10$, $s = 1, \dots, S$ a pravdepodobnosťami q_s .

Na konštrukciu kontaminačných medzí potrebujeme optimálnu hodnotu účelovej funkcie $\varphi(P)$ a $\varphi(Q)$, ktorú ľahko získame vyriešením úlohy (5.1) pre odpovedajúce rozdelenie. Pre hornú medzu naviac vstupujú do výpočtu hodnoty $\phi_{0,95}(\mathbf{x}^*(P), \psi^*(P), Q)$ a $\phi_{0,95}(\mathbf{x}^*(Q), \psi^*(Q), P)$. Tie jednoducho spočítame zo vztáhov

$$\begin{aligned} \phi_{0,95}(\mathbf{x}^*(P), \psi^*(P), Q) &= \psi^*(P) + \frac{1}{1 - 0,95} \sum_{s=1}^S \frac{1}{S} ((-r_i^s)x_i^*(P) - \psi^*(P))^+ \\ \phi_{0,95}(\mathbf{x}^*(Q), \psi^*(Q), P) &= \psi^*(Q) + \frac{1}{1 - 0,95} \sum_{t=1}^T \frac{1}{T} ((-r_i^t)x_i^*(Q) - \psi^*(Q))^+. \end{aligned}$$

Na výpočet CVaR pre kontaminované rozdelenie použijeme úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\{ (1-t) \left(\psi(P) + \frac{1}{1-0,95} \sum_{t=1}^T \frac{1}{T} y(P)_t \right) \right. \\ & \left. + t \left(\psi(Q) + \frac{1}{1-0,95} \sum_{s=1}^S \frac{1}{S} y(Q)_s \right) \right\} \end{aligned}$$

za podmienok $x_i \leq 0,33 \quad \forall i$

$$x_{GS} + x_{MS} + x_{WFC} \leq 0,33$$

$$x_{AAPL} + x_{MSFT} \leq 0,33$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 10$$

$$y(P)_t + \psi(P) \geq - \sum_{i=1}^{10} r_i^t x_i \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$y(Q)_s + \psi(Q) \geq - \sum_{i=1}^{10} r_i'^s x_i \quad \forall s = 1, \dots, S$$

$$y_t \geq 0 \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$y_s \geq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S$$

$$\psi(P) \in \mathbb{R}, \psi(Q) \in \mathbb{R}.$$

Úlohu (5.1) sme vyriesili pre všetky dvojice nestresových a stresových rozdelení. Vypočítané hodnoty uvádzame v tabuľke 5.4. Všimnime si, že pre rozdelenia Q tvorené scenármi zat'azujúcimi výnosy je pre všetky prípady hodnota $\varphi(Q)$ vyššia ako $\varphi(P)$. Dôvodom je spôsob, akým sme generovali scenáre. Pre tento typ stresu platí $\varphi(P) \leq \varphi(Q)$. Pokiaľ v rozdelení P existuje aspoň jeden záporný výnos, tak dostaneme ostrú nerovnosť.

Pre rozdelenie Q zat'azujúce korelácie medzi akciami pozorujeme $\varphi(P) < \varphi(Q)$ pre scenáre z krízového obdobia roku 2008 a opačnú nerovnosť pre krízové obdobie z roku 2001. Na základe toho usudzujeme, že typ krízy bol v týchto rokoch rozdielny. V roku 2008 boli výnosy akcií medzi sebou silnejšie korelované ako v roku 2001. To nám potvrdzuje intuitívnu predstavu, že v roku 2001 sa na trhu jednalo o jeden veľký šok, ktorý mal ale dlhodobejší dopad len do niektorých odvetví. Naproti tomu v roku 2008 prepukla globálna finančná kríza, ktorá zasiahla do všetkých pozorovaných odvetví.

Pozrime sa na úlohu z hľadiska rizikového managera. Ten má na starosti kvantifikovať riziko spojené s investíciou do portfólia vybraných akcií a vyhodnotiť pravdepodobnosť rizikových udalostí. Na základe týchto informácií potom navrhuje spôsoby mitigácie rizika. Často sa pri analýze rizika obmedzuje len na porovnanie optimálnych hodnôt účelových funkcií. Teda pozerá sa, či a o koľko riziko v zat'azovej situácii vzrástlo. Tento spôsob môže byť zavádzajúci. Predpokladajme, že $\varphi(P) = \varphi(Q)$ a zároveň $\varphi(P_\lambda) = \varphi((1-\lambda)P + \lambda Q)$ nie je konštantná.

P	Q	$\varphi(P)$	$\varphi(Q)$	$\phi_{0,95}(\mathbf{x}^*(P), \psi^*(P), Q)$	$\phi_{0,95}(\mathbf{x}^*(Q), \psi^*(Q), P)$
2001	2001 N	0,0208	0,0193	0,0300	0,0256
2012	2001 N	0,0111	0,0086	0,0010	0,0135
2008	2008 N	0,0212	0,0248	0,0273	0,0221
2012	2008 N	0,0111	0,0148	0,0169	0,0127
2001	2001 r	0,0208	0,0230	0,0254	0,1035
2012	2001 r	0,0111	0,0116	0,0117	0,0381
2008	2008 r	0,0212	0,0232	0,0235	0,1004
2012	2008 r	0,0111	0,0121	0,0124	0,0382

Tabuľka 5.4: Vypočítané hodnoty úlohy (5.1) pre všetkých osem prípadov, kde N označuje scenáre zat'azujúce koreláciu a r scenáre zat'azujúce výnosy.

Z tvrdenia 1 vieme, že optimálna hodnota účelovej funkcie kontaminovaného rozdelenia je konkávna. To znamená, že existuje $\lambda \in (0,1)$ také, že $\varphi(P_\lambda) > \varphi(P)$.

Ako plynie z predošej úvahy o rozdielnom charaktere kríz z rokov 2001 a 2008, pre správne vyhodnotenie rizika hrá voľba zát'azového rozdelenia dôležitú úlohu. Voľba stresu môže byť podmienená viacerými faktormi, napríklad nariadením regulátora alebo expertným odhadom zhoršenia podmienok na trhu. Považujeme za dôležité identifikovať možný stres v podobe zát'azového rozdelenia a zároveň považujeme za kl'účové zvoliť, relevantne vzhl'adom k situácií, pomer medzi pôvodným a krízovým scenárom. Neexistuje pravidlo, podľa ktorého sa určí optimálna hodnota kontaminačného parametra λ . Rizikovému managerovi doporučujeme voliť t podľa dôveryhodnosti rozdelenia Q . Do úvahy sa v tomto prípade berie dôvera v zdroj rozdelenia a vlastný odborný úsudok. Ak máme pochybnosti o dostavení sa zát'azovej situácie, volíme λ z $[0, 0,5]$. Naopak, ak očakávame stres, zvolíme λ väčšie než 0,5. Špeciálny prípad nastane, ak sa pravdepodobnosti nekrízových a krízových scenárov rovnajú, teda $p_t = q_s \forall t \forall s$. Vtedy pre $\lambda = 0,5$ dostaneme kontaminované rozdelenie s $T + S$ scenármami $\mathbf{r}_i^1, \dots, \mathbf{r}_i^T, \mathbf{r}'_i^1, \dots, \mathbf{r}'_i^S$ s rovnakou pravdepodobnosťou $p_1 = \dots = p_T = q_1 = \dots = q_S$. K tomuto špeciálnemu prípadu v našom príklade dôjde pre krízové scenáre zat'azujúce výnosy.

Aplikovali sme kontaminačnú techniku na dvojice nekrízových a krízových rozdelení. Grafický výstup môžeme vidieť na obrázkoch 5.3 až 5.10. Označme hodnotu hornej medze v bode λ ako U_λ a analogicky hodnotu dolnej medze ako L_λ . Pomerom

$$D_\lambda := \frac{\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P_\lambda) - L_\lambda}{U_\lambda - L_\lambda}$$

budeme merat' vzdialenosť CVaR od kontaminačných medzí.

Všimnime si rôzne typy správania $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P_\lambda)$ pre stres korelácií a výnosov. Pre scenáre zat'azujúce výnosy sa zvyčajne CVaR drží pri dolnej medze (vid' tabuľka 5.5). Výnimkou je obdobie 2001 kontaminované krízou z 2001, v ktorom maximálna hodnota pomeru D_λ vychádza 33,06 % pre $\lambda = 0,05$. Pomer postupne klesá, pre $\lambda > 0,4$ vychádza $D_\lambda < 10\%$. V prípade korelačného stresu sa CVaR od dolnej medze vzd'aluje.

Predstavme si situáciu, keď je výpočetne náročné získať hodnotu $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P_\lambda)$ pre všetky $\lambda \in [0,1]$. V takom prípade doporučujeme spočítať kontaminačné medze. Pre zat'azovanie korelácií odporúčame prudérny prístup k riziku a aproxi-

P	Q	maximálny pomer ($\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P_\lambda) - L_\lambda$) k $(U_\lambda - L_\lambda)$
2001	2001 N	89,75 %
2012	2001 N	76,92 %
2008	2008 N	45,95 %
2012	2008 N	56,56 %
2001	2001 r	33,06 %
2012	2001 r	2,74 %
2008	2008 r	0,53 %
2012	2008 r	6,12 %

Tabuľka 5.5: Maximálny pomer (CVaR –dolná medza) k rozdielu medzí.

		Stres korelácií	Stres výnosov
		neurčené λ	$\lambda = 0,5$
2001	pod dolnou medzou	92,97 %	98,44 %
	medzi medzami	6,25 %	0,78 %
	nad hornou medzou	0,78 %	0,78 %
2008	pod dolnou medzou	99,92 %	99,92 %
	medzi medzami	0 %	0 %
	nad hornou medzou	0,08 %	0,08 %

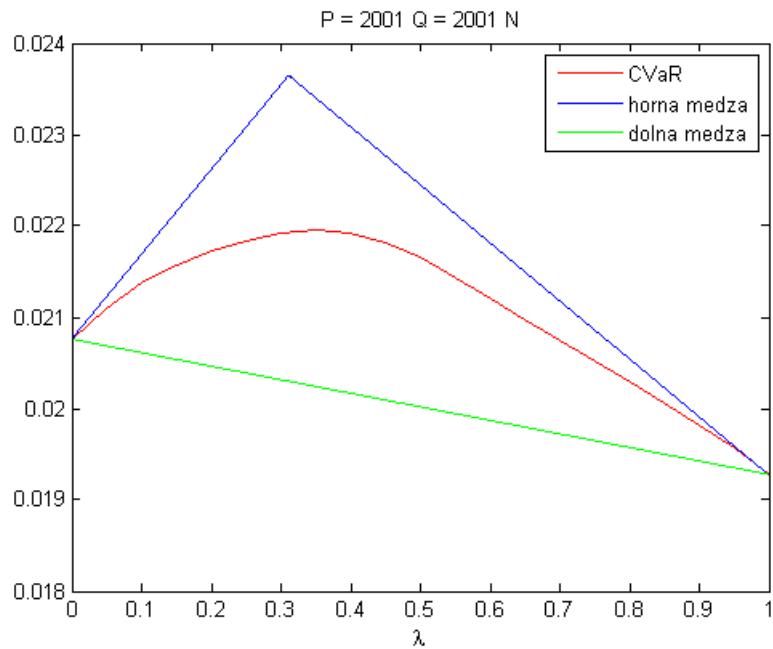
Tabuľka 5.6: Výsledky spätného testovania kontaminačných medzí.

movat' $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}, P_\lambda)$ hornou medzou. Pre stres výnosov navrhujeme odhadnút' riziko pomocou dolnej medze, čo stále považujeme za konzervatívny odhad.

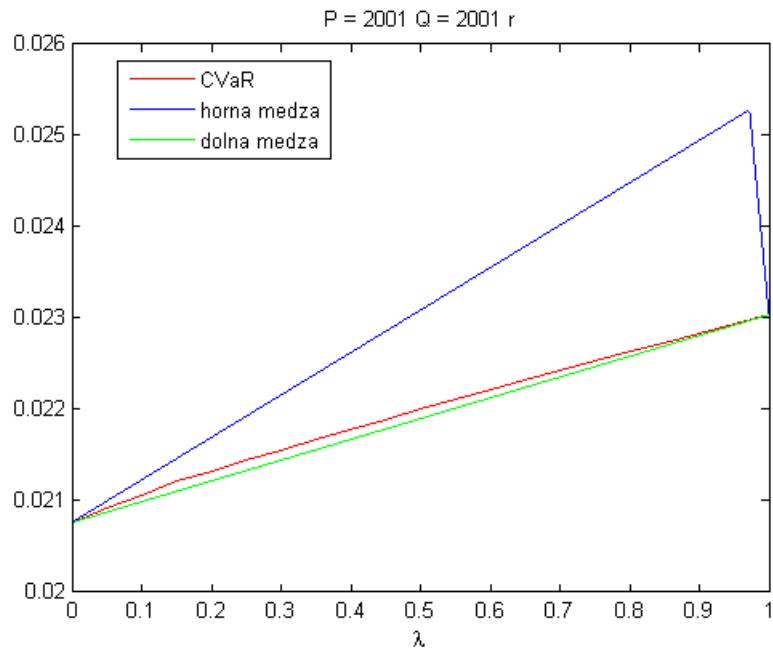
Otestujeme späťne kvalitu kontaminačných medzí. Tento tzv. backtesting vykonáme na nekrízových dátach z rokov 2001 a 2008. Pomocou optimálnych váh portfólia pre nekrízové obdobie $\mathbf{x}^*(P)$ vypočítame výnosy portfólia (grafické znázornenie uvádzame na obrázkoch 5.11 a 5.12). Následne výnos portfólia porovnáme s kontaminačnými medzami. Výnosy si rozdelíme do troch kategórií: pod dolnou medzou, medzi kontaminačnými medzami a nad hornou medzou.

Pretože nemáme pevne určený parameter λ , zvolíme za hornú hranicu kategórií maximálnu hornú medzu a za dolnú hranicu minimálnu dolnú medzu. Pre porovnanie uvádzame aj rozdelenie výnosov do kategórií pre $\lambda = 0,5$.

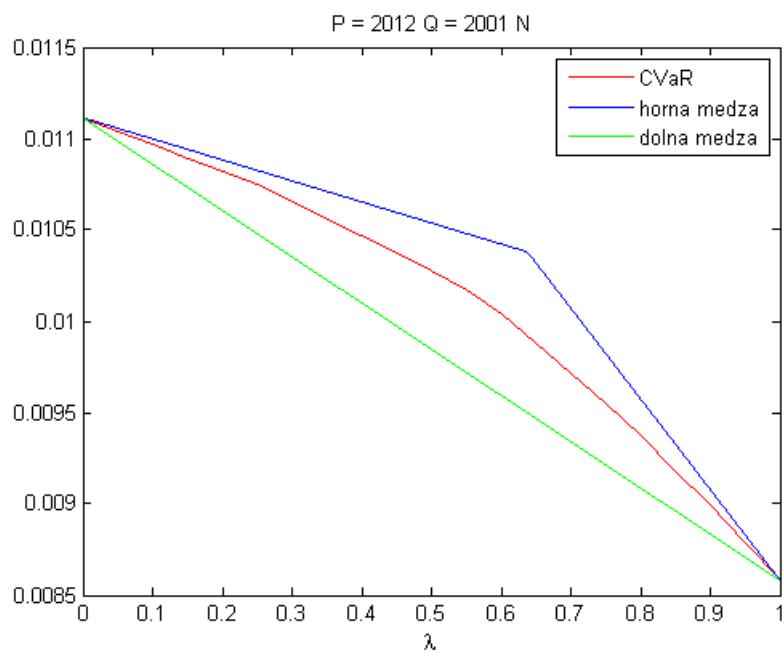
Vidíme, že v roku 2008 vychádza pre oba typy záťažových scenárov rovnaké zastúpenie vo všetkých kategóriách (viď tabuľka 5.6). Pod dolnou medzou sa nachádza 99,92 % pozorovaní. Len jeden výnos respektíve strata portfólia prekročila hornú medzu, čo odpovedá 0,08 % pozorovaní. V roku 2001 pri zatážovaní korelácií medzi výnosmi leží pod dolnou medzou 92,97 %. Medzi medzami sa nachádza 6,25 %. Pre $\lambda = 0,5$ je to 98,44 % pod dolnou medzou. Kontaminačné medze teda spoľahlivo odhadli riziko.



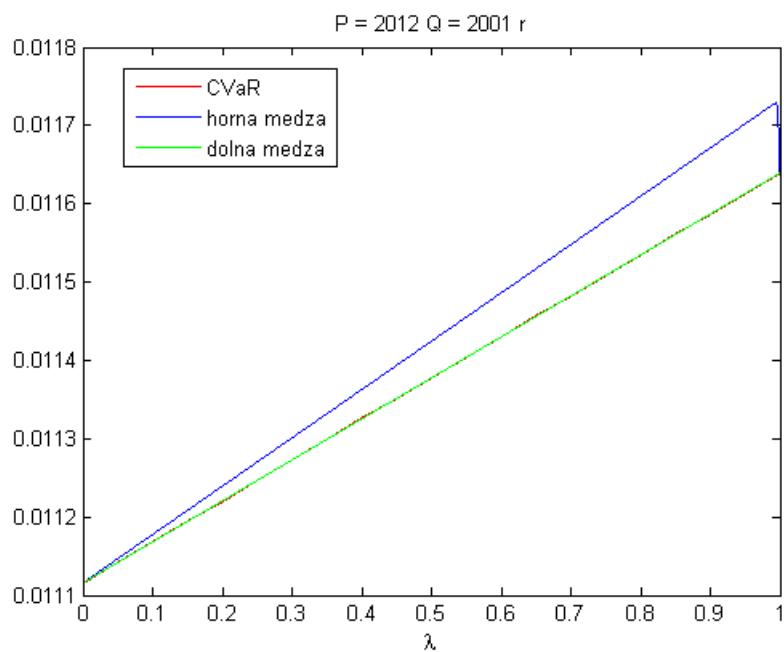
Obr. 5.3: Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2001 a krízové seneáre generované pomocou normálneho rozdelenia z krízy roku 2001.



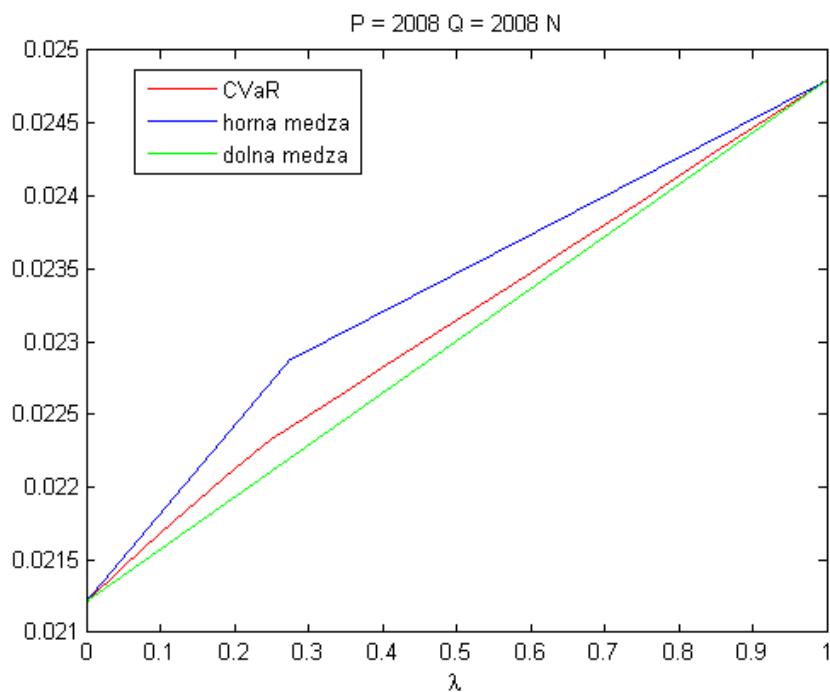
Obr. 5.4: Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2001 a krízové seneáre generované pomocou stresovania výnosov na základe krízy roku 2001.



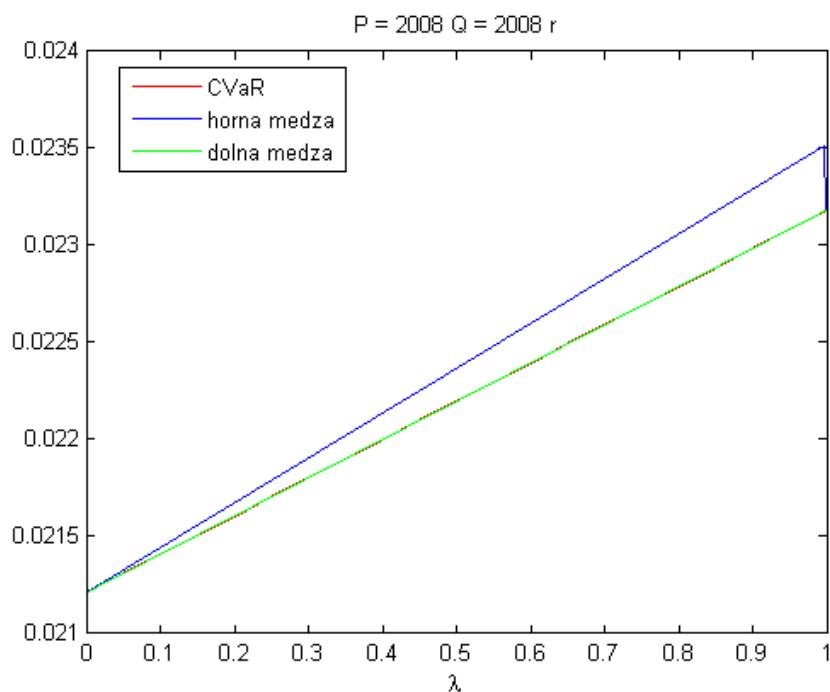
Obr. 5.5: Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2012 a krízové sceanáre generované pomocou normálneho rozdelenia z krízy roku 2001.



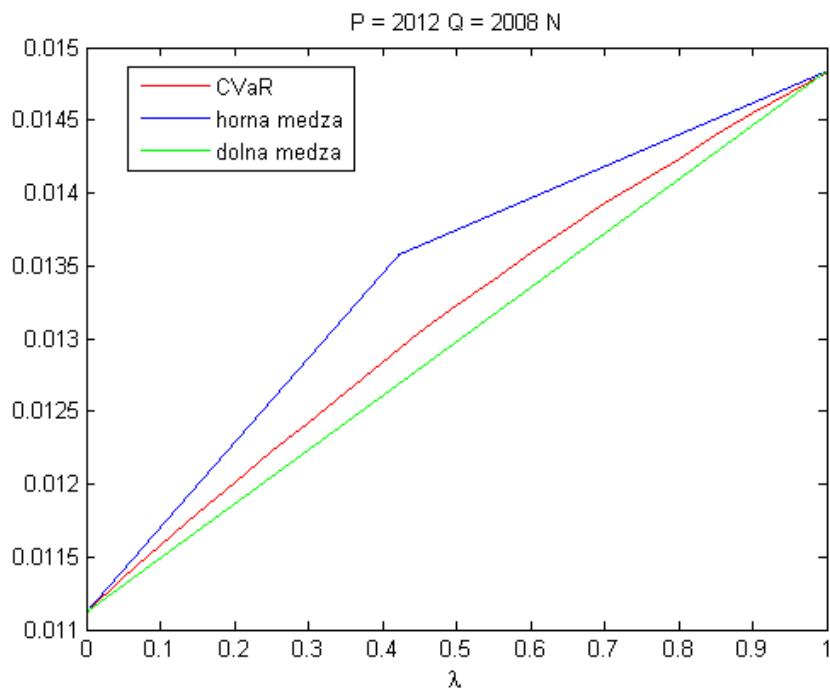
Obr. 5.6: Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2012 a krízové sceanáre generované pomocou stresovania výnosov na základe krízy roku 2001.



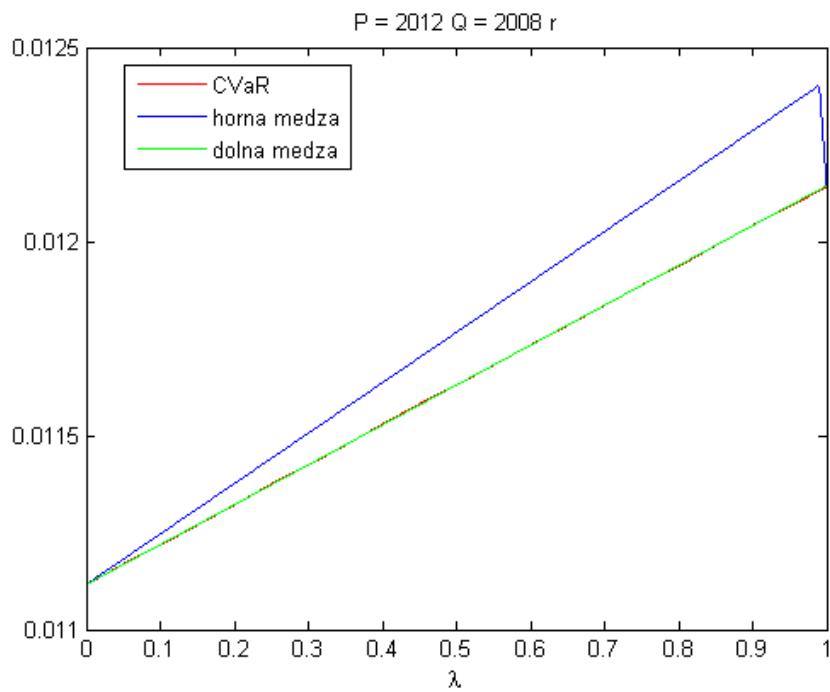
Obr. 5.7: Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2008 a krízové seneáre generované pomocou normálneho rozdelenia z krízy roku 2008.



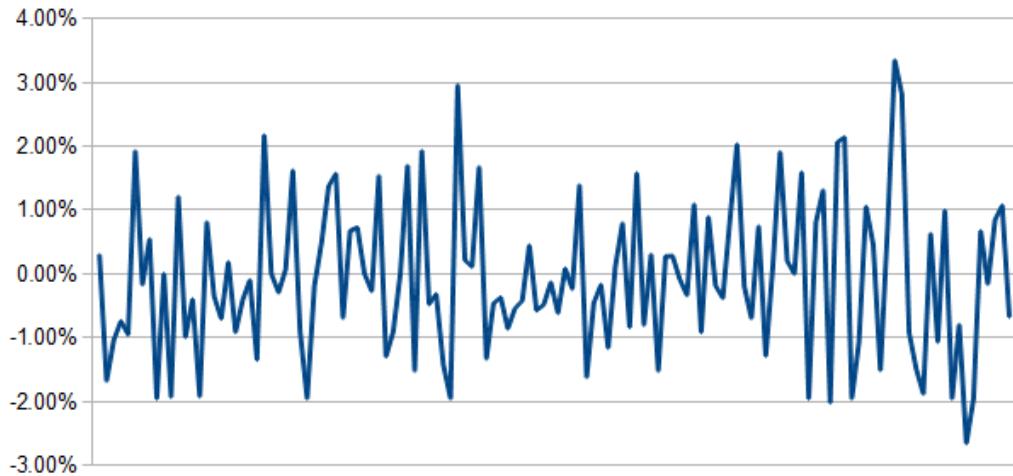
Obr. 5.8: Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2008 a krízové seneáre generované pomocou stresovania výnosov na základe krízy roku 2008.



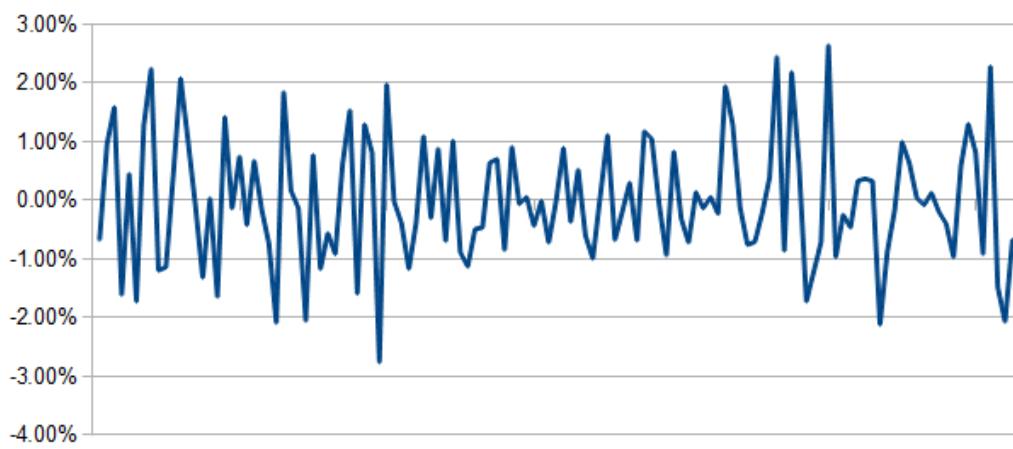
Obr. 5.9: Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2012 a krízové scenáre generované pomocou normálneho rozdelenia z krízy roku 2008.



Obr. 5.10: Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2012 a krízové scenáre generované pomocou stresovania výnosov na základe krízy roku 2008.



Obr. 5.11: Výnosy portfólia s váhami $\mathbf{x}^*(P)$ počas nekrízového obdobia v roku 2001.



Obr. 5.12: Výnosy portfólia s váhami $\mathbf{x}^*(P)$ počas nekrízového obdobia v roku 2008.

Kapitola 6

Záver

V predloženej práci sme na začiatku zaviedli pojem kontaminačných medzí a uviedli základné teoretické poznatky kontaminačnej techniky. Ďalej sme zadefinovali rizikovú mieru CVaR, opísali jej vlastnosti a odvodili pre ňu tvar kontaminačných medzí. Venovali sme sa aj problematike generovania scenárov splňajúcich predoklady na aplikáciu kontaminačnej techniky.

Uvažovali sme úlohu optimalizácie portfólia z hľadiska rizikového managera. Na finančnú aplikáciu sme použili reálne dátá z newyorskej burzy NYSE. Zdôraznili sme dôležitosť vhodného výberu záťažového obdobia a správnej identifikácie stresu, ktorému portfólio vystavujeme. Volili sme dva typy stresových scenárov. V prvom type sme zatážovali korelácie medzi výnosmi akcií. V druhom type scenárov sme podrobili stresu výnosy.

Na úlohu sme aplikovali kontaminačnú techniku a analyzovali jej výstup. Vypožorovali sme trend, ktorým sa riadi vzdialenosť rizika od kontaminačných medzí pre jednotlivé typy scenárov. Tento trend sme pozorovali pre osem rôznych prípadov tvorených tromi nekrízovými obdobiami a dvomi obdobiami stresu. Na základe tohto správania sme formulovali doporučenia pre rizikového managera spravujúceho dané portfólio.

Kontaminačná technika má množstvo výhod pre uplatnenie v praxi: má priemerané požiadavky, dá sa uplatniť napríklad na rozšírenú mieru rizika CVaR, je interpretovateľná a v neposlednom rade redukuje množstvo výpočtov optimalizačnej úlohy s kontaminovaným rozdelením. Vďaka tomu si z nášho pohľadu zaslahuje hlbšiu analýzu. Priestor na zlepšenie vidíme v odlišnom generovaní stresových scenárov napríklad pomocou momentovej metódy popísanej v kapitole 4. Úloha by sa dala vylepšiť aj zakomponovaním požadovaného minimálneho výnosu portfólia. Modifikácia úlohy by v takomto prípade nebola priamočiara, pretože množina X , na ktorej optimalizujeme, by závisela na rozdelení. Tým by sa porušil jeden zo základných predpokladov kontaminačnej techniky. Pre bližší popis zpracovania požadovaného výnosu do úlohy odkazujeme na práce [5] a [6]. Naše výsledky sú podmienené výberom aktív a období, z ktorých dátá čerpáme. Ovplyvnenie výstupu výberom obdobia sme sa snažili eliminovať výberom viacerých nekrízových a krízových úsekov. Pri inej voľbe akcií a sledovaného obdobia by sme mohli dosiahnuť odlišné závery.

Literatúra

- [1] Basel Committee, et al. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework, Comprehensive Version.* Switzerland: Bank for International Settlements, 2006.
- [2] Bank, Bernd, et al. *Non-Linear Parametric Optimization.* Berlin: Akademie-Verlag, 1982.
- [3] Dupačová, Jitka. *Stress testing via contamination.* In: K. Marti et al. (eds.), *Coping with uncertainty.* Springer Berlin Heidelberg, 2006. p. 29-46.
- [4] Dupačová, Jitka, Jan Hurt a Josef Štěpán. *Stochastic modeling in economics and finance.* Kluwer, Applied Optimization 75, 2002. ISBN 1-4020-0840-6.
- [5] Dupačová, Jitka & Miloš Kopa. *Robustness in stochastic programs with risk constraints.* Annals of Operations Research, 200(1), 2012. p.55-74.
- [6] Dupačová, Jitka & Jan Polívka. *Stress testing for VaR and CVaR.* Quantitative Finance 7, 2007. p.411-421.
- [7] Embrechts, Paul, Alexander McNeil and Daniel Straumann. *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls.* In: M.A.H. Dempster (ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond.* Cambridge University Press, 2002. p.176-223.
- [8] Fiacco, V. Anthony. *Sensitivity analysis for nonlinear programming using penalty methods.* Mathematical programming, 1976. 10.1: p.287-311.
- [9] Fryšová, Daniela, et. al. *Modelovací systém GAMS.* 1993.
- [10] Gol'shtein, Evgenii Grigor'evich. *Theory of Convex Programming.* Translations of mathematical monographs 36. American Mathematical Society, Providence, RI, 1972.
- [11] Kupiec, Paul. *Stress testing in a Value at Risk framework.* In: M.A.H. Dempster (ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. p.76-99.
- [12] Lachout, Petr. *Teorie pravděpodobnosti.* Praha: Karolinum, 2004.
- [13] *Riskmetrics: technical document.* Morgan Guaranty Trust Company of New York, 1996.

- [14] Rockafellar, R. Tyrrell & Stanislav Uryasev. *Conditional value-at-risk for general loss distributions*. Journal of Banking & Finance, 2002. 26.7: p.1443-1471.
- [15] Rockafellar, R. Tyrell. *Convex Analysis*. Volume 28 of Princeton Mathematics Series, Princeton University Press, 1970.
- [16] Rockafellar, R. Tyrell & Wets, JB Roger. *Variational Analysis*. Volume 317 of A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 1998.

Zoznam obrázkov

3.1	Príklad nerýdzo monotónnej distribučnej funkcie so skokom v k_1 . Zdroj [14].	13
5.1	Výnosy akcií počas krízového obdobia v roku 2001.	22
5.2	Výnosy akcií počas krízového obdobia v roku 2008.	22
5.3	Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2001 a krízové scenáre generované pomocou normálneho rozdelenia z krízy roku 2001.	29
5.4	Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2001 a krízové scenáre generované pomocou stresovania výnosov na základe krízy roku 2001.	29
5.5	Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2012 a krízové scenáre generované pomocou normálneho rozdelenia z krízy roku 2001.	30
5.6	Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2012 a krízové scenáre generované pomocou stresovania výnosov na základe krízy roku 2001.	30
5.7	Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2008 a krízové scenáre generované pomocou normálneho rozdelenia z krízy roku 2008.	31
5.8	Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2008 a krízové scenáre generované pomocou stresovania výnosov na základe krízy roku 2008.	31
5.9	Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2012 a krízové scenáre generované pomocou normálneho rozdelenia z krízy roku 2008.	32
5.10	Kontaminačné medze pre nekrízové obdobie z roku 2012 a krízové scenáre generované pomocou stresovania výnosov na základe krízy roku 2008.	32
5.11	Výnosy portfólia s váhami $\mathbf{x}^*(P)$ počas nekrízového obdobia v roku 2001.	33
5.12	Výnosy portfólia s váhami $\mathbf{x}^*(P)$ počas nekrízového obdobia v roku 2008.	33

Zoznam tabuliek

5.1	Prehľad akcií použitých v numerickej aplikácií	21
5.2	Hodnoty najnižšieho medzidenného poklesu akcií pre krízové obdobia v percentách.	24
5.3	Tabuľka dvojíc rozdelen použitých na výpočet kontaminačných medzí.	24
5.4	Vypočítané hodnoty úlohy (5.1) pre všetkých osem prípadov, kde N označuje scenáre zatážujúce koreláciu a r scenáre zatážujúce výnosy.	27
5.5	Maximálny pomer (CVaR – dolná medza) k rozdielu medzí.	28
5.6	Výsledky spätného testovania kontaminačných medzí.	28

Dodatok A

Zdrojový kód

V tejto sekcii uvedieme zdrojový kód softwaru GAMS používaný na výpočty v kapitole 5. Pretože logika nápočtu je rovnaká pre všetky dvojice nezát'ažových a zát'ažových rozdelení, uvádzame len jeden príklad zdrojového kódu. Jedná sa o nápočet pre nezát'ažové obdobie z roku 2001 a zát'ažové scenáre stresujúce výnosy z roku 2001. Kompletné zdrojové kódy sú k nahliadnutiu na priloženom CD.

```
$Title CVaR (x, P_lambda): P=2001, Q= 2001 r

Sets
  T      Obdobie /1 * 128/
  I      Aktiva  /AAPL , F , GS , LUV , MS , MSFT , PEP , PFE ,
          WFC , WMT/
  TQ     Obdobie / 1* 128 /
;

Alias(I,J);

table R(T,I)           Data
$Ondelim
$Include data2001_bezne.csv
$Offdelim
;

table RQ(TQ,I)          Data
$Ondelim
$Include stresScenare_2001_2001_r.csv
$Offdelim
;

Parameters
  alpha        Hladina           /0.95/
  lambda       Kontaminacny parameter / 0.5 /
;

Positive Variables
  x(I)         Vahy akcii
  y(T)         Pomocna nezaporna premenna
```

```

yQ(TQ) Pomocna nezaporna premenna
;

Variables
  CVaR  Ucelova funkcia
  psi   Pomocna premenna do min vzorca pre CVaR
  psiQ  Pomocna premenna do min vzorca pre CVaR
;

Equations
  minCVaR          Minimalizacia ucelovej funkcie
  conditionAsset(i) Obmedzenie na investiciu do jednej akcie
  conditionBanks  Obmedzenie na investiciu do jedneho odvetvia
  conditionIT      Obmedzenie na investiciu do jedneho odvetvia
  conditionTechnical(T) Technicka podmienka na pomocne premenne
  conditionTechnicalQ(TQ) Technicka podmienka na pomocne premenne
  conditionWeights Suma vah sa musi rovnat jednej
;

minCVaR ...           CVaR =E=
                    (1-lambda) * (psi +
                    (1 / ((1 - alpha) * 128)) * Sum (T,y(T)))
                    + lambda * (psiQ +
                    (1 / ((1 - alpha) * 128)) * Sum (TQ,yQ(TQ)));
conditionAsset(i) ... x(i) =L= 0.33 ;
conditionBanks ...  (x('GS') + x('MS') + x('WFC')) =L= 0.33;
conditionIT ...      (x('AAPL') + x('MSFT')) =L= 0.33;
conditionTechnical(T)... y(T) =G= -Sum (I,R(T,I) * x(I)) - psi;
conditionTechnicalQ(TQ)... yQ(TQ) =G= -Sum (I,RQ(TQ,I) * x(I)) - psiQ;
conditionWeights ...  Sum(I, x(I)) =E= 1;

Model optPortfolio /
  minCVaR,
  conditionAsset,
  conditionBanks,
  conditionIT,
  conditionTechnical,
  conditionTechnicalQ,
  conditionWeights
/
Solve optPortfolio using lp minimizing CVaR;
Option decimals = 8;
Display x.l, CVaR.l, psi.l;

```