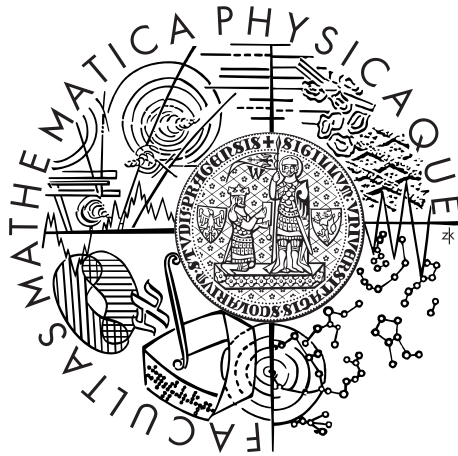


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Petra Monhartová

Schémata typu ADER pro řešení rovnic mělké vody

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Felcman CSc.

Studijní program: matematika

Studijní obor: MNVM

Praha 2013

Na tomto místě bych především chtěla poděkovat svému vedoucímu diplomové práce panu doc. RNDr. Jiřímu Felcmanovi, CSc., který mi dal nespočet užitečných rad při tvorbě této diplomové práce. Panu RNDr. Petru Kuberovi, Ph.D za poskytnutý program a rady při programování. V neposlední řadě svým rodičům za obrovskou podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 1. 8. 2013

Podpis autora

Název práce: Schémata typu ADER pro řešení rovnic mělké vody

Autor: Petra Monhartová

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Felcman CSc.

Abstrakt: V předložené práci studujeme numerické řešení rovnic mělké vody. Zavádíme vektorový zápis rovnic zákonů zachování a z nich odvodíme rovnice mělké vody (SWE). Uvádíme jejich zjednodušené odvození, zápis a nejdůležitější vlastnosti. Původním přínosem je odvození rovnic pro mělkou vodu bez využití Leibnizovy formule. Popisujeme zde metodu konečných objemů pro SWE s numerickým tokem Vijayasundaramova typu. Uvádíme popis lineární rekonstrukce, kvadratické rekonstrukce a ENO rekonstrukce a jejich využití ke zvýšení řádu přesnosti. Ukazujeme využití lineární rekonstrukce v metodě konečných objemů druhého řádu přesnosti. Tato metoda je naprogramovaná v jazyce Octave a použita na řešení dvou úloh. Aplikujeme metodu typu ADER, původně navrženou pro Eulerovy rovnice, na rovnice mělké vody.

Klíčová slova: rovnice mělké vody, metoda konečných objemů, lineární rekonstrukce, ENO rekonstrukce, ADER

Title: ADER schemes for the shallow water equations

Author: Petra Monhartová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Felcman CSc.

Abstract: In the present work we study the numerical solution of shallow water equations. We introduce a vectorial notation of equations laws of conservation from which we derive the shallow water equations (SWE). There is the simplify its derivation, notation and the most important features. The original contribution is to derive equations for shallow water without the using of Leibniz's formula. There we report the finite volume method with the numerical flow of Vijayasundaram type for SWE. We present a description of the linear reconstruction, quadratic reconstruction and ENO reconstruction and their using for increasing of order accuracy. We demonstrate using of linear reconstruction in finite volume method of second order accuracy. This method is programmed in Octave language and used for solving of two problems. We apply the method of the ADER type for the shallow water equations. This method was originally designed for the Euler's equation.

Keywords: shallow water equations, finite volume method, linear reconstruction, ENO reconstruction, ADER

Obsah

Úvod	3
1 Obecné rovnice dynamiky tekutin	4
2 Odvození SWE	6
2.1 Formulace I.	6
2.2 Formulace II.	8
3 Rovnice mělké vody	13
3.1 Homogenita	13
3.2 Rotační invariantnost rovnic mělké vody	14
3.3 Hyperbolicita rovnic mělké vody	15
3.4 Počáteční - okrajová úloha	18
4 Metoda konečných objemů	19
4.1 Odvození obecného schématu metody konečných objemů	19
4.2 Metoda konečných objemů a numerický tok pro $z = konst.$	22
4.2.1 Numerický tok Vijayasundaramova typu pro SWE	23
4.2.2 CFL podmínka	24
4.3 Metoda konečných objemů a numerický tok pro $z \neq konst.$	24
4.3.1 Numerický tok Vijayasundaramova typu pro SWE	25
4.4 Metoda konečných objemů vyššího řádu pro 1D úlohu	26
5 Metoda vyšší přesnosti	28
5.1 Lineární rekonstrukce	28
5.2 Kvadratická rekonstrukce	30
5.3 Limitní procedura	33
5.3.1 První varianta limiteru.	34
5.3.2 Druhá varianta limiteru.	34
5.4 ENO rekonstrukce v 1D	35
5.4.1 Základní myšlenka	35
5.4.2 Výpočet p^k	36
5.4.3 ENO procedura	37
5.4.4 Algoritmus 1D ENO rekonstrukce pro $m=3$	39
6 ADER	41
6.1 Odvození schématu typu ADER pro SWE s $z = konst$	41
6.1.1 Zobecněná Godunovova metoda	42
6.1.2 Řešení zobecněného Riemannova problému	43
6.1.3 Konstrukce zobecněného Godunovova toku	45
6.1.4 Algoritmus ADER	46
6.2 ADER pro SWE s $z \neq konst$	46
6.2.1 Výpočet vedoucího členu	48
6.2.2 Výrazy vyššího řádu	49
6.2.3 Aproximace zdrojového členu	50
6.3 Popis ADER schémata v 1D	51

6.3.1	Rekonstrukce hodnot v bodech	52
6.3.2	Řešení DRP	52
6.3.3	Aproximace zdrojového členu	53
7	Numerické experimenty	54
7.1	1D problém pro $z=0$	54
7.1.1	Příklad 1 - Příklad se spojitým řešením.	54
7.1.2	Příklad 2 - Příklad s pohybující se nespojitostí.	60
	Závěr	68
	Seznam použité literatury	69
	Seznam použitých zkratk	70

Úvod

V následujícím textu jsou popsány rovnice mělké vody (angl. shallow water equation, zkratka SWE), v literatuře je můžeme najít také pod názvem Saint–Venantovy rovnice. Jedná se o hyperbolický systém rovnic s nenulovou pravou stranou popisující proudění vody jejíž výška je malá vzhledem ke své šířce, tj. jedná se o případ proudění vody v řece s nerovným dnem. To že dno je nerovné popisuje zdrojový člen, který je na pravé straně rovnic.

V první kapitole je ze základních fyzikálních zákonů zachování odvozen vektorový zápis zákonů zachování, z kterého jsou v druhé kapitole odvozeny rovnice popisující proudění mělké vody. Odvození již bylo popsáno v několika literaturách, je zde ale uveden detailní popis a navíc zjednodušení tohoto odvození. Toto zjednodušení spočívá v tom, že při odvozování hyperbolického systému se nám podařilo obejít Leibnizovu formuli, která je vždy užívána k odvozování. K odvození numerických metod budeme potřebovat několik známých vlastností rovnic mělké vody, tyto vlastnosti jsou popsány v třetí kapitole.

V kapitole čtyři se věnujeme metodě konečných objemů (MKO) s Vijayasundaramovým numerickým tokem pro rovnice mělké vody. Tato metoda je pouze prvního řádu přesnosti, to způsobuje, že výsledky jsou rozmazané a některé detaily nejsou vyřešeny dostatečně přesně. Proto je v páté kapitole uveden popis jak můžeme zvýšit řád metody pomocí polynomiální (lineární, kvadratické, ...) rekonstrukce a neoscilujícího ENO schémata. U polynomiální rekonstrukce dochází k oscilacím, proto je zde popsána limitní procedura, která tyto oscilace zhlazuje. V kapitole čtyři je také popsána metoda konečných objemů vyššího řádu, která využívá lineární rekonstrukci.

V kapitole šest je popsána metoda ADER = "Arbitrary high order, with using high order DERivatives of polynomials". Jedná se o schéma založené na diskretizaci pomocí metody konečných objemů kombinované s polynomiální rekonstrukcí vyššího řádu. Je to zobecnění "klasické" Godunovovy metody na libovolný řád, jak je uvedeno v [4].

Poslední kapitola je věnovaná numerickým experimentům. Je zde naprogramována MKO s numerickým tokem Vijayasundaramova typu a MKO druhého řádu přesnosti využívající lineární rekonstrukci. Tyto metody jsou otestované na dvou úlohách. Numerické řešení srovnáváme s přesným řešením a s řešením získaným pomocí přesného Riemannova řešiče.

1. Obecné rovnice dynamiky tekutin

Nechť $T > 0$, $(0, T)$ je časový interval, $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ buď oblast vyplněná tekutinou $\forall t \in (0, T)$. Definujme množinu

$$\mathcal{M} = \{(x, t); x \in \Omega_t, t \in (0, T)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Základní fyzikální zákony jsou zákon zachování hmotnosti, zákon zachování hybnosti, zákon zachování momentu hybnosti a zákon zachování energie. Zákon zachování momentu hybnosti platí právě tehdy, když je tenzor napětí \mathcal{T} symetrický. Zákon zachování hmotnosti je popsán rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.1)$$

Symbol $\rho = \rho(x, t)$ označuje hustotu a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je rychlost. Zákon zachování hybnosti je popsán pohybovými (Navierovy-Stokesovými) rovnicemi

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho f_i + \operatorname{div}(\mathcal{T})_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Symbol $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$ označuje funkci hustoty vnějších objemových sil. Matice $\mathcal{T} = \mathcal{T}(x, t)$, $\mathcal{T} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^3$ reprezentuje tenzor napětí. Zákon zachování energie je popsán rovnicí pro energii

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathcal{T} \mathbf{v}) + \rho q - \operatorname{div}(\mathbf{q}). \quad (1.3)$$

Symbol $E = E(x, t)$ a $q = q(x, t)$ označuje energii a hustotu tepelných zdrojů, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ je tepelný tok. O funkcích vystupujících v rovnicích předpokládáme následující: f_i ($i = 1, 2, 3$), q jsou spojité funkce na \mathcal{M} ; ρ, v_i ($i = 1, 2, 3$), E, τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) a q_i ($i = 1, 2, 3$) jsou třídy C^1 na \mathcal{M} .

Poznámka 1. Tenzor napětí \mathcal{T} obsahuje vazkou část \mathcal{T}' a nevazkou část \mathcal{T}_i . Obvykle se předpokládá, že pak je \mathcal{T} tvaru

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_i + \mathcal{T}'.$$

V případě $\mathcal{T} = -p\mathbb{I} + \mathcal{T}'$, tedy $\mathcal{T}_i = -p\mathbb{I}$, kde p představuje tlak a \mathcal{T}' reprezentuje vazkou složku tenzoru napětí, z rovnic (1.2) lze za splnění tzv. Stokesových postulátů (viz skriptá [3]) odvodit Navier-Stokesovy rovnice.

Rovnice zákonů zachování lze zapsat po složkách (na oblasti \mathcal{M}):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho v_3 v_1 \\ E v_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 \\ \rho v_3 v_2 \\ E v_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_1 v_3 \\ \rho v_2 v_3 \\ \rho v_3^2 \\ E v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho q \end{pmatrix} \\ + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ (\mathcal{T}\mathbf{v})_1 - q_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ (\mathcal{T}\mathbf{v})_2 - q_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ (\mathcal{T}\mathbf{v})_3 - q_3 \end{pmatrix} &. \end{aligned}$$

Vektorový zápis rovnic zákonů zachování

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \mathbf{F}(\mathbf{w}) + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{S}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s} \quad \text{v } \mathcal{M}, \quad (1.4)$$

kde

$$\mathbf{w} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, E)^T$$

je vektor neznámých,

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v_s \\ \rho v_1 v_s \\ \rho v_2 v_s \\ \rho v_3 v_s \\ E v_s \end{pmatrix}$$

představuje tzv. fyzikální tok a

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{s1} \\ \tau_{s2} \\ \tau_{s3} \\ (\mathcal{T}\mathbf{v})_s - q_s \end{pmatrix}$$

jsou členy vystupující na pravé straně rovnice. Zde \mathbf{w} je stavový vektor a \mathbf{f}_s , $s = 1, 2, 3$ jsou nevazké (Eulerovy) toky, \mathbf{S}_s , $s = 1, 2, 3$, jsou vazké toky.

Zanedbáme-li v tomto případě vazkou část \mathcal{T}' tenzoru napětí, dostaneme Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0 \quad \text{v } \mathcal{M}. \quad (1.5)$$

2. Odvození SWE

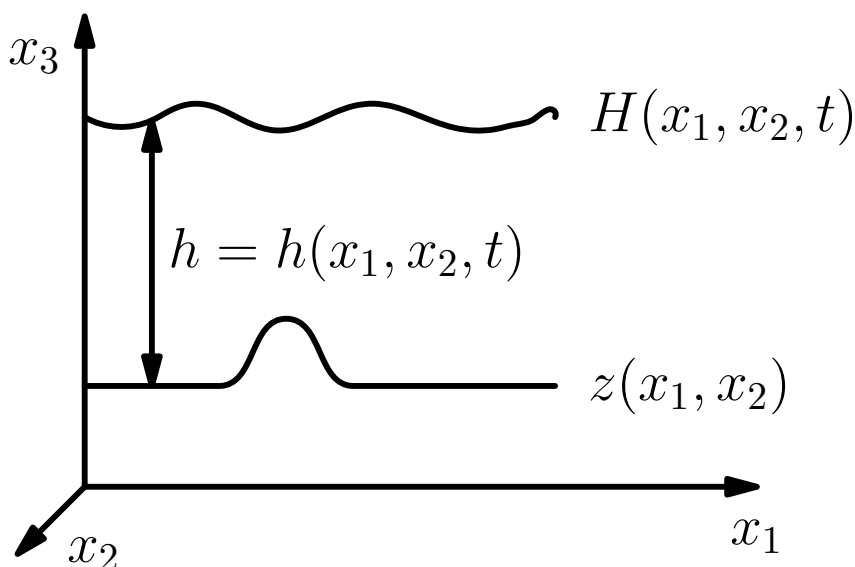
V této kapitole popíšeme dva způsoby formulace rovnic popisující proudění mělké vody. V obou případech budeme zjednodušovat rovnice (1.1)-(1.3). Pomocí prvního odvození dokážeme, že rovnice pro mělkou vodu lze zapsat ve formálně stejném tvaru jako rovnice (1.4), kde ovšem vektor \boldsymbol{w} nebude mít význam výše uvedených fyzikálních veličin, ale jiných. Druhým odvozením získáme hyperbolický systém rovnic.

2.1 Formulace I.

Nechť je v \mathbb{R}^3 dán kartézský systém souřadnic a čas $t \geq 0$. Budeme modelovat proudění tekutiny v oblasti, jež je touto tekutinou vyplněna. Předpokládáme, že fyzikální oblast je široká a nízká, tj. pro každé $t \geq 0$ je oblast neomezená v rovině určené osami x_1 a x_2 a je omezená ve směru osy x_3 , a to zdola funkcí $z = z(x_1, x_2)$ (funkce popisující dno oblasti vyplněné tekutinou, nezávisí na čase) a shora funkcí $H = H(x_1, x_2, t)$ (funkce popisující volnou hladinu tekutiny). Oblast vyplněná tekutinou v čase $t \geq 0$ je tedy množina

$$Q_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, z(x_1, x_2) < x_3 < H(x_1, x_2, t)\},$$

viz obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: Oblast Q_t vyplněná tekutinou (řez).

Nechť funkce H a z jsou třídy C^1 na příslušných podmnožinách množiny \mathcal{M} . Z předchozí kapitoly předpokládáme hladkost funkcí vystupujících v rovnicích zákonů zachování. Symbolem $\frac{D}{Dt}$ rozumíme tzv. materiálovou derivaci, tj.

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u,$$

kde \boldsymbol{v} je rychlost.

Pro proudění tekutiny v malých hloubkách platí následující okrajové podmínky, které jsou klíčové pro odvození rovnic pro mělkou vodu (z důvodu větší přehlednosti nepíšeme argumenty funkcí):

- Na hladině jsou dány okamžitá změna veličiny $x_3 - H$ a nulový tlak, tj. pro $t > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 = H(x_1, x_2, t)$ platí

$$\frac{D}{Dt}(x_3 - H) = 0 \quad \text{a} \quad p = 0. \quad (2.1)$$

- Na dně uvažujeme nulové změny veličiny $x_3 - z$, tj. pro $t \geq 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 = z(x_1, x_2)$ platí

$$\frac{D}{Dt}(x_3 - z) = 0. \quad (2.2)$$

- Dále uvnitř oblasti ($t \geq 0$, $x \in Q_t$) platí

$$\frac{Dv_3}{Dt} = 0. \quad (2.3)$$

Předpokládejme, že proudění je nestlačitelné, tzn.

$$\rho = \text{konst}, \quad (2.4)$$

nevaké (\Rightarrow vaká část \mathcal{T}' tenzoru napětí \mathcal{T} je nulová matice) a adiabatické (tj. hustota tepelných zdrojů $q = 0$ a tepelný tok $\mathbf{q} = 0$). Dále předpokládejme, že jedinou vnější silou působící na tekutinu je gravitace, tj.

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix},$$

kde $g = 9.81$ je konstanta gravitačního zrychlení.

Využitím těchto předpokladů se rovnice (1.1) - (1.3) redukuje na systém (na množině \mathcal{M})

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) &= -\rho g \delta_{i3} + \operatorname{div}(-p\mathbb{I})_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E\mathbf{v}) &= -\rho g v_3 + \operatorname{div}(-p\mathbb{I}\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Úpravou druhé a třetí rovnice, využitím (2.4) a přepsáním do vektorového tvaru dostaneme

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{v } \mathcal{M}, \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \nabla p \quad \text{v } \mathcal{M}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E\mathbf{v}) = -\rho g v_3 - \nabla p \cdot \mathbf{v} \quad \text{v } \mathcal{M}. \quad (2.8)$$

Vidíme, že se jedná o systém pěti rovnic o pěti neznámých p, v_1, v_2, v_3 a E . Zároveň v prvních čtyřech rovnicích se nevyskytuje E . Proto se nadále budeme zabývat pouze řešením prvních 4 rovnic, neboť budeme-li znát jejich řešení, budeme na jejich základě schopni z páté rovnice vypočítat hodnoty E . Dostáváme pro 4 neznámé systém 4 rovnic pro mělkou vodu

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0 \quad \text{v } \mathcal{M}, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \nabla p \quad \text{v } \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2 Formulace II.

Předchozí zápis rovnic pro mělkou vodu se ovšem v literatuře obvykle nevyskytuje. Důvodem je, že rovnice pro mělkou vodu jsou častěji formulovány ne pro tlak p a rychlost \mathbf{v} , ale pro hloubku h a rychlost \mathbf{v} . Hloubka h je definována následovně

$$h = H - z,$$

tedy jako vzdálenost hladiny ode dna (viz obrázek 2.1). Rovnice tímto způsobem přeformulujeme.

Ze čtvrté rovnice (2.9) $\rho \frac{D}{Dt} v_3 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial x_3}$ a z předpokladu (2.3) $\frac{D}{Dt} v_3 = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= -\rho g. \end{aligned}$$

Integrací získáme

$$p = -\rho g x_3 + c(x_1, x_2, t). \quad (2.10)$$

Z okrajové podmínky pro tlak (2.1) dostaneme

$$0 = -\rho g H + c(x_1, x_2, t) \quad \Leftrightarrow \quad c(x_1, x_2, t) = \rho g H.$$

Dosazením předchozí rovnice do (2.10) obdržíme

$$p = \rho g(-x_3 + H). \quad (2.11)$$

Lemma 1. *Nechť platí (2.1), (2.3) a (2.7). Nechť $v_i \in C^2(\mathcal{M})$ pro $i = 1, 2$, $p \in C^1(\mathcal{M})$ a $\rho = \text{konst.}$ Pak v_1, v_2 nezávisí na x_3 .*

Důkaz. Pro $i = 1, 2$ získáme ze vztahu (2.7) rovnost

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Protože funkce H je nezávislá na proměnné x_3 a platí (2.4), plyne z předchozího vztahu pro p , že funkce $\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}$ také nezávisí na x_3 a proto i $\frac{Dv_1}{Dt}, \frac{Dv_2}{Dt}$ jsou nezávislé na x_3 . Kdyby $v_i, i = 1, 2$ záviselo na x_3 , pak by

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$$

záviselo na x_3 a to je spor, neboť $\frac{Dv_i}{Dt}$ na x_3 nezávisí. Odtud dostáváme, že funkce v_i , $i = 1, 2$ nezávisí na x_3 . \square

Volná hladina H je dána hloubkou vody h a dna z . Známe-li funkci h , můžeme určit tlak p .

Poznámka 2. Pro účely odvození rovnic předpokládáme libovolnou dostatečnou hladkost funkcí, zde tedy např. $v_i \in C^2(\mathcal{M})$. Při formulaci rovnic však již takovou hladkost požadovat nebudeme.

V následujícím textu přeformulujeme rovnice (2.9) do systému hyperbolických rovnic vektorové funkce $\mathbf{w} = (h, hv_1, hv_2)^\top$.

Rovnice kontinuity

K odvození následujícího zápisu rovnice kontinuity je v literatuře vždy použita Leibnizova formule. Nám se povedlo obejít Leibnitzovu formuli a to tak, že jsme využili nezávislosti v_1 a v_2 na x_3 .

Nejprve zintegrujeme první rovnici (2.9) podle x_3 s mezemi z a H dostaneme

$$\int_z^H \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dx_3 = 0 \quad (2.12)$$

Z lemmatu 1 víme, že v_1, v_2 nezávisí na x_3 , tedy platí

$$(H - z) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + (H - z) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \Big|_{x_3=H} - v_3 \Big|_{x_3=z} = 0 \quad (2.13)$$

Nyní chceme upravit členy $v_3 \Big|_{x_3=H}$ a $v_3 \Big|_{x_3=z}$. Využijeme podmínky (2.1), jejím rozepsáním dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{Dt}(x_3 - H) \Big|_{x_3=H} = \left(\frac{\partial}{\partial t}(x_3 - H) + (v \cdot \nabla)(x_3 - H) \right) \Big|_{x_3=H} \\ &= \left(\underbrace{\frac{\partial x_3}{\partial t}}_{=0} - \frac{\partial H}{\partial t} + v_1 \underbrace{\frac{\partial x_3}{\partial x_1}}_{=0} - v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + v_2 \underbrace{\frac{\partial x_3}{\partial x_2}}_{=0} - v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + v_3 \underbrace{\frac{\partial x_3}{\partial x_3}}_{=1} - v_3 \underbrace{\frac{\partial H}{\partial x_3}}_{=0} \right) \Big|_{x_3=H} \\ &= v_3 \Big|_{x_3=H} - \frac{\partial H}{\partial t} - v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Odtud vyjádříme $v_3 \Big|_{x_3=H}$ a máme vztah

$$v_3 \Big|_{x_3=H} = \frac{\partial H}{\partial t} + v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2}. \quad (2.15)$$

Analogicky dostaneme z podmínky (2.2) vztah

$$v_3 \Big|_{x_3=z} = \frac{\partial z}{\partial t} + v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}. \quad (2.16)$$

Dosazením (2.15) a (2.16) do rovnice (2.13) zjistíme, že

$$(H - z) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + (H - z) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial t} + v_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial z}{\partial t} - v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

přerovnáme členy

$$(H - z) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + (H - z) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(H - z)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial(H - z)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial(H - z)}{\partial x_2} = 0.$$

Víme, že $H - z = h$. Dosazením za $H - z$ do předchozí rovnice obdržíme

$$h \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + h \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial t} + v_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0.$$

Dostáváme modifikovanou rovnici kontinuity pro mělkou vodu

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h v_2}{\partial x_2} = 0. \quad (2.17)$$

Pohybové rovnice

Dále přeformulujeme rovnice (2.7).

Vyjdeme z modifikované rovnice kontinuity (2.17), vynásobíme jí v_s , $s = 1, 2$

$$\frac{\partial h}{\partial t} v_s + \frac{\partial h v_1}{\partial x_1} v_s + \frac{\partial h v_2}{\partial x_2} v_s = 0. \quad (2.18)$$

Z první a druhé rovnice (2.7) platí

$$\rho \frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Pro třetí rovnici (2.7) jsme výše ukázali, že za daných okrajových podmínek a podmínky (2.3) je tato rovnice ekvivalentní s

$$p = \rho g(-x_3 + H), \quad H = h + z.$$

Odsud plyne, že

$$\frac{\partial p}{\partial x_s} = \rho g \frac{\partial H}{\partial x_s} = \rho g \left(\frac{\partial h}{\partial x_s} + \frac{\partial z}{\partial x_s} \right), \quad s = 1, 2.$$

Z předchozího vztahu dosadíme do s -té rovnice vztahu (2.7), $s = 1, 2$, vydělíme ρ (předpokládáme, že $\rho > 0$) a dostaneme

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_s}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_s}{\partial x_2} = -g \frac{\partial h}{\partial x_s} - g \frac{\partial z}{\partial x_s} \quad / \cdot h,$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} h + v_1 \frac{\partial v_s}{\partial x_1} h + v_2 \frac{\partial v_s}{\partial x_2} h = -gh \frac{\partial h}{\partial x_s} - gh \frac{\partial z}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2.$$

Poslední rovnici sečteme s rovnicí (2.18) a obdržíme

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(hv_s)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(v_1v_sh)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(v_2v_sh)} + \frac{\partial v_s}{\partial t}h + \frac{\partial hv_1}{\partial x_1}v_s + v_1\frac{\partial v_s}{\partial x_1}h + \frac{\partial hv_2}{\partial x_2}v_s + v_2\frac{\partial v_s}{\partial x_2}h = \underbrace{-gh\frac{\partial h}{\partial x_s} - gh\frac{\partial z}{\partial x_s}}_{\frac{\partial}{\partial x_s}(-\frac{1}{2}gh^2)},$$

tedy pro $s = 1, 2$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv_s) + \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1v_sh + \delta_{s1}\frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_2v_sh + \delta_{s2}\frac{1}{2}gh^2) = -gh\frac{\partial z}{\partial x_s}.$$

Předchozí text byl čerpán z diplomové práce [8].

Rovnice pro mělkou vodu

Definujme nyní $\forall t \in (0, T)$ oblast

$$\tilde{Q} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1, x_2, x_3) \in Q_t \text{ pro nějaké } x_3 \in \mathbb{R}\},$$

necht' Q_t jsou takové, že \tilde{Q} je omezená. \tilde{Q} již nezávisí na t , neboť jediná část hranice Q_t , která závisí na t , je množina $\{x_3 = H(x_1, x_2, t)\}$, ta již ovšem v \tilde{Q} nevystupuje. Dále buď

$$\tilde{\mathcal{M}} := \{(x, t); x \in \tilde{Q}, t \in (0, T)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Díky této volbě \tilde{Q} je $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$, čehož na následujících řádcích využijeme.

Nakonec dostáváme rovnice pro mělkou vodu zformulované pro hloubku h a rychlost \mathbf{v} (v množině $\tilde{\mathcal{M}}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \\ hv_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} hv_1 \\ hv_1^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hv_2v_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} hv_2 \\ hv_1v_2 \\ hv_2^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -gh\frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tyto rovnice lze zapsat ve vektorovém tvaru, který formálně odpovídá tvaru rovnice (1.4) (kde na pravé straně vystupuje pouze jeden člen), a to

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \mathbf{s}(\mathbf{w}) \quad \text{v } \tilde{\mathcal{M}}, \quad (2.20)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \\ hv_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hv_s \\ hv_1v_s + \delta_{s1}\frac{1}{2}gh^2 \\ hv_2v_s + \delta_{s2}\frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \\ \mathbf{s}(\mathbf{w}) = -gh \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rovnice (2.19), kde funkce $h = h(x_1, x_2, t)$, $v_1 = v_1(x_1, x_2, t)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2, t)$, resp. $z = z(x_1, x_2)$ jsou třídy C^1 na $\tilde{\mathcal{M}}$, resp. na $\tilde{Q} \forall t \in (0, T)$, se nazývají *rovnice pro mělkou vodu* (zkratka SWE anglického *shallow water equations*). Někdy je můžeme najít i pod názvem Saint-Venantovy rovnice.

Vektor pravé strany

$$\mathbf{s}(\mathbf{w}) = -gh \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

se nazývá *zdrojový člen* (angl. *source term*).

Důvodem, proč jsme odvodili systém (2.20) podle [10] bylo ukázat, že i přesto, že rovnice mělké vody popisují nestlačitelné proudění, tvoří formálně (pokud zanedbáme zdrojové členy) hyperbolický systém podobný systému pro Eulerovy rovnice pro stlačitelný tok (1.5).

3. Rovnice mělké vody

V předchozí kapitole jsme si odvodili rovnice mělké vody (2.20) z obecných rovnic dynamiky tekutin. Vektorový zápis rovnic mělké vody

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_s} \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbf{s}(\mathbf{w}), \quad (3.1)$$

s toky

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = (hv_s, hv_1v_s + \delta_{s1}\frac{1}{2}gh^2, hv_2v_s + \delta_{s2}\frac{1}{2}gh^2)^T$$

a zdrojovým členem

$$\mathbf{s}(\mathbf{w}) = (0, -gh\nabla z)^T.$$

Neznámé veličiny $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^2$ tvoří vektor $\mathbf{w} \equiv (h, \mathbf{q})^T \equiv (h, hv)^T \equiv (h, hv_1, hv_2)^T$, kde h a \mathbf{v} označuje výšku hladiny a rychlost. Gravitační konstanta $g > 0$ a funkce popisující dno $z = z(x)$ jsou dány. Toky \mathbf{f}_s jsou definovány na oblasti

$$D = \{\mathbf{w} = (h, q_1, q_2)^T \in \mathbb{R}^3; h > 0\}.$$

Dále se budeme také zabývat následujícími rovnicemi pro mělkou vodu. Dostaneme je tak, že položíme $v_2 \equiv 0$ a $\frac{\partial}{\partial x_2} \equiv 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} hv_1 \\ hv_1^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{dz}{dx_1} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$x_1 \in (a_1, b_1), \quad t \in (0, T).$$

Rovnice (3.2), kde funkce $h = h(x_1, t)$, $v_1 = v_1(x_1, t)$, resp. $z = z(x_1)$ jsou třídy C^1 na $(a_1, b_1) \times (0, T)$, resp. na (a_1, b_1) , $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$ se nazývají *jednorozměrné rovnice pro mělkou vodu* (angl. *one-dimensional shallow water equations*).

Poznámka 3. *Takto zformulované rovnice pro mělkou vodu dávají z fyzikálního hlediska smysl pouze v jedné nebo ve dvou dimenzích. Důvodem je, že neznámá funkce h reprezentuje doplňkovou dimenzi. To je rozdíl např. oproti Navier-Stokesovým nebo Eulerovým rovnicím, které popisují proudění i ve třech dimenzích.*

Je obecně známo, jaké vlastnosti mají Eulerovy rovnice, například jsou homogenní, hyperbolické a rotačně invariantní. Existují numerická schémata, která při řešení Eulerových rovnic těchto vlastností využívají. Zjišťujeme, zda následující vlastnosti nemají rovnice pro mělkou vodu. To by umožnilo aplikovat příslušná schémata na rovnice pro mělkou vodu. Čerpali jsme z [8], [2], [3] a [7].

3.1 Homogenita

Vektorové funkce \mathbf{f}_s , $s = 1, 2$ jsou homogenní zobrazení 1.řádu jestliže,

$$\mathbf{f}_s(\alpha \mathbf{w}) = \alpha \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \quad \text{pro } \forall \alpha > 0, s = 1, 2.$$

Vlastnost homogenity známá pro Eulerovy rovnice

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w}, \quad (3.3)$$

kde $\mathbb{A}_s(\mathbf{w})$ je Jacobiho matice Eulerova toku \mathbf{f}_s , $s = 1, 2$. Tato rovnost pro SWE bohužel neplatí. Lze ale dokázat, že

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2\delta_{s1} \\ \frac{1}{2}gh^2\delta_{s2} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (3.4)$$

kde

$$\mathbb{A}_s(\mathbf{w}) = \frac{D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{si}(\mathbf{w})}{\partial w_j} \right)_{i,j=1}^3 \quad (3.5)$$

platí homogenní vlastnost pro SWE.

3.2 Rotační invariantnost rovnic mělké vody

Uvažujme ortonormální transformaci souřadnic

$$\tilde{x} = \mathbb{Q}_0 x + \tilde{x}_0, \quad (3.6)$$

kde $\mathbb{Q}_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathbb{Q}_0^T \mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}_0 \mathbb{Q}_0^T = I$ a $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^2$.

Věta 1. *Vektorová funkce $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, t)$ řeší (v klasickém smyslu) systém SWE (3.1) právě tehdy, když funkce*

$$\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{w}}(\tilde{x}, t) = \mathbb{Q}\mathbf{w}(\mathbb{Q}_0^{-1}(\tilde{x} - \tilde{x}_0), t)$$

řeší transformovaný systém

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_s} f_s(\tilde{\mathbf{w}}) = s(\tilde{\mathbf{w}}). \quad (3.7)$$

Kde matice \mathbb{Q} je definována v (3.9).

Tuto vlastnost nazýváme *rotační invariantnost* rovnic mělké vody.

Věta 2. *Rovnice pro mělkou vodu (3.1) jsou rotačně invariantní.*

Důkaz. Lze najít v diplomové práci [8] věta 2.2 str.28. □

Rotační invariance může být také uvedena jako vlastnost toku \mathbf{f}_s .

$$P(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^2 n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \quad (3.8)$$

nazýváme tok veličiny \mathbf{w} ve směru $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$, $|\mathbf{n}| = 1$. Řekneme, že tok ve směru je rotačně invariantní, jestliže

$$P(\mathbb{Q}\mathbf{w}, \mathbb{Q}_0\mathbf{n}) = \mathbb{Q}P(\mathbf{w}, \mathbf{n}), \quad \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (3.9)$$

pro všechna $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ a všechny ortonormální matice \mathbb{Q}_0 .

Lemma 2. Necht' $\mathbf{w} \in D$ a $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$, $|\mathbf{n}| = 1$. Potom

$$P(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbb{Q}\mathbf{w}), \quad \mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}_0(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Důkaz. Matice \mathbb{Q}_0 je ortogonální a platí $\mathbb{Q}_0 \mathbf{n} = (1, 0)^\top$. Z (3.9) vyplývá

$$\begin{aligned} P(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= \mathbb{Q}^{-1} P(\mathbb{Q}\mathbf{w}, \mathbb{Q}_0 \mathbf{n}) = \mathbb{Q}^{-1} \left[\underbrace{(\mathbb{Q}_0 \mathbf{n})_1}_{=1} \mathbf{f}_1(\mathbb{Q}\mathbf{w}) + \underbrace{(\mathbb{Q}_0 \mathbf{n})_2}_{=0} \mathbf{f}_2(\mathbb{Q}\mathbf{w}) \right] \\ &= \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbb{Q}\mathbf{w}). \end{aligned}$$

□

Poznámka 4. Potom platí

$$\sum_{s=1}^2 n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbb{Q}\mathbf{w}).$$

Věta 3. Tok ve směru je rotačně invariantní.

Důkaz. Důkaz spočítá v ověření definice (3.9). Platí, že $\mathbf{q} = h\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} P(\mathbf{w}, \mathbf{n}) &= \sum_{s=1}^2 n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = n_1 \begin{pmatrix} hv_1 \\ hv_1 v_1 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hv_2 v_1 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} hv_2 \\ hv_1 v_2 \\ hv_2 v_2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \\ &= (n_1 v_1 + n_2 v_2) \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \\ hv_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}gh^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{n_1 hv_1 + n_2 hv_2}{h} \right) \begin{pmatrix} h \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}gh^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{n}^\top \mathbf{q}}{h} \begin{pmatrix} h \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}gh^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mathbb{Q}\mathbf{w}, \mathbb{Q}_0 \mathbf{n}) &= \frac{(\mathbb{Q}_0 \mathbf{n})^\top \mathbb{Q}_0 \mathbf{q}}{h} \begin{pmatrix} h \\ \mathbb{Q}_0 \mathbf{q} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}gh^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Q}_0 \mathbf{n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{n}^\top \mathbf{q}}{h} \mathbb{Q} \begin{pmatrix} h \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}gh^2 \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \mathbb{Q} P(\mathbf{w}, \mathbf{n}) \end{aligned}$$

□

3.3 Hyperbolicita rovnic mělké vody

Pro dostatečně hladké funkce lze užít větu o derivaci složené funkce a rovnici (2.20) dostaneme v tzv. *kvazilineárním tvaru*

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \mathbb{A}_s(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_s} = \mathbf{s}(\mathbf{w}) \quad \text{v } \tilde{\mathcal{M}}, \quad (3.11)$$

kde $\mathbb{A}_s(\mathbf{w})$ je Jacobiho matice zobrazení \mathbf{f}_s , $s = 1, 2$.

Definice 1. Systém (3.11) se nazývá hyperbolický v oblasti $D \in \mathbb{R}^3$, pokud všechna řešení $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{w}, \mathbf{n})$, $j = 1, \dots, 3$, algebraické rovnice třetího stupně

$$\det \left(\lambda \mathbb{I} - \sum_{s=1}^2 n_s \mathbb{A}_s(\mathbf{w}) \right) = 0$$

jsou reálná pro každé $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{w} \in D$. λ_j nazýváme zobecněnými vlastními čísly. Pokud jsou navíc zobecněná vlastní čísla jednoduchá, pak je systém nazýván ostře hyperbolický.

Řekneme, že systém je (ostře) diagonálně hyperbolický, jestliže matice $\mathbb{P} := \sum_{s=1}^2 n_s \mathbb{A}_s(\mathbf{w})$ je diagonalizovatelná. To znamená, že existuje regulární matice $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ taková, že

$$\mathbb{T}^{-1} \mathbb{P} \mathbb{T} = \Lambda = \Lambda(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_3).$$

Podle (3.10) stačí k ověření hyperbolicity systému (3.11) pouze tok \mathbf{f}_1 .

Lemma 3. Jakobiho matice \mathbb{A}_1 funkce f_1 má následující tvar

$$\mathbb{A}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v_1^2 + gh & 2v_1 & 0 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Důkaz. Označme $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^\top = (h, hv_1, hv_2)^\top$. Pak lze $f_1(\mathbf{w})$ přepsat následovně

$$f_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hv_1 \\ hv_1^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hv_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + \frac{1}{2}gw_1^2 \\ \frac{w_2 w_3}{w_1} \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1(\mathbf{w}) &= \frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{1i}(\mathbf{w})}{\partial w_j} \right)_{i,j=1}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{w_2^2}{w_1^2} + gw_1 & \frac{2w_2}{w_1} & 0 \\ -\frac{w_2 w_3}{w_1^2} & \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_2}{w_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v_1^2 + gh & 2v_1 & 0 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

□

Lemma 4. Označme $c = \sqrt{gh}$. Matice $\mathbb{A}_1(\mathbf{w})$ má vlastní čísla

$$\tilde{\lambda}_1(\mathbf{w}) = v_1 - c, \quad \tilde{\lambda}_2(\mathbf{w}) = v_1, \quad \tilde{\lambda}_3(\mathbf{w}) = v_1 + c. \quad (3.14)$$

Odpovídající vlastní vektory mají tvar

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 - c \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 + c \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Důkaz. Důkaz lze provést přímým výpočtem. Vlastní čísla spočteme z rovnosti $\det(\mathbb{A}_1(\mathbf{w}) - \tilde{\lambda}_i \mathbb{I}) = 0$. Odpovídající vlastní vektory pak spočteme z rovnice $(\mathbb{A}_1(\mathbf{w}) - \tilde{\lambda}_i \mathbb{I})\mathbf{r}_i = 0$, pro $i = 1, 2, 3$. □

Lemma 5. *Vlastní čísla matice $\mathbb{A}_1(\mathbf{w})|\mathbf{n}|$ jsou*

$$\tilde{\lambda}_1(\mathbf{w}) = (v_1 - c), \quad \tilde{\lambda}_2(\mathbf{w}) = v_1, \quad \tilde{\lambda}_3(\mathbf{w}) = (v_1 + c).$$

Zbývá vyjádřit vlastní čísla matice $\mathbb{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ a to jako vlastní čísla matice $\mathbb{A}_1(\mathbf{w})|\mathbf{n}|$:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{\mathbb{P}}(\mathbf{w}) &= \lambda_1^{\mathbb{A}_1|\mathbf{n}}(\mathbb{Q}\mathbf{w}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - c, \\ \lambda_2^{\mathbb{P}}(\mathbf{w}) &= \lambda_2^{\mathbb{A}_1|\mathbf{n}}(\mathbb{Q}\mathbf{w}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \\ \lambda_3^{\mathbb{P}}(\mathbf{w}) &= \lambda_3^{\mathbb{A}_1|\mathbf{n}}(\mathbb{Q}\mathbf{w}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + c, \end{aligned}$$

z čehož plyne následující tvrzení.

Věta 4. *Rovnice mělké vody (2.20) tvoří ostře diagonálně hyperbolický systém pro $\mathbf{w} \in D$, $0 \neq \mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$.*

Důkaz. Matici \mathbb{T} vytvoříme z vlastních vektorů, které píšeme po sloupcích, tj.

$$\mathbb{T} = (\mathbf{r}_1(\mathbf{w}) \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{w}) \quad \mathbf{r}_3(\mathbf{w})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ v_1 - c & 0 & v_1 + c \\ v_2 & 1 & v_2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Platí

$$\mathbb{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{v_1+c}{2c} & -\frac{1}{2c} & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 \\ -\frac{v_1-c}{2c} & \frac{1}{2c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}_1\mathbb{T} &= \begin{pmatrix} \frac{v_1+c}{2c} & -\frac{1}{2c} & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 \\ -\frac{v_1-c}{2c} & \frac{1}{2c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v_1^2 + gh & 2v_1 & 0 \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ v_1 - c & 0 & v_1 + c \\ v_2 & 1 & v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v_1^2-c^2}{2c} & \frac{c+v_1-2v_1}{2c} & 0 \\ -v_1v_2 & -v_2 + v_2 & v_1 \\ \frac{-v_1^2+c^2}{2c} & \frac{-v_1+c+2v_1}{2c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ v_1 - c & 0 & v_1 + c \\ v_2 & 1 & v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(v_1^2-c^2)-(v_1-c)^2}{2c} & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-v_1^2+c^2)+(v_1+c)^2}{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - c & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 + c \end{pmatrix} = \Lambda. \end{aligned}$$

□

Explicitní vzorce pro vlastní čísla a vektory (3.14) - (3.15) jsou důležité na konstrukci numerických toků na základě přibližných Riemannových řešičů, jako je např. Vijayasundaramův numerický tok (viz sekce 3.2 v [7]).

3.4 Počáteční - okrajová úloha

U některých problémů s hladkými počáteční daty vznikají nespojitosti fyzikálních veličin v konečném čase. Z toho důvodu se zavádí slabá formulace PDE (parciálních diferenciálních rovnic) a okrajových podmínek.

Abychom našli výchozí bod pro diskretizaci, potřebujeme formulaci úlohy s počáteční a okrajovou podmínkou na ohraničené oblasti a v konečném časovém intervalu $(0, T)$.

Jednorozměrné rovnice pro mělkou vodu (3.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} hv_1 \\ hv_1^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{dz}{dx_1} \end{pmatrix},$$

$$x_1 \in (a_1, b_1), \quad t \in (0, T).$$

kde $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}$. Předepíšeme počáteční podmínku

$$\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.18)$$

kde \mathbf{w}^0 je daná funkce.

Otázka okrajových podmínek pro nelineární systémy je delikátní problém (více lze najít v [1]). Volba okrajových podmínek je obecně fyzikální problém, ale musí odpovídat matematickému charakteru řešených rovnic. Předepíšeme okrajové podmínky ve tvaru

$$\mathbf{w}(x, t) - \mathcal{B}(x, \mathbf{w}(x, t)) = 0, \quad (3.19)$$

kde $\mathcal{B} : \partial\Omega \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ je dané zobrazení, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$. Motivace k tomuto zápisu bude jasná později. Zobrazení \mathcal{B} představuje extrapolaci postupu používanou v metodě konečných objemů. Tímto způsobem je možné předepsat několik typů okrajových podmínek, a to

- Předepsaná výška hladiny

$$\mathcal{B}(x, (h, q_1)^T) = \mathcal{B}(x, (h^D(x), q_1^T)^T), \quad x \in \partial\Omega, \quad (h, q_1) \in \mathcal{D}. \quad (3.20)$$

kde $h^D : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je daná funkce.

- Předepsaná veličina $\mathbf{q} = h\mathbf{v}$

$$\mathcal{B}(x, (h, q_1)^T) = \mathcal{B}(x, (h, q_1^D(x))^T), \quad x \in \partial\Omega, \quad (h, q_1) \in \mathcal{D}. \quad (3.21)$$

kde $q_1^D : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je daná vektorová funkce.

- Podmínky

$$\mathcal{B}(x, \mathbf{w}) = \mathbf{w}, \quad x \in \partial\Omega, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{D}. \quad (3.22)$$

Pro jednoduchost nebudeme uvažovat nulové okrajové podmínky (např. nepropustnou stěnu), tzn. tyto podmínky nejsou zahrnuty ve (3.19).

4. Metoda konečných objemů

4.1 Odvození obecného schématu metody konečných objemů

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast vyplněná tekutinou, kde $N \in \{1, 2\}$. Předpokládáme, že v případě jedné dimenze se jedná o úsečku. V případě dvou dimenzí nechť je Ω polygon. Nadále budeme popisovat pouze případ dvou dimenzí, případ jedné dimenze je přímým zjednodušením.

Nechť $J \subset \{0, 1, \dots, n\}$ je indexová množina a $h > 0$ je krok sítě. Předpokládáme, že $D_i, i \in J$ jsou uzavřené vzájemně disjunktní mnohoúhelníky takové, že

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in J} D_i.$$

Potom systém $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$ nazýváme *sít' konečných objemů* v Ω a $D_i \in \mathcal{D}_h$ nazýváme *konečné objemy*. Dva konečné objemy $D_i, D_j \in \mathcal{D}_h$ jsou buď různé, nebo jejich průnik je tvořen částí hranice ∂D_i a ∂D_j . Jestliže $\partial D_i \cap \partial D_j$ obsahuje aspoň jednu úsečku (pro $N = 2$), pak nazýváme D_i a D_j *sousedními konečnými objemy* (nebo jednoduše sousedy). Pro dva sousedy $D_i, D_j \in \mathcal{D}_h$ položíme

$$\Gamma_{ij} = \partial D_i \cap \partial D_j = \Gamma_{ji}. \quad (4.1)$$

Dále budeme používat následující značení:

$$\begin{aligned} |D_i| &= N\text{-rozměrná míra } D_i = \text{plocha } D_i \text{ jestliže } N = 2, \\ |\Gamma_{ij}| &= (N - 1)\text{-rozměrná míra } \Gamma_{ij} = \text{délka } \Gamma_{ij} \text{ jestliže } N = 2, \\ \mathbf{n}_{ij} &= ((n_{ij})_1, \dots, (n_{ij})_N)^T = \text{jednotková vnější normála k } \partial D_i \text{ na } \Gamma_{ij}, \\ h_i &= \text{diam}(D_i), \\ h &= \sup_{i \in J} h_i, \\ |\partial D_i| &= (N - 1)\text{-rozměrná míra } \partial D_i, \\ s(i) &= \{j \in J; j \neq i, D_j \text{ je souseď } D_i\}. \end{aligned}$$

Zřejmě platí, že $\mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji}$.

Dále $S(i) =$ indexová množina obsahující informace o

- (i) sousedech,
- (ii) hranách ∂D_i , kde je předepsána okrajová podmínka.

Poznamenejme, že $s(i) \subset S(i)$. Detaily viz [2], strana 186.

Poznámka 5. *Obvykle je Γ_{ij} tvořena konečným počtem $\beta_{ij} \in \mathbb{N}$, tj.:*

$$\Gamma_{ij} = \bigcup_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \Gamma_{ij}^\alpha.$$

Budeme pro jednoduchost předpokládat, že Γ_{ij} je tvořena pouze jedním prvkem, tzn. $\beta_{ij} = 1$ (úsečkou pro $N = 2$).

Množinu $\widetilde{\mathcal{M}}$ si formálně rozdělíme na oblast Ω a časový interval $(0, T)$, tj. $\widetilde{\mathcal{M}} = \Omega \times (0, T)$.

Sestrojíme dělení $0 = t_0 < t_1 < \dots$ časového intervalu $[0, T]$ a označme $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ časový krok mezi t_k a t_{k+1} , $k \in \mathbb{N}_0$.

Předpokládejme, že $\mathbf{w} : \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ je klasické řešení rovnic pro mělkou vodu (2.20)

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \mathbf{s}(\mathbf{w}) \quad \text{v } Q_T = \Omega \times (0, T). \quad (4.2)$$

Integrováním rovnice (4.2) přes množinu $D_i \times (t_k, t_{k+1})$ a použitím Greenovy věty na D_i dostaneme

$$\int_{D_i} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \Big|_{t=t_k}^{t=t_{k+1}} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{\partial D_i} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s dS \right) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{D_i} \mathbf{s}(\mathbf{w}) d\mathbf{x} \right) dt, \quad (4.3)$$

kde $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je jednotková vnější normála k ∂D_i .

Nyní aproximujeme integrální průměry $\int_{D_i} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k) d\mathbf{x} / |D_i|$ veličiny \mathbf{w} přes konečný objem D_i v časovém okamžiku t_k pomocí \mathbf{w}_i^k :

$$\mathbf{w}_i^k \approx \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k) d\mathbf{x}, \quad (4.4)$$

nazýváme ho hodnotou *přibližného řešení* na objemu D_i v čase t_k . Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} |D_i| (\mathbf{w}_i^{k+1} - \mathbf{w}_i^k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(x, t)) (n_{ij})_s dS \right) dt \\ = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{D_i} \mathbf{s}(\mathbf{w}) d\mathbf{x} \right) dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dále aproximujeme tok $\sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij})_s$ veličiny \mathbf{w} přes stěnu Γ_{ij} ve směru \mathbf{n}_{ij} pomocí tzv. *numerického toku* $\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij})$, závisejícím na hodnotě přibližného řešení \mathbf{w}_i^k na konečném objemu D_i , hodnotě \mathbf{w}_j^k na D_j a normále \mathbf{n}_{ij} ve vhodných časových okamžicích t_k :

$$\sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij})_s \approx \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}), \quad (4.6)$$

Aproximace zdrojového členu

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{D_i} \mathbf{s}(\mathbf{w}) d\mathbf{x} \right) dt &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{D_i} (-g) h \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} d\mathbf{x} \right) dt \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{D_i} (-g) h \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla z \end{pmatrix} d\mathbf{x} \right) dt \approx \tau_k \int_{D_i} (-g) \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla z \end{pmatrix} h(x, t_k) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Stejně jako u aproximace hodnoty integrálu $\frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \mathbf{w}(x, t_k) dx$ aproximujeme $h(x, t_k)$ na D_i konstantou h_i^k . Dostaneme

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{D_i} \mathbf{s}(\mathbf{w}) dx \right) dt \approx \tau_k(-g) h_i^k \int_{D_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla z \end{pmatrix} dx.$$

Užití Greenovy věty dává

$$\begin{aligned} \tau_k(-g) h_i^k \int_{D_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla z \end{pmatrix} dx &= \tau_k(-g) h_i^k \int_{\partial D_i} z \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} dx \\ &= \tau_k(-g) h_i^k \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}} z \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_{ij} \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

Funkci

$$z \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_{ij} \end{pmatrix}$$

aproximujeme na Γ_{ij} funkcí $\mathbf{Z}(z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij})$ závisející na hodnotě z_i na konečném objemu D_i , hodnotě z_j na normále \mathbf{n}_{ij} , kde

$$z_i = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} z(x) dx \quad (4.7)$$

označuje integrální průměr funkce z na konečném objemu D_i .

Celkově dostáváme schéma metody konečných objemů

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} |\Gamma_{ij}| \left(\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) + g h_i^k \mathbf{Z}(z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}) \right),$$

$$D_i \in \mathcal{D}_h, \quad t_k \in [0, T).$$

Funkce \mathbf{H} je numerický tok veličiny \mathbf{w} a \mathbf{Z} aproximace veličiny z na hraně Γ_{ij} ve směru normály \mathbf{n}_{ij} . Označíme-li $\widetilde{\mathbf{H}} := \mathbf{H} + g h_i^k \mathbf{Z}$, neboli

$$\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}) = \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) + g h_i^k \mathbf{Z}(z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}), \quad (4.8)$$

jedná se opět o numerický tok a píšeme

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} |\Gamma_{ij}| \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}),$$

$$D_i \in \mathcal{D}_h, \quad t_k \in [0, T).$$

Definice 2. *Definujeme přibližné řešení metody konečných objemů pro rovnice mělké vody (2.19)*

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \mathbf{s}(\mathbf{w})$$

jako po částech konstantní vektorovou funkci \mathbf{w}_h^k , $k = 0, 1, \dots$, definovanou s.v. v Ω tak, že $\mathbf{w}_h^k|_{D_i^\circ} = \mathbf{w}_i^k$ pro každé $i \in J$, kde D_i° je vnitřek D_i (tj. $D_i^\circ = D_i \setminus \partial D_i$), a \mathbf{w}_i^k je dáno vztahem

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} |\Gamma_{ij}| \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}), \quad (4.9)$$

kde $D_i \in \mathcal{D}_h$, $t_k \in [0, T)$. Funkce \mathbf{w}_h^k je přibližné řešení v čase $t = t_k$. Vektor \mathbf{w}_i^k je hodnota přibližného řešení na konečném objemu D_i v čase t_k .

Hodnoty \mathbf{w}_i^0 jsou dány z počáteční podmínky.

4.2 Metoda konečných objemů a numerický tok pro $z = konst$.

Pokud $z = konst$ jedná se o případ plochého dna, tj. platí $\nabla z = 0$ a tedy také $\mathbf{s}(\mathbf{w}) = 0$. Dostáváme metodu konečných objemů následujícího tvaru

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} |\Gamma_{ij}| \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}), \quad (4.10)$$

Numerický tok $\mathbf{H} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$. Necht' $S_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{n}| = 1\}$ je jednotková koule v \mathbb{R}^N . Požadujeme, aby \mathbf{H} byl

- (i) definovaný a spojitý na $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times S_1$,
- (ii) konzistentní s tokem \mathbf{f}_s , tj.:

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{u}) n_s, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{n} \in S_1,$$

- (iii) konzervativní, tj.: $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = -\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{n})$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{n} \in S_1$.

Navíc z rotační invariance toků můžeme předpokládat, že numerický tok je dán pomocí zobrazení $\mathbf{g} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ tak, že

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) = \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{g}(\mathbb{Q} \mathbf{w}_i^k, \mathbb{Q} \mathbf{w}_j^k), \quad \mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{n}_{ij} = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^N, \quad (4.11)$$

kde

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 \\ 0 & n_2 & -n_1 \end{pmatrix}.$$

Existují dva základní přístupy ke tvorbě numerických toků:

1. Numerický tok může být odvozen z konečných rozdílů přiblížení, např.: Lax-Friedrichsův numerický tok.
2. Druhá možnost je založena na analýze řešení Riemannova problému. Příkladem je Godunův numerický tok a různé přibližné Riemannovy řešiče - Vijaya-sundaramův tok, Roeo tok a Osher-Solomonův tok.

4.2.1 Numerický tok Vijayasundaramova typu pro SWE

Odvodíme numerický tok Vijayasundaramova typu pro SWE se $z = konst.$ Vydeme z Vijayasundaramova numerického toku pro stlačitelné Eulerovy rovnice:

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k) = \mathbb{A}_1^+ \left(\frac{\mathbf{w}_i^k + \mathbf{w}_j^k}{2} \right) \mathbf{w}_i^k + \mathbb{A}_1^- \left(\frac{\mathbf{w}_i^k + \mathbf{w}_j^k}{2} \right) \mathbf{w}_j^k, \quad (4.12)$$

kde \mathbb{A}_1^+ (nebo \mathbb{A}_1^-) je kladná část (nebo záporná část) matice \mathbb{A}_1 (pro skalární argumenty máme $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \min(a, 0)$). Užitím diagonálního rozkladu $\mathbb{A}_1 = \mathbb{T}\Lambda\mathbb{T}^{-1}$, kde $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}\}$, můžeme zobecnit předchozí vztah pro matice argumentů takto

$$\mathbb{A}_1^\pm = \mathbb{T} \text{diag}\{\lambda_1^\pm, \dots, \lambda_{N+1}^\pm\} \mathbb{T}^{-1}.$$

Vzorec (4.12) je ekvivalentní přesnému Riemannovu řešiči pro lineární hyperbolické systémy. Formulace této vlastnosti pro skalární lineární problém se dá snadno zobecnit na hyperbolický lineární systém, využívající diagonální rozklad.

Lemma 6. *Užijeme Riemannův problém pro skalární lineární rovnici*

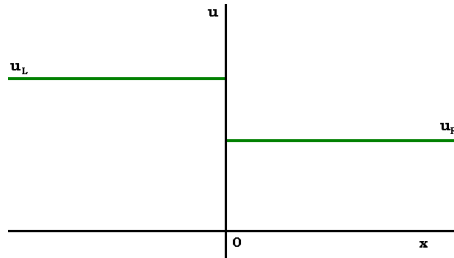
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0. \end{cases}$$

Potom hodnota toku $\mathbf{f}_\lambda(u) = \lambda u$ na příímce $x = 0$ je

$$\mathbf{f}_\lambda(u(0, t)) = \lambda^+ u_L + \lambda^- u_R \quad \text{pro } t > 0.$$

Důkaz. Řešení je $u(x, t) = u_0(x - \lambda t)$. Jestliže $\lambda > 0$ pak $u(0, t) = u_L$. Jestliže $\lambda < 0$ pak $u(0, t) = u_R$. V obou případech tvrzení platí. \square



Obrázek 4.1: Klasický Riemannův problém.

Vijayasundaramův tok pro Eulerovy rovnice je konzistentní právě tehdy když $\mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \mathbb{A}_1(\mathbf{w})\mathbf{w}$ pro všechny $\mathbf{w} \in \mathcal{D}$. Tato homogenní vlastnost je splněna pro lineární systém a pro Eulerovy rovnice, ale není splněna pro SWE. Platí

$$\mathbb{A}_1(\mathbf{w})\mathbf{w} = \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) - \frac{1}{2}gh^2\mathbf{e}_2,$$

kde pro $N = 2$ máme $\mathbf{w} = (h, hv_1, hv_2)^T$ a $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ (pro $N = 1$ $\mathbf{w} = (h, hv_1)^T$ a $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$). Byl v [7] navržen numerický tok Vijayasundaramova typu, takto

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k) = \mathbb{A}_1^+ \left(\frac{\mathbf{w}_i^k + \mathbf{w}_j^k}{2} \right) \mathbf{w}_i^k + \mathbb{A}_1^- \left(\frac{\mathbf{w}_i^k + \mathbf{w}_j^k}{2} \right) \mathbf{w}_j^k - \frac{g}{2} \left(\frac{h_i^k + h_j^k}{2} \right)^2 \mathbf{e}_2. \quad (4.13)$$

Následující věta ukazuje, že Vijayasundaramův tok definovaný v (4.13) a (4.11) je vhodný pro užití v metodě konečných objemů.

Věta 5. *Numerický Vijayasundaramův tok definovaný v (4.13) a (4.11) je spojitý, konzistentní a konzervativní.*

Důkaz. Lze najít v disertaci [7] - str. 60. □

4.2.2 CFL podmínka

Nakonec zbývá určit časový krok τ_k . Protože schéma je explicitní, musí být pro zachování stability omezen časový krok τ_k . Užijeme Courant-Friedrichs-Levyho (CFL) podmínku stability. Vyšetřováním stability schématu (analogicky jako v [5]) dostáváme na následující nerovnost

$$\tau_k \leq \frac{CFL |D_i|}{\lambda_{i,max} |\partial D_i|},$$

kde $CFL \in (0, 1)$ a

$$\lambda_{i,max} = \max_{r=1,\dots,m, j \in S(i)} |\lambda_r(\mathbf{w}_{ij}^k, \mathbf{n}_{ij})|, \quad m = N + 2,$$

kde $\lambda_r(\mathbf{w}_{ij}^k, \mathbf{n}_{ij})$ jsou vlastní čísla matice $\sum_{s=1}^N (n_{ij})_s \mathbb{A}_s(\mathbf{w}_{ij}^k)$.

4.3 Metoda konečných objemů a numerický tok pro $z \neq konst.$

Nyní se zaměříme na případ $z \neq konst.$ Hledáme metodu konečných objemů, která zachovává stacionární řešení

$$h(x, t) = H_0 - z(x), \quad \mathbf{v}(x, t) = 0, \quad (4.14)$$

kde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$. Funkce $\mathbf{w} = (h, h\mathbf{v})^T$ s komponentami danými (4.14) je pro $N = 2$ řešením (2.20). Použijeme po částech konstantní aproximaci funkce z ,

$$z_i = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} z(x) dx, \quad D_i \in \mathcal{D}_h.$$

Diskrétní verze (4.14) je

$$h_i^k = H_0 - z_i, \quad v_i^k = 0, \quad D_i \in \mathcal{D}_h, \quad k = 0, 1, \dots, N + 2. \quad (4.15)$$

Numerický tok, musí zachovávat stacionární řešení (4.15), tj dostáváme metodu konečných objemů následujícího tvaru

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} |\Gamma_{ij}| \widetilde{\mathbf{H}}_{total}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}), \quad (4.16)$$

kde $\widetilde{\mathbf{H}}_{total}$ je tvaru (4.8). A díky rotační invarianci lze psát

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_{total}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}) &= \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{g}_{total}(\mathbb{Q}\mathbf{w}_i^k, \mathbb{Q}\mathbf{w}_j^k, z_i, z_j), \\ \mathbf{g}_{total}(\mathbb{Q}\mathbf{w}_i^k, \mathbb{Q}\mathbf{w}_j^k, z_i, z_j) &= \mathbf{g}_{conv}(\mathbb{Q}\mathbf{w}_i^k, \mathbb{Q}\mathbf{w}_j^k, z_i, z_j) + gh_i^k z_*(z_i, z_j) \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

kde

$$z_*(z_i, z_j) = \frac{z_i + z_j}{2}.$$

4.3.1 Numerický tok Vijayasundaramova typu pro SWE

Nejprve vysvětlíme pojem korekce. Za předpokladu, že máme po částech konstantního řešení (4.15), pak zdroj $-gh\nabla z$ je Diracova distribuce se středem ve středu souřadnic. Začneme s analýzou lineárního Riemannova problému s Diracovou distribucí δ (v bodě $x = 0$) jako zdrojového členu.

Lemma 7. *Nechť $A, B, u_L, u_R \in \mathbb{R}$. Uvažujeme Riemannův problém*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = B\delta, \quad v \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (4.18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Potom existuje u , které řeší (4.18), (4.19) v následujícím smyslu:

- (1) $u \in C([0, \infty), \mathcal{D}')$, kde \mathcal{D}' je prostor distribucí na \mathbb{R} ,
- (2) u splňuje (4.18) ve smyslu distribucí,
- (3) $u(0) = u_0$.

Navíc, řešení je jednoznačné. Jestliže $A \neq 0$, potom

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - At) + B/|A| & (x - At)x < 0, \\ u_0(x - At), & (x - At)x \geq 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Důkaz. Jestliže $A \neq 0$, potom nám metoda charakteristik dává (4.20). Jestliže $A = 0$, potom řešení je $u = u_0 + Bt\delta$. Přímým výpočtem můžeme ukázat, že (1)-(3) opravdu platí. Jednoznačnost lze ukázat také užitím metody charakteristik. \square

Aby bylo možné odvodit přibližný Riemannův řešič, potřebujeme hodnotu toku Au v bodě $x = 0$. Zanedbáváme skutečnost, že na rozdíl od homogenního případu tok není spojitý na přímce $x = 0$ a použijeme střední hodnotu

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} Au(x, t) + \lim_{x \rightarrow 0^-} Au(x, t) \right) = A^+ u_L + A^- u_R + \frac{1}{2} B \operatorname{sgn} A.$$

Všimněme si, že výsledek je ekvivalentní numerickému toku Vijayasundaramova typu pro SWE s $z = konst$ (4.12) s přídatnou korekcí $\frac{1}{2}BsgnA$. Zobecnili jsme výraz na plný systém pomocí diagonálního rozkladu \mathbb{A}_1 . Položíme

$$B\delta = -gh(\mathbf{n} \cdot \nabla z) \approx -gh(z_j - z_i)\delta$$

a tím odvodíme numerický tok pro konvektivní část nehomogenní rovnice mělké vody

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{conv}(\mathbb{Q}\mathbf{w}_i^k, \mathbb{Q}\mathbf{w}_j^k, z_i, z_j) &= \mathbb{A}_1^+(\mathbf{w}_*)\mathbf{w}_i^k + \mathbb{A}_1^-(\mathbf{w}_*)\mathbf{w}_j^k \\ &\quad - \frac{1}{2}gh_*(z_j - z_i)(sgn\mathbb{A}_1(\mathbf{w}_*))\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}gh_{**}^2\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Funkce h_{**} a z_* jsou vhodné aproximace hodnot h a z na hranici Γ_{ij} . Matice $sgn\mathbb{A}_1$ je definována analogicky jako matice \mathbb{A}_1^\pm

$$sgn\mathbb{A}_1 = \mathbb{T}diag\{sgn\lambda_1, sgn\cdots, sgn\lambda_{N+1}\}\mathbb{T}^{-1}.$$

A platí

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_* &= \frac{\mathbf{w}_i^k + \mathbf{w}_j^k}{2}, \quad h_* = \frac{h_i^k + h_j^k}{2}, \\ h_{**}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k) &= \begin{cases} h_j^k, & \mu < -1, \\ \sqrt{\frac{1+\mu}{2}(h_i^k)^2 + \frac{1-\mu}{2}(h_j^k)^2}, & -1 < \mu < 1, \\ h_i^k, & \mu > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

kde $\mu = \frac{v_{1,*}}{\sqrt{gh_*}}$, $v_{1,*} = \frac{v_{1,i} + v_{1,j}}{2}$.

Diskrétní stacionární řešení (4.15) je zachováno.

4.4 Metoda konečných objemů vyššího řádu pro 1D úlohu

Metoda konečných objemů s numerickým tokem Vijayasundaramova typu pro SWE je pouze prvního řádu přesnosti v prostorové proměnné. K výpočtu jsme používali po částech konstantní aproximaci hodnot. V této kapitole využijeme lineární rekonstrukci ke zvýšení přesnosti řešení na druhý řád. Detailní popis lineární rekonstrukce je v následující sekci 5.1. Aplikujeme lineární rekonstrukci na následující schéma metody konečných objemů pro úlohu v 1D

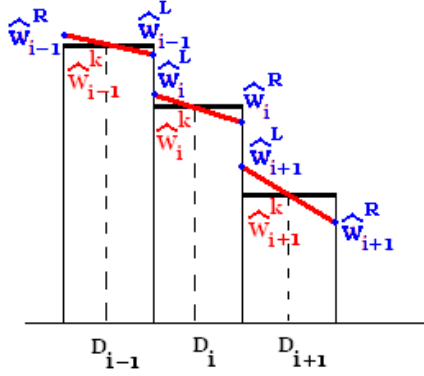
$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} (\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) + gh_i^k \mathbf{Z}(z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij})),$$

$$D_i \in \mathcal{D}_h, \quad t_k \in [0, T).$$

U metody konečných objemů počítáme řešení ve středech konečných objemů.

Algoritmus lineární rekonstrukce:

1. Provedeme pouze jednu lineární rekonstrukci na počáteční hodnoty úlohy \mathbf{w}_i^k , dostaneme $\widehat{\mathbf{w}}_i^k$.



Obrázek 4.2: Lineární rekonstrukce.

2. Spočteme si hodnoty v krajních bodech daného objemu D_i a označíme je w_i^L a w_i^R .
3. Aplikujeme limiter popsany v sekci 5.3.2.

U metody konečných objemů s lineární rekonstrukcí nebudeme uvažovat hodnoty ve středech ale v krajích bodech w_i^L a w_i^R daného objemu, tzn. numerický tok počítáme z těchto hodnot pomocí numerického toku Vijayasundaramova typu

$$w_i^{k+1} = w_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \left(\mathbf{H}(w_i^R, w_{i+1}^L, \mathbf{n}_{ij}) + \mathbf{H}(w_i^L, w_{i-1}^R, \mathbf{n}_{ij}) + gh_i^k \mathbf{Z}(z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}) \right),$$

$$D_i \in \mathcal{D}_h, t_k \in [0, T).$$

5. Metoda vyšší přesnosti

Schéma (4.9) je formálně prvního řádu přesnosti. To způsobuje, že nespojitosti v řešení jsou často rozmazané a některé detaily nejsou zachyceny dostatečně přesně. Aby se zabránilo tomuto nedostatku, mohou být použité dvě techniky:

1. adaptivní zjemnění v blízkosti nespojitostí,
2. využití tzv. vyššího řádu přesnosti metody konečných objemů.

Zde se budeme zabývat konstrukcí vyššího řádu přesnosti metody konečných objemů pro $N=1$. Tento přístup je dnes široce používán jako konkurenční metoda k Nespojité Galerkinově metodě konečných prvků. Je založena na $(p-1)$ -stupňové polynomiální rekonstrukci $\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k \in P^{p-1}$ po částech konstantních řešení konečných objemů, které splňují

1. $\frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \widehat{\mathbf{w}}_i^k(x) dx = \mathbf{w}_i^k,$
2. $\mathbf{w}(x, t_k) \Big|_{D_i} = \widehat{\mathbf{w}}_i^k(x) + O(h^p),$ jestliže $\mathbf{w} \in C^p(\Omega).$

5.1 Lineární rekonstrukce

Metoda druhého řádu přesnosti. Provedeme lineární rekonstrukci v 1D pro $p=2$. Máme konstantní aproximace \mathbf{w}_i^k a chceme najít lineární aproximaci $\widehat{\mathbf{w}}_i^k$. Lineární funkci lze zapsat následovně

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^k = a(x - x_i) + b,$$

kde x_i je těžiště objemu v D_i (v 1D se jedná o střed intervalu D_i) pro $\forall i \in J$. Hledáme vyjádření a a b . Za x dosadíme hodnotu x_i a dostaneme

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^k(x_i) = a(x_i - x_i) + b = b.$$

Dále víme, že v lineárním případě je integrální střední hodnota funkce rovna hodnotě funkce v těžišti, tzn.: pro $\forall p \in P^1(\Omega)$

$$\frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} p(x) dx = p(x_i).$$

Hledáme $\widehat{\mathbf{w}}_i^k \in P_i^k(\Omega) = \left\{ p \in P^1(\Omega); \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} p(x) dx = \mathbf{w}_i^k \right\}$. Integrální střední hodnota $\widehat{\mathbf{w}}_i^k$ je rovna hodnotě v těžišti, odtud vyjádříme

$$\mathbf{w}_i^k = \widehat{\mathbf{w}}_i^k(x_i). \tag{5.1}$$

A dostáváme, že

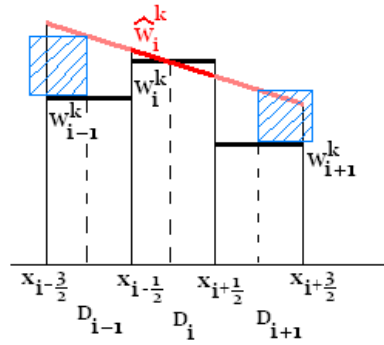
$$b = \mathbf{w}_i^k. \tag{5.2}$$

Pokud jsme v 1D a D_i není krajní interval platí, že D_{i-1}, D_{i+1} jsou sousedy objemu D_i , pak x_{i-1} a x_{i+1} rozumíme jejich středy. Hodnotu a určíme jako ve [4] tak, aby přímka $a(x - x_i) + \mathbf{w}_i^k$ procházela body $(x_{i-1}, \mathbf{w}_{i-1}^k)$ a $(x_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}^k)$. Toho

nemůžeme obecně docílit, proto budeme počítat ve smyslu nejmenších čtverců tzn.:

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^k = \arg \min_{p \in P_i^k(\Omega)} \sum_{j \in L(i)} \left(\mathbf{w}_j^k - \frac{1}{|D_j|} \int_{D_j} p(x) dx \right)^2,$$

kde $L(i)$ je indexová množina objemů obklopujících D_i , tj. $\{i-1, i+1\}$.



Obrázek 5.1: Lineární rekonstrukce.

Označme $F(a) := \left(\mathbf{w}_{i-1}^k - [a(x_{i-1} - x_i) + \mathbf{w}_i^k] \right)^2 + \left(\mathbf{w}_{i+1}^k - [a(x_{i+1} - x_i) + \mathbf{w}_i^k] \right)^2$. Hledáme minimum funkce F , nejprve spočteme jeho derivaci. Položením derivace rovné nule dostaneme minimum.

$$\begin{aligned} \frac{dF}{da} &= 2 \left(\mathbf{w}_{i-1}^k - [a(x_{i-1} - x_i) + \mathbf{w}_i^k] \right) (-1)(x_{i-1} - x_i) \\ &\quad + 2 \left(\mathbf{w}_{i+1}^k - [a(x_{i+1} - x_i) + \mathbf{w}_i^k] \right) (-1)(x_{i+1} - x_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jelikož víme, že $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ máme

$$\begin{aligned} a [(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2] &= (\mathbf{w}_{i-1}^k - \mathbf{w}_i^k)(x_{i-1} - x_i) + (\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k)(x_{i+1} - x_i), \\ a &= \frac{(\mathbf{w}_{i-1}^k - \mathbf{w}_i^k)(x_{i-1} - x_i) + (\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k)(x_{i+1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]}. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že rovnice má následující tvar

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^k = \frac{(\mathbf{w}_{i-1}^k - \mathbf{w}_i^k)(x_{i-1} - x_i) + (\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k)(x_{i+1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]} (x - x_i) + \mathbf{w}_i^k. \quad (5.3)$$

Kvůli numerické aplikaci je vhodné vyjádřit rekonstrukci $\widehat{\mathbf{w}}_i^k = a(x - x_i) + b$ ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^k = \sum_{j \in \{i\} \cup L(i)} \mathbf{w}_j^k \Phi_{i,j},$$

kde $\Phi_{i,j}$ jsou polynomy stupně 1 splňující

$$\Phi_{i,j} \in P_{ij} := \left\{ p \in P^1(\Omega); \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} p(x) dx = \delta_{ij} \right\},$$

$$\Phi_{i,j} = \arg \min_{p \in P_{ij}(\Omega)} \sum_{l \in L(i)} \left(\delta_{jl} - \frac{1}{|D_l|} \int_{D_l} p(x) dx \right)^2.$$

Hledáme je tedy ve tvaru:

$$\begin{aligned}\Phi_{i,i} &= a_i(x - x_i) + b_i, \\ \Phi_{i,i-1} &= a_{i-1}(x - x_i) + b_{i-1}, \\ \Phi_{i,i+1} &= a_{i+1}(x - x_i) + b_{i+1}.\end{aligned}$$

Nyní musíme spočítat a_i, a_{i-1}, a_{i+1} a b_i, b_{i-1}, b_{i+1} . Chceme rovnice (5.3) vyjádřit ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^k = \mathbf{w}_{i-1}^k \left(a_{i-1}(x - x_i) + b_{i-1} \right) + \mathbf{w}_i^k \left(a_i(x - x_i) + b_i \right) + \mathbf{w}_{i+1}^k \left(a_{i+1}(x - x_i) + b_{i+1} \right) \quad (5.4)$$

Roznásobením (5.3) dostáváme, že

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{w}}_i^k &= \left(\mathbf{w}_{i-1}^k \frac{(x_{i-1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]} - \mathbf{w}_i^k \frac{(x_{i-1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{w}_{i+1}^k \frac{(x_{i+1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]} - \mathbf{w}_i^k \frac{(x_{i+1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]} \right) (x - x_i) \\ &\quad + \mathbf{w}_i^k, \\ \widehat{\mathbf{w}}_i^k &= \mathbf{w}_{i-1}^k \left(\frac{(x_{i-1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]} (x - x_i) \right) \\ &\quad + \mathbf{w}_i^k \left(\frac{(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]} (x - x_i) + 1 \right) \\ &\quad + \mathbf{w}_{i+1}^k \left(\frac{(x_{i+1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]} (x - x_i) \right).\end{aligned}$$

Porovnáním tohoto s výrazem (5.4) dostáváme

$$\begin{aligned}a_{i-1} &= \frac{(x_{i-1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]}, & b_{i-1} &= 0, \\ a_i &= \frac{(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]}, & b_i &= 1, \\ a_{i+1} &= \frac{(x_{i+1} - x_i)}{[(x_{i-1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2]}, & b_{i+1} &= 0.\end{aligned}$$

Jelikož hodnoty $a_i, a_{i-1}, a_{i+1}, b_i, b_{i-1}, b_{i+1}$ nezávisí na \mathbf{w}_{i-1}^k ani na \mathbf{w}_i^k ani na \mathbf{w}_{i+1}^k . Získali jsme požadovaný tvar.

5.2 Kvadratická rekonstrukce

Provedeme kvadratickou rekonstrukci v 1D pro $p = 2$. Hledáme $\widehat{\mathbf{w}}_i^k$ ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^k = a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + c \quad (5.5)$$

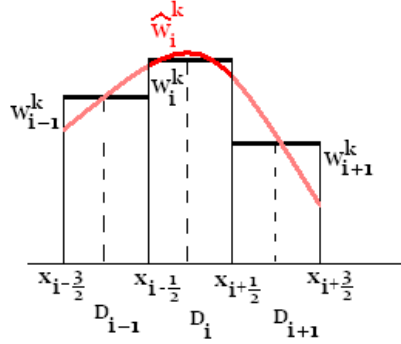
tak, aby platilo

$$\frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \mathbf{w}(x, t_k) dx = \widehat{\mathbf{w}}_i^k.$$

A zároveň aby

$$\int_{D_j} \hat{w}_i^k dx = \mathbf{w}_j^k |D_j|, \quad \text{pro } j \in \{i-1, i, i+1\}, \quad (5.6)$$

kde D_i je úsečka a má sousedy D_{i-1} a D_{i+1} .



Obrázek 5.2: Kvadratická rekonstrukce.

Rozepsání levé strany rovnice (5.6) dostaneme

$$\begin{aligned} LS &= \int_{D_j} \hat{w}_i^k dx = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (a(x-x_i)^2 + b(x-x_i) + c) dx \\ &= \left[\frac{a(x-x_i)^3}{3} + \frac{b(x-x_i)^2}{2} + cx \right]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\frac{a(x_{j+\frac{1}{2}}-x_i)^3}{3} + \frac{b(x_{j+\frac{1}{2}}-x_i)^2}{2} + cx_{j+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{a(x_{j-\frac{1}{2}}-x_i)^3}{3} + \frac{b(x_{j-\frac{1}{2}}-x_i)^2}{2} + cx_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ &= a \frac{(x_{j+\frac{1}{2}}-x_i)^3 - (x_{j-\frac{1}{2}}-x_i)^3}{3} + b \frac{(x_{j+\frac{1}{2}}-x_i)^2 - (x_{j-\frac{1}{2}}-x_i)^2}{2} + c(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Rozepsáním pravé strany rovnice (5.6) získáme

$$PS = \mathbf{w}_j^k |D_j| = \mathbf{w}_j^k (x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}).$$

Vydělením celého výrazu hodnotou $(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}})$ obdržíme rovnici

$$a \frac{(x_{j+\frac{1}{2}}-x_i)^3 - (x_{j-\frac{1}{2}}-x_i)^3}{3(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}})} + b \frac{(x_{j+\frac{1}{2}}-x_i)^2 - (x_{j-\frac{1}{2}}-x_i)^2}{2(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}})} + c = \mathbf{w}_j^k,$$

pro $j \in \{i-1, i, i+1\}$.

Máme soustavu tří rovnic pro tři neznámé. Pro zjednodušení zápisu si zavedeme značení:

$$L_{j,1} = \frac{(x_{j+\frac{1}{2}}-x_i)^3 - (x_{j-\frac{1}{2}}-x_i)^3}{3(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}})},$$

$$L_{j,2} = \frac{(x_{j+\frac{1}{2}} - x_i)^2 - (x_{j-\frac{1}{2}} - x_i)^2}{2(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}})}.$$

Nejprve z rovnice pro $j = i$ vyjádříme c

$$c = \mathbf{w}_i^k - aL_{i,1} - bL_{i,2}. \quad (5.7)$$

Dosazením do rovnic pro $j = i - 1$ a $j = i + 1$ dostaneme

$$aL_{j,1} + bL_{j,2} + \mathbf{w}_i^k - aL_{i,1} - bL_{i,2} = \mathbf{w}_j^k.$$

tj.

$$a(L_{j,1} - L_{i,1}) + b(L_{j,2} - L_{i,2}) = \mathbf{w}_j^k - \mathbf{w}_i^k.$$

Jelikož víme, že $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ dostáváme, že $L_{i+1,2} - L_{i,2} \neq 0$ a můžeme vyjádřit b z rovnice pro $j = i + 1$

$$b = \frac{\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} - a \frac{L_{i+1,1} - L_{i,1}}{L_{i+1,2} - L_{i,2}}. \quad (5.8)$$

Dosadíme do rovnice pro $j = i - 1$ a vyjádříme a

$$\begin{aligned} a(L_{i-1,1} - L_{i,1}) + \frac{\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} - a \frac{L_{i+1,1} - L_{i,1}}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} (L_{i-1,2} - L_{i,2}) &= \mathbf{w}_{i-1}^k - \mathbf{w}_i^k, \\ a \left((L_{i-1,1} - L_{i,1}) - \frac{L_{i+1,1} - L_{i,1}}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} (L_{i-1,2} - L_{i,2}) \right) &= \mathbf{w}_{i-1}^k - \mathbf{w}_i^k - \frac{\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k}{L_{i+1,2} - L_{i,2}}, \\ a &= \frac{\mathbf{w}_{i-1}^k - \mathbf{w}_i^k - \frac{\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k}{L_{i+1,2} - L_{i,2}}}{\left((L_{i-1,1} - L_{i,1}) - \frac{L_{i+1,1} - L_{i,1}}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} (L_{i-1,2} - L_{i,2}) \right)}, \\ a &= R_2 \mathbf{w}_{i-1}^k + (R_1 - 1) R_2 \mathbf{w}_i^k - R_1 R_2 \mathbf{w}_{i+1}^k, \end{aligned} \quad (5.9)$$

kde

$$R_1 = \frac{1}{L_{i+1,2} - L_{i,2}}, \quad R_2 = \frac{1}{(L_{i-1,1} - L_{i,1}) - \frac{L_{i+1,1} - L_{i,1}}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} (L_{i-1,2} - L_{i,2})}.$$

Dosadíme (5.9) do (5.8)

$$\begin{aligned} b &= \frac{\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} - (R_2 \mathbf{w}_{i-1}^k + (R_1 - 1) R_2 \mathbf{w}_i^k - R_1 R_2 \mathbf{w}_{i+1}^k) \left(\frac{L_{i+1,1} - L_{i,1}}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} \right) \\ &= R_3 (\mathbf{w}_{i+1}^k - \mathbf{w}_i^k) - (R_2 \mathbf{w}_{i-1}^k + (R_1 - 1) R_2 \mathbf{w}_i^k - R_1 R_2 \mathbf{w}_{i+1}^k) R_4, \\ &= R_2 R_4 \mathbf{w}_{i-1}^k + [(R_1 - 1) R_2 R_4 - R_3] \mathbf{w}_i^k + (R_1 R_2 R_4 + R_3) \mathbf{w}_{i+1}^k, \end{aligned} \quad (5.10)$$

kde

$$R_3 = \frac{1}{L_{i+1,2} - L_{i,2}} \quad \text{a} \quad R_4 = \frac{L_{i+1,1} - L_{i,1}}{L_{i+1,2} - L_{i,2}}.$$

Dosadíme (5.9) a (5.10) do (5.8)

$$\begin{aligned}
c &= \mathbf{w}_i^k - aL_{i,1} - bL_{i,2} \\
&= \mathbf{w}_i^k - (R_2\mathbf{w}_{i-1}^k + (R_1 - 1)R_2\mathbf{w}_i^k - R_1R_2\mathbf{w}_{i+1}^k) L_{i,1} \\
&\quad - (R_2R_4\mathbf{w}_{i-1}^k + [(R_1 - 1)R_2R_4 - R_3] \mathbf{w}_i^k + (R_1R_2R_4 + R_3) \mathbf{w}_{i+1}^k) L_{i,2} \\
&= (-R_2L_{i,1} - R_2R_4L_{i,2}) \mathbf{w}_{i-1}^k \\
&\quad + \{1 - (R_1 - 1)R_2L_{i,1} + [(R_1 - 1)R_2R_4 - R_3] L_{i,2}\} \mathbf{w}_i^k \\
&\quad + (R_1R_2L_{i,1} + (R_1R_2R_4 + R_3) L_{i,2}) \mathbf{w}_{i+1}^k
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Ze vzorců (5.9), (5.10) a (5.11) vypočteme hodnoty a , b a c . Pro snadnější numerické výpočty převede na tvar

$$\widehat{\mathbf{w}}_i^k = \sum_{j \in \{i\} \cup L(i)} \mathbf{w}_j^k \Phi_{i,j},$$

kde $\Phi_{i,j} = a_j(x - x_i)^2 + b_j(x - x_i) + c_j$ pro $j \in \{i - 1, i, i + 1\}$. Dosadíme za a , b , c do vzorce (5.5)

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{w}}_i^k &= a(x - x_i)^2 + b(x - x_i) + c \\
&= (R_2\mathbf{w}_{i-1}^k + (R_1 - 1)R_2\mathbf{w}_i^k - R_1R_2\mathbf{w}_{i+1}^k) (x - x_i)^2 \\
&\quad + (R_2R_4\mathbf{w}_{i-1}^k + [(R_1 - 1)R_2R_4 - R_3] \mathbf{w}_i^k + (R_1R_2R_4 + R_3) \mathbf{w}_{i+1}^k) (x - x_i) \\
&\quad + (-R_2L_{i,1} - R_2R_4L_{i,2}) \mathbf{w}_{i-1}^k \\
&\quad + \{1 - (R_1 - 1)R_2L_{i,1} + [(R_1 - 1)R_2R_4 - R_3] L_{i,2}\} \mathbf{w}_i^k \\
&\quad + (R_1R_2L_{i,1} + (R_1R_2R_4 + R_3) L_{i,2}) \mathbf{w}_{i+1}^k \\
&= \left[\underbrace{R_2}_{=a_{i-1}} (x - x_i)^2 + \underbrace{R_2R_4}_{=b_{i-1}} (x - x_i) - \underbrace{R_2L_{i,1} - R_2R_4L_{i,2}}_{=c_{i-1}} \right] \mathbf{w}_{i-1}^k \\
&\quad + \left[\underbrace{(R_1 - 1)R_2}_{=a_i} (x - x_i)^2 + \underbrace{[(R_1 - 1)R_2R_4 - R_3]}_{=b_i} (x - x_i) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{1 - (R_1 - 1)R_2L_{i,1} + [(R_1 - 1)R_2R_4 - R_3] L_{i,2}}_{=c_i} \right] \mathbf{w}_i^k \\
&\quad + \left[\underbrace{-R_1R_2}_{=a_{i+1}} (x - x_i)^2 + \underbrace{(R_1R_2R_4 + R_3)}_{=b_{i+1}} (x - x_i) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{R_1R_2L_{i,1} + (R_1R_2R_4 + R_3) L_{i,2}}_{=c_{i+1}} \right] \mathbf{w}_{i+1}^k \\
&= \Phi_{i,i-1} \mathbf{w}_{i-1}^k + \Phi_{i,i} \mathbf{w}_i^k + \Phi_{i,i+1} \mathbf{w}_{i+1}^k.
\end{aligned}$$

5.3 Limitní procedura

V obou předchozích procedurách popsanych v sekcích 5.1 a 5.2 dostáváme interpolační skoky v aproximaci řešení. Proto zavádíme limitní proceduru, která odstraňuje tyto oscilace. Potom pro zhlazení oscilací v 1D použijeme Limitery

popsané níže (sekce (5.3.1) a (5.3.2)). Nejprve zavedeme indikátor nespojitosti v 1D pro $N=1$ (lze najít v [2]).

$$g(i) = \frac{(\widehat{\mathbf{w}}_i^k(x_{i+\frac{1}{2}}) - \widehat{\mathbf{w}}_{i+1}^k(x_{i+\frac{1}{2}}))^2}{|D_i|^2} + \frac{(\widehat{\mathbf{w}}_i^k(x_{i-\frac{1}{2}}) - \widehat{\mathbf{w}}_{i-1}^k(x_{i-\frac{1}{2}}))^2}{|D_i|^2}$$

5.3.1 První varianta limiteru.

Víme, že $\widehat{\mathbf{w}}_i^k$ má následující tvar $\widehat{\mathbf{w}}_i^k = \mathbf{w}_{i-1}^k \Phi_{i,i-1} + \mathbf{w}_i^k \Phi_{i,i} + \mathbf{w}_{i+1}^k \Phi_{i,i+1}$. Rovnice modifikujeme tak, že

- \mathbf{w}_{i+1}^k nahradíme hodnotou \mathbf{w}_i^k , je-li $g(i+1) > 1$,
- \mathbf{w}_{i-1}^k nahradíme hodnotou \mathbf{w}_i^k , je-li $g(i-1) > 1$.

Lemma 8. *Takovou modifikací dostaneme následující aproximaci*

$$\overline{\mathbf{w}}_i^k = \widehat{\mathbf{w}}_i^k + \sum_{j \in L(i), g(j) > 1} (\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_j^k) \Phi_{i,j}. \quad (5.12)$$

Důkaz. Důkaz provedeme rozepsáním všech možností.

- Pokud $g(i+1) > 1$ a $g(i-1) > 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{w}}_i^k &= \mathbf{w}_i^k \Phi_{i,i-1} + \mathbf{w}_i^k \Phi_{i,i} + \mathbf{w}_i^k \Phi_{i,i+1} \pm \mathbf{w}_{i-1}^k \Phi_{i,i-1} \pm \mathbf{w}_{i+1}^k \Phi_{i,i+1} \\ &= \widehat{\mathbf{w}}_i^k + (\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_{i-1}^k) \Phi_{i,i-1} + (\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_{i+1}^k) \Phi_{i,i+1}. \end{aligned}$$

- Pokud $g(i+1) > 1$ a $g(i-1) < 1$ dostáváme

$$\overline{\mathbf{w}}_i^k = \mathbf{w}_{i-1}^k \Phi_{i,i-1} + \mathbf{w}_i^k \Phi_{i,i} + \mathbf{w}_i^k \Phi_{i,i+1} \pm \mathbf{w}_{i+1}^k \Phi_{i,i+1} = \widehat{\mathbf{w}}_i^k + (\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_{i+1}^k) \Phi_{i,i+1}.$$

- Pokud $g(i+1) < 1$ a $g(i-1) > 1$ dostáváme

$$\overline{\mathbf{w}}_i^k = \mathbf{w}_i^k \Phi_{i,i-1} + \mathbf{w}_i^k \Phi_{i,i} + \mathbf{w}_{i+1}^k \Phi_{i,i+1} \pm \mathbf{w}_{i-1}^k \Phi_{i,i-1} = \widehat{\mathbf{w}}_i^k + (\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_{i-1}^k) \Phi_{i,i-1}.$$

- Pokud $g(i+1) < 1$ a $g(i-1) < 1$ dostáváme $\overline{\mathbf{w}}_i^k = \widehat{\mathbf{w}}_i^k$.

□

5.3.2 Druhá varianta limiteru.

Numerické experimenty ukazují, že limiter popsáný v sekci (5.3.1) není dostatečně účinný, aby se zabránilo oscilaci. Proto do limitní procedury (5.12) přidáme další výraz na pravou stranu. Cílem je upravit rekonstrukci na každém intervalu v závislosti na hodnotě indikátoru nespojitosti. Limitní procedura (5.12) je modifikována tak, že

- pro $j \in L(i)$ a $g(j) > 1$ nahradíme \mathbf{w}_j^k hodnotou \mathbf{w}_i^k ,

- pro $j \in L(i)$ a $g(j) \leq 1$ nahradíme \mathbf{w}_j^k hodnotou $g(j)\mathbf{w}_i^k + (1 - g(j))\mathbf{w}_j^k$, kde $\bar{g}(j) = \min(g(j), 1)$.

Lemma 9. *Takovou modifikací dostaneme následující aproximaci*

$$\bar{\mathbf{w}}_i^k = \hat{\mathbf{w}}_i^k + \sum_{j \in L(i)} \bar{g}(j)(\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_j^k)\Phi_{i,j}, \quad \bar{g}(j) = \min(g(j), 1). \quad (5.13)$$

Důkaz. Rozepíšeme všechny možnosti

- pro $g(i-1) > 1$, $g(i+1) > 1$ dostáváme $\bar{g}(j) = \min(g(j), 1) = 1$ a tedy

$$\bar{\mathbf{w}}_i^k = \hat{\mathbf{w}}_i^k + \sum_{j \in L(i), g(j) > 1} (\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_j^k)\Phi_{i,j}.$$

- Pro $g(i-1) \leq 1$, $g(i+1) \leq 1$ dostáváme $\bar{g}(j) = \min(g(j), 1) = g(j)$ a tedy

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}_i^k &= (g(i-1)\mathbf{w}_i^k + (1 - g(i-1))\mathbf{w}_{i-1}^k)\Phi_{i,i-1} + \mathbf{w}_i^k\Phi_{i,i} \\ &\quad + (g(i+1)\mathbf{w}_i^k + (1 - g(i+1))\mathbf{w}_{i+1}^k)\Phi_{i,i+1} \\ &= \hat{\mathbf{w}}_i^k + g(i-1)(\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_{i-1}^k)\Phi_{i,i-1} + g(i+1)(\mathbf{w}_i^k - \mathbf{w}_{i+1}^k)\Phi_{i,i+1} \end{aligned}$$

- Pro případ kdy $g(i-1) \leq 1$, $g(i+1) > 1$, a nebo pro $g(i-1) > 1$ a $g(i+1) \leq 1$ postupujeme analogicky.

□

5.4 ENO rekonstrukce v 1D

Zkratka ENO znamená essentially non-oscillatory (neoscilující metoda). Jedná se o schéma vyššího řádu přesnosti. ENO schémata se užívá pro řešení hyperbolických rovnic zákonu zachování. Jsou vhodná zejména pro problémy obsahující rázové vlny (např. turbulentní proudění).

Hlavní rozdíl mezi ENO metodou a lineární rekonstrukcí je, že při výpočtu \mathbf{w}_i^k nepoužíváme pevnou mřížku bodů, ale sestavuje interpolační formule na základě informace o hladkosti řešení.

5.4.1 Základní myšlenka

Mějme následující dělení intervalu $\Omega = [a, b]$

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{n-\frac{1}{2}} < x_{n+\frac{1}{2}} = b.$$

Označme $D_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $x_i = \frac{1}{2}(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})$, $|D_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a maximální délku intervalu $l = \max_{1 \leq i \leq n} |D_i|$.

Je dána střední hodnota funkce $\mathbf{w}(x, t)$

$$\mathbf{w}_i^k = \frac{1}{|D_i|} \int_{|D_i|} \mathbf{w}(\xi, t_k) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.14)$$

Naším cílem je nalézt polynomiální rekonstrukci (angl. cell averages reconstruction) $p^k(x)$ stupně $m - 1$ splňující

$$\frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} p^k(x) dx = \mathbf{w}_i^k, \quad j = i - r, \dots, i + m - r + 1, \quad (5.15)$$

kde k značí časový krok a r určuje přes jaké intervaly se počítá, volba je popsána níže v sekci 5.4.3. Polynomiální funkci $p^k(x)$ konstruujeme následovně. Necht' $i_0 \in \mathbb{N}$ a $V^k(x)$ je primitivní funkce k \mathbf{w} tj.

$$V^k(x) = \int_{x_{i_0}}^x \mathbf{w}(\xi, t_k) d\xi, \quad (5.16)$$

pak

$$V^k(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=i_0}^i \mathbf{w}_j^k |D_j|,$$

kde k značí časový krok. Víme, že existuje právě jeden interpolační polynom $P^k(x)$ stupně $\leq m$ takový, že

$$P^k(x_{j+\frac{1}{2}}) = V^k(x_{j+\frac{1}{2}}) \quad j = i - r, \dots, i + s. \quad (5.17)$$

Lemma 10. *Je-li $p^k(x) = (P^k)'(x)$, pak stupeň m je $\leq n - 1$ a $p^k(x)$ splňuje podmínku (5.15).*

Důkaz. Důkaz lze najít v [2]. □

Navíc užitím z (5.17) a z lemma 10 dostaneme

$$P^k(x) = V^k(x) + O(l^{m+1}), \quad x \in D_i, i = 1, \dots, n,$$

$$p^k(x) = \mathbf{w}(x, t_k) + O(l^m), \quad x \in D_i, i = 1, \dots, n.$$

Z výše uvedených úvah víme jak konstruovat $p_i^k(x) = p^k(x) \Big|_{D_i}$ a dostáváme aproximace m -tého řádu přesnosti funkce $\mathbf{w}(x, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^{k-} &= p_i^k(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ \mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}}^{k+} &= p_i^k(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

5.4.2 Výpočet p^k

Hlavní myšlenka je (jestliže je to možné) vyhnout se zahrnutí bodu nespojitosti do šablony. Proto zavádíme Newtonův interpolační polynomu. Newtonovské rozdíly diferencí:

- 0-tý rozdíl diferencí funkce (5.16) je definován takto

$$V^k \left[x_{i+\frac{1}{2}} \right] = V^k(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=i_0}^i \mathbf{w}_j^k |D_j|, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (5.18)$$

- j -tý stupeň rozdílu diferencí, pro $j \geq 1$, je definován induktivně

$$V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] = \frac{V^k \left[x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] - V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{3}{2}} \right]}{x_{i+j-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}. \quad (5.19)$$

Pro $j = 1$ dostáváme, dosazením předchozích výrazů, tento vztah

$$\begin{aligned} V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] &= \frac{V^k(x_{i+\frac{1}{2}}) - V^k(x_{i-\frac{1}{2}})}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{j=i_0}^i \mathbf{w}_j^k |D_j| - \sum_{j=i_0}^{i-1} \mathbf{w}_j^k |D_j|}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mathbf{w}_i^k |D_i|}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \mathbf{w}_i^k, \end{aligned} \quad (5.20)$$

Můžeme tedy vypočítat rozdíl diferencí $V^k(x)$ prvního a vyššího stupně pomocí příslušných \mathbf{w}_j^k užitím (5.19) a (5.20).

Newtonův tvar m -tého stupně interpolačního polynomu $P^k(x)$, který interpoluje $V^k(x)$ v $m + 1$ po sobě jdoucích bodech, může být vyjádřen užitím rozdílu diferencí (5.18)-(5.19)

$$P^k(x) = \sum_{j=0}^m V^k \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}} \right] \prod_{q=0}^{j-1} (x - x_{i-r+m-\frac{1}{2}}), \quad (5.21)$$

kde r je dáno volbou šablony viz sekce 5.4.3. Z předchozího a z lemma 10 dostaneme $p^k(x)$ ve tvaru

$$p^k(x) = \sum_{j=1}^m V^k \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}} \right] \sum_{q=0}^{j-1} \prod_{l=0, l \neq q}^{j-1} (x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}). \quad (5.22)$$

Důležitý důsledek rozdílu diferencí:

$$V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] = \frac{(V^k)^{(j)}(\xi)}{j!}, \quad (5.23)$$

pro nějaké ξ uvnitř intervalu: $x_{i-\frac{1}{2}} < \xi < x_{i+j-\frac{1}{2}}$, tak dlouhém aby funkce $V^k(x)$ byla hladká na tomto intervalu. Jestliže $V^k(x)$ je nespojitá v nějakém bodu uvnitř intervalu, potom lze ověřit, že

$$V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] = O \left(\frac{1}{|D_j|} \right). \quad (5.24)$$

5.4.3 ENO procedura

Nyní popíšeme myšlenku ENO procedury užitím (5.21). Chceme najít interval $m + 1$ po sobě jdoucích bodů (zahrnujících $x_{i-\frac{1}{2}}$ a $x_{i+\frac{1}{2}}$) takových, že $V^k(x)$ je "nejhladší" v tomto intervalu ve srovnání s dalšími možnými intervaly. Budeme postupovat jako v [12] tak, že si práci rozdělíme do kroků a v každém kroku potom přidáme jenom jeden bod intervalu. Začneme s množinou obsahující dva body

$$\tilde{S}_2(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (5.25)$$

(5.25) odpovídá množině intervalů $S(i) = \{D_i\}$, tuto množinu nazýváme *šablonou*. Š užíváme k určení šablony pro primitivní funkci V^k . Podle vzorce (5.21) může být lineární interpolace na intervalu D_i v (5.25) napsána v Newtonově tvaru jako

$$P^k(x) = V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}} \right] + V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] (x - x_{i-\frac{1}{2}}).$$

V dalším kroku máme jenom dvě možnosti rozšíření intervalu přidáním jednoho bodu:

- můžeme přidat levého souseda $x_{i-\frac{3}{2}}$, výsledkem je následující kvadratická interpolace

$$R(x) = P^k(x) + V^k \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] (x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}),$$

- nebo přidáme pravého souseda $x_{i+\frac{3}{2}}$, výsledkem je následující kvadratická interpolace

$$Q(x) = P^k(x) + V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right] (x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}).$$

Poznamenejme, že rozdíl $P^k(x)$ od $R(x)$ nebo rozdíl $P^k(x)$ od $Q(x)$ jsou stejné funkce

$$(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})$$

vynásobené dvěma rozdílnými konstantami

$$V^k \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad a \quad V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right]. \quad (5.26)$$

Tyto dvě konstanty jsou druhého stupně rozdílu diferencí $V^k(x)$ ve dvou rozdílných intervalech. Jak jsme už uvedli v (5.23) a (5.24) nejmenší rozdíl diferencí implikuje, že funkci je "hladší" v tomto daném intervalu. Srovnáním dvou týkajících se rozdílů diferencí (5.26) rozhodneme, který bod přidáme do intervalu. Vždy vybereme ten s nejmenší absolutní hodnotou. Tedy jestliže

$$\left| V^k \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \right| < \left| V^k \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right] \right|,$$

vezmeme třetí bod intervalu $x_{i-\frac{3}{2}}$ a

$$\tilde{S}_3(i) = \left\{ x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right\},$$

pak $r = 1$. Pokud nerovnost neplatí přidáme bod $x_{i+\frac{3}{2}}$ a

$$\tilde{S}_3(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right\},$$

tedy $r = 0$. Tato procedura může pokračovat přidáváním jednoho bodu k intervalu v každém kroku, podle nejmenší absolutní hodnoty dvou týkajících se rozdílů diferencí, dokud nemáme $m + 1$ bodů v intervalu

$$\tilde{S}_{m+1}(i) = \left\{ x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+m+\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.27)$$

pak

$$S(i) = \{D_{i-r}, \dots, D_{i+m-r+1}\}, \quad (5.28)$$

kde r je dáno tím jaké body jsou přidávány do množiny $\tilde{S}_j(i)$, $j = 3, \dots, m + 1$.

5.4.4 Algoritmus 1D ENO rekonstrukce pro $m=3$

Mějme průměry \mathbf{w}_i^k , $i \in \mathbb{N}$ funkce $\mathbf{w}(w, t)$ v čase t_k a intervalu D_i . ENO rekonstrukce hodnot $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^{k-}$, $\mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}}^{k+}$ aproximující $\mathbf{w}(x_{i+\frac{1}{2}}^-, t_k)$, $\mathbf{w}(x_{i-\frac{1}{2}}^+, t_k)$ se získá následovně:

1. Vezmeme množinu $\tilde{S}_2(i) = \{x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\}$ a $S(i) = \{D_i\}$.
2. Určíme $\tilde{S}_3(i)$ tak, že pomocí ENO procedury přidáme buď $x_{i-\frac{3}{2}}$ nebo $x_{i+\frac{3}{2}}$ do množiny $\tilde{S}_2(i)$.

- je-li $\left| V \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \right| \leq \left| V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right] \right|$ přidáme $x_{i-\frac{3}{2}}$ do šablony $\tilde{S}_2(i)$ a obdržíme

$$\tilde{S}_3(i) = \left\{ x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (5.29)$$

- Jinak přidáme $x_{i+\frac{3}{2}}$ do šablony $\tilde{S}_2(i)$ a obdržíme

$$\tilde{S}_3(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right\}. \quad (5.30)$$

Určíme $\tilde{S}_4(i)$ tak, že pomocí ENO procedury přidáme bod do $\tilde{S}_3(i)$.

- Je-li $\tilde{S}_3(i) = \left\{ x_{i-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+\frac{1}{2}} \right\}$ pak
 - je-li $\left| V \left[x_{i-\frac{5}{2}}, \dots, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \right| \leq \left| V \left[x_{i-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+\frac{3}{2}} \right] \right|$ přidáme $x_{i-\frac{5}{2}}$ do šablony $\tilde{S}_3(i)$ a obdržíme

$$\tilde{S}_4(i) = \left\{ x_{i-\frac{5}{2}}, \dots, x_{i+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (5.31)$$

- Jinak přidáme $x_{i+\frac{3}{2}}$ do šablony $\tilde{S}_3(i)$ a obdržíme

$$\tilde{S}_4(i) = \left\{ x_{i-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+\frac{3}{2}} \right\}. \quad (5.32)$$

- Je-li $\tilde{S}_3(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+\frac{3}{2}} \right\}$ pak
 - je-li $\left| V \left[x_{i-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+\frac{3}{2}} \right] \right| \leq \left| V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+\frac{5}{2}} \right] \right|$ přidáme $x_{i-\frac{3}{2}}$ do šablony $\tilde{S}_3(i)$ a obdržíme

$$\tilde{S}_4(i) = \left\{ x_{i-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+\frac{3}{2}} \right\}. \quad (5.33)$$

- Jinak přidáme $x_{i+\frac{5}{2}}$ do šablony $\tilde{S}_3(i)$ a obdržíme

$$\tilde{S}_4(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+\frac{5}{2}} \right\}. \quad (5.34)$$

3. Napíšeme výslednou šablonu.

- Je-li $\tilde{S}_4(i)$ definované vzorcem 5.31, pak $S(i) = \{D_{i-2}, D_{i-1}, D_i\}$, tj. vzorec (5.28) pro $r = 2$.
- Je-li $\tilde{S}_4(i)$ definované vzorcem 5.32 nebo 5.33, pak $S(i) = \{D_{i-1}, D_i, D_{i+1}\}$, tj. vzorec (5.28) $r = 1$.
- Je-li $\tilde{S}_4(i)$ definované vzorcem 5.34, pak $S(i) = \{D_i, D_{i+1}, D_{i+2}\}$, tj. vzorec (5.28) $r = 0$.

Abychom ukázaly jak probíhá výpočet zvolíme $\tilde{S}_3(i) = \{x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\}$ a $\tilde{S}_4(i) = \{x_{i-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+\frac{3}{2}}\}$, tzn. $r = 1$. Na této šabloně budeme počítat hodnotu $p^k(x)$. Pomocí (5.22) lze $p^k(x)$ vypočítat podle vzorce (5.22) Rozepsáním (5.22) dostaneme

$$\begin{aligned}
p^k(x) = & V^k \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}} \right] + V^k \left[x_{i-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \left((x - x_{i-\frac{1}{2}}) + (x - x_{i-\frac{3}{2}}) \right) \\
& + V^k \left[x_{i-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+\frac{3}{2}} \right] \left((x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}) + (x - x_{i-\frac{3}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \right. \\
& \left. + (x - x_{i-\frac{3}{2}})(x - x_{i-\frac{1}{2}}) \right).
\end{aligned}$$

4. Konstruujeme kvadratický polynom $p_i^k(x)$ na intervalu D_i jako $p_i^k = p^k|_{D_i}$, $p^k(x)$ je polynom stupně 2 (tj. $m-1$) splňující (5.15). Dosazením dostáváme požadované hodnoty

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}^{k-} &= p_i(x_{i+\frac{1}{2}}), \\
\mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}}^{k+} &= p_i(x_{i-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

6. ADER

6.1 Odvození schématu typu ADER pro SWE s $z = konst$

Popíšeme metodu ADER řádu 3 pro následující systém dvourozměrných rovnic mělké vody

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0, \quad \text{v } Q_T = \Omega \times (0, T), \quad (6.1)$$

$$\mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L(x) & \text{je-li } x < 0, \\ \mathbf{w}_R(x) & \text{je-li } x > 0, \end{cases}$$

kde počáteční podmínky $\mathbf{w}_L(x)$, $\mathbf{w}_R(x)$ jsou hladké vektorové funkce proměnné x . Použijeme stejné značení jako v kapitole 4. Jako u metody konečných objemů provedeme integraci přes množinu $D_i \times (t_k, t_{k+1})$ a použitím Greenovy věty dostaneme

$$\mathbf{w}_i^{k+1} - \mathbf{w}_i^k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij})_s dS \right) dt = 0. \quad (6.2)$$

Nyní zavedeme *zobecněný numerický tok* $\hat{\mathbf{H}}$ aproximující integrální průměry toku $\sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij})_s$ přes množinu $\Gamma_{ij} \times (t_k, t_{k+1})$, tzn.

$$\frac{1}{\tau_k} \frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij})_s dS dt \approx \hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) \quad (6.3)$$

kde $\hat{\mathbf{w}}_i^k$, $\hat{\mathbf{w}}_j^k$ jsou polynomy stupně nejvýše $p - 1$, které získáme vhodnou polynomiální rekonstrukcí z integrálních průměrů \mathbf{w}_i^k , $i \in J$ jako v kapitole 5. Jsou to vektory polynomů proměnných x_1, x_2 . Tzn. požadujeme, aby $\hat{\mathbf{w}}_i^k$, $\hat{\mathbf{w}}_j^k$ splňovaly následující podmínky

1.
$$\int_{D_i} \hat{\mathbf{w}}_i^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{w}_i^k \quad (6.4)$$

2.
$$\hat{\mathbf{w}}_i^k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_k)|_{D_i} + O(h^p), \quad \text{jestliže } \mathbf{w} \in C^p(\Omega), \quad (6.5)$$

kde $h = \max_{i \in J} \text{diam} D_i$ je krok sítě.

Dosazením numerického toku (6.3) do 6.1 obdržíme explicitní schéma následujícího tvaru

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} \hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) |\Gamma_{ij}|, \quad D_i \in \mathcal{D}_h, \quad t_k \in [0, T]. \quad (6.6)$$

Nyní vidíme, že schéma typu ADER se od metody konečných objemů liší definicí numerického toku (6.3). U metody konečných objemů závisí numerický tok na konstantních vektorech, ale u schéma typu ADER na vektorech $\hat{\mathbf{w}}_i^k$, $\hat{\mathbf{w}}_j^k$ složených z polynomů stupně nejvýše $p - 1$.

6.1.1 Zobecněná Godunovova metoda

Systém je rotačně invariantní, proto můžeme zavést transformaci souřadnic x_1, x_2 do nového kartézského systému \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 . Tento kartézský systém má počátek ve středu \mathbf{x}_{ij} hrany Γ_{ij} , osu \tilde{x}_1 orientovanou ve směru normály \mathbf{n}_{ij} a \tilde{x}_2 je tečnou ke hraně Γ_{ij} , tzn. pro $N = 2$ máme

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbb{Q}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}), \quad \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}_{ij} \in \Gamma_{ij} \quad (6.7)$$

a $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}_0(\mathbf{n}_{ij})$ je matice rotace. Dostaneme

$$\sum_{s=1}^2 (n_{ij})_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t))|_{\Gamma_{ij}} \approx \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}(\cdot, t))|_{\tilde{\Gamma}_{ij}} = \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\cdot, t; \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R))|_{\tilde{\Gamma}_{ij}}, \quad (6.8)$$

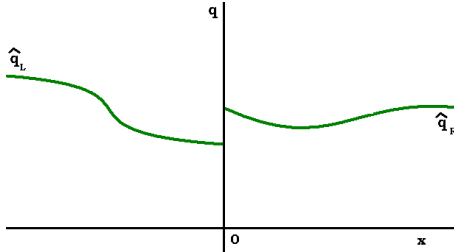
kde $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\mathbf{n}_{ij})$ je matice definovaná pro $N = 2$, $\tilde{\Gamma}_{ij}$ vznikne transformací hrany Γ_{ij} do systému souřadnic \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 . Vektory polynomů $\hat{\mathbf{q}}_L$ a $\hat{\mathbf{q}}_R$ jsou proměnných \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 stupně nejvýše $p - 1$ definovaných následovně

$$\hat{\mathbf{q}}_L(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{Q} \hat{\mathbf{w}}_i^k(\mathbf{x}) = \mathbb{Q} \hat{\mathbf{w}}_i^k(\mathbb{Q}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_{ij}) \quad (6.9)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{Q} \hat{\mathbf{w}}_j^k(\mathbf{x}) = \mathbb{Q} \hat{\mathbf{w}}_j^k(\mathbb{Q}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_{ij}) \quad (6.10)$$

a $\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}, t, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)$ je řešení *zobecněného Riemannova problému*, jehož počáteční data nejsou dána konstantními stavovými vektory, ale vektory polynomů $\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_1} &= 0, \\ \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) &= \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_L(\tilde{\mathbf{x}}), & \tilde{x}_1 < 0, \\ \hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{x}}), & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.11)$$



Obrázek 6.1: Zobecněný Riemannův problém.

Řešení problému (6.11) je věnována následující sekce 6.1.2, jeho existencí se v této práci nezabýváme. Poznamenejme, že řešení $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ tohoto problému nyní závisí na \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 a t . Pro problém (6.11) definujeme tzv. *zobecněný Godunův tok*

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) := \frac{1}{\tau_k} \frac{1}{|\tilde{\Gamma}_{ij}|} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}, t; \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) dS dt \quad (6.12)$$

ze vzorů (6.3) a (6.8) obdržíme následující definici zobecněného numerického toku

$$\hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) = \mathbb{Q}^{-1} \hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R). \quad (6.13)$$

Všimněme si, že definice „klasického“ Godunovova toku nijak nekoliduje s definicí zobecněného Godunovova toku (6.12). Schéma typu ADER je zobecněním Godunovovy metody.

6.1.2 Řešení zobecněného Riemannova problému

Hlavní myšlenkou konstrukce řešení zobecněného Riemannova problému je převedení na posloupnost „klasických“ Riemannových problémů, které řešit umíme. Začneme tím, že napíšeme prvních $p = 3$ členů Taylorova rozvoje $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tau)$ v čase

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tau) &\approx \mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) + \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) \right] \frac{\tau^k}{k!} \\ &= \mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) \tau + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) \frac{\tau^2}{2},\end{aligned}\tag{6.14}$$

kde $\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t)$. Vedoucí člen (6.14) odpovídá řešení „klasického“ Riemannova problému s po částech konstantními daty pro $\tilde{x}_1/t = 0$, které zkonstruovat umíme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_1} &= 0, \\ \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) &= \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_L(\tilde{\mathbf{x}}_0), & \tilde{x}_1 < 0, \\ \hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{x}}_0), & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases}\end{aligned}\tag{6.15}$$

Členy vyššího řádu určíme ve dvou krocích:

1. Procedura Cauchyho–Kowalewské

Touto procedurou vyjádříme časové derivace v Taylorově rozvoji (6.14) pomocí prostorových derivací. Budeme postupně derivovat rovnice (6.1) transformované do kartézského systému souřadnic \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_s} = 0, \quad \mathbf{q} = \mathbb{Q}\mathbf{w}\tag{6.16}$$

podle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 až do řádu $p-1$ (tj. 2. řád). Z těchto derivací následně vyjádříme časové derivace \mathbf{q} .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= - \sum_{s=1}^2 \left(\frac{D\mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_s}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} &= - \sum_{s=1}^2 \left[\left(\frac{D^2 \mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}^2} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_s} + \left(\frac{D\mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t \partial \tilde{x}_s} \right].\end{aligned}\tag{6.17}$$

Potřebujeme ještě vyjádřit časoprostorové derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t \partial \tilde{x}_1} &= - \sum_{s=1}^2 \left[\left(\frac{D^2 \mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}^2} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_s} + \left(\frac{D\mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_s} \right], \\ \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t \partial \tilde{x}_2} &= - \sum_{s=1}^2 \left[\left(\frac{D^2 \mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}^2} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_s} + \left(\frac{D\mathbf{f}_s}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_2 \partial \tilde{x}_s} \right].\end{aligned}\tag{6.18}$$

2. Výpočet prostorových derivací

Postupným derivováním rovnice (6.11) a vektorů $\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R$ podle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 až

do řádu 3 odvodíme evoluční rovnice pro prostorové derivace. Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{q}^{(1,0)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(1,0)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) (\mathbf{q}^{(1,0)})^2, \\
\frac{\partial \mathbf{q}^{(0,1)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(0,1)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(1,0)} \mathbf{q}^{(0,1)}, \\
\frac{\partial \mathbf{q}^{(2,0)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(2,0)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(1,0)} \mathbf{q}^{(2,0)} - \left(\frac{D^3\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^3} \right) (\mathbf{q}^{(1,0)})^3 \\
&\quad - 2 \left(\frac{D^2\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(1,0)} \mathbf{q}^{(2,0)}, \\
\frac{\partial \mathbf{q}^{(1,1)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(1,1)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(0,1)} \mathbf{q}^{(2,0)} - \left(\frac{D^3\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^3} \right) \mathbf{q}^{(0,1)} (\mathbf{q}^{(1,0)})^2 \\
&\quad - 2 \left(\frac{D^2\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(1,0)} \mathbf{q}^{(1,1)}, \\
\frac{\partial \mathbf{q}^{(0,2)}}{\partial t} + \left(\frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(0,2)}}{\partial \tilde{x}_1} &= - \left(\frac{D^2\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) \mathbf{q}^{(0,1)} \mathbf{q}^{(1,1)} - \left(\frac{D^3\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^3} \right) (\mathbf{q}^{(0,1)})^2 \mathbf{q}^{(1,0)} \\
&\quad - \left(\frac{D^2\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{D\mathbf{q}^2} \right) (\mathbf{q}^{(0,2)} \mathbf{q}^{(1,0)} + \mathbf{q}^{(0,1)} \mathbf{q}^{(1,1)}),
\end{aligned} \tag{6.19}$$

kde

$$\mathbf{q}^{(k_1, k_2)} = \frac{\partial^{k_1+k_2} \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_1^{k_1} \partial \tilde{x}_2^{k_2}}, \quad 1 \leq k_1 + k_2 \leq 2.$$

Označme

- $\mathbb{A}_1(\mathbf{q}) = D\mathbf{f}_1(\mathbf{q})/D\mathbf{q}$,
- $\mathbb{H}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(1,0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k_1, k_2)})$ nelineární člen závislý na $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$, $\mathbf{q}^{(1,0)}$, \dots , $\mathbf{q}^{(k_1, k_2)}$.

Nyní můžeme všechny rovnice pro prostorové derivace $\mathbf{q}^{(k_1, \dots, k_N)}$ obecně zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{q}^{(k_1, k_2)}}{\partial t} + \mathbb{A}_1(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}^{(k_1, k_2)}}{\partial \tilde{x}_1} = \mathbb{H}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{(1,0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k_1, k_2)}). \tag{6.20}$$

V Taylorově rozvoji (6.14) se vyskytuje pouze hodnota řešení pro pevný bod $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in \tilde{\Gamma}_{ij}$ a $t \rightarrow 0$. Proto Toro v [11] nelineární člen \mathbb{H} zanedbává z důvodu, že ovlivňuje řešení pouze pro $t > 0$, a proto ho také zanedbáváme. Rovnici (6.20) linearizujeme okolo vedoucího členu $\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0)$ časového rozvoje (6.14) a nahradíme data daná vektory polynomů $\hat{\mathbf{q}}_L^{(k_1, k_2)}$, $\hat{\mathbf{q}}_R^{(k_1, k_2)}$ jejich hodnotami v bodě $\tilde{\mathbf{x}}_0$. Popsaná zjednodušení vedou na následující lineární Riemannův problém pro prostorové derivace \mathbf{q} :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{q}^{(k_1, k_2)}}{\partial t} + \mathbb{A}_0 \frac{\partial \mathbf{q}^{(k_1, k_2)}}{\partial \tilde{x}_1} &= 0, \quad \mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_0, 0)), \\
\mathbf{q}^{(k_1, k_2)}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) &= \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_L^{(k_1, k_2)}(\tilde{\mathbf{x}}_0), & \tilde{x}_1 < 0, \\ \hat{\mathbf{q}}_R^{(k_1, k_2)}(\tilde{\mathbf{x}}_0), & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Prostorové derivace v bodě $\tilde{\mathbf{x}}_0 = 0$ pro $\tau \rightarrow 0$ potom odpovídají řešení problému (6.21) pro $\tilde{x}_1/t = 0$.

Máme-li všechny prostorové derivace, potom můžeme pomocí Cauchyho–Kowalewské procedury vyčíslit časové derivace pro Taylorův rozvoj (6.14). Řešení zobecněného Riemannova problému v bodě $\tilde{\mathbf{x}}_0$ tedy aproximujeme jako

$$\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) \approx \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t), \quad (6.22)$$

kde $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t)$ je dán rozvojem (6.14).

6.1.3 Konstrukce zobecněného Godunovova toku

Nyní nám již zbývá pouze vypočítat zobecněný Godunův tok. Vyjdeme z definice (6.12). K vyčíslení integrálu přes $\tilde{\Gamma}_{ij}$ použijeme vhodnou kvadraturní formuli (např. Toro používá pro $N = 2$, $p = 3$ dvoubodovou Gaussovu kvadraturu). Dostaneme

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) = \frac{1}{\tau_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{\nu=1}^{K_\nu} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) \omega_\nu \right) dt, \quad (6.23)$$

kde $\tilde{\mathbf{x}}_\nu$, ω_ν jsou uzly resp. váhy kvadraturní formule přes stěnu $\tilde{\Gamma}_{ij}$ a K_ν je jejich počet. Uvedeme dva způsoby vyčíslení zobecněného Godunovova toku (6.23):

1. metoda založená na numerické integraci

Použijeme pro vyčíslení integrálu přes $[t_k, t_{k+1}]$ Gaussovo kvadraturní pravidlo řádu nejméně p , zobecněný Godunův tok potom vypadá takto:

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) = \sum_{\mu=1}^{K_\mu} \sum_{\nu=1}^{K_\nu} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t_\mu, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) \omega_\nu \omega_\mu, \quad (6.24)$$

kde t_μ , ω_μ jsou uzly resp. váhy Gaussovy kvadratury přes $[t_k, t_{k+1}]$, K_μ je jejich počet a $\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t_\mu, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)$ je řešení zobecněného Riemannova problému (6.11) dané aproximací (6.22) v uzlu kvadratury $(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t_\mu)$. Podobně jako u „klasické“ Godunovovy metody nahrazujeme v praxi přesné řešení Riemannova problému řešením přibližným.

2. metoda založená na Taylorově rozvoji

Druhý způsob vychází z prvních p členů Taylorova rozvoje funkce toku \mathbf{f}_1 :

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau)) = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}, 0)) + \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}, 0)) \right] \frac{\tau^k}{k!}, \quad (6.25)$$

kde $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Gamma}_{ij}$, $\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}, 0)$ je vedoucí člen Taylorova rozvoje (6.14) a členy vyššího řádu získáme Cauchyho–Kowalewské procedurou (6.17). Vzhledem k (6.22) můžeme aproximovat

$$\mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}, t, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) \approx \mathbf{f}_1(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, t)). \quad (6.26)$$

Dosazením (6.26) do (6.23) a následnou integrací podle času dostaneme jiné vyjádření zobecněného Godunovova toku

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) = \sum_{\nu=1}^{K_\nu} \left(\mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, 0)) + \sum_{l=1}^{p-1} \left[\frac{\partial^l}{\partial t^l} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, 0)) \right] \frac{\tau_k^l}{(l+1)!} \right) \omega_\nu, \quad (6.27)$$

kde $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Tedy pro integraci přes $[t_k, t_{k+1}]$ není potřeba numerická kvadratura. Navíc v tomto případě můžeme použít místo vedoucího členu $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}^+(\tilde{\mathbf{x}}, 0))$ rozvoje v (6.27) některý z přibližných Riemannových řešičů. Zbývající členy Taylorova rozvoje potom lze vyčíslit pomocí Cauchyho–Kowalewské procedury (6.17) s využitím odpovídajícího přibližného řešení Riemannova problému.

6.1.4 Algoritmus ADER

Zformulujeme pro přehlednost pořadí výpočtu pomocí následujícího algoritmu: Na každé časové hladině t_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ provedeme následující kroky: VSTUP: Síť konečných objemů $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$, integrální průměry \mathbf{w}_i^k řešení přes objemy D_i v časovém okamžiku t_k a požadovaný řád přesnosti p .

1. Pro každé $D_i \in \mathcal{D}_h$ spočti z daných integrálních průměrů \mathbf{w}_j^k , $j \in J$ vektor polynomů $\hat{\mathbf{w}}_i^k$ stupně nejvýše $p - 1$ splňující (6.4) a (6.5) použitím vhodné polynomiální rekonstrukce.
2. Pro každé $D_i \in \mathcal{D}_h$ proved':
 - (a) Vyřeš zobecněný Riemannův problém (6.11) s počátečními daty $\hat{\mathbf{q}}_i^k$ a $\hat{\mathbf{q}}_j^k$, $j \in S(i)$ převedením na Riemannův problém (6.15) a posloupnost lineárních Riemannových problémů (6.21) v každém uzlu \mathbf{x}_ν kvadraturní formule ve vzorci (6.23).
 - (b) Pomocí Cauchyho–Kowalewské procedury (6.17) vyčíslí všechny časové derivace $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t)$ do řádu $p - 1$ v každém uzlu kvadraturní formule (6.23).
 - (c) Spočti zobecněné Godunovovy toky $\hat{\mathbf{g}}_G$ buď pomocí metody založené na numerické integraci tj. dosazením (6.14) do (6.24), nebo metodou založenou na Taylorově rozvoji (6.25).
 - (d) Spočti numerické toky $\hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij})$ ze vztahu (6.13).
 - (e) Udatuj integrální průměr \mathbf{w}_i^{k+1} použitím schématu (6.6).

VÝSTUP: Udatované integrální průměry \mathbf{w}_i^{k+1} , $i \in J$ přibližného řešení na časové hladině t_{k+1} . Předchozí text je čerpán z diplomové práce K. Findejse [5].

6.2 ADER pro SWE s $z \neq konst$

Přístup ADER definuje numerické toky a numerické zdroje tak, že explicitní jednokroková formule (6.39) vypočte řešení (6.38) libovolně vysokého řádu přesnosti (v prostoru i čase). Přístup se skládá ze tří kroků:

1. rekonstrukce vyššího řádu polynomů ze středních hodnot řešení (polynomi-
cká rekonstrukce, ENO,...),
2. řešení DRP (angl. Derivative Riemann problem = DRP) na rozhraní buněk
a vyhodnocení toku $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$,
3. vyhodnocení numerického zdroje S_i pomocí vyššího řádu výpočtu časoprostorových
integrálů uvnitř kontrolního objemu

Popíšeme metodu ADER řádu $p = 3$ pro následující systém dvourozměrných rovnic mělké vody

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \mathbf{s}(\mathbf{w}), \quad \text{v } Q_T = \Omega \times (0, T), \quad (6.28)$$

$$\mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L(x) & \text{jestliže } x < 0, \\ \mathbf{w}_R(x) & \text{jestliže } x > 0, \end{cases}$$

kde počáteční podmínky $\mathbf{w}_L(x), \mathbf{w}_R(x)$ jsou hladké vektorové funkce proměnné x .

Jako u ADER pro $z = konst$ dostaneme

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} |\Gamma_{ij}| \widetilde{\mathbf{H}}_{total}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}), \quad (6.29)$$

kde $\widetilde{\mathbf{H}}_{total}$ je tvaru

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}_{total}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, z_i, z_j, \mathbf{n}_{ij}) &= \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{g}_{total}(\mathbb{Q}\hat{\mathbf{w}}_i^k, \mathbb{Q}\hat{\mathbf{w}}_j^k, z_i, z_j), \\ \mathbf{g}_{total}(\mathbb{Q}\hat{\mathbf{w}}_i^k, \mathbb{Q}\hat{\mathbf{w}}_j^k, z_i, z_j) &= \mathbf{g}_{conv}(\mathbb{Q}\hat{\mathbf{w}}_i^k, \mathbb{Q}\hat{\mathbf{w}}_j^k, z_i, z_j) + gh_i^k z_* (z_i, z_j) \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

a kde $\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k$ jsou polynomy stupně nejvýše $p - 1$, které získáme vhodnou polynomiální rekonstrukcí z integrálních průměrů $\mathbf{w}_i^k, i \in J$.

Jako v předchozí sekci provedeme transformaci souřadnic

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbb{Q}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}), \quad \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}_{ij} \in \Gamma_{ij}.$$

Z rotační invariance v sekci 3.2 a sekce 6.1.1 dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial f_s(\mathbf{q})}{\partial \hat{x}_s} = s(\mathbf{q}),$$

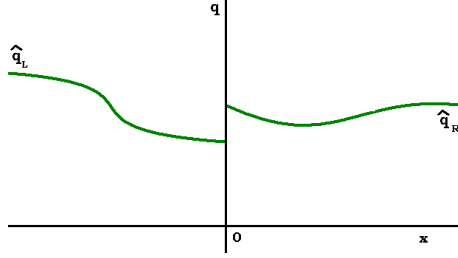
$$\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{x}}, 0) = \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_L(\tilde{\mathbf{x}}), & \tilde{x}_1 < 0, \\ \hat{\mathbf{q}}_R(\tilde{\mathbf{x}}), & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases}$$

Tuto rovnici nazýváme Riemannův problém (angl. Derivative Riemann problem = DRP) a značíme ji DRP_K , kde K reprezentuje počet netriviálních prostorových derivací počáteční podmínky, tj.

$$K = \max \{K_L, K_R\},$$

kde K_L a K_R jsou takové, že

$$\partial_x^{(k)} \mathbf{q}_L(x) \equiv 0 \quad \forall k > K_L, \quad \forall x < 0,$$



Obrázek 6.2: Riemannův problém se zdrojovým členem.

$$\partial_x^{(k)} \mathbf{q}_R(x) \equiv 0 \quad \forall k > K_R, \quad \forall x > 0.$$

Více lze najít v [9]. DRP_0 se myslí, že všechny první ($k = 1$) a vyšší řády prostorových derivací počáteční podmínky, počítané dál od počátku, jsou nulové. Pak problém odpovídá Riemannovu problému s po částech konstantními daty.

Počáteční stavy $\mathbf{q}_L(x)$ a $\mathbf{q}_R(x)$ předpokládají hladkost funkce v x . Dál od $x = 0$ můžeme ke konstrukci řešení $\mathbf{q}(x, t)$ užít proceduru Cauchyho–Kowalewské. Bude nás zajímat řešení DRP_K v $x = 0$, neboť zde mohou být počáteční data nespojitá.

Počáteční data jsou nespojitá v $x = 0$. Dál od $x = 0$ můžeme definovat jednostranné prostorové derivace, potom na rozhraní $x = 0$ máme skok v prostorové derivaci. Tyto skoky tvoří počáteční data pro nový Riemannův problém.

Řešením tohoto problému je funkce $\mathbf{q}_{LR}(t)$, je to mocnná řada v $x = 0$. Lze zapsat takto

$$\mathbf{q}_{LR}(\tau) = \mathbf{q}(0, 0_+) + \sum_{k=1}^K \left[\partial_t^{(k)} \mathbf{q}(0, 0_+) \right] \frac{\tau^k}{k!}, \quad (6.31)$$

kde $0_+ = \lim_{t \rightarrow 0_+} t$. Řešení obsahuje vedoucí výraz $\mathbf{q}(0, 0_+)$ a výrazy vyššího řádu $\partial_t^{(k)} \mathbf{q}(0, 0_+)$. V následujícím popíšeme metodu výpočtu každého výrazu rozvoje.

6.2.1 Výpočet vedoucího členu

Vedoucí člen $\mathbf{q}(0, 0_+)$ v rozvoji (6.31) je realizován pouze rozvojem hraničních hodnot $\mathbf{q}_L(0)$ a $\mathbf{q}_R(0)$ v 6.28. Proto vedoucí člen $\mathbf{q}(0, 0_+)$ vypočteme z podobnosti řešení následující DRP_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{q})}{\partial x_s} &= 0, \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{q}_L(0) \equiv \lim_{x \rightarrow 0_-} \mathbf{q}_L(x) & \text{jestliže } x < 0, \\ \mathbf{q}_R(0) \equiv \lim_{x \rightarrow 0_+} \mathbf{q}_R(x) & \text{jestliže } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Zde je možné vliv zdrojového členu zanedbat. Označme vedoucí člen podobných řešení $D^{(0)}(x/t)$, je dán vývojem tohoto řešení podél časové osy, to je $x/t = 0$, a sice

$$\mathbf{q}(0, 0_+) = D^{(0)}(0). \quad (6.33)$$

Hodnotu $D^{(0)}(0)$ známe jako Godunův stav odpovídající numerickému toku spojeným s prvním řádem Godunovovu schématu.

6.2.2 Výrazy vyššího řádu

K výpočtu výrazů vyššího řádu v (6.31) potřebujeme spočítat koeficienty parciální derivace $\partial^{(k)}\mathbf{q}(x, t)$ v $x = 0$ a $t = 0_+$. Vypočteme je na obou stranách počáteční nespojitosti, tj. v $x = 0$. Nyní můžeme implementovat přímý přístup k výpočtu výrazu vyššího řádu. Metoda níže ukazuje výpočet všech prostorových derivací pomocí časových derivací na rozhraní.

Analogicky jako v sekci 6.1.2 vyjádříme všechny časové derivace prostorovými derivacemi. Aplikujeme proceduru Cauchyho–Kowalewské a uijeme skutečnosti, že oba fyzikální toky a zdrojový člen jsou funkce vektorových konzervativních proměnných. To dává následující vyjádření časových derivací

$$\partial_t^{(k)}\mathbf{q}(x, t) = \mathcal{P}^{(k)}(\partial_x^{(0)}\mathbf{q}, \partial_x^{(1)}\mathbf{q}, \dots, \partial_x^{(k)}\mathbf{q}).$$

Tyto časové parciální derivace v $x = 0$ pro $t > 0$ mají smysl, jestliže prostorové derivace $\partial_x^{(0)}\mathbf{q}, \partial_x^{(1)}\mathbf{q}, \dots, \partial_x^{(k)}\mathbf{q}$ dávají smysl v $x = 0$ pro $t > 0$. Pro $x < 0$ a $x > 0$ jsou všechny prostorové derivace definovány a mají smysl

$$\partial_x^{(k)}\mathbf{q}_L(x), \partial_x^{(k)}\mathbf{q}_R(x), \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Pro $x = 0$ máme jednostranné derivace

$$\partial_x^{(k)}\mathbf{q}_L(0) = \lim_{x \rightarrow 0_-} \partial_x^{(k)}\mathbf{q}_L(x), \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\partial_x^{(k)}\mathbf{q}_R(0) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \partial_x^{(k)}\mathbf{q}_R(x), \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Máme množinu K párů $(\partial_x^{(k)}\mathbf{q}_L(0), \partial_x^{(k)}\mathbf{q}_R(0))$ konstantních vektorů takových, že je můžeme užít jako počáteční podmínky pro K konvektivních Riemannových problémů. Sečteme-li je, dostaneme množinu odpovídajících evolučních rovnic pro $\partial_x^{(k)}\mathbf{q}(x, t)$. Slabé řešení evoluční rovnice může být jednoduše konstruováno. Můžeme ověřit, že $\partial_x^{(k)}\mathbf{q}(x, t)$ se řídí následujícím systémem nelineárních nehomogenních evolučních rovnic

$$\partial_t (\partial_x^{(k)}\mathbf{q}(x, t) + \mathbb{A}_1(\mathbf{q})\partial_x (\partial_x^{(k)}\mathbf{q}(x, t))) = \mathbf{H}^k, \quad (6.34)$$

kde matice $\mathbb{A}_1(\mathbf{q})$ je přesně Jakobiova matice systému (6.28). Rovnice (6.34) dostaneme manipulací derivací (6.28). Zdrojový výraz \mathbf{H}^k na pravé straně rovnice (6.34)

$$\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^k(\partial_x^{(0)}\mathbf{q}, \partial_x^{(1)}\mathbf{q}, \dots, \partial_x^{(k)}\mathbf{q})$$

je funkce prostorových derivací $\partial_x^{(k)}\mathbf{q}$, pro $k = 0, 1, \dots, K$ a zmizí pokud Jakobiova matice \mathbb{A}_1 je konstanta a $\mathbf{S} \equiv 0$, tj. když počáteční systém v (6.28) je lineární a homogenní s konstantními koeficienty. Aby bylo možné snadno vyřešit tyto evoluční rovnice, provádíme dvě zjednodušení, nejprve zanedbáme zdrojový člen \mathbf{H}^k a pak linearizujeme výsledné homogenní rovnice.

Zanedbání zdrojového členu \mathbf{H}^k je možné, pokud potřebujeme pouze $\partial_x^{(k)}\mathbf{q}(x, t)$ prvního stupně interakce levých a pravých stavů. Máme homogenní nelineární

systémy prostorových derivací. Pak provedeme linearizaci homogenních systémů o vedoucí člen rozvoje řady (6.31) takový, že za matici bereme konstantní matici

$$\mathbb{A}_{LR}^{(0)} = (\mathbb{Q}(0, 0_+)).$$

K nalezení prostorové derivace v $x = 0$, $t = 0_+$ řešíme následující homogenní linearizovaný konvektivní Riemannův problém

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\partial_x^{(k)} \mathbf{q}(x, t) + \mathbb{A}_{LR}^{(0)} \partial_x \left(\partial_x^{(k)} \mathbf{q}(x, t) \right) \right) &= 0, \\ \partial_x^{(k)} \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \partial_x^{(k)} \mathbf{q}_L(0) & \text{jestliže } x < 0, \\ \partial_x^{(k)} \mathbf{q}_R(0) & \text{jestliže } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Všimněme si, že (konstantní) Jakobiho matice $\mathbb{A}_{LR}^{(0)}$ má stejné koeficienty pro každý $\partial_x^{(k)} \mathbf{q}(x, t)$ a je vypočtena pouze jednou s použitím vedoucího výrazu rozvoje.

Označme podobně řešení (6.35) jako $\mathbb{D}^{(k)}(x/t)$. Ve výpočtu všech výrazů vyšších řádů je řešení odpovídajícího Riemannova problému analytické a nevzniká tedy otázka výběru Riemannova řešiče. Příslušné hodnoty na rozhraní dostaneme na základě výpočtu v $x/t = 0$, tj.

$$\partial_x^{(k)} \mathbf{q}(0, 0_+) = \mathbb{D}^{(k)}(0).$$

Nazýváme to hodnota Godunova stavu, analogicky jako na rozhraní stavu (6.33) souvisejícím s vedoucím koeficientem.

Vývoj všech prostorových derivací na rozhraní $x = 0$ tvoří časové derivace a konečně definujeme řešení problému DRP_K jako řešení rozvoje

$$\mathbf{q}_{LR}(\tau) = \mathbf{w}(0, 0_+) + \partial_x \mathbf{w}(0, 0_+) \tau + \frac{\partial_x^{(2)} \mathbf{w}(0, 0_+)}{2!} \tau^2 + \dots + \frac{\partial_x^{(k)} \mathbf{w}(0, 0_+)}{k!} \tau^k.$$

Ještě zbývá vyhodnocení numerického toku $\hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{w}}_i^k, \hat{\mathbf{w}}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) = \mathbb{Q}^{-1} \hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)$. Dále postupujeme analogicky jako v sekci 6.1.3 a vypočteme

$$\hat{\mathbf{g}}_G(\hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R) = \sum_{\mu=1}^{K_\mu} \sum_{\nu=1}^{K_\nu} \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{q}}_{RS}(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, t_\mu, \hat{\mathbf{q}}_L, \hat{\mathbf{q}}_R)) \omega_\nu \omega_\mu, \quad (6.36)$$

6.2.3 Aproximace zdrojového členu

Nyní se budeme zabývat zdrojovým členem. Zavedeme značení

$$S_i = \begin{pmatrix} S_i^{(1)} \\ S_i^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

První složka zdrojového členu (tj. zdroj rovnice kontinuity) je rovna nule. Pro vyhodnocení druhé složky numerického zdroje $S_i^{(2)}$ použijeme Gaussovo integrační pravidlo.

6.3 Popis ADER schémata v 1D

Mějme hyperbolický systém tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} = \mathbf{s}(\mathbf{q}) \quad (6.38)$$

s počátečními a okrajovými podmínkami, kde \mathbf{q} je vektor neznámých konzervativních proměnných, $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ je fyzikální tok a $\mathbf{s}(\mathbf{q})$ je zdrojový člen. Přístup ADER definuje numerické toky a numerické zdroje tak, že pomocí explicitní jedнокrokové formule (6.39) vypočteme řešení rovnice (6.38) libovolně vysokého řádu přesnosti (v prostoru i čase).

$$\mathbf{q}_i^{k+1} = \mathbf{q}_i^k + \frac{\tau_k}{|D_i|} (\mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}) + \tau_k S_i, \quad (6.39)$$

kde

$$\begin{aligned} |D_i| &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \\ \tau_k &= t_{k+1} - t_k, \\ \mathbf{q}_i^k &= \frac{1}{|D_i|} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{q}(x, t_k), \\ \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt, \\ S_i &= \frac{1}{|D_i|} \frac{1}{\tau_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{s}(\mathbf{q}) dx d\tau. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Přístup se skládá ze tří kroků:

1. rekonstrukce vyššího řádu polynomů ze středních hodnot řešení (polynomičká rekonstrukce, ENO,...),
2. řešení DRP na rozhraní buněk a vyhodnocení toku $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$,
3. vyhodnocení numerického zdroje S_i pomocí vyššího řádu výpočtu časoprostorových integrálů uvnitř kontrolního objemu.

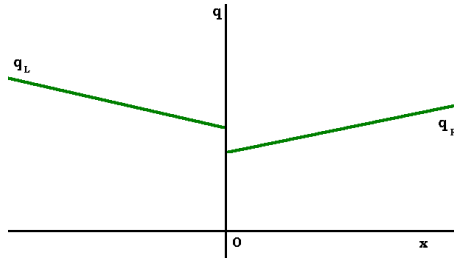
Rovnice (6.39) zahrnující integrální průměry (6.40) je na tomto místě přesný vztah, ale může být použita ke konstrukci numerických metod k výpočtu aproximace řešení (6.38). To je dáno rozdělením oblasti (která nás zajímá) do mnoha disjunktních kontrolních objemů a definováním aproximace toku integrálů, tzv. numerické toky a ke zdrojovému integrálu, nazývaném numerický zdroj. Označme aproximace těchto vektorů stejnými symboly $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$ a S_i v (6.40). Pak vzorec (6.39) je konzervativní jedнокrokovému schématu řešení (6.38). Zdrojem nám byly články [6] a [9].

6.3.1 Rekonstrukce hodnot v bodech

Hodnoty řešení v čase t_k najdeme rekonstrukcí pomocí polynomů vyššího stupně. Můžeme užít například ENO rekonstrukci, tím se zabrání rušivým oscilacím, které vedou k nelineárnímu numerickému schématu. Provádíme (pouze jednou) rekonstrukci jak pro neznámou \mathbf{q} tak pro výšku dna z .

Poznamenejme, že pro r -tý řád přesnosti (v čase i prostoru) musí být rekonstrukční polynomy $(r-1)$ -řádu. Po rekonstrukčním kroku konzervativní proměnné v každé buňce jsou reprezentovány vektorem polynomu $p_i(x)$. Pak v každé buňce rozhraní můžeme představit následující DRP

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} &= \mathbf{s}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{q}_L(x) = p_i(x), & x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{q}_R(x) = p_{i+1}(x), & x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.41)$$



Obrázek 6.3: Riemannův problém se zdrojovým členem s lineární rekonstrukcí.

6.3.2 Řešení DRP

Po rekonstrukci řešíme následující DRP

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} &= \mathbf{s}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{q}_L(x) = p_i(x), & x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{q}_R(x) = p_{i+1}(x), & x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.42)$$

hledáme řešení v $x = x_{i+\frac{1}{2}}$, značeném $\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}}(\tau)$, kde $p_i(x)$ označuje lineární (polynomickou) rekonstrukci na objemu D_i . Všechny prostorové derivace $\mathbf{z}_{i+\frac{1}{2}}$ jsou známy. Užitím vhodného Gaussova pravidla najdeme numerický tok na hranici objemů

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{\alpha=0}^N \mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}}(\gamma_\alpha \Delta t)) K_\alpha,$$

kde γ_α jsou vhodné Gaussovy koeficienty. Řešení $\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}}(\tau)$ DRP 6.42 najdeme Taylorovým rozvojem

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}}(\tau) &= \mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+) + \sum_{k=1}^{r-1} \left[\partial_t^{(k)} \mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+) \frac{\tau^k}{k!} \right], \\ \partial_t^{(k)} \mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+) &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+), \end{aligned} \quad (6.43)$$

kde $0^+ = \lim_{t \rightarrow 0^+} t$. Vedoucí výraz $\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+)$ získáme vyřešením klasického Riemannova problému s po částech konstantními daty

$$\partial_t \mathbf{q} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0 \quad \mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} p_i(x_{i+\frac{1}{2}}), & x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ p_{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}}), & x > x_{i+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (6.44)$$

a vyhodnocením řešení na $(x - x_{i+\frac{1}{2}})/t = 0$. $\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+)$ nazýváme Godunův stav, který je vypočítán užitím přesného Riemannova řešiče. Zbývající výrazy v (6.43) jsou vypočítány tak, že nahradíme všechny časové derivace $\partial_t^{(k)} \mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+)$ prostorovými $\partial_x^{(l)} \mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+)$ užitím Cauchy-Kowalewské procedury. Neznámé prostorové derivace v $t = 0^+$ nalezneme z následujícího linearizovaného Riemannova problému

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_x^{(k)} \mathbf{q}) + \mathbb{A}(\mathbf{q}(x_{i+\frac{1}{2}}, 0^+)) \partial_x \mathbf{f}(\partial_x^{(k)} \mathbf{q}) &= 0, \quad \mathbb{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}, \\ \partial_x^{(k)} \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} d^{(k)} p_i(x_{i+\frac{1}{2}}), & x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ d^{(k)} p_{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}}), & x > x_{i+\frac{1}{2}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.45)$$

kde $\mathbb{A}(\mathbf{q})$ je Jakobiho matice systému a symbol $d^{(k)}$ označuje k -tou derivaci vzhledem k nezávislé proměnné x . Okrajové podmínky jsou uvedeny pomocí polynomů $p_i(x)$, $p_{i+1}(x)$, získanými ENO rekonstrukcí.

6.3.3 Aproximace zdrojového členu

Nyní se budeme zabývat zdrojovým členem. Značení

$$S_i = \begin{pmatrix} S_i^{(1)} \\ S_i^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Pro vyhodnocení druhé složky zdrojového členu nejprve provedeme integraci po částech:

$$\begin{aligned} S_i^{(2)} &= \frac{1}{\tau_k |D_i|} \int_0^{\tau_k} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(-gh \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dt = \frac{-g}{\tau_k |D_i|} \int_0^{\tau_k} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} h \frac{\partial z}{\partial x} dx dt \\ &= \frac{-g}{\tau_k} \int_0^{\tau_k} \left(hz \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} - hz \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}} \right) dt + \frac{g}{\tau_k |D_i|} \int_0^{\tau_k} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(z \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dt. \end{aligned} \quad (6.47)$$

První část je vyhodnocena pomocí vhodných Gaussových integračních bodů a L je celkový počet bodů v tomto pravidle. Taylorův rozvoj pro $h(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)$. Druhý integrál je aproximován Gaussovým integračním pravidlem:

$$\frac{g}{\tau_k |D_i|} \int_0^{\tau_k} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(z \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dt = g \sum_{\alpha=1}^L \left[\sum_{l=1}^L \left(z(x_\alpha) \frac{\partial}{\partial x} h(x_\alpha, \tau_l) \right) K_l \right] K_\alpha. \quad (6.48)$$

První složka zdrojového členu (tj. zdroj rovnice kontinuity) je rovna nule. Integrál v předchozí rovnici musíme vypočítat pomocí dvou prostorových integrálů (tj. integrál přes $x_{i-\frac{1}{2}} - x_i$ a přes $x_i - x_{i+\frac{1}{2}}$), neboť výška $z(x)$ má na rozhraní i -tého objemu dva rekonstrukční polynomy.

7. Numerické experimenty

7.1 1D problém pro $z=0$

Řešíme jednorozměrnou rovnici pro mělkou vodu, v jejichž řešení se vyskytuje nespojitost. Výpočty provádíme v programu Octave a vizualizaci v programu Gnuplot. Příklady řešíme pomocí následujících dvou metod.

1. Metoda konečných objemů s numerickým tokem Vijayasundaramova typu. Tato metoda je pouze prvního řádu přesnosti. Výpočet provádíme pomocí programu SWE1D, který nám poskytl pan RNDr. Petr Kubery, Ph.D, provedli jsme v něm pouze několik úprav ve výstupu řešení.
2. Metoda konečných objemů druhého řádu přesnosti. Zde se využívá lineární rekonstrukce ke zvýšení řádu přesnosti. Aby se zabránilo oscilacím používáme limitní proceduru s limiterem popsáným v (5.3.2). Dále k výpočtu používáme numerický tok Vijayasundaramova typu. Původní program pana RNDr. Petra Kubery, Ph.D jsme rozšířili o lineární rekonstrukci s limiterem viz sekce 4.4 a program nazýváme LIN.

Časem výpočtu myslíme průběh hlavního výpočtu numerického toku. Jeho výpočet je pouze orientační, neboť vždy záleží na typu počítače a jeho procesoru. Problémy řešíme na oblasti $(a_1, b_1) \times (0, T)$ s počátečními a okrajovými podmínkami. Na intervalu (a_1, b_1) máme ekvidistantní dělení s $n + 1$ body dělení. Hledáme řešení pro $g = 9.81$ a $CFL = 0.9$.

Chybu řešení v bodech dělení vypočteme pomocí diskrétní L_1 -normy:

$$E = \|\mathbf{w}_h^k - \mathbf{w}(\cdot, t_k)\|_{L^1} = \sum_{i=1}^n |\mathbf{w}_i^k(x_i) - \mathbf{w}(x_i, t_k)| \left| x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \right|,$$

kde výpočet provádíme po složkách. Chyba má tedy dvě složky $E = (E_1, E_2)$, první odpovídá \mathbf{w}_1 a druhá odpovídá \mathbf{w}_2 .

7.1.1 Příklad 1 - Příklad se spojitým řešením.

Příklad jsme převzali z disertace [7]. Mějme problém na oblasti $\Omega = (-1, 1)$ s počáteční podmínkou

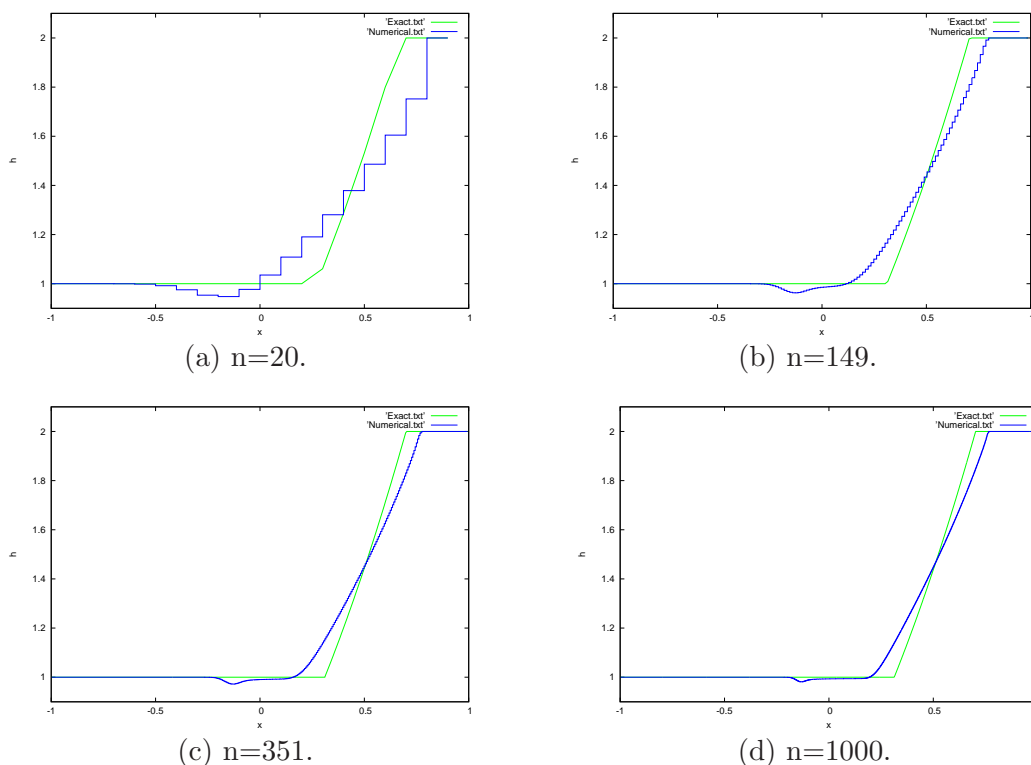
$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad t > 0, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} (1, 0)^T, & x \in (-1, 0), \\ (2, 4(\sqrt{2g} - \sqrt{g}))^T, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (7.2)$$

a hraničními podmínky

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} (1, 0)^T, & t \in (0, T), \\ (2, 4(\sqrt{2g} - \sqrt{g}))^T, & t \in (0, T). \end{cases} \quad (7.3)$$

Obrázek 7.1: Řešení první složky w (tj. h) pomocí metody konečných objemů v čase $T = 0.05$. Modrá značí řešení získané MKO a zelená je přesné řešení.



Řešení tohoto příkladu známe, je spojité a má následující tvar

$$\mathbf{w}(x, t) = (\mathbf{w}_1(x, t), \mathbf{w}_2(x, t)) = (h(x, t), h(x, t)v_1(x, t)),$$

kde

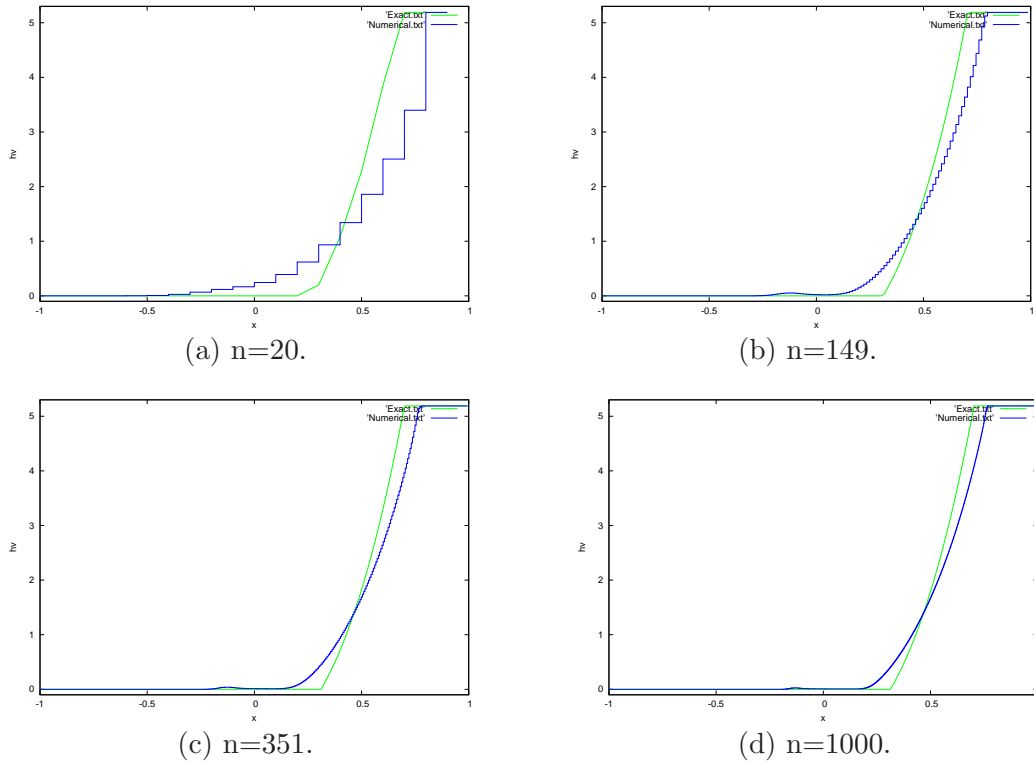
$$h(x, t) = \begin{cases} 1, & \frac{x}{t} < \sqrt{g}, \\ \frac{1}{g} [\sqrt{g} + \frac{1}{3} (\frac{x}{t} - \sqrt{g})]^2, & \sqrt{g} < \frac{x}{t} < \sqrt{2g}, \\ 2, & \frac{x}{t} > \sqrt{2g}, \end{cases}$$

$$v_1(x, t) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{t} < \sqrt{g}, \\ \frac{2}{3} (\frac{x}{t} - \sqrt{g}), & \sqrt{g} < \frac{x}{t} < \sqrt{2g}, \\ 2\sqrt{2g} - \sqrt{g}, & \frac{x}{t} > \sqrt{2g}. \end{cases}$$

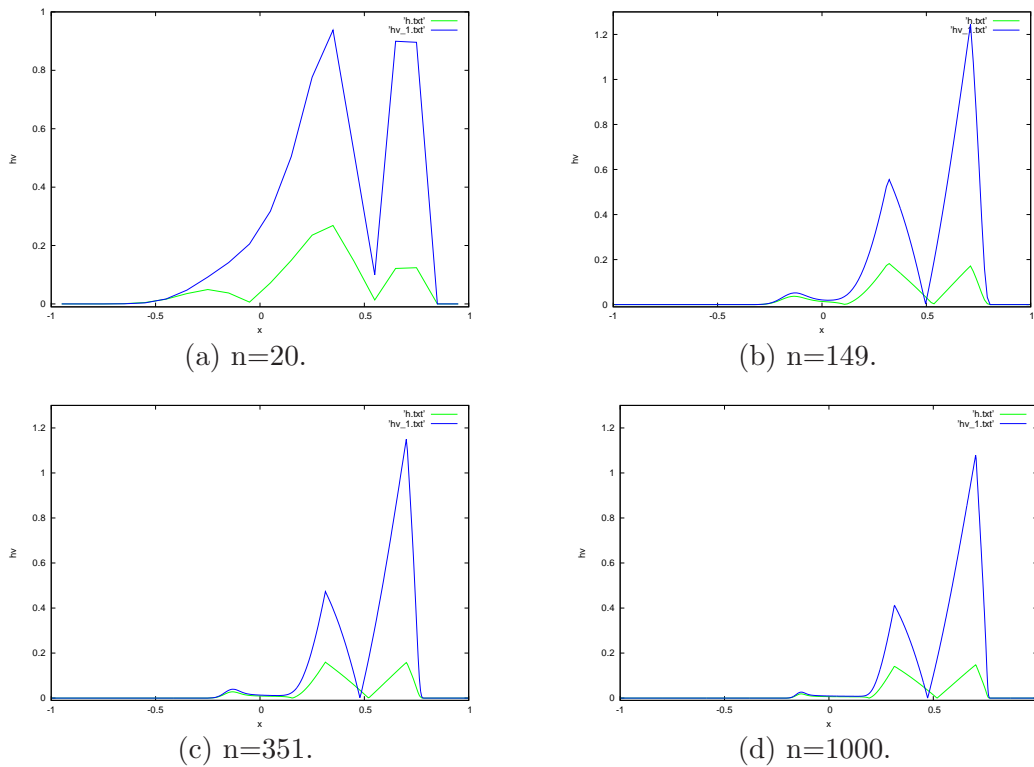
Metoda konečných objemů

Na grafech (7.1) a (7.2) jsou znázorněny jednotlivé složky numerického řešení získané pomocí metody konečných objemů s Vijayasudaramovým numerickým tokem (tj. po částech konstantní řešení) a složky přesného řešení. Je vidět, že s rostoucím počtem dělicích bodů se graf řešení přibližuje přesnému řešení. Na obrázku (7.3) jsou znázorněny obě složky rozdílu přibližného a přesného řešení počítané ve středech konečných objemů D_i , $i \in \{0, \dots, n\}$ (tyto středy značíme x_i , $i \in \{0, \dots, n\}$). Pro přehlednost jsou tyto body spojeny lomenou čarou. První složka řešení má menší chybu, což jsme předpokládali, neboť v druhé složce se vyskytuje navíc výška a chyby se tudíž násobí a tedy zvětšují.

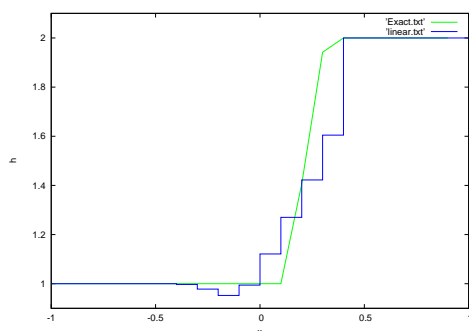
Obrázek 7.2: Řešení druhé složky w (tj. $h v_1$) pomocí metody konečných objemů v čase $T = 0.05$. Modrá značí řešení získané MKO a zelená je přesné řešení.



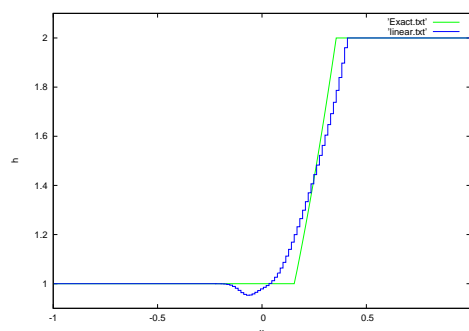
Obrázek 7.3: Chyba řeší pomocí metody konečných objemů v čase $T = 0.05$. Modrá značí chybu v druhé složce a zelená je chyba v první složce.



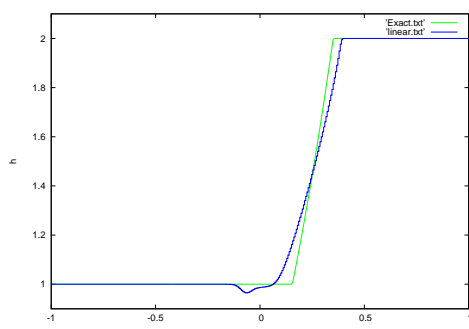
Obrázek 7.4: Řešení h pomocí MKO s lineární rekonstrukcí v čase $T = 0.05$. Modrá značí řešení získané MKO s lineární rekonstrukcí a zelená je přesné řešení.



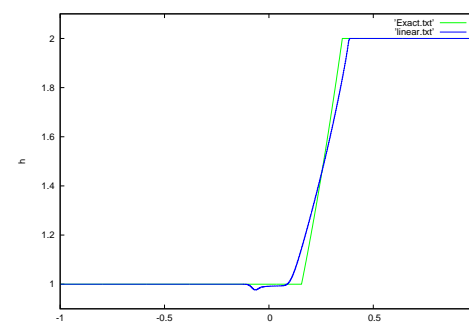
(a) $n=20$.



(b) $n=149$.



(c) $n=351$.

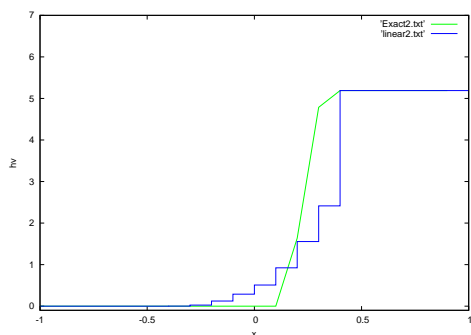


(d) $n=1000$.

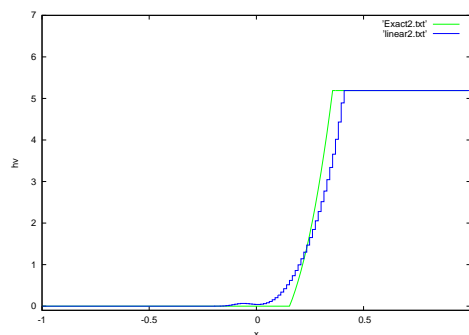
Metoda konečných objemů s lineární rekonstrukcí (značení: MKO s LR)

Touto metodou získáme stejné řešení jako jsme získaly metodou konečných objemů, zvětšuje se pouze čas výpočtu, neboť se provádí lineární rekonstrukce. Po provedení lineární rekonstrukce na data úlohy zavoláme limiter popsany v sekci (5.3.2), tento limiter bohužel změnil data zase na původní data, proto dojdeme ke stejnému výsledku, což můžeme vidět v tabulce 7.1.

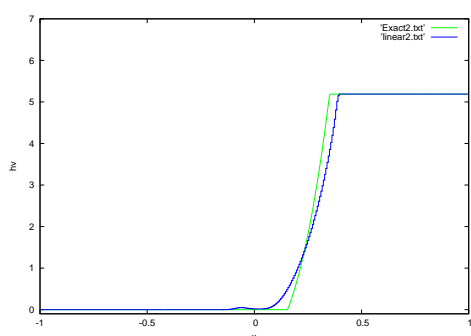
Obrázek 7.5: Řešení hv_1 pomocí MKO s lineární rekonstrukcí v čase $T = 0.05$. Modrá značí řešení získané MKO s lineární rekonstrukcí a zelená je přesné řešení.



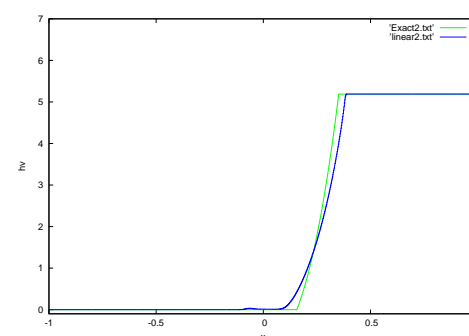
(a) $n=20$.



(b) $n=149$.

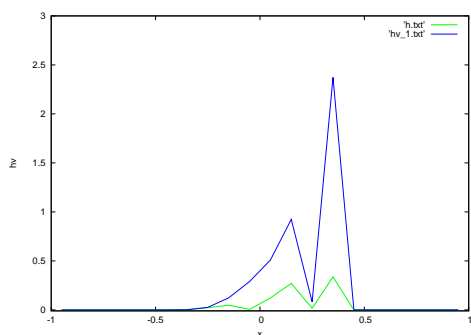


(c) $n=351$.

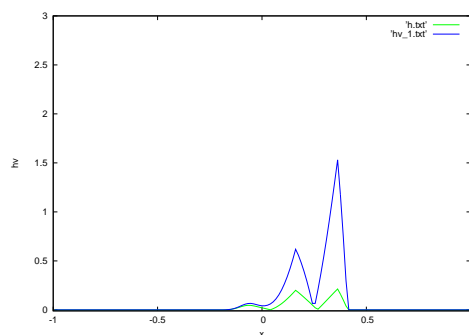


(d) $n=1000$.

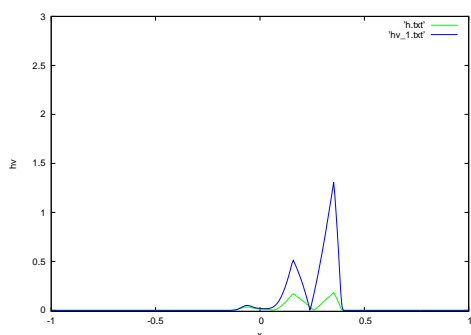
Obrázek 7.6: Chyba řeší pomocí metody konečných objemů s lineární rekonstrukcí v čase $T = 0.05$. Modrá značí chybu v druhé složce a zelená je chyba v první složce.



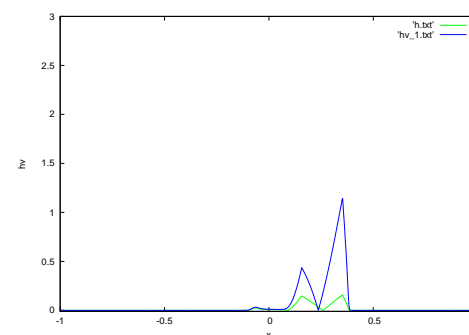
(a) $n=20$.



(b) $n=149$.



(c) $n=351$.



(d) $n=1000$.

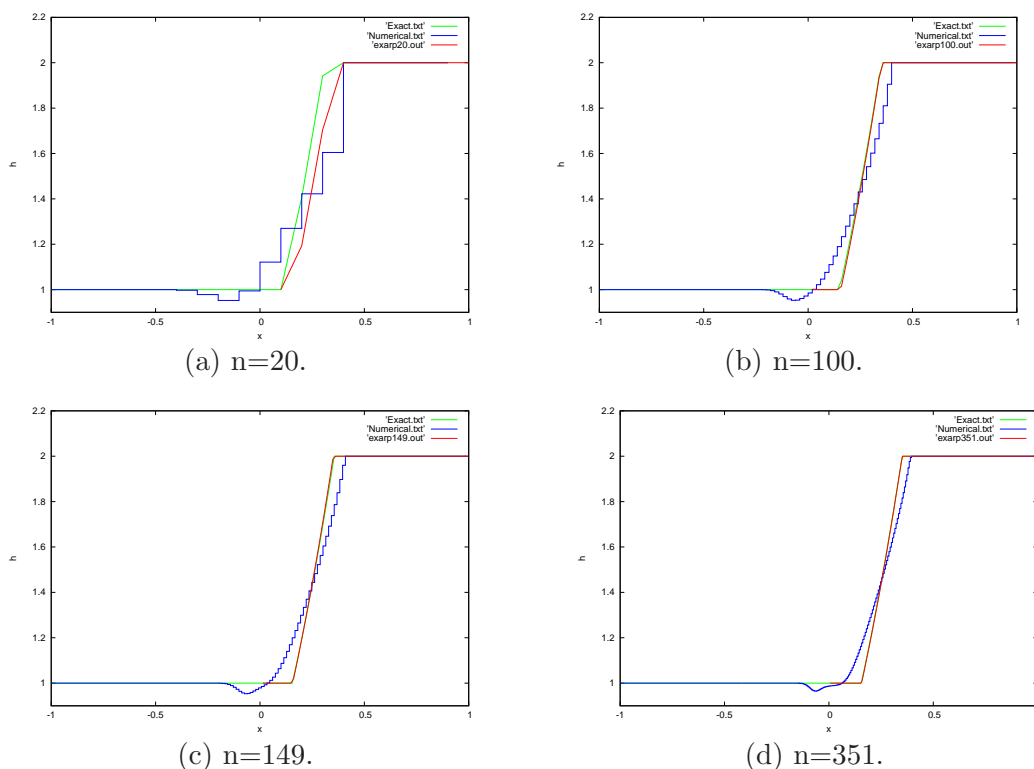
Metoda	počet elementů	čas výpočtu	E_1	E_2
MKO	20	0.016259	0.082287	0.432333
MKO	100	0.312408	0.045795	0.210608
MKO	149	0.708729	0.042050	0.192477
MKO	200	1.239709	0.036132	0.167006
MKO	351	3.713738	0.031046	0.144858
MKO	500	7.433404	0.033924	0.130970
MKO	1000	29.936717	0.024121	0.116583
MKO	1487	65.468604	0.022906	0.111615
MKO	2500	184.858986	0.021411	0.105653
MKO s LR	20	0.024290	0.082287	0.432333
MKO s LR	100	0.368387	0.045795	0.210608
MKO s LR	149	0.793962	0.042050	0.192477
MKO s LR	200	1.395398	0.036132	0.167006
MKO s LR	351	4.089763	0.031046	0.144858
MKO s LR	500	8.224278	0.033924	0.130970
MKO s LR	1000	32.027246	0.024121	0.116583
MKO s LR	1487	71.435971	0.022906	0.111615
MKO s LR	2500	202.333374	0.021411	0.105653

Tabulka 7.1: Tabulka výpočtů pomocí MKO a MKO s LR v čase $T = 0.05$

Srovnání s metodou ADER

Metoda ADER řeší rovnice mělké vody pomocí přesného řešení zobecněného Riemannova problému. Z grafů v (7.7) a (7.8) je jasné, že pro $n = 351$ se řešení získané touto metodou a přesné řešení překrývají. Výsledky získané pomocí metody ADER jsou už pro malé dělení velmi přesné. Na obrázcích (7.7) a (7.8) jsou grafy srovnávající přesné řešení, metodu konečných objemů a metodu ADER v $T=0.05$.

Obrázek 7.7: Řešení h pomocí MKO a metody ADER. Modrá značí řešení získané MKO, zelená je přesné řešení a červená značí ADER.



7.1.2 Příklad 2 - Příklad s pohybující se nespojitostí.

Příklad jsme převzali z disertace [7]. Mějme problém na oblasti $\Omega = (-1, 1)$ s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) &= 0, & x \in (-1, 1), t > 0, \\ \mathbf{w}(x, 0) &= \begin{cases} (2, \sqrt{3g})^T, & x \in (-1, 0), \\ (1, 0)^T, & x \in (0, 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (7.4)$$

a okrajovými podmínky

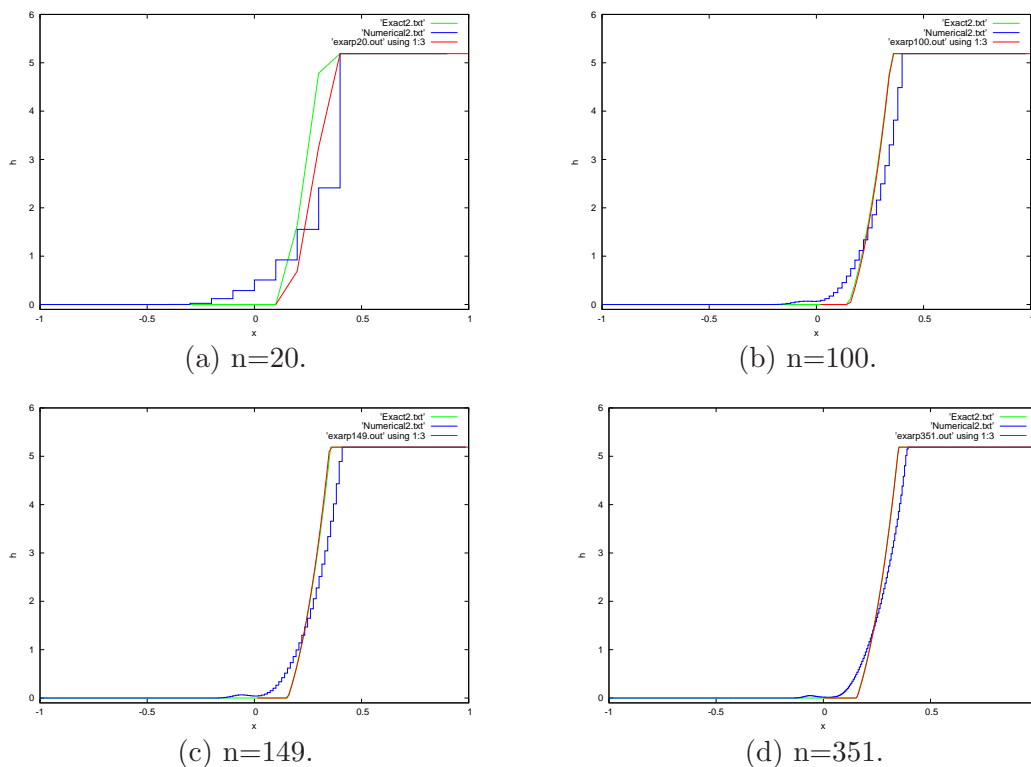
$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} (2, \sqrt{3g})^T, & \text{pro } t \in [0, T], \\ (1, 0)^T, & \text{pro } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (7.5)$$

Řešení tohoto problému známe, má následující tvar

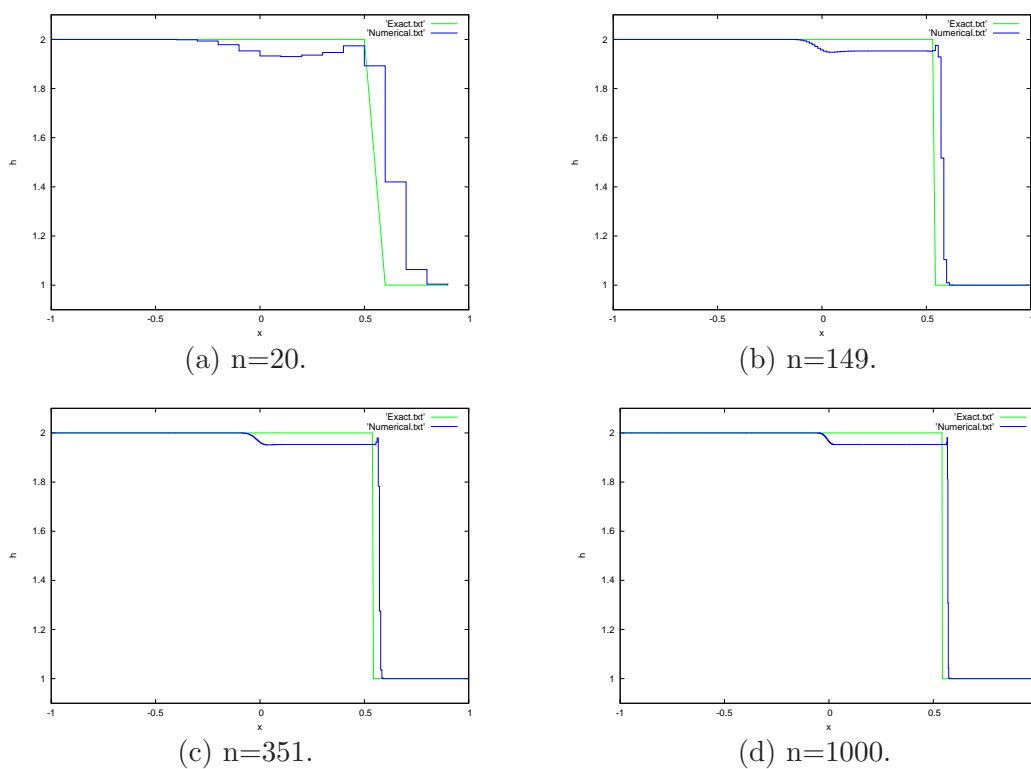
$$\begin{aligned} h(x, t) &= \begin{cases} 2, & \frac{x}{t} < \sqrt{3g}, \\ 1, & \frac{x}{t} > \sqrt{3g}, \end{cases} \\ v_1(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{3g}, & \frac{x}{t} < \sqrt{3g}, \\ 0, & \frac{x}{t} > \sqrt{3g}. \end{cases} \end{aligned}$$

Metoda konečných objemů

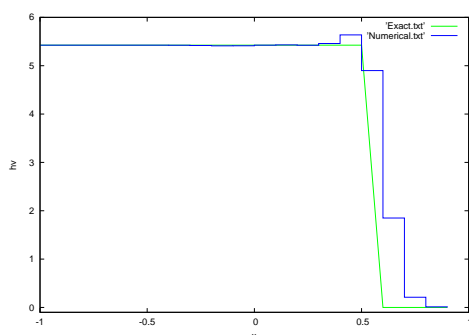
Obrázek 7.8: Řešení $h\nu$ pomocí MKO a metody ADER. Modrá značí řešení získané MKO, zelená je přesné řešení a červená značí ADER.



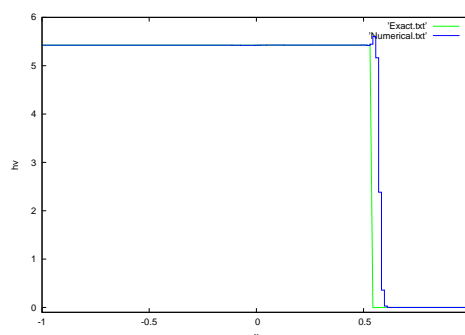
Obrázek 7.9: Řešení první složky w (tj. h) pomocí metody konečných objemů v $T = 0.05$. Modrá značí řešení získané MKO a zelená je přesné řešení.



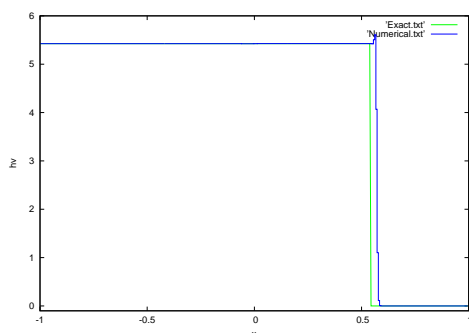
Obrázek 7.10: Řešení druhé složky w (tj. hv_1) pomocí metody konečných objemů v $T = 0.05$. Modrá značí řešení získané MKO a zelená je přesné řešení.



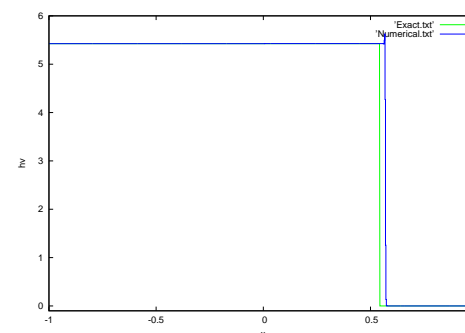
(a) $n=20$.



(b) $n=149$.



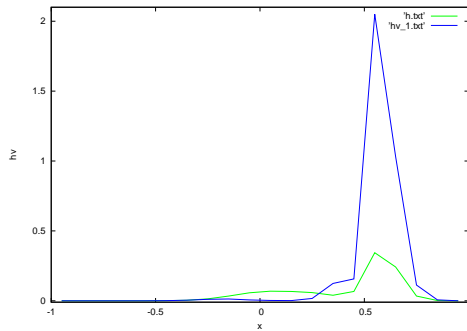
(c) $n=351$.



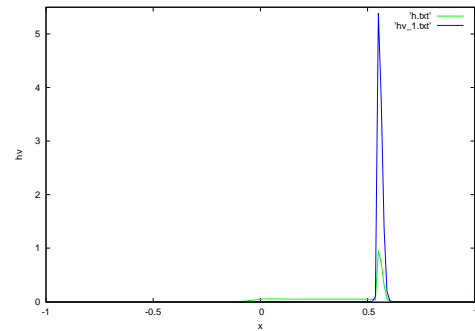
(d) $n=1000$.

Na obrázcích (7.9) a (7.10) můžeme vidět srovnání přesného řešení a numerických výsledků získaných pomocí MKO s numerickým tokem Vijayasudaramova typu. Můžeme pozorovat, že s rostoucím počtem dělicích bodů se křivka znázorňující numerické řešení přibližuje křivce přesného řešení. Na obrázku (7.11) jsou vykresleny obě složky rozdílu přibližného a přesného řešení počítané ve středech konečných objemů. Pro přehlednost jsou tyto hodnoty spojeny lomnou čarou. Vidíme, že první složka numerického řešení má řádově menší chybu než druhá složka.

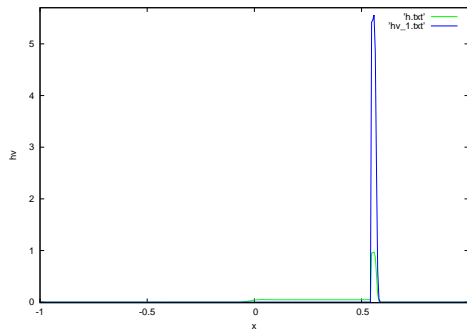
Obrázek 7.11: Chyba řeší pomocí metody konečných objemů v čase $T = 0.05$. Modrá značí chybu v druhé složce a zelená je chyba v první složce.



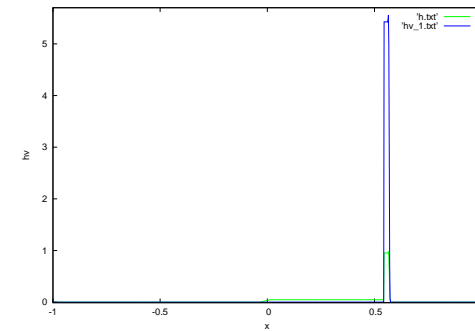
(a) $n=20$.



(b) $n=149$.



(c) $n=351$.

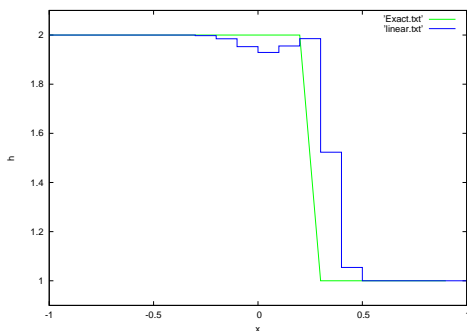


(d) $n=1000$.

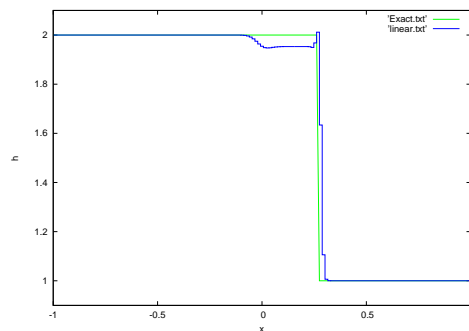
Metody konečných objemů s lineární rekonstrukcí

Výpočet je proveden pomocí metody konečných objemů s lineární rekonstrukcí a numerickým tokem Vijayasundaramova typu. Jako v prvním příkladu získáváme stejné řešení jako jsme získali pomocí MKO. Limiter zase způsobuje, že se vracíme k původním hodnotám, který jsme měli před linearizací. V tabulce 7.2 je uveden čas výpočtu a chyba řešení obou složek, které dostáváme vyřešením příkladu pomocí MKO a pomocí metody konečných objemů s lineární rekonstrukcí. Z tabulky je patrné, že při zvyšování počtu dělicích bodů je řešení získané pomocí MKO přesnější. Pro velké n se už ale chyba řešení výrazně nezmenšuje a zůstává kolem hodnoty 0.026 v první složce a 0.07 v druhé složce.

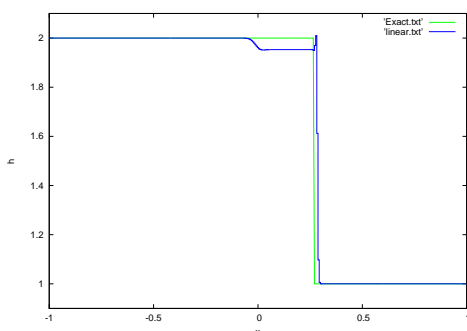
Obrázek 7.12: Řešení h pomocí MKO s lineární rekonstrukcí v $T = 0.05$. Modrá značí řešení získané MKO s lineární rekonstrukcí a zelená je přesné řešení.



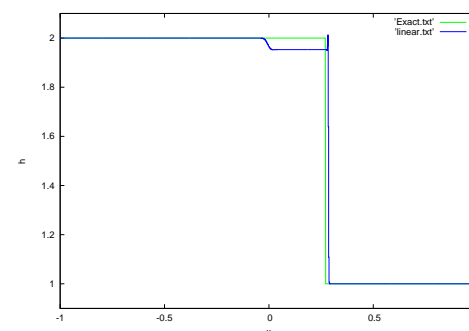
(a) $n=20$.



(b) $n=149$.

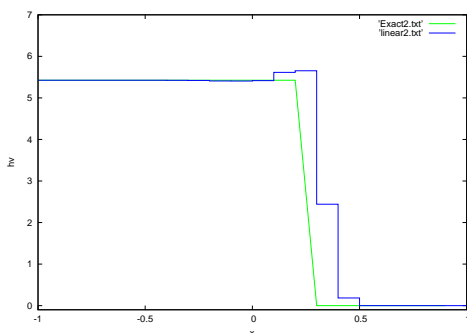


(c) $n=351$.

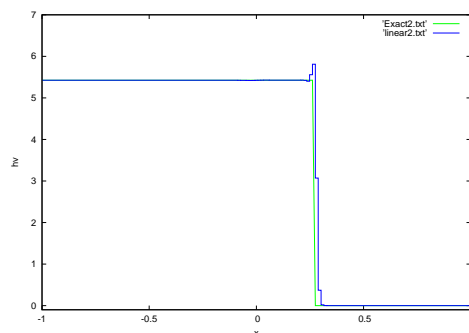


(d) $n=1000$.

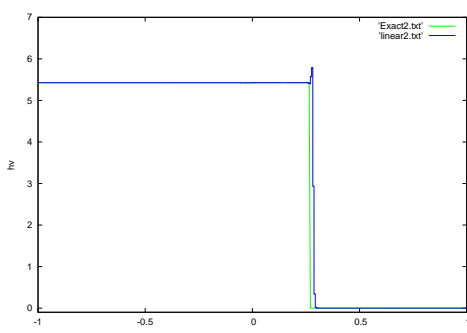
Obrázek 7.13: Řešení hv_1 pomocí MKO s lineární rekonstrukcí v $T = 0.05$. Modrá značí řešení získané MKO s lineární rekonstrukcí a zelená je přesné řešení.



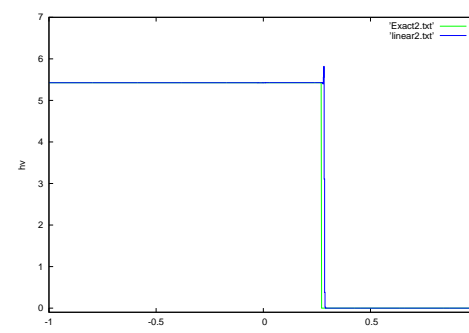
(a) $n=20$.



(b) $n=149$.

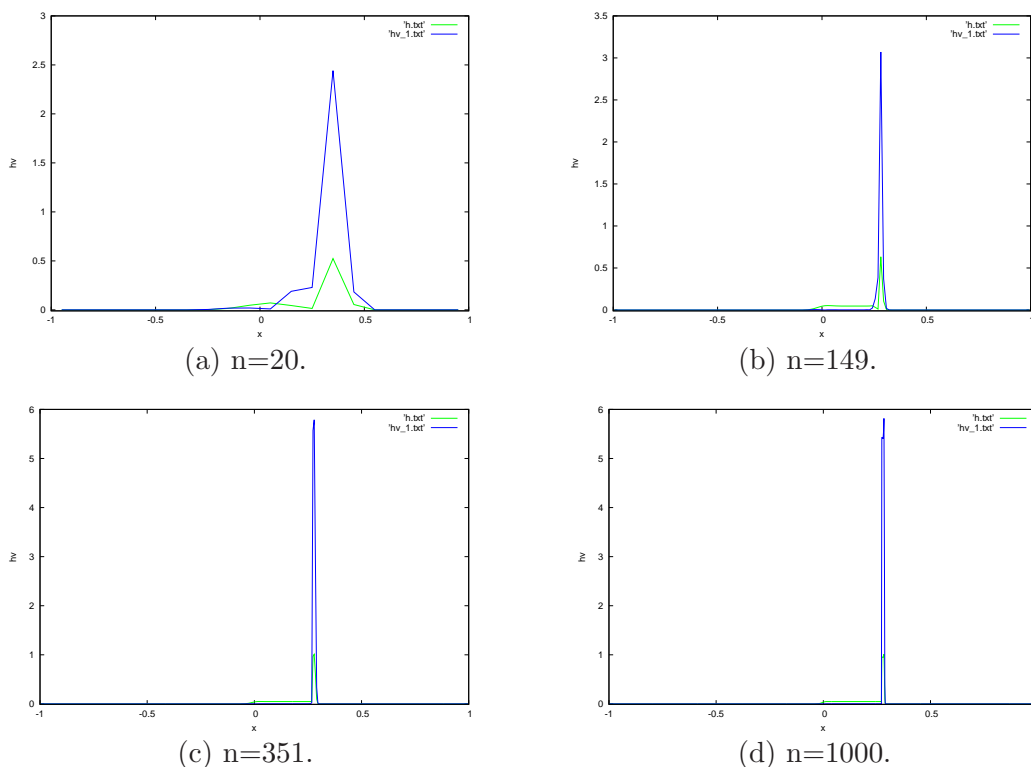


(c) $n=351$.



(d) $n=1000$.

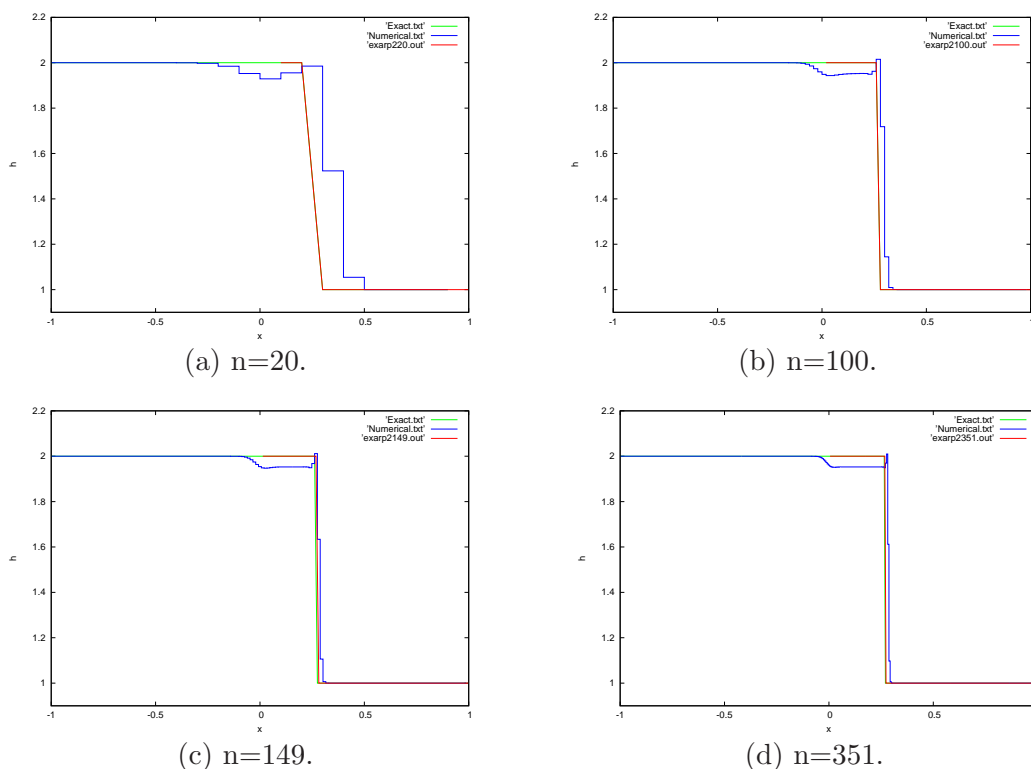
Obrázek 7.14: Chyba řeší pomocí metody konečných objemů v $T = 0.05$. Modrá značí chybu v druhé složce a zelená je chyba v první složce.



Metoda	počet elementů	čas výpočtu	E_1	E_2
MKO	20	0.019578	0.077344	0.309516
MKO	100	0.329730	0.032525	0.095241
MKO	149	0.692441	0.024159	0.054542
MKO	200	1.259777	0.024219	0.054779
MKO	351	3.869551	0.028945	0.084198
MKO	500	7.760762	0.026788	0.073909
MKO	1000	30.425304	0.026246	0.073611
MKO	1487	67.539980	0.026636	0.077024
MKO	2500	192.267866	0.026109	0.074750
MKO s LR	20	0.027485	0.077344	0.309516
MKO s LR	100	0.377637	0.032525	0.095241
MKO s LR	149	0.780878	0.024159	0.054542
MKO s LR	200	1.401848	0.024219	0.054779
MKO s LR	351	4.180349	0.028945	0.084198
MKO s LR	500	8.296677	0.026788	0.073909
MKO s LR	1000	32.853481	0.026246	0.073611
MKO s LR	1487	72.321536	0.026636	0.077024
MKO s LR	2500	202.884497	0.026109	0.074750

Tabulka 7.2: Tabulka výpočtů pomocí MKO a MKO s LR

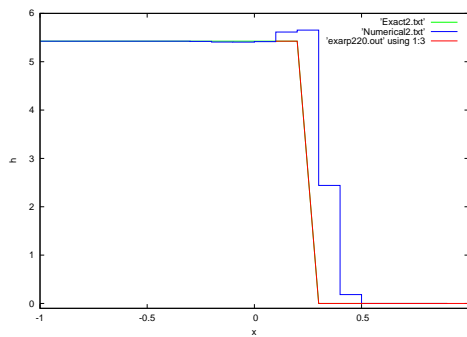
Obrázek 7.15: Řešení h pomocí MKO a metody ADER. Modrá značí řešení získané MKO, zelená je přesné řešení a červená značí ADER.



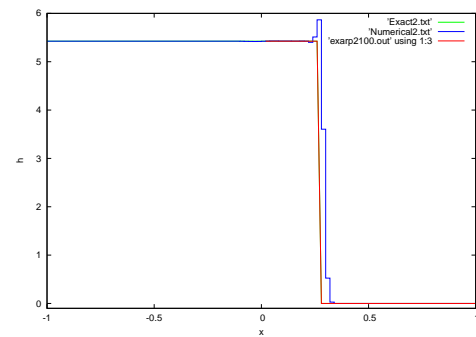
Srovnání s metodou ADER

Metoda ADER řeší rovnice mělké vody pomocí přesného řešení zobecněného Riemannova problému. Výsledky jsme získali z programu HW-SWRPEXACT, který naprogramoval E.F.Toro, který je volně k dispozici na www.numeritek.com. Z grafů v (7.7) a (7.8) je jasné, že pro $n = 100$ se řešení získané touto metodou a přesné řešení překrývají. Narozdíl od našich výsledků jsou výsledky získané pomocí metody ADER jsou už pro malé dělení velmi přesné. Na obrázcích (7.7) a (7.8) jsou grafy srovnávající přesné řešení, metodu konečných objemů a metodu ADER v $T=0.05$.

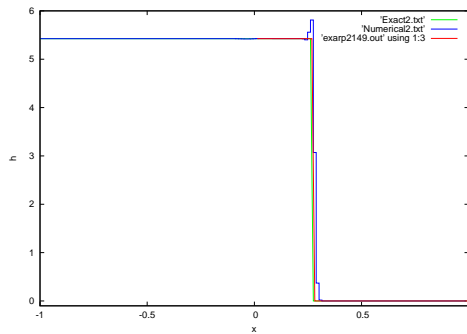
Obrázek 7.16: Řešení $h\nu$ pomocí MKO a metody ADER. Modrá značí řešení získané MKO, zelená je přesné řešení a červená značí ADER.



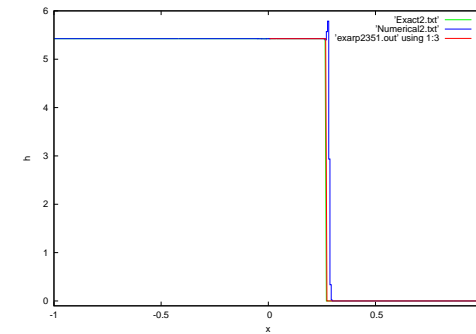
(a) $n=20$.



(b) $n=100$.



(c) $n=149$.



(d) $n=351$.

Závěr

Účelem této práce bylo popsat schémata typu ADER pro rovnice mělké vody.

V první části práce jsme zavedli obecné rovnice dynamiky tekutin a z těchto rovnic jsme detailně odvodili rovnice mělké vody. Přínosem této práce je zjednodušené odvození těchto rovnic a to tak, že se nám podařilo obejít Leibnizovu formuli, která se pro odvození vždy používá. Zavedli jsme si nejdůležitější vlastnosti rovnic mělké vody.

V druhé části práce jsme využili těchto vlastností v metodě konečných objemů pro popis numerického toku Vijayasundaramova typu. Dále se nám povedlo popsat metodu konečných objemů druhého řádu a to využitím lineární rekonstrukce a limiteru v metodě konečných objemů. Tuto metodu se nám podařilo naprogramovat a otestovat na dvou příkladech. Limiter opravdu zhlazuje oscilace, které vznikly při linearizaci, bohužel nám vrací stejné hodnoty jako před linearizací. V testovaných příkladech dostáváme tedy stejné řešení jako pomocí MKO. U testovaných příkladů nemá smysl brát v úvahu linearizaci, neboť má metoda větší časovou náročnost a dostáváme stejné řešení. Otázka zní, zda lze určit limiter tak, aby linearizace pracovala dobře. Je zde detailně popsána metoda typu ADER, která byla původně navrženou pro Eulerovy rovnice, pro rovnice mělké vody. Srovnáváme řešení získané metodou ADER s přesným Riemannovým řešičem a řešení získané metodou konečných objemů s numerickým tokem Vijayasundaramova typu. U metody ADER dostáváme již při malém dělení dobré řešení, narozdíl od metody konečných objemů.

Seznam použité literatury

- [1] F. Dubois and P. L. Floch. Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *Journal of Differential Equations* 71(1), pages 93–122, 1988.
- [2] M. Feistauer, J. Felcman, and I. Straškraba. *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [3] J. Felcman. Skripta k předmětu matematické modelování ve fyzice. <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~felcman/MatMod.pdf>, 17.10.2012.
- [4] J. Felcman and K. Findejs. Slope limitation in the higher-order fvm for hyperbolic problems. In T. E. Simos, G. Psihoyios, Ch. Tsitouras, and Z. Anastassi, editors, *ICNAAM 2011, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2011, AIP Conference Proceedings 1389*, pages 155–158, Melville, New York, 2011. American Institute of Physics. DVD ISBN: 978-0-7354-0954-5 (CD ROM), ISI ??, doi: 10.1063/1.3636693.
- [5] K. Findejs. Kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků pro řešení 3d proudění., 2005.
- [6] V.A. Titarev G. Vignoli and E.F. Toro. Ader schemes for the shallow water equations in channel with irregular bottom elevation. *Preprint submitted to Elsevier Science*, 2006.
- [7] O. Havle. *Numerical Analysis of Partial Differential Equations with Applications in Mathematical Modeling*. PhD thesis, Universita Karlova v Praze, 2010.
- [8] L. Kadrnka. Well-balanced schémata a jejich aplikace., 2010.
- [9] V. A. Titarev. *Derivative Riemann problem and ADER schemes*. PhD thesis, Universita degli Studi di Trento, 2005.
- [10] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1997.
- [11] E. F. Toro and V. A. Titarev. Ader schemes for scalar hyperbolic conservation laws in three space dimensions. Preprint NI03063, 2004.
- [12] W.Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. Institute for Computer Applications in Science and Engineering, Hampton, 1997.

Seznam použitých zkratek

1D - jedna dimenze

ADER - **A**rbitrary high order, with using high order **DER**ivatives of polynomials

CFL - Courant-Friedrichs-Levyho podmínka stability

DRP - Riemannův problém (angl. Derivative Riemann problem)

ENO - neoscilující metoda (angl. essentially non-oscillatory)

MKO - metoda konečných objemů

MKO s LR - metoda konečných objemů s lineární rekonstrukcí

PDE - parciální diferenciální rovnice (angl. partial differential equations)

SWE - rovnice mělké vody (angl. shallow water equation)