

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Ing. David Kůs

Matematické metody konstrukce investičních portfolií

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: finanční a pojistná matematika

Praha 2013

Na tomto místě velmi děkuji panu doc. RNDr. Jiřímu Witzanymu, Ph.D. za vedení, odbornou pomoc a cenné rady při tvorbě této diplomové práce, dále pak panu Mgr. Radku Hendrychovi za konzultaci ohledně konstrukce DCC GARCH procedury a své matce Evě Kůsové za podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V dne.....

Název práce: Matematické metody konstrukce investičních portfolií

Autor: Ing. David Kůs

Katedra/Ústav: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá statistickými přístupy v konstrukci investičních portfolií. Teoretický výklad práce je věnován moderní teorii portfolia a vybraným statistickým metodám, které jsou používány pro odhad očekávaného výnosu a rizika portfolia. Těmito procedurami jsou konkrétně výběrová metoda, modelování volatility pomocí vícerozměrného GARCH modelu, především pak metoda DCC GARCH, a Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi a konjugované hustoty. Praktická část diplomové práce je věnována aplikaci výše vyložených statistických metod pro konstrukci investičních portfolií. Optimalizační úlohou byla zvolena maximalizace Sharpova poměru. Zkoumaná portfolia jsou tvořena akciovými tituly Austria Traded Index, u kterých jsou k dispozici vhodné časové řady historických denních konečných cen. Dosažené výsledky sestavených portfolií za dvouletý investiční horizont jsou poté komparovány.

Klíčová slova: Teorie portfolia, Sharpův poměr, DCC GARCH model, Bayesovské metody

Title: Mathematical methods of investment portfolios construction

Author: Ing. David Kůs

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.,
Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis describes statistical approaches of investment portfolio constructions. The theoretic part presents modern portfolio theory and specific statistical methods used to estimate expected revenue and risk of portfolio. These procedures are specifically selection method, modelling volatility using multivariate GARCH model, primarily DCC GARCH procedure and Bayes approach with Jeffrey's and conjugated density. The practical part of the thesis covers application of above mentioned statistical methods of investment portfolio constructions. The maximization of Sharp's ratio was chosen as optimization task. Researched portfolios are created from Austria Traded Index issues of shares where suitable time series of historical daily closed prices. Results attained within assembled portfolios in two year investment interval are later compared.

Keywords: Portfolio Theory, Sharp Ratio, DCC GARCH Model, Bayesian Methods

Obsah

Úvod	3
1. Základní charakteristika portfolia	4
1.1. Úvodní slova o teorii portfolia	4
1.2. Statistické charakteristiky portfolia	7
2. Model portfolia	10
2.1. Předpoklady modelu	10
2.2. Množina přípustných portfolií	13
2.3. Množina efektivních portfolií	20
2.4. Optimalizační úloha s rizikovými aktivy	22
2.4.1. Minimalizace rozptylu portfolia, short selling povolen	22
2.4.2. Minimalizace rozptylu portfolia, short selling zakázán	26
2.4.3. Přímka CML a Sharpův poměr	28
3. Očekávaný výnos a riziko portfolia	31
3.1. Konstrukce výběrových estimátorů	34
3.2. Modelování volatility finančních časových řad	37
3.2.1. Multivariate GARCH model	38
3.2.1.1. Constant Conditional Correlations GARCH	41
3.2.1.2. Dynamic Conditional Correlations GARCH	42
4. Bayesův přístup v konstrukci portfolia	45
4.1. Bayesův princip	45
4.2. Portfolia rizikových aktiv	48
4.2.1. Konstrukce estimátorů pomocí konjugované hustoty	49
4.2.2. Konstrukce estimátorů pomocí Jeffreysovi hustoty	53
4.2.3. Komparace množin efektivních portfolií	56
5. Konstrukce investičních portfolií	58

5.1. Vstupní data	58
5.2. Sestavení investičních portfolií	61
5.2.1. Výběrová metoda konstrukce estimátorů	65
5.2.2. Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty	67
5.2.3. Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty	69
5.2.4. Modelování volatility pomocí DCC GARCH	73
5.3. Backtesting	79
Závěr	89
Seznam použité literatury a zdrojů	92
Seznam obrázků	99
Seznam tabulek	100
Seznam použitých zkratk	102
Přílohy	103
Příloha č. 1	103

Úvod

Tato diplomová práce si klade za cíl zkoumat vymezené statistické přístupy, které jsou používány ke konstrukci investičních portfolií, a to nejen v rámci teoretického výkladu, ale i implementace vybraných procedur pomocí reálných dat a dle dosažených výsledků tyto použité metody porovnat.

Výchozí oblastí je moderní teorie portfolia, jež se opírá o Markowitzův princip diverzifikace aktiv. První dvě kapitoly této práce jsou věnovány statistickému popisu portfolia, předpokladům modelu a vysvětlení klíčových pojmů této problematiky včetně optimalizačních úloh vedoucí k nalezení optimálního portfolia.

Třetí a čtvrtá kapitola popisuje vybrané statistické metody vedoucí k odhadu klíčových parametrů, a to očekávaného výnosu a rizika portfolia. Ve třetí kapitole je vyložena konstrukce estimátorů tradiční výběrovou metodou, poté se práce zabývá modelováním volatility pomocí vícerozměrného GARCH modelu. Zvláštní pozornost je věnována proceduře DCC GARCH. Čtvrtá kapitola diplomové práce obsahuje Bayesův přístup ve skladbě investičního portfolia. Tato část popisuje obecný Bayesův princip a následně konstrukci estimátorů pomocí konjugované a Jeffreysovi hustoty.

V poslední kapitole jsou aplikovány z teoretické části vyložené statistické metody pro sestavení investičních portfolií. Předmětem zkoumání je portfolio složené z celkem patnácti akciových titulů, které jsou zastoupeny v Austrian Traded Index. Datovou základnu pro výpočet estimátorů parametrů tvoří časová řada historických denních konečných cen těchto aktiv. Portfolia jsou konstruována na dvouletý investiční horizont, během kterého jsou pravidelně v měsíčních intervalech převrstvována. Použité statistické metody jsou poté dle zvolených kritérií komparovány.

1. Základní charakteristika portfolia

1.1. Úvodní slova o teorii portfolia

Úvodní přiblížení k problematice, kterou se zabývá tato diplomová práce, nastiňuje následující definice J. Brada: „*Teorie portfolia je mikroekonomická disciplína, která zkoumá, jaké kombinace aktiv je vhodné držet dohromady, aby takto vytvořené portfolio mělo určité, předem dané vlastnosti.*“¹ Přičemž aktivem v obecné rovině rozumíme určitý majetek, portfoliem pak souhrn více aktiv.

Zlomovým bodem pro moderní teorii portfolia představuje rok 1952, ve kterém Harry Markowitz publikoval článek *Portfolio Selection, Journal of Finance 7, No.1*. Markowitz přichází s přístupem k optimalizaci portfolia cenných papírů, ve kterém zohledňuje nejen očekávaný výnos, ale i nejistotu nad budoucím vývojem cen finančních aktiv. Ústředním prvkem konstrukce portfolia agregujícím oba dva zmíněné faktory se stává tzv. diverzifikace ve výběru cenných papírů.²

Teorie portfolia je dnes velmi rozsáhlou multidisciplinární problematikou opírající se o poznatky ekonomické teorie na straně jedné a statistickými metodami na straně druhé. V praktické rovině tuto činnost výrazně ovlivňují regulační zásady, charakter trhu a druh aktiv, jež jsou předmětem skladby hledaného portfolia.

S konstrukcí portfolií se setkáváme v celé řadě aktivit spadajících do oblasti finančního managementu, ať už se jedná o skladbu instrumentů kolektivního investování či individuálního sestavování portfolií pro dílčí investory. Vysokého významu nalezneme rovněž při řízení bilancí finančních institucí nebo rozsáhlých derivátových kontraktů měnového či komoditního trhu. Ekonomické motivy pro konstrukci portfolií odrážejí především preference investorů či institucí, kterými mohou být snaha o dosažení výnosu za daného rizika či zcela opačně optimálně uchránit kapitálové prostředky před případnou ztrátou, v této souvislosti pak hovoříme o tzv. hedgingu. Z hlediska rebalancování již sestaveného portfolia rozlišujeme přístup aktivní a pasivní. V prvé z uvedených možností dochází k jistým obměnám ve skladbě portfolia, a to za předem daných optimálně stanovených podmínek. Naopak pasivní přístup je charakteristický neměnnou strukturou

¹ Brada J.: *Teorie portfolia*, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 8

² Sharpe W. F., Alexander G. J.: *Investice*, Victoria Publishing, čtvrté vydání, 1994, Praha, ISBN 80-85605-47-3, str. 110

zvolených aktiv po celou dobu držby portfolia. Dalším důležitým aspektem správy portfolia je existence transakčních nákladů.³

Aktivum lze z investičního hlediska charakterizovat třemi základními faktory, jsou jimi riziko, výnos a likvidita. Výnos aktiva udává, jakých příjmů investor dosáhne z držby daného instrumentu. Lze jej vyjádřit absolutně rozdílem koncové a počáteční ceny aktiva za zvolený časový horizont se započtením dalších relevantních příjmů (např. dividendy u akcií) nebo relativně, čímž získáme tzv. míru zisku. Pokud bychom uvažovaly jedno období držby aktiva, tak můžeme ziskovost vyjádřit tímto předpisem:

$$R_1 = \frac{P_1 - P_0}{P_0},$$

kde P_1 je cena aktiva v čase $t = 1$ (na konci sledovaného období), P_0 je cena aktiva v čase $t = 0$ (na začátku sledovaného období). Míru zisku pro čas t lze vyjádřit také v logaritmickém tvaru:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = p_t - p_{t-1},$$

kde p_t a p_{t-1} jsou logaritmičsky vyjádřené ceny aktiva v časech $t - 1$ a t . Míru zisku lze rovněž určit jako složený výnos pro k časových období:

$$R_t = \prod_{i=1}^{k-1} (1 + R_{t-i}) - 1,$$

$$r_t = \sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i}^4$$

Riziko je dalším neodmyslitelným faktorem charakterizujícím aktivum. Obecně si pod tímto pojmem představujeme možné odchylky od námi očekávaného budoucího vývoje sledované veličiny, např. výnosu finančního aktiva či portfolia. Riziko je měřitelnou veličinou, tím se odlišuje od dalšího ekonomického pojmu, nejistoty.

³ Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 8-12

⁴ Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 27-9

Mírou rizika je funkce, označme ji ρ , která zobrazuje pravděpodobnostní rozdělení ztrát G na množině \mathbb{R} :

$$\rho : G \rightarrow \mathbb{R},$$

kde za funkci ρ v rámci Markowitzova přístupu v teorii portfolia uvažujeme rozptyl očekávaného výnosu portfolia jakožto míru rizika, o kterém bude pojednáno v následující kapitole.⁵ Pokud existuje aktivum, o jehož budoucím výnosu předpokládáme, že je jistý a jeho výše je známa, hovoříme o tzv. bezrizikovém aktivu. Příkladem takového aktiva může být depozitní vklad.

Likvidita vyjadřuje potenciál transformace aktiva v peněžní podobu. Typickým příkladem velmi nelikvidních aktiv jsou nemovitosti či umělecké sbírky, finanční aktiva jsou obecně považovaná za likvidní, avšak určující jsou konkrétní parametry daného finančního instrumentu a charakter trhu, na kterém je obchodován. Markowitzův model optimalizace portfolia nebere likvidní omezení finančních aktiv na zřeteli, předpokládá se tak vysoce likvidní trh.

V této práci se zabývám konstrukcí portfolií, které jsou tvořena výlučně finančními aktivy a to konkrétně veřejně obchodovatelnými akciovými tituly. Pojem akcie vysvětluje např. Veselá J.: „*Akcie je majetkovým cenným papírem, který vyjadřuje podíl na majetku akciové společnosti. Jedná se o dlouhodobý cenný papír, který nemá stanovenou dobu splatnosti.*“⁶ Akcie jsou považovány za vysoce rizikový finanční instrument, neboť nevíme a i obtížně dokážeme předpovědět, jaké výnosnosti v budoucnu dosáhnou. Zároveň dosahují i vysoké míry kolísavosti v závislosti na vnějších i vnitřních faktorech určujících jejich cenu.

Akcie jsou obchodovatelná aktiva na finančních trzích, kde dochází k interakci mezi nabídkou a poptávkou investorů, nákupů a prodejů finančních titulů. Významným pojmem v současném standardizovaném obchodování, který zároveň při jeho zohlednění v optimalizační úloze mění skladbu portfolia, je tzv. short selling, jehož definici uvádí Veselá J.: „*Prázdný prodej (short selling) je transakcí, již uzavírají investoři, kteří spekulují na pokles kurzů instrumentu, tedy investoři, kteří*

⁵ Mitra S., Ji T.: Risk Measures in Quantitative Finance, International Journal of Business Continuity and Risk Management, Vol. 1, Number 2/2010, str. 125-135, DOI: 10.1504/IJBCRM.2010.033634, str. 2

⁶ Veselá J.: Investování na kapitálových trzích, ASPI, 2007, Praha, ISBN 978-80-7357-297-6, str. 202-3

v budoucnu očekávají „medvědí“ vývoj na trhu. Nákup a prodej instrumentu zde probíhají v opačném sledu než při klasickém burzovním obchodu. Investoři nejprve prodají instrumenty, které nevládní, nicméně které si vypůjčí od obchodníka s cennými papíry, a po uplynutí několika měsíců cenné papíry nakoupí a vrátí je obchodníkovi.“⁷

1.2. Statistické charakteristiky portfolia

Mějme portfolio, které je složeno z n aktiv, u nichž obecně nevíme, jaký lze očekávat budoucí cenový vývoj. Statistický pohled tak nahlíží na portfolio, jakožto na sdružené pravděpodobnostní rozdělení náhodných veličin, které charakterizují výnosy aktiv, jimiž je portfolio tvořeno. Náhodná veličina popisující výnosnost (ekvivalentně výnos⁸) i -tého aktiva portfolia je representována marginálním pravděpodobnostním rozdělením s konečnou střední hodnotou a rozptylem. Pro základní statistické vymezení portfolia zatím neuvažujeme, jakých konkrétních rozdělení uvedené náhodné veličiny nabývají.⁹

Pro náhodnou veličinu popisující výnosnost aktiva portfolia předpokládejme, že je měřitelnou funkcí $X(\omega)$ z pravděpodobnostního prostoru (Ω, A, P) do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, kde Ω je prostor elementárních jevů ω , A je σ -algebra podmnožin prostoru Ω , P značí pravděpodobnostní míru, \mathbb{R} je množinu reálných čísel a \mathcal{B} představuje systém borelovských množin. Funkce $F(x) = P\{X < x\}$ je pak distribuční funkcí náhodné veličiny X . Pro pravděpodobnostní rozdělení sdružené náhodné veličiny popisující výnosnost všech n aktiv portfolia učiníme stejných předpokladů. Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor a náhodné veličiny X_1, \dots, X_n na tomto prostoru definované. Náhodným vektorem nazýváme veličinu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$. Funkce $F(x_1, \dots, x_n)' = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)'$ je sdružená distribuční funkce.¹⁰

Náhodnou veličinu výnosnost n aktiv držených v portfoliu po dobu T označme n -rozměrným náhodným vektorem $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)'$. Veličina R_i pro $i = 1, \dots, n$ popisuje výnos i -tého aktiva portfolia. Každé i -té aktivum zaujímá v portfoliu určitý

⁷ Veselá J.: Investování na kapitálových trzích, ASPI, 2007, Praha, ISBN 978-80-7357-297-6, str. 674

⁸ V práci uvažují pojmy výnos a výnosnost za ekvivalentní ve smyslu výnosnosti

⁹ Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 25

¹⁰ Anděl J.: Základy matematické statistiky, Matfyzpress, druhé opravené vydání, 2007, Praha, ISBN 80-7378-001-1, str. 13, 29

podíl neboli váhu, kterou značíme ω_i pro $i = 1, \dots, n$. Pro tyto váhy jednotlivých složek portfolia platí vztah:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad \omega_i \geq 0,$$

pokud zavedeme $\omega_i \geq 0$, neuvažujeme tak možnost short selling u žádného z držaných aktiv v portfoliu. Od této podmínky lze však v optimalizační úloze upustit. Náhodnou veličinu výnos celého portfolia za jeho dobu trvání T označme symbolem R_p a je dána předpisem:

$$R_p = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i,$$

kde R_i je výnos a ω_i váha i -tého aktiva. Nyní přejdeme k veličinám, které vyjadřují naše budoucí očekávání ohledně portfolia za dobu jeho držby. Očekávaným výnosem i -tého aktiva v portfoliu se rozumí střední hodnota náhodné veličiny R_i . Analogicky pro očekávaný výnos celého portfolia platí, že je střední hodnotou náhodné veličiny R_p , formálně zapsáno:

$$r_i = E(R_i)$$

$$r_p = E(R_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i,$$

přičemž v předchozí kapitole je uvedena představa ohledně kvantifikace rizika aktiva. Mírou této veličiny je v rámci základního statistického výkladu teorie portfolia rozptyl či směrodatná odchylka výnosnosti i -tého aktiva R_i :

$$\sigma_i^2 = \text{var } R_i, \text{ příp. } \sigma_i = \sqrt{\text{var } R_i}^{11}$$

¹¹ Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 26, Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 22-3

Označme kovarianci náhodných veličin R_i, R_j , popisující výnosnosti i -tého a j -tého aktiva, symbolem $\sigma_{ij} = cov(R_i, R_j)$ a korelaci těchto složek $\rho_{ij} = cor(R_i, R_j)$. Riziko portfolia je opět kvantifikováno rozptylem a platí:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= var R_p = var \sum_{i=1}^n \omega_i r_i \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j, j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \quad ^{12}\end{aligned}$$

Označme nyní varianční matici výnosností aktiv symbolem Σ , pro kterou platí $\Sigma = E(\mathbf{R} - E\mathbf{R})(\mathbf{R} - E\mathbf{R})'$. Vektorový předpis výše uvedeného vztahu pro riziko portfolia je následující:

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}' \Sigma \boldsymbol{\omega},$$

kde $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ je vektor vah složek portfolia.¹³

¹² Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 26, Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 22-3

¹³ Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 22-3

2. Model portfolia

2.1. Předpoklady modelu

Moderní teorie portfolia zaujímá značně zjednodušené výchozí předpoklady oproti realitě finančních trhů, přesto však určuje základní nástroj pro uchopení této problematiky a vytváří metody, které vedou za daných podmínek k optimální volbě portfolia. Základní hypotézy pro jednotlivé investory a finanční trh jsou následující (Kariya 1993):

- Racionalita
- Optimalizace užtkové funkce
- Random walk ceny aktiv
- Jedno-periodický model portfolia
- Dokonalá informovanost
- Homogenní očekávání
- Dokonalá konkurence ¹⁴

Racionalita investora se v rámci investičního procesu projevuje tzv. nenasyceností a rizikovou averzí. Nenasycenost říká, že investor se v každý okamžik snaží maximalizovat svůj průměrný výnos. Rizikovou averzí se rozumí obecně negativní postoj investora k riziku. Za předpokladu shodného výnosu více aktiv či portfolií volí investor to aktivum či portfolio, které je zatíženo menším rizikem. Preference investora vůči riziku lze modelovat pomocí tzv. indiferenční křivky, která je funkcí očekávaného výnosu v závislosti na úrovni rizika, určeného např. směrodatnou odchylkou výnosu. Čím vyšší je riziková averze investora, tím strmějšího průběhu tato funkce nabývá.¹⁵

¹⁴ S vlastní úpravou převzato z Kariya T.: Quantitative Methods for Portfolio Analysis, MTV Model Approach, Kluwer Academic Publisher, 1993, Dordrecht, Theory and decision library. Series B, Mathematical and statistical methods; Vol. 23., ISBN 0-7923-2254-1, str. 10

¹⁵ Sharpe W. F., Alexander G. J.: Investice, Victoria Publishing, čtvrté vydání, 1994, Praha, ISBN 80-85605-47-3, str. 112-16, Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 47

Za výše uvedených předpokladů se investor dle svých preferencí, které jsou vyjádřeny jeho individuální utilitární funkcí, snaží ve své volbě portfolia o maximalizaci očekávaného užítku. Tato představa lze vyjádřit vztahem:

$$\max Eu(W(1 + \boldsymbol{\omega}'\mathbf{R}))$$

$$\boldsymbol{\omega}'\mathbf{e} = 1,$$

kde u je užitek investora, W je bohatství investované do portfolia v čase $t = 0$, $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)'$ je vektor výnosů aktiv portfolia a $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$ je n -rozměrný jednotkový vektor. Předpokládejme, že pro vyjádření preferencí investora je vhodné použít utilitární křivku v podobě kvadratické funkce $u(x) = x - \frac{b}{2}x^2$, $b > 0$, pak platí:

$$\begin{aligned} Eu(W(1 + \boldsymbol{\omega}'\mathbf{R})) &= E\left[W(1 + \boldsymbol{\omega}'\mathbf{R}) - \frac{b}{2}W^2(1 + \boldsymbol{\omega}'\mathbf{R})^2 \right] \\ &= u(W) + W\mu_p(1 + bW) - \frac{b}{2}W^2(\sigma_p^2 - \mu_p)^2, \end{aligned}$$

kde μ_p je očekávaná výnosnost portfolia a σ_p^2 představuje riziko portfolia. Výsledný tvar předpisu ukazuje, že užitek investora závisí na očekávané střední hodnotě výnosu portfolia a jeho riziku.¹⁶

Základním modelem popisujícím vývoj cen aktiv je tzv. random walk. Jednoduchý random walk popisuje výnosy aktiv na základě diskrétního modelu, kdy v každém bodě uvažované indexované posloupnosti může cena aktiva o určitou danou úroveň Δ s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ vzrůst a zároveň s toutéž pravděpodobností klesnout, přičemž rozdělení po sobě jdoucích diskrétních stavů jsou nezávislá. Obecnější podobou je aritmetický random walk. Opět platí, že vývoj ceny aktiva je nezávislou diskrétní veličinou, ale tentokrát je pravděpodobnost růstu p a poklesu $q = 1 - p$ definována obecněji. Pro cenový rozdíl aktiva v různých časových okamžicích platí:

¹⁶ Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 42-5

$$P_t - P_0 = -t\Delta + 2m\Delta, \quad m = 0, 1, \dots, t,$$

kde t je rozmezí časových okamžiků, P_0 a P_t jsou ceny aktiva v čase 0 a t . Součet změn cen aktiva za jisté diskrétní časové rozmezí je popsán binomickým rozdělením, které lze za předpokladu velkého t aproximovat normálním rozdělením. Tímto se dostáváme k modelu aritmetického random walk s driftem, ve kterém se cena aktiva mění v každém časovém okamžiku o jistou úroveň, která je normálně rozdělená se střední hodnotou μ . Pro změnu ceny aktiva platí:

$$P_t - P_{t-1} = \mu + \eta_t,$$

kde η_t je bílý šum. Bílý šum je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem σ^2 . Bílý šum lze zapsat ve tvaru $\eta_t = \sigma \varepsilon_t$, kde ε_t je posloupnost nezávislých normálně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Tzv. geometrickým random walk se rozumí model, který popisuje výnosnost aktiva tímto vztahem:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \mu + \sigma \varepsilon_t,$$

pokud je bílý šum η_t normálně rozdělen. Pro logaritmické vyjádření výnosnosti aktiva by platil předpis $r_t = p_t - p_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$ a to za výše uvedených předpokladů ohledně bílého šumu $r_t = \sigma \varepsilon_t$. Cena aktiva je pak dána předpisem:

$$P_t = P_0 e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t},$$

kde P_t je cena aktiva v čase t a P_0 je výchozí cena aktiva. Pro případ vícerozměrného logaritmického random walk přechází tento vztah do tvaru $\mathbf{r}_t = \mathbf{p}_t - \mathbf{p}_{t-1} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$, kde jsou uvedené veličiny ve vektorové podobě.¹⁷

¹⁷ Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 194-205

Homogenní očekávání, dokonalá informovanost a konkurence jsou předpoklady trhu jakožto celku. Jsou ovšem až příliš značným zjednodušením fungování reálných finančních trhů, které jsou naopak charakteristické významnou informační asymetrií, často heterogenními očekáváním investorů a spíše oligopolními strukturami finančních institucí nežli dokonalou konkurencí.

Markowitzův model dále předpokládá absenci transakčních nákladů, vyplívajících z realizací investičních záměrů, obchodování s neomezeně dělitelnými aktivy, stejnou dobu trvání i okamžik vzniku všech portfolií na trhu. Pro investory neexistují možnosti pro realizaci arbitrážních příležitostí. Arbitráží obecně rozumíme takovou anomálii na finančním trhu, při které je daný finanční instrument na dvou různých místech jinak oceněn. Těchto situací využívají tzv. arbitrážeri, kteří tak dosahují obchodními transakcemi s tímto instrumentem bezrizikového zisku.¹⁸

2.2. Množina přípustných portfolií

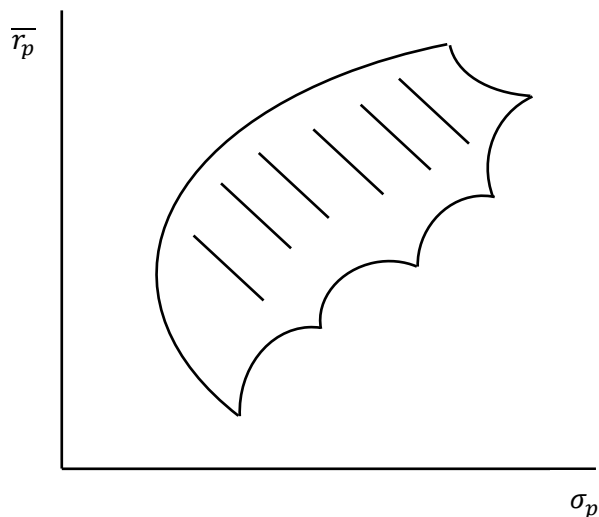
Mějme portfolio složené z n aktiv, kde je každé i -té aktivum zastoupeno relativní vahou ω_i , a platí výše uvedené statistické charakteristiky. Předpokládejme, že se investoři dle předchozích úvah rozhodují výhradně na základě očekávaného rizika a výnosnosti. Množinou přípustných portfolií G se rozumí vymezení všech vztahů mezi očekávaným rizikem a výnosem portfolií, která jsou zkonstruovaná všemi možnými kombinacemi vah aktiv, jimiž je obecně portfolio vymezeno. Na váhy aktiv se mohou vztahovat dodatečné omezující podmínky. Hodnota váhy i -tého aktiva ω_i se může například nacházet v předem stanoveném intervalu $d_i \leq \omega_i \leq h_i$, kde $d_i, h_i \in \mathbb{R}$. Pro množinu přípustných portfolií G platí následující formální vymezení (Brada 1996) :

$$G = \left\{ (\sigma_p, R_p) \left| \begin{array}{l} \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}}, R_p = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i \\ d_i \leq \omega_i \leq h_i, d_i, h_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \end{array} \right. \right\}^{19}$$

¹⁸ Dupáčová J.: Markowitzův model optimální volby portfolia. Předpoklady, data, alternativy, [cit. 12.10.2012], Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dupacova/downloads/Markowitz.pdf>, str. 1, Blake D.: Analýza finančních trhů, GRADA Publishing, 1995, Praha, ISBN 80-7169-201-8, str. 391

¹⁹ Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 39

Nyní přistupme k přiblížení, jakého grafického tvaru může množina přípustných portfolií G nabývat. Pro portfolia n aktiv je obecně charakterizována tzv. „deštníkovitým“ tvarem, jak ukazuje následující obrázek:



Obr. 1. Množina přípustných portfolií

Ústředním motivem Markowitzova přístupu je diverzifikace aktiv, jakožto nástroje pro optimální volbu portfolia. Demonstraci významu tohoto jevu lze učinit na příkladech dvousložkových a zjednodušených vícesložkových portfoliích, jejichž aktiva nabývají modelových hodnot korelací. Předpokládejme, že se jedná výhradně o riziková aktiva a short selling je zakázaný.

Dvousložková portfolia

Mějme portfolio dvou rizikových aktiv X, Y. Označme očekávaný výnos jednotlivých složek r_X , r_Y a riziko σ_X^2 , σ_Y^2 . Pro váhy těchto aktiv platí $\omega_X + \omega_Y = 1$, přičemž $\omega_X \geq 0$, $\omega_Y \geq 0$. Pro očekávaný výnos a riziko portfolia platí:

$$r_p = \omega_X r_X + \omega_Y r_Y = \omega_X r_X + (1 - \omega_X) r_Y$$

²⁰ Převzato a upraveno z Sharpe W. F., Alexander G. J.: *Investice*, Victoria Publishing, čtvrté vydání, 1994, Praha, ISBN 80-85605-47-3, str. 129

$$\sigma_p = \sqrt{\omega_X^2 \sigma_X^2 + \omega_Y^2 \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY} \omega_X \omega_Y},$$

kde σ_{XY} je kovariance aktiv X, Y. Nyní se dvousložková portfolia budou lišit v konkrétních hodnotách korelace složek ρ_{XY} .²¹

I. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = 1$

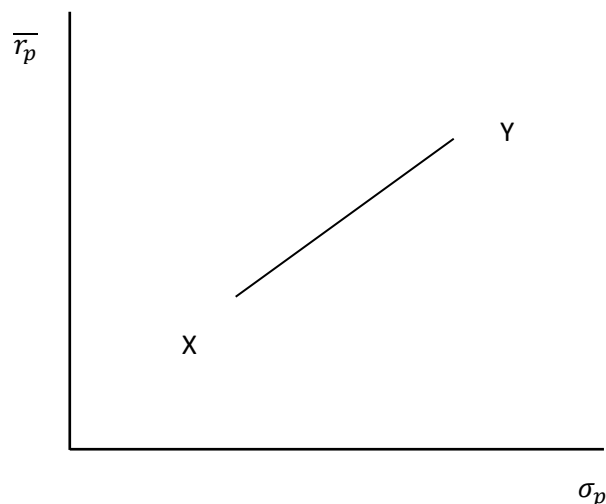
Jedná se o případ dvousložkového portfolia za situace, kdy jsou výnosy jeho složek dokonale pozitivně korelovány. Očekávaný výnos portfolia zůstává ve výše uvedeném obecném tvaru, pro riziko portfolia platí vztah:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{\omega_X^2 \sigma_X^2 + (1 - \omega_X^2) \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY} \omega_X (1 - \omega_X)} \\ &= \omega_X \sigma_X + (1 - \omega_X) \sigma_Y \end{aligned}$$

V tomto případě není možná absolutní eliminace rizika, minimalizovat riziko lze pouze volbou váhy, jejíž hodnoty by byla 1 u méně rizikového aktiva, ovšem za cenu nižšího celkového výnosu. Vztah mezi rizikem a výnosem je lineární. Množina přípustných portfolií v tomto případě nabývá tvaru úsečky. Významnými jsou body X, kde se portfolio skládá pouze ze složky X (platí $\omega_X = 1$), a bod Y, kde je portfolio tvořeno pouze aktivem Y ($\omega_X = 0$). Úsečka X, Y znázorňuje veškeré kombinační možnosti sestavení tohoto portfolia v závislosti na stanovení vah složek.²²

²¹ Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 68-9

²² Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 70-1, Blake D.: Analýza finančních trhů, GRADA Publishing, 1995, Praha, ISBN 80-7169-201-8, str. 415-6



Obr. 2. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = 1$ ²³

II. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = -1$

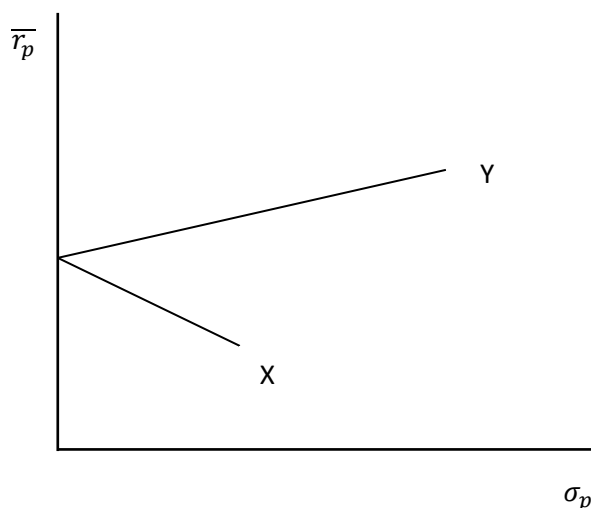
Dalším případem je portfolio složek X, Y, jejichž výnosy jsou absolutně záporně korelovány. Očekávaný výnos portfolio je totožný s předchozí situací, ale riziko portfolio je dáno opět speciálním vztahem:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{\omega_X^2 \sigma_X^2 + (1 - \omega_X^2) \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY} \omega_X (1 - \omega_X)} \\ &= \omega_X \sigma_X - (1 - \omega_X) \sigma_Y\end{aligned}$$

V tomto případě portfolio již lze riziko absolutně eliminovat a to položením odpovídajících vah složek X, Y, které jsou $\omega_X = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X + \sigma_Y}$ a $\omega_Y = \frac{\sigma_X}{\sigma_X + \sigma_Y}$. Množinu přípustných portfolio tvoří dvě úsečky se společným bodem, který vyjadřuje takovou kombinaci aktiv, která portfolio přináší nulové riziko. Body X, Y jsou stejně jako v předchozím případě absolutním zastoupením vždy právě jedné složky X či Y. ²⁴

²³ Převzato a upraveno z Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 71

²⁴ Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 72-4, Blake D.: *Analýza finančních trhů*, GRADA Publishing, 1995, Praha, ISBN 80-7169-201-8, str. 417-8



Obr. 3. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = -1$ ²⁵

III. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = 0$

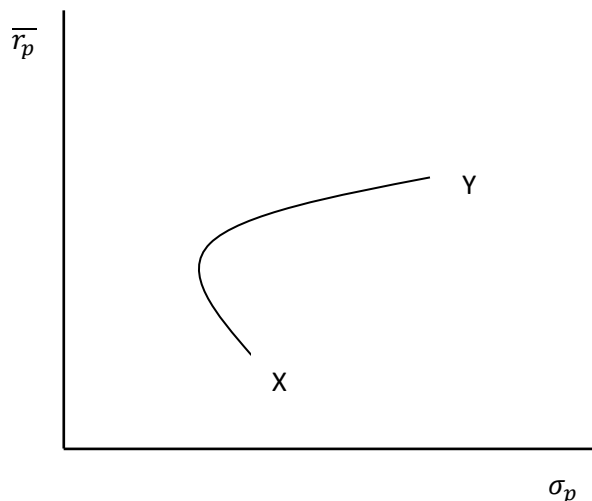
Posledním modelovým případem dvousložkového portfolia je kombinace výnosů aktiv s nulovou korelací. Očekávaný výnos je dán obecným tvarem, pro riziko portfolia platí předpis:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{\omega_X^2 \sigma_X^2 + (1 - \omega_X^2) \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY} \omega_X (1 - \omega_X)} \\ &= \sqrt{\omega_X^2 \sigma_X^2 - (1 - \omega_X)^2 \sigma_Y^2}\end{aligned}$$

Riziko tohoto portfolia lze minimalizovat, ale nikoliv absolutně. Váhy pro kombinaci aktiv zajišťující minimální možné riziko jsou $\omega_X = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ a $\omega_Y = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$. Množina přípustných portfolií je křivkou mezi body X, Y.²⁶

²⁵ Převzato a upraveno z Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 74

²⁶ Blake D.: *Analýza finančních trhů*, GRADA Publishing, 1995, Praha, ISBN 80-7169-201-8, str. 418-20, Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 74-6



Obr. 4. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = 0$ ²⁷

Vícesložková portfolia

Mějme portfolio složeno z n rizikových aktiv. Označme očekávané výnosy aktiv symboly r_1, \dots, r_n . Relativní zastoupení aktiv v portfoliu je vyjádřeno váhami $\omega_1, \dots, \omega_n$, pro které platí $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. Short selling je zakázán, $\omega_i \geq 0$. Očekávaný výnos a riziko portfolia jsou dány již známými vztahy:

$$r_p = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

Vícesložková portfolia rizikových aktiv nabízí celou řadu kombinací aktiv v závislosti na vysokém počtu možností vzájemných modelových korelací jednotlivých složek. Pro demonstraci významu diversifikace portfolia vyberme dva níže popsané případy.

²⁷ Převzato a upraveno z Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 75

I. Portfolio n aktiv, $\rho_{ij} = 0$

Předpokládejme dále, že všechna aktiva portfolia nabývají shodného rozptylu σ^2 a jsou zastoupeny stejnou váhou $\omega \geq 0 \wedge \omega = 1/n$. Pro riziko portfolia v této zjednodušené úvaze platí:

$$\sigma_p^2 = n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2$$

Pokud v tomto vztahu použijeme limitní přechod pro $n \rightarrow \infty$, riziko portfolia bychom tak v podstatě eliminovali. S vzrůstajícím počtem aktiv n se za výše uvedených předpokladů riziko portfolia snižuje.²⁸

II. Portfolio n aktiv, $\rho_{ij} > 0$

Dalším modelovým příkladem je portfolia tvořeno n aktivy, ale jejichž vzájemná korelace dosahuje pozitivních hodnot. Pro jednoduchost opět položíme shodný rozptyl výnosů aktiv σ^2 a stejnou váhu pro složky portfolia $\omega \geq 0 \wedge \omega = 1/n$. Riziko portfolia je dáno vztahem:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 + \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j, j=1}^n \frac{\sigma_{ij}}{n(n-1)}$$

Pro první sčítanec výsledného tvaru rizika portfolia platí výše uvedené závěry, pod druhým výrazem si lze představit průměrnou kovarianci aktiv. Z tohoto vztahu je zřejmé, že portfolio tvořeno n složkami se vzájemnou pozitivní korelací již nelze plně diverzifikovat. Pokud bychom využili limitního vztahu pro $n \rightarrow \infty$ plně bychom eliminovali tu část rizika portfolia, vyplývající z rozptylů jednotlivých složek, avšak ve vztahu zůstane výše zmíněná průměrná kovariance jednotlivých aktiv, což zde představuje druhý faktor celkového rizika portfolia.²⁹

²⁸ Blake D.: *Analýza finančních trhů*, GRADA Publishing, 1995, Praha, ISBN 80-7169-201-8, str. 420-1

²⁹ Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 58-9

Výše uvedené příklady modelových dvousložkových a vícesložkových portfolií ukazují, jakým způsobem může tvorba portfolia snižovat celkové investiční riziko. Tento jev se označuje efektem portfolia a rozlišuje se jeho dvojitá podoba, Markowitzův efekt a efekt diverzifikace. První z uvedených efektů je způsoben potencialem negativní korelací aktiv, který umožňuje eliminovat riziko, jak ukazuje příklad dvousložkového portfolia s korelací aktiv $\rho_{XY} = -1$. Jeho vliv tak sílí s menším počtem negativně korelovaných aktiv v portfoliu. Naopak efekt diverzifikace, který předpokládá nekorelovaná aktiva, snižuje riziko portfolia s vzrůstajícím počtem aktiv.³⁰

2.3. Množina efektivních portfolií

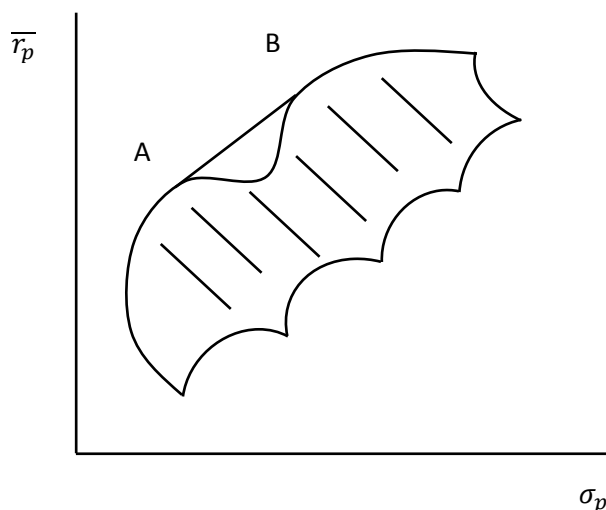
Každé aktivum je charakterizováno svým výnosem, rizikem a likviditou. Ekonomickou realitou je fakt, že právě všechny tyto tři ukazatele zároveň u sledovaného aktiva běžně nenabývají optimálních hodnot. Samozřejmostí také zůstává, že dvě nebo i více různých aktiv může nabývat stejného výnosu, ale s odlišnou rizikovou mírou, anebo obráceně existují rovněž aktiva, jejichž výnosy jsou zatíženy tímž rizikem, ale dosahují odlišných hodnot. To samé platí i pro portfolia aktiv. Již bylo zmíněno, u investorů předpokládáme racionalitu a rizikovou averzi. Za předpokladu shodného výnosu více aktiv či portfolií volí investor to aktivum či portfolio, které je zatíženo menším rizikem. Pojem množina efektivních portfolií se opírá o předchozí předpoklady a vychází z tzv. principu dominance. Mezi dvojicí aktiv či portfolií A, B racionálně vybíráme A právě tehdy, když splňuje podmínku $r_A \geq r_B \wedge \sigma_A \leq \sigma_B$ za předpokladu, že nenastane situace $r_A = r_B \wedge \sigma_A = \sigma_B$. Řečeno jinými slovy, aktivum či portfolio A v tomto případě dominuje B. Při volbě množiny efektivních portfolií z množiny přípustných portfolií, vybíráme ta portfolia, která nejsou dominována jinými.³¹

Množina efektivních portfolií, která jsou tvořena rizikovými aktivy, má vždy konkávní tvar. Pro vysvětlení tohoto jevu použijme za příklad dvě portfolia A, B

³⁰ Kariya T.: Quantitative Methods for Portfolio Analysis, MTV Model Approach, Kluwer Academic Publisher, 1993, Dordrecht, Theory and decision library. Series B, Mathematical and statistical methods; Vol. 23., ISBN 0-7923-2254-1, str. 118-9

³¹ Sharpe W. F., Alexander G. J.: Investice, Victoria Publishing, čtvrté vydání, 1994, Praha, ISBN 80-85605-47-3, str. 128-130, Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 47-8

ležící na množině efektivních portfolií. Tato situace je znázorněna níže na obrázku. Portfolio A nabývá nižšího celkového rizika, ale i očekávaného výnosu, u portfolia B je tomu naopak. Na obrázku je v prostoru mezi portfolii A, B zobrazen neracionální konvexní tvar množiny efektivních portfolií. Pokud by totiž korelace portfolií dosahovala hodnoty +1, nabývala by hranice efektivních portfolií spojující A, B, což je zároveň množina portfolií vzniklých kombinacemi A a B, tvaru přímky, jako tomu bylo v případě dvousložkového portfolia složeného z dokonale pozitivně korelovaných aktiv X, Y. V případě potencionálně menších korelací portfolií A, B by výsledná kombinace portfolií složených z A a B ležela nad touto přímkou směrem vlevo, neboť dochází ke snižování celkového rizika portfolia.³²



Obr. 5. Konkávnost efektivní množiny portfolií ³³

Nadcházející kapitoly se zabývají konkrétními kvantitativními metodami vedoucími k volbě optimálního portfolia a zároveň i nalezení množiny efektivních portfolií.

³² Sharpe W. F., Alexander G. J.: *Investice*, Victoria Publishing, čtvrté vydání, 1994, Praha, ISBN 80-85605-47-3, str. 132-8, Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6, str. 77-9

³³ Převzato a upraveno z *Sharpe W. F., Alexander G. J.: Investice*, Victoria Publishing, čtvrté vydání, 1994, Praha, ISBN 80-85605-47-3, str. 138

2.4. Optimalizační úloha s rizikovými aktivy

Mějme portfolio složené z n aktiv. Očekávaná výnosnost aktiv je popsána náhodným vektorem $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)'$ a variační maticí $\mathbf{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ typu $n \times n$. Relativní zastoupení aktiv v portfoliu vyjadřuje vektor vah $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)'$. Očekávaný výnos a riziko portfolia jsou definovány vztahy:

$$r_p = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r}$$

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$$

$$1 = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e},$$

kde \mathbf{e} je n -rozměrný vektor jedniček.³⁴ Předpokládejme, že portfolio má více než dvě složky a varianční matice výnosností aktiv $\mathbf{\Sigma}$ je pozitivně definitní.³⁵ Na základě tohoto vymezení odvodíme vztahy pro váhy optimálního portfolia.

2.4.1. Minimalizace rozptylu portfolia, short selling povolen

První optimalizační úloha se opírá o minimalizaci očekávaného rizika portfolia za stanovených omezujících podmínek, které určují již známý předpoklad jednotkového součtu vah složek portfolia, a dále předem vymezují hodnotu očekávaného výnosu portfolia. Obecně pro očekávaný výnos platí vztah $\boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} \geq r_p$. Při řešení úlohy lze ovšem stejných vah $\boldsymbol{\omega}$ dosáhnout při dvou odlišných hodnotách r_p , proto se tato podmínka upravuje do podoby $\boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} = r_p$.³⁶ Předpokládejme dále, že short selling je povolen.

³⁴ Focardi S. M., Fabozzi F. J.: The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management, John Wiley & Sons, Inc, 2004, Hoboken, Wiley finance series. The Frank J. Fabozzi series, ISBN 0-471-46599-2, str. 474-6

³⁵ Steinbach, M.C.: Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis, SIAM Review, Vol. 43, No.1, pp.31-85, str. 36

³⁶ Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0, str. 57-8

$$\min \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega})$$

$$\boldsymbol{\omega}' \mathbf{e} = 1$$

$$\boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} = r_p^{37}$$

Minimalizace rozptylu portfolia je úlohou kvadratického programování, jejíž obecná podoba je dána předpisem (Dupačová, Lachout 2011):

$$\min f(\mathbf{x}) := \mathbf{p}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x}$$

na konvexní polyedrické množině $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, M \neq \emptyset$

kde \mathbf{C} je pozitivně semidefinitní matice. Pro lokální podmínky optimality úlohy platí obecně vymezené vztahy:

$$L(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \mathbf{p}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{y}'(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{p} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}'\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}(\mathbf{p} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}'\mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0},$$

kde $L(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ Lagrangeova funkce, \mathbf{y} je vektor Lagrangeových multiplikátorů.³⁸

Zabývejme se konkrétním zadáním optimalizační úlohy pro minimalizaci rozptylu portfolia. Jelikož množina přípustných řešení M má v tomto případě podobu $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}, M \neq \emptyset$, řešení přechází do úlohy na volný extrém.³⁹ Určeme tedy nyní váhy pro optimální portfolio (Merton 1972):

³⁷ Focardi S. M., Fabozzi F. J.: The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management, John Wiley & Sons, Inc, 2004, Hoboken, Wiley finance series. The Frank J. Fabozzi series, ISBN 0-471-46599-2, str. 476, Merton R. C.: An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 7, No.4 (Sep., 1972), 1851-1872, str. 1852

³⁸ Dupačová J., Lachout P.: Úvod do optimalizace, Matfyzpress, první vydání, 2011, Praha, ISBN 978-80-7378-176-7, str. 57

³⁹ Hamala M.: Nelineárne programovanie, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatury, druhé vydání, 1976, Bratislava, Matematické metódy v ekonomike., str. 119

$$L(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} + \lambda_1 (r_p - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r}) + \lambda_2 (1 - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e}),$$

kde λ_1, λ_2 jsou Lagrangeovy multiplikátory. Určeme dále lokální podmínky optimality a v dalším kroku přepíšeme první podmínku do vhodnějšího početního tvaru:

$$0 = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} - \lambda_1 \mathbf{r} - \lambda_2 \mathbf{e},$$

$$0 = r_p - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r},$$

$$0 = 1 - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} + \lambda_2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e},$$

Po algebraických úpravách a s využitím upravené první lokální podmínky získáváme soustavu dvou rovnic:

$$r_p = \lambda_1 \mathbf{r}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} + \lambda_2 \mathbf{r}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e},$$

$$1 = \lambda_1 \mathbf{e}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} + \lambda_2 \mathbf{e}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e},$$

Pro zjednodušení početních úkonů definujme předpisy A, B, C a s jejich využitím přepíšeme výše uvedenou soustavu rovnic.

$$A = \mathbf{e}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} \quad B = \mathbf{r}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} \quad C = \mathbf{e}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}$$

$$r_p = \lambda_1 B + \lambda_2 A$$

$$1 = \lambda_1 A + \lambda_2 C$$

Pomocí další zjednodušující proměnné $D = BC - A^2 > 0$ a předchozích vztahů vyjádříme multiplikátory λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{(C r_p - A)}{D} \quad \lambda_2 = \frac{(B - A r_p)}{D},$$

a dosazením do upravené první lokální podmínky optimality získáme výsledný vztah určující váhy optimálního portfolia:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{B \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e} - A \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r}}{D} + \frac{C \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} - A \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e}}{D} r_p \quad ^{40}$$

Dalším krokem úlohy je nalezení množiny efektivních portfolií, k čemuž je nutné blíže analyzovat vlastnosti funkce rozptylu portfolia $\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$. Dle výše odvozených vztahů lze rozptyl převést do následující podoby:

$$\sigma_p^2 = \frac{C r_p^2 - 2 A r_p + B}{D}$$

Funkce rozptylu portfolia nabývá tvaru paraboly. Pro zkoumání dílčích vlastností funkce určíme první a druhou derivaci podle r_p :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial r_p} = \frac{2(C r_p - A)}{D}, \quad = 0 \text{ pro } r_p = \frac{A}{C}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_p^2}{\partial r_p^2} = \frac{2C}{D} > 0$$

Funkce rozptylu je ryze konvexní, svého minima nabývá v bodech $r_p = \frac{A}{C}$ a $\sigma_p^2 = \frac{1}{C}$. Tyto body určují tzv. minimum-variance portfolio. Obdobně rozeberme i vlastnosti funkce směrodatná odchylka portfolia $\sigma_p = \sqrt{\boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}}$, pro kterou platí:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{C r_p^2 - 2 A r_p + B}{D}}$$

⁴⁰ Merton R. C.: An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 7, No.4 (Sep., 1972), 1851-1872, str. 1851- 4

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial r_p} = \frac{C r_p - A}{\sigma D}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial r_p^2} = \frac{1}{\sigma^3 D} > 0$$

Funkce směrodatné odchylky portfolia σ_p nabývá tvaru hyperboly s asymptotami

$r_p = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\sigma \frac{D}{C}}$. Vrchol paraboly určený body $E = \frac{A}{C}$ a $\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{C}}$ je minimum-

variance portfoliem. Množina efektivních portfolií je vyjádřena funkcí

$$r_p = \frac{A}{C} + \frac{1}{C} \sqrt{DC(\sigma_p^2 - \frac{1}{C})}.^{41}$$

2.4.2. Minimalizace rozptylu portfolia, short selling zakázán

Oproti předchozímu případu provedeme modifikaci úlohy v podobě zákazu short selling, kdy váhy složek portfolia budou nabývat hodnot $\omega_i \geq 0$. Tato úprava mění zadání optimalizační úlohy o zavedení další omezující podmínky.

$$\min \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega})$$

$$\boldsymbol{\omega}' \mathbf{e} = 1$$

$$\boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} = r_p$$

$$\boldsymbol{\omega} \geq 0$$

Minimalizace rozptylu portfolia se zákazem short selling je rovněž úlohou kvadratického programování. Vzhledem k tvaru omezujících podmínek se řešení opírá o Wolfeho algoritmus. Mějme obecně zadanou úlohu kvadratického programování z předchozí podkapitoly ve tvaru:

$$\min f(\mathbf{x}) := \mathbf{p}'\mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} \text{ na } M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, M \neq \emptyset$$

⁴¹ Merton R. C.: An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 7, No.4 (Sep., 1972), 1851-1872, str. 1854-7

včetně lokální podmínky optimality. Wolfeho algoritmus (Lachout 2011, Hamala 1976) spočívá v zavedení doplňujících proměnných \mathbf{D} a \mathbf{z} , kde \mathbf{D} je diagonální matice s prvky $d_{ii} = -1$ pokud $p_i < 0$, $d_{ii} = 1$ pokud $p_i \geq 0$ a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$. Předpokládejme, že existuje přípustná báze nezáporného řešení $\mathbf{Ax} + \mathbf{w} = \mathbf{b}$. Necht' je nyní dána tato optimalizační úloha:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n z_i \mid \begin{array}{l} \mathbf{Ax} + \mathbf{w} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Cx} + \mathbf{A}'\mathbf{y} - \mathbf{v} + \mathbf{Dz} = -\mathbf{p} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

Řešení spočívá v použití modifikovaného Simplexového algoritmu (více viz Lachout 2011, Hamala 1976).⁴²

Na základě výše uvedených poznatků řešíme úlohu minimalizace rozptylu portfolia se zákazem short selling, jejíž množina přípustných řešení M je obecného typu $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Určíme Lagrangeovu funkci a soustavu rovnic lokálních podmínek optimality:

$$L(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} + \lambda_1 (r_p - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r}) + \lambda_2 (1 - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e})$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} - \lambda_1 \mathbf{r} - \lambda_2 \mathbf{e} - \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} - r_p = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}' \mathbf{e} - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}, \omega_i \gamma_i = 0, i = 1, \dots, n$$
⁴³

⁴² Hamala M.: Nelineárne programovanie, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatury, druhé vydání, 1976, Bratislava, Matematické metódy v ekonomike., str. 141-4, Lachout P.: Matematické programování, pracovní text k přednášce „EKN012 Optimalizace I“, MFF UK, 2011, [cit. 24.7.2013], Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/Optima1/111016-MP_skripta.pdf, str. 75-7

⁴³ Huang Y.: Some Properties for A Portfolio Optimization Model, Mathematica Aeterna, Vol. 2, 2012, no. 7, 589 – 591, str. 589-90

V dalším kroku řešení úlohy využijme Wolfeho algoritmus. Zaveďme doplňující proměnné \mathbf{D} a \mathbf{z} dle obecného postupu. Necht' je nyní dána následující optimalizační úloha s pozměněnými výše uvedenými omezujícími podmínkami:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n z_i \left| \begin{array}{l} \mathbf{\Sigma} \boldsymbol{\omega} - \lambda_1 \mathbf{r} - \lambda_2 \mathbf{e} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Dz} = 0 \\ \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} = r_p \\ \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e} = 1 \\ \boldsymbol{\omega} \geq 0, \boldsymbol{\gamma} \geq 0, \omega_i \gamma_i = 0, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

Úlohu bychom nyní řešili s konkrétními hodnotami proměnných pomocí modifikovaného Simplexového algoritmu a dospěli bychom ke stanovení optimálních vah portfolia.

2.4.3. Příímka CML a Sharpův poměr

Předpokládejme nyní existenci aktiva s bezrizikovou výnosností R_f . Mějme portfolio o počtu n rizikových aktiv a jednoho aktiva bezrizikového. Váhy portfolia rizikových aktiv jsou vyjádřeny vektorem $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)'$. Relativní zastoupení aktiva s bezrizikovou výnosností je dáno vahou $(1 - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e})$, kde \mathbf{e} je jednotkový vektor. Očekávaný výnos a riziko portfolia jsou určeny těmito vztahy:

$$r_p = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} + (1 - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e})R_f$$

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{\Sigma} \boldsymbol{\omega},$$

přičemž aktivum s bezrizikovou výnosností je nekorelováno s rizikovými aktivy a dosahuje nulového rozptylu. V případě, kdy uvažujeme optimalizační úlohu na minimalizaci rozptylu portfolia $\min \boldsymbol{\omega}' \mathbf{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$ s cílenou očekávanou výnosností portfolia $r_e = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r} + (1 - \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e})R_f$ jsou hledané váhy aktiv optimálního portfolia tvaru:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{r} - R_f \mathbf{e})(r_e - R_f)}{(\mathbf{r} - R_f \mathbf{e})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{r} - R_f \mathbf{e})},$$

portfolio rizikových aktiv je označované za tzv. tangenciální. Pokud je toto portfolio složené ze všech dostupných aktiv na trhu s váhami, které odpovídají vždy poměru tržní ceny dílčího aktiva portfolia k tržní hodnotě všech uvažovaných aktiv, nazývá se tržním portfoliem.⁴⁴

Přístupme k problematice výkladu přímky CML (Capital Market Line). Předpokládejme, že investoři v rámci konstrukce efektivního portfolia rozdělují své bohatství mezi tržní portfolio ω_M a bezrizikové aktivum $(1 - \omega_M)$. Očekávaný výnos a riziko takto vymezeného portfolia jsou dány těmito vztahy:

$$r_p = (1 - \omega_M)R_f + \omega_M r_M$$

$$= R_f + \omega_M(r_M - R_f)$$

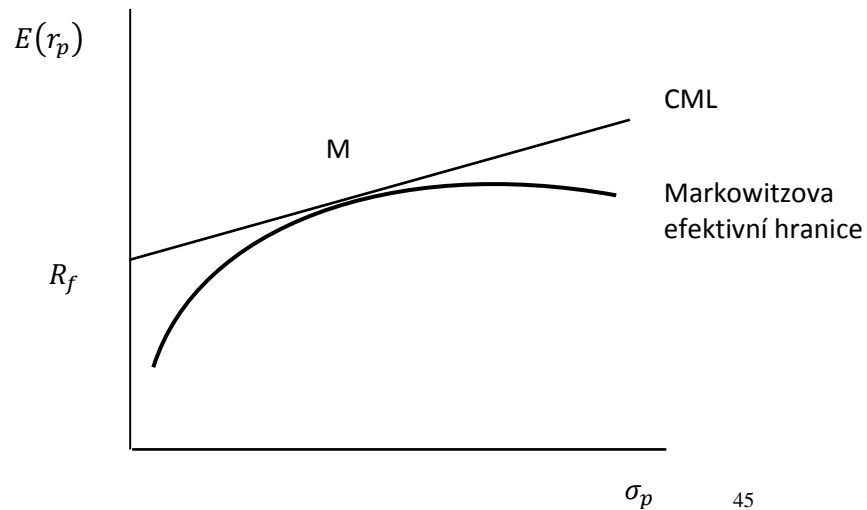
$$\sigma_p^2 = \omega_M^2 \sigma_M^2,$$

kde r_M je očekávaná výnosnost tržního portfolia a σ_M^2 je riziko tržního portfolia. Dle výše uvedeného vztahu lze váhu zastoupení tržního portfolia vyjádřit ve tvaru $\omega_M = \frac{\sigma_p}{\sigma_M}$ a vztah pro očekávaný výnos portfolia investorů lze vyjádřit:

$$r_p = R_f + \left(\frac{r_M - R_f}{\sigma_M} \right) \sigma_p,$$

tento vztah se nazývá Capital Market Line a zachycuje ji následující obrázek.

⁴⁴ Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 34-5



Obr. 6. CML a Markowitzova efektivní hranice

Přímka CML je kombinací bezrizikového aktiva a tržního portfolia. Vychází z úrovně bezrizikové výnosnosti R_f a je tečnou množiny efektivních portfolií rizikových aktiv v bodě tržního portfolia M .⁴⁶

Tržní portfolio lze rovněž vymežit optimalizační úlohou, kterou nazýváme maximalizace Sharpova poměru:

$$\max \frac{\omega' r - R_f}{\sqrt{\omega' \Sigma \omega}}$$

$$\omega' e = 1$$
⁴⁷

⁴⁵ Převzato a upraveno z *Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 37*

⁴⁶ *Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 36-9*

⁴⁷ *Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 35-6*

3. Očekávaný výnos a riziko portfolia

Ústředním motivem zkoumání této kapitoly jsou konstrukce odhadů očekávané výnosnosti a rizika portfolia, neboť jakožto parametry představují klíčovou roli pro konstrukci optimálního portfolia. Hovoříme-li o výnosech jistého aktiva či souboru aktiv, hovoříme o tzv. finanční časové řadě, na kterou ze statistického pohledu nahlížíme jakožto na jednorozměrný či vícerozměrný náhodný proces. Vyložme tedy nejprve obecné charakteristiky náhodných procesů, a poté přejdeme přímo k problematice finančních časových řad.

Na pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P) mějme indexní množinu $T \subset R$, kterou chápeme jakožto čas. Rodinou náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ na (Ω, A, P) je náhodný proces. Pokud $T = Z \vee T = N_0$ hovoříme o náhodném procesu s diskrétním časem, je-li $T = [a, b]$ pro $-\infty \leq a < b \leq \infty$ jedná se o náhodný proces ve spojitém čase. Množina hodnot S , které nabývá náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$, je stavový prostor. Je-li S množinou diskrétních hodnot, jedná se o náhodný proces s diskrétními stavy, pokud je množina S intervalem, hovoříme o náhodném procesu se spojitými stavy. Pokud je proces $\{X_t, t \in T\}$ vektorem, pak se jedná o vícerozměrný náhodný proces. Trajektorie procesu je funkcí t pro elementární jev $\omega \in \Omega$, označované též jakožto časová řada. V této práci považujeme pojmy náhodný proces a časová řada za významově totožné.⁴⁸

Střední hodnotou náhodného procesu $\{X_t, t \in T\}$ se rozumí vztah $E(X_t) = \mu_t$. Funkce definovaná předpisem:

$$\gamma(s, t) = cov(X_s, X_t) = E(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t), \quad t, s \in T$$

je tzv. autokovarianční funkce procesu. Pokud uvažujeme $cov(X_t, X_t)$ hovoříme o rozptylu procesu, označovaného také $var(X_t)$. Autokorelační funkce procesu pro časový posun h má je dána vztahem:

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\sigma^2}$$

⁴⁸ Prášková Z., Lachout P.: Základy náhodných procesů, UK v Praze, Nakladatelství Karolinum, 2. dotisk prvního vydání, 2005, Praha, ISBN 80-7184-688-0, str. 7, Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 227-8

Jednou ze základních zkoumaných vlastností náhodných procesů je tzv. stacionarita. Stacionaritu rozlišujeme ve dvou formách, a to striktní a slabou. Striktní stacionarita říká, že pravděpodobnostní rozdělení časové řady (náhodného procesu) je z časového hlediska invariantní. Slabou formou se rozumí takový proces, jehož střední hodnota a rozptyl jsou konstantní v čase. Pro náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ tedy platí:

$$E(X_t) = \mu = konst.$$

$$var(X_t) = \sigma^2 = konst.$$

$$cov(X_s, X_t) = cov(X_{s+h}, X_{t+h}), h \in R$$

Autokovarianční funkce slabě stacionárního procesu $\{X_t, t \in T\}$ je funkcí $t - s$.⁴⁹ Vícerozměrnou časovou řadou náhodného procesu $\{\mathbf{X}_t, t \in T\}$ se rozumí náhodná veličina $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{nt})'$, kde n je rozměr vektoru. Střední hodnota procesu $\{\mathbf{X}_t, t \in T\}$ je definována vztahem $E(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$, pro autokovarianční funkci platí:

$$\boldsymbol{\Gamma}(s, t) = cov(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_t) = E(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu}_s)(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_t), t, s \in T,$$

pokud se jedná o $cov(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t)$ hovoříme o rozptylu vícerozměrného procesu a značíme jej $\boldsymbol{\Sigma}$. Autokorelační funkce je dána vztahem:

$$\boldsymbol{\rho}_h = \mathbf{D}^{-1/2} \boldsymbol{\Gamma}_h \mathbf{D}^{-1/2}, h \in Z, \mathbf{D} = \mathbf{diag}\{\boldsymbol{\Sigma}\}$$

Striktní a slabá stacionarita jsou definovány analogicky s případem jednorozměrných náhodných procesů. Pro slabou stacionaritu platí podmínky:

$$E(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu} = konst.$$

$$var(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Sigma} = konst.$$

⁴⁹ Prášková Z., Lachout P.: Základy náhodných procesů, UK v Praze, Nakladatelství Karolinum, 2. dotisk prvního vydání, 2005, Praha, ISBN 80-7184-688-0, str. 8, Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 327-9

$$\text{cov}(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_t) = \text{cov}(\mathbf{X}_{s+h}, \mathbf{X}_{t+h}), h \in \mathbb{R}^{50}$$

Finanční časové řady, mějme konkrétně na mysli rozdělení výnosnosti aktiva, jsou charakteristické specifickými vlastnostmi. Prvním avšak zásadním problémem je nesplnění kritéria pro slabou stacionaritu náhodného procesu, jehož střední hodnota a rozptyl nejsou v čase konstantní. Ve finančním modelování bývá obecně uvažována normalita rozdělení výnosů, což je předpoklad diskutabilní. Důvod nevěrohodnosti normálního rozdělení spočívá v možných prudkých cenových pohybech aktiv a významu vyšších statistických momentů. Pravděpodobnostní rozdělení výnosnosti jsou tzv. leptokurtická. Tato rozdělení jsou v porovnání s normálním rozdělením špičatější kolem střední hodnoty a disponují větší hustotou na koncích. Zároveň nabývají kladného koeficientu špičatosti.⁵¹

Heteroskedasticita a autokorelace jsou dalšími rysy finančních časových řad. Pokud bychom předpokládali výnosnost aktiva vyjádřenou obecně regresním modelem $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, tak měnící se rozptyl reziduální složky $\boldsymbol{\varepsilon}$ regresního modelu lze zapsat vztahem:

$$\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{diag} \{k_i\}, \sigma^2 > 0, k_i > 0 \text{ pro } i = 1, \dots, t,$$

V klasickém regresním modelu se předpokládá, že reziduální složky jsou nekorelované. Autokorelace je označení pro situaci, kdy je tato podmínka porušena, rezidua jsou korelovaná v různých časových okamžicích pozorování.⁵²

Pro finanční časové řady jsou dále charakteristické jevy (Cipra 2008) shlukování volatility a pákový efekt. První z uvedených pojmů v tomto případě popisuje volatilitu jakožto veličinu, která vždy po určitý časový horizont dosahuje přibližně

⁵⁰ Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 419-20

⁵¹ Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 222, Focardi S. M., Fabozzi F. J.: The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management, John Wiley & Sons, Inc, 2004, Hoboken, Wiley finance series. The Frank J. Fabozzi series, ISBN 0-471-46599-2, str. 491-2, Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 57-8, 377

⁵² Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 31-4, 84, 94-5, Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 227

stejně úrovně. Pákový efekt říká, že volatilita finančních časových řad nabývá vyšších úrovní po cenových poklesech a nižších hodnot po cenových nárůstech.⁵³

Dostupná pozorování historických výnosů aktiv přináší celou řadu jevů, které znesnadňují modelování finančních řad. Jsou jimi např. krátké časové řady či lišící se jejich délka pro jednotlivá aktiva, dále pak nízká frekvence či vysoká agregace dat v dílčích časových úsecích nebo i přímo chybějící data. Jisté zkreslení s sebou přináší i často při práci s daty používaná transformace spojité finanční veličiny na její disktrétní podobu.⁵⁴

3.1. Konstrukce výběrových estimátorů

Konstrukce výběrových estimátorů očekávaného výnosu a rizika na základě historických pozorování patří k základním používaným metodám i přes fakt, že nereflexuje výše uvedené specifické rysy finančních časových řad.

Mějme portfolio složené z n aktiv. Vektor $\mathbf{R}_t = (R_1, \dots, R_n)$ určuje výnosnosti všech n aktiv v daném čase t , přičemž t bude dále nabývat hodnot od 1 do T , kde T je celkový počet sledovaných časových okamžiků. Předpokládejme, že \mathbf{R}_t náleží vícerozměrnému normálnímu rozdělení $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$ typu $n \times n$, pro jehož hustotu obecně v čase t platí:

$$f(\mathbf{r}_t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det \boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu})\right\}^{55}$$

Označme datovou matici \mathbf{D} , která popisuje T časových pozorování výnosností každého z n aktiv portfolia. Jinými slovy existuje tak výběr o rozsahu T nezávislých

⁵³ Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 377

⁵⁴ Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 229-30, Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 228

⁵⁵ Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 223-4, Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 95, Giri N. C.: Multivariate Statistical Inference, Academic Press, 1977, New York, Probability and mathematical statistics., ISBN 0-12-285650-3, str. 50

stejně rozdělených n -rozměrných vektorů $\mathbf{R}_t = (R_1, \dots, R_n)$ s marginální hustotou $f(\mathbf{r}_t)$ pro $t = 1, \dots, T$. Výběr je popsán sdruženou hustotou:

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_T) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

Estimátory $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ nalezneme na základě maximalizace věrohodnostní funkce $L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_T | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, pro kterou platí:

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_T | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Tn}{2}} (\det \boldsymbol{\Sigma})^{\frac{T}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

$$\ln L = -\frac{Tn}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(\det \boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{r}_t - \boldsymbol{\mu}),$$

kde $\ln L$ je logaritmus věrohodnostní funkce L . Po vyřešení úlohy se získají maximálně věrohodné estimátory $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$, čili odhady očekávané výnosnosti aktiv a variance, které jsou dány vztahy:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{R}} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{T-1}{T} \mathbf{W},$$

kde $\bar{\mathbf{R}}$ je vektor průměrů výnosností aktiv a \mathbf{W} je výběrová varianční matice. $\bar{\mathbf{R}}$ a \mathbf{W} lze dále rozepsat:

$$\bar{\mathbf{R}} = (\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_n), \quad \bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{it} \quad \text{pro } i = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{T-1} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \bar{\mathbf{R}}) (\mathbf{R}_t - \bar{\mathbf{R}})',$$

kde \mathbf{Q} je tzv. Wishartova matice typu $n \times n$ a výběrový průměr $\bar{\mathbf{R}}$ náleží pravděpodobnostnímu rozdělení $N_n(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{t}\boldsymbol{\Sigma})$. Výběrovou varianční matici typu $n \times n$ lze zapsat i v maticovém vyjádření:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{T-1} \mathbf{X}\mathbf{X}', \quad \mathbf{Q} = \mathbf{X}\mathbf{X}'$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \cdots & R_{nt} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{R}_1 & \cdots & \bar{R}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{R}_n & \cdots & \bar{R}_n \end{pmatrix}$$

Wishartovo rozdělení je následující. Mějme p -rozměrný vektor \mathbf{Z}_i , který náleží rozdělení $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, dále necht' existuje výběr vektoru \mathbf{Z}_i v rozsahu v , tedy $i = 1, \dots, v$. Matice $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^v (\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{Z}})(\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{Z}})'$, kde $\bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \mathbf{Z}_i$, má Wishartovo rozdělení $W_p(v-1, \boldsymbol{\Sigma})$ s $v-1$ stupni volnosti s hustotou:

$$f(\mathbf{A}|v, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}(T-n-1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A}\right)}{2^{\frac{nv}{2}} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{v}{2}} \prod_{i=1}^n \Gamma((v+1-i)/2)}$$

Pro $\mathbf{Q} = (T-1)\mathbf{W}$ platí pravděpodobnostní rozdělení $\mathbf{Q} \sim W_n(T-1, \boldsymbol{\Sigma})$, což je opět Wishartovo rozdělení s $T-1$ stupni volnosti a parametrem $\boldsymbol{\Sigma}$ a analogicky výběrová varianční matice náleží rovněž Wishartovu rozdělení $\mathbf{W} \sim W_n\left(T-1, \frac{1}{T-1}\boldsymbol{\Sigma}\right)$.⁵⁶

⁵⁶ Hebák P., Hustopecský J., Jarošová E., Pecáková I.: Vícerozměrné statistické metody (1), Informatorium, druhé přepracované vydání, 2007, Praha, ISBN 978-80-7333-056-9, str. 21, 31-2, 35-7, 46-8, Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4, str. 223-4, Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 41, 98, Giri N. C.: Multivariate Statistical Inference, Academic Press, 1977, New York, Probability and mathematical statistics., ISBN 0-12-285650-3, str. 72-4, Malá I.: Vybrané kapitoly z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, Vysoká škola ekonomická v Praze, Nakladatelství Oeconomica, 2009, Praha, ISBN: 978-80-245-1613-4, str. 78-9, 135-7

3.2. Modelování volatility finančních časových řad

Dalším způsobem, jak získat adekvátnější odhad varianční matice pro optimalizační úlohu teorie portfolia, je využití modelů volatility vhodných pro finanční časové řady. Vyložme tedy nejprve základní představy o tomto přístupu a pak přejděme k odvození konkrétních modelů.

Volatilitou finanční časové řady, hovoříme-li konkrétně např. o výnosnosti aktiva, se rozumí riziko vyjádřené statistickým ukazatelem rozptylem či směrodatnou odchylkou. Vzhledem k výše uvedeným specifickým vlastnostem finančních časových řad jako jsou nestacionarita, leptokurtická rozdělení výnosnosti, shlukování volatility a pákový efekt, se v problematice určování volatility přistupuje k použití stochastických nelineárních modelů. Pro náhodný proces $\{Y_t, t \in T\}$ na pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P) platí nelineární funkční předpis:

$$y_t = f(e_t, e_{t-1}, \dots),$$

kde e_t jsou tzv. inovace, posloupnost stejně rozdělených nekorelovaných náhodných veličin. Náhodný proces v čase t je podmíněn minulou informací Ω_{t-1} do času $t - 1$. Pro podmíněnou střední hodnotu a rozptyl náhodného procesu pak platí:

$$\mu_t = E(X_t | \Omega_{t-1})$$

$$\sigma_t^2 = \text{var}(X_t | \Omega_{t-1}),$$

pokud navíc uvažujeme, že náhodný proces v čase t je definován předpisem $y_t = \mu_t + e_t$, nabývá rozptyl tvaru $\sigma_t^2 = \text{var}(X_t | \Omega_{t-1}) = \text{var}(e_t | \Omega_{t-1})$. Inovace lze vyjádřit ve tvaru:

$$e_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

kde ε_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, pro které dále uvažujeme $E(\varepsilon_t) = 0$ a $var(\varepsilon_t) = 1$.⁵⁷

V následující podkapitole odvodíme často pro modelování volatility finančních řad používaný model GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) a to obecně v jeho jednorozměrné i vícerozměrné podobě a následně uvažujeme konkrétní modely CCC GARCH (Constant Conditional Correlations GARCH) a DCC GARCH (Dynamic Conditional Correlations GARCH), který bude využit v této práci jako další metoda pro konstrukci odhadu variační matice pro optimalizační úlohu výběru portfolia.

3.2.1. Multivariate GARCH model

Tradiční přístup v modelování heteroskedasticity finanční časové řady se opírá o uvažovanou exogenní veličinu x_t , na jejímž základě se určuje předpověď rozptylu procesu y_t . Za předpokladu, že náhodná proces y_t nabývá nulového průměru, lze psát:

$$y_t = e_t x_t,$$

kde x_t je zmíněná exogenní veličina, $e_t \sim N(0, \sigma^2)$. Na rozdíl od klasického přístupu nyní uvažujeme, že náhodný proces y_t je popsán podmíněnou hustotou rozdělení $f(y_t | y_{t-1})$. Předpokládáme tak, že podmíněný rozptyl y_t je dán minulou informací procesu Ω_{t-1} . Formální vztah vyjadřující tuto úvahu lze obecně zapsat:

$$y_t = e_t y_{t-1},$$

přičemž e_t je opět bílý šum. Modifikujme uvedený vztahu na $y_t = \varepsilon_t \sigma_t$, kde ε_t jsou iid veličiny, pro které platí $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Pro model ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) řádu p platí:

$$y_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

⁵⁷ Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 377-80

$$\sigma_t^2 = h(y_{t-1}, \dots, y_{t-p}, \boldsymbol{\alpha}),$$

kde h je funkce, $\boldsymbol{\alpha}$ vektor parametrů. Podmíněnou střední hodnotu procesu μ_t uvažujeme nulovou a inovace jsou dány vztahem $e_t = \varepsilon_t \sigma_t$. Volatilitu modelu ARCH řádu p lze vyjádřit funkcí minulých inovací $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p e_{t-p}^2$, pro parametry $\alpha_0 > 0, \dots, \alpha_p > 0$.⁵⁸

Problémem modelu autoregresní podmíněné heteroskedasticity ARCH je především vysoká hodnota řádu p , která často způsobuje porušení nezápornosti parametrů α dále nezohlednění pákového efektu, jakožto specifické vlastnosti finančních časových řad. Inovaci v tomto ohledu představuje (Bollerslev 1986) model GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity). Uvažujme předpis pro náhodný proces y_t ve tvaru $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t \varepsilon_t$. Formální vymezení modelu GARCH řádu (p, q) je následující:

$$e_t \mid \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q,$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{i=1}^{\max(p,q)} \alpha_i + \beta_i < 1,$$

kde e_t jsou minulé předpovědní chyby, $\alpha_0, \alpha_i, \beta_j$ jsou parametry.⁵⁹

Nyní přistupme k vícerozměrnému GARCH modelu. Necht' je na pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P) dán n -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in T\}$ s minulou informací Ω_{t-1} do času $t - 1$. Pro náhodný proces \mathbf{Y}_t platí:

⁵⁸ Engle F.R.: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol. 50, No. 4 (Jul. 1982), pp. 987-1007, str. 987-9, Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 384-6

⁵⁹ Bollerslev T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 31 (1986) 307-327., North-holland, str. 307-10, Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 385,390-1

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde $\boldsymbol{\mu}_t$ je vektor podmíněné střední hodnoty procesu, \mathbf{e}_t vektor minulých předpovědních chyb, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ vektor nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem, \mathbf{H}_t je podmíněná pozitivně definitní varianční matice typu $n \times n$. Modely GARCH pro vícerozměrné časové řady rozlišujeme v několika základních podobách. Prvním případem je tzv. VEC (Model Bollerslev, Engle, Wooldridge (1998)) model, formálně se jedná o M-GARCH (Multivariate GARCH) řádu (p, q) model určený vztahem:

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{C} + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \text{vech}(\mathbf{e}_{t-1} \mathbf{e}_{t-1}') + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \text{vech}(\mathbf{H}_{t-1}),$$

$$\mathbf{e}_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t),$$

kde $\mathbf{C}, \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j$ jsou parametry. \mathbf{C} je $\frac{n(n+1)}{2}$ - rozměrný vektor, \mathbf{A}_i a \mathbf{B}_j jsou matice typu $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$, \mathbf{e}_t jsou předpovědní chyby a \mathbf{H}_t varianční matice. Operátor *vech* mění strukturu matice tak, že její horní trojúhelníkovou část uspořádá do vektorové podoby. Tento obecný model lze modifikovat např. do diagonální podoby DVEC (Diagonal VEC), kdy matice parametrů \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou diagonálními. V tomto typu GARCH modelu ovšem nemusí být volatilní matice \mathbf{H}_t pozitivně definitní. Dalším typem jsou tzv. BEKK (Model Baba, Engle, Kraft, Kroner (1995)) GARCH modely, s pozitivně definitní varianční maticí \mathbf{H}_t :

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \mathbf{A}'\mathbf{e}_{t-1}\mathbf{e}_{t-1}'\mathbf{A} + \mathbf{B}'\mathbf{H}_{t-1}\mathbf{B},$$

kde matice parametrů $\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ v případě n -rozměrné časové řady nabývají typu $n \times n$. Pokud položíme $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{D}$, \mathbf{D} je diagonální matice, získáme diagonální model BEKK GARCH, formálně zapsán:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \mathbf{A}'\mathbf{e}_{t-1}\mathbf{e}_{t-1}'\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{E}[\mathbf{A}'\mathbf{e}_{t-1}\mathbf{e}_{t-1}'\mathbf{A} | \Omega_{t-2}]\mathbf{D},$$

pokud bychom v diagonálním modelu položily $\mathbf{A} = a\mathbf{I}, \mathbf{B} = b\mathbf{I}$, $a, b \in R$, jednalo by se o skalární BEKK GARCH model.⁶⁰

Následující podkapitoly popisují již konkrétní výstavbu pokročilých vícerozměrných GARCH modelů, jsou jimi tzv. Constant Conditional Correlations GARCH a novější metoda Dynamic Conditional Correlations GARCH.

3.2.1.1. Constant Conditional Correlations GARCH

Prvním z uvedených modelů je Constant Conditional Correlations GARCH (Bollerslev 1990). Necht' existuje na pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P) n -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in T\}$, pro který v t platí:

$$\mathbf{y}_t = E(\mathbf{y}_t | \Omega_{t-1}) + \mathbf{e}_t,$$

$$\text{var}(\mathbf{e}_t | \Omega_{t-1}) = \mathbf{H}_t,$$

kde \mathbf{H}_t je pozitivně definitní varianční matice, Ω_{t-1} generující minulé informace procesu do času $t - 1$, \mathbf{e}_t jsou předpovědní chyby. Pro je ij -tý prvek varianční matice \mathbf{H}_t platí předpis:

$$h_{ijt} = \rho_{ijt} \sqrt{h_{iit} h_{jtt}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$h_{iit} = \omega_i \sigma_{it}^2 \quad i = 1, \dots, n, \quad \sigma_{it}^2 > 0$$

kde ω_i je kladný konstantní skalár pro $i = 1, \dots, n$. Varianční matici \mathbf{H}_t lze zapsat v maticové podobě:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}_t,$$

⁶⁰ Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. V. K.: Multivariate GARCH Models: A Survey, Journal of Applied Econometrics. Jan/Feb2006, Vol. 21 Issue 1, p79-109. 31p. str. 2-6, Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9, str. 459-60, Bollerslev T., Engle F., Wooldridge J. M.: A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances, Journal of Political Economy, Vol. 96, No.1,(Feb.,1988), pp.116-131, str. 119, Silvennoinen A., Teräsvirta T.: Multivariate GARCH models, CREATES Research Paper 2008-6, [cit. 22.10.2012], Dostupné z: ftp://ftp.econ.au.dk/creates/rp/08/rp08_06.pdf, str. 3-5

kde $\mathbf{D} = \mathbf{diag} \{\sigma_{it}, \dots, \sigma_{nt}\}$, Γ je matice typu $n \times n$. Tato matice je v čase konstantní a její ij -tý prvek je dán vztahem $\rho_{ij}\sqrt{\omega_i\omega_j}$. Odhad prvku h_{iit} varianční matice \mathbf{H}_t lze získat za využití modelu GARCH (p, q):

$$h_{iit} = \omega_i + \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} e_{it-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_{ij} h_{iit-j}$$

Pro komplexnost uveďme za předpokladu normality logaritmickou věrohodnostní funkci tohoto modelu:

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{Tn}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{D}_t \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{D}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \mathbf{e}_t' (\mathbf{D}_t \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{D}_t)^{-1} \mathbf{e}_t$$

kde $\boldsymbol{\theta}$ je vektor neznámých parametrů a T je počet dob pozorování.⁶¹

3.2.1.2. Dynamic Conditional Correlations GARCH

Model Dynamic Conditional Correlations GARCH (Engle 2002) se od předchozího přístupu CCC GARCH odlišuje v pojetí varianční matice. Uveďme opět předpis pro náhodný n -rozměrný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in T\}$ a maticové vyjádření varianční matice \mathbf{H}_t :

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{e}_t,$$

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \boldsymbol{\Gamma}_t \mathbf{D}_t, \quad \mathbf{D} = \mathbf{diag} \{\sigma_{it}, \dots, \sigma_{nt}\},$$

⁶¹ Bollerslev T.: Modeling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model, The Review of Economics and Statistics, Vol. 72, No. 3, 1990, 498-505, [cit. 22.10.2012], Dostupné z: http://public.econ.duke.edu/~boller/Published_Papers/restat_90.pdf, str. 498-501

přičemž \mathbf{H}_t je pozitivně definitní varianční matice typu $n \times n$, $\mathbf{\Gamma}_t$ je časově proměnná korelační matice iid veličin $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, pro které platí $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{e}_t \sim N(0, \mathbf{\Gamma}_t)$. Prvky diagonální matice \mathbf{D}_t se získají pomocí odhadu modelu GARCH řádu (1,1) pro každé z n aktiv. Pro korelační matici $\mathbf{\Gamma}_t$ pak platí:

$$\mathbf{\Gamma}_t = \text{diag}\{\mathbf{Q}_t\}^{-1} \mathbf{Q}_t \text{diag}\{\mathbf{Q}_t\}^{-1}$$

$$\mathbf{Q}_t = (1 - a - b)\bar{\mathbf{Q}} + a * \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^T + b\mathbf{Q}_{t-1}$$

kde $\bar{\mathbf{Q}} = \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T)$, kterou se získá vztahem $\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T$. Jedná se tak opět o GARCH (1,1) model, pro a, b platí $a \geq 0, b \geq 0, a + b < 1$.⁶²

Vzhledem k předpokladu vícerozměrné normální rozdělení veličin $\mathbf{e}_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t)$ lze věrohodnostní funkci tohoto modelu zapsat vztahem:

$$L = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{H}_t|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}_t' \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{e}_t\right)$$

$$\ln L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T n \ln 2\pi + \ln |\mathbf{H}_t| + \mathbf{e}_t' \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{e}_t$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T n \ln 2\pi + \ln |\mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma}_t \mathbf{D}_t| + \mathbf{e}_t' \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{\Gamma}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{e}_t$$

Nechť parametry v \mathbf{D} jsou určeny $\boldsymbol{\theta}$ a parametry v $\mathbf{\Gamma}$ určeny $\boldsymbol{\psi}$. V prvním kroku zaměňme $\mathbf{\Gamma}_t$ za jednotkovou matici \mathbf{I} typu $n \times n$, získáme tak volatilní část věrohodnostní funkce:

⁶² Engle R.: Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models, Forthcoming Journal of Business and Economic Statistics, 2002, [cit. 18.4.2012], Dostupné z: <http://faculty.chicagobooth.edu/jeffrey.russell/teaching/finecon/readings/dccfinal.pdf>, str. 7-10, Orskaug E.: Multivariate DCC-GARCH Model -With Various Error Distributions, Norsk Regnesentral, SAMBA/19/09, 2009, str. 23-5

$$\begin{aligned}\ln L_V(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T n \ln 2\pi + 2 \ln |\mathbf{D}_t| + \mathbf{e}_t' \mathbf{D}_t^{-2} \mathbf{e}_t \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln 2\pi + \ln \sigma_{it} + \frac{e_{it}^2}{\sigma_{it}}\end{aligned}$$

kde σ_{it} je podmíněný rozptyl aktiva i v čase t . Tento vztah je součtem n věrohodnostních funkcí určujících jednorozměrné GARCH modely pro dílčí aktiva, které jsou odhadovány odděleně. Na základě odhadu parametrů $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ získáme estimátory podmíněných rozptylů σ_{it} pro $i = 1, \dots, n$. V druhém kroku odhadujeme parametry a, b za použití tzv. korelační části věrohodnostní funkce ve zjednodušeném tvaru se zahrnutím již odhadnutého vektoru parametru $\boldsymbol{\theta}$, formálně zapsáno:

$$\ln L_C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\boldsymbol{\Gamma}_t| + \boldsymbol{\varepsilon}_t' \boldsymbol{\Gamma}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad ^{63}$$

⁶³ Engle R.: Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models, Forthcoming Journal of Business and Economic Statistics, 2002, [cit. 18.4.2012], Dostupné z: <http://faculty.chicagobooth.edu/jeffrey.russell/teaching/finecon/readings/dccfinal.pdf>, str. 10-12, Orskaug E.: Multivariate DCC-GARCH Model -With Various Error Distributions, Norsk Regnesentral, SAMBA/19/09, 2009, str. 27-9

4. Bayesův přístup v konstrukci portfolia

4.1. Bayesův princip

Bayesův přístup v konstrukci portfolia je další zkoumanou metodou této diplomové práce. Vyložme nejprve obecné principy Bayesovské statistiky a následně ji použijme v modelu optimalizace portfolia.

Mějme parametr $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\theta}$ a náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, který je popsán pravděpodobnostním rozdělením $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$. Odlišnost Bayesovského přístupu od klasické statistiky spočívá v úsudku ohledně parametru $\boldsymbol{\theta}$, který je stanoven nejen na základě náhodného výběru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, ale i na další informaci o $\boldsymbol{\theta}$, tato informace se nazývá apriorní a je nezávislá na \mathbf{X} . Rozlišujeme ji na objektivní a subjektivní, přičemž objektivní informací se rozumí jistá znalost o parametru $\boldsymbol{\theta}$ získaná na základě objektivních pozorování realizovaných před \mathbf{X} . Subjektivní informace je úsudkem subjektivního charakteru ohledně sledovaného jevu, např. expertního názoru na zkoumanou problematiku. Parametr $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, považujeme za náhodnou veličinu, jejíž pravděpodobnostní rozdělení je popsáno hustotou $q(\boldsymbol{\theta})$.⁶⁴

Pro podmíněnou hustotu $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ je parametr s hustotou $q(\boldsymbol{\theta})$ a $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je náhodná veličina s podmíněnou hustotou $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$, platí:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \frac{q(\boldsymbol{\theta}) f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\int q(\boldsymbol{\theta}) f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \text{ pro } \int q(\boldsymbol{\theta}) f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \neq 0$$
$$= 0 \text{ jinak,}$$

tento vztah je označován jakožto Bayesova věta. Hustota $q(\boldsymbol{\theta})$ je označována za apriorní, hustota $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ za aposteriorní. Literatura kromě tohoto vztahu uvádí také zjednodušený předpis:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) q(\boldsymbol{\theta}),$$

⁶⁴ Hušková, M.: Bayesovské metody, UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, SPN Praha, první vydání, 1985, Praha, str. 7-11

aposteriorní hustota $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ dle výše uvedených předpisů agreguje apriorní informaci o $\boldsymbol{\theta}$ a zároveň realizaci náhodné veličiny \mathbf{X} .⁶⁵

Mějme náhodný výběr $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ a na základě těchto dat učiňme predikci náhodné veličiny X_{+1} o jeden krok realizace dopředu. Toho docílíme na základě použití vztahu pro tzv. aposteriorní prediktivní hustotu X_{+1} , pro kterou platí:

$$f(x_{+1}|\mathbf{x}) = \int f(x_{+1}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta} \quad 66$$

Přístupme k problematice výběru vhodného pravděpodobnostního rozdělení apriorní hustoty $q(\boldsymbol{\theta})$. První metodou jsou tzv. systémy konjugovaných rozdělení. Mějme opět náhodný výběr $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ popsaný podmíněnou hustotou pravděpodobnosti $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$. Systém apriorních hustot $q(\boldsymbol{\theta})$ je konjugovaný s hustotami $\{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$, pokud pro velké n a libovolné $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ patří aposteriorní hustota do tohoto systému, označme jej symbolem \mathcal{Q} . Konjugovaný systém hustot se vytváří následujícím způsobem. Mějme výše uvedený nezávislý výběr \mathbf{X} s hustotou $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ a sdruženou hustotu tohoto výběru:

$$\prod_{i=1}^n f(x_i | \boldsymbol{\theta}),$$

a postačující statistiku $\mathcal{S}_n(X_1, \dots, X_n)$ k tomuto konjugovanému systému. Statistika \mathcal{S}_n je postačující tehdy, když podmíněné rozdělení \mathbf{X} je nezávislé na $\boldsymbol{\theta}$ pro zvolené \mathcal{S}_n . Předpokládejme, že existují funkce g a h , které splňují:

$$\prod_{i=1}^n f(x_i | \boldsymbol{\theta}) = g(\mathcal{S}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta}) h(\mathbf{x})$$

⁶⁵ Hušková, M.: Bayesovské metody, UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, SPN Praha, první vydání, 1985, Praha, str. 11, Bauwens L., Korobilis D.: Bayesian methods, Core Discussion Paper 2011/61, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), [cit. 25.10.2012],

Dostupné z: http://www.uclouvain.be/cps/ucl/doc/core/documents/coredp2011_61web.pdf, str. 1-2

⁶⁶ Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 34-5, Gelman A., Carlin J. B., Stern H. S., Rubin D. B.: Bayesian Data Analysis, Chapman & Hall, 1995, London, Chapman & Hall texts in statistical science series., ISBN 0-412-03991-5, str. 8-9

pro všechna $n \geq n_0$. Systém hustot $\{f_t(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{t} \in T, n \geq n_0\}$, kde T je množina bodů $\mathbf{t} \in R$ postačující statistiky $\mathbf{S}_n(X_1, \dots, X_n)$, je konjugovaný se systémem hustot $\{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$, platí:

$$f_t(\boldsymbol{\theta}) = \frac{g(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta})}{\int g(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \quad 67$$

Pokud neznáme rozdělení náhodné veličiny $\boldsymbol{\theta}$, hovoříme o neinformativní aprioritě. Používáme pro stanovení apriorní hustoty např. principu neurčitosti. Za tohoto předpokladu uvažujeme $q(\boldsymbol{\theta})$ za rovnoměrné rozdělení. Pro výpočet aposteriorní hustoty $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ klademe např. $q(\boldsymbol{\theta}) = 1$ uvažujeme-li rovnoměrné rozdělení na $(-\infty, +\infty)$. Pokud integrací zvolené hustoty nezískáme hodnotu 1, jedná se o tzv. nevlastní hustoty, v opačném případě hovoříme o vlastních hustotách. Tento postup však často vede k zavádějícím výsledkům v závislosti na volbě parametru. ⁶⁸

Další metoda pro volbu apriorní hustoty se opírá o Jeffreysovou hustotu. Mějme opět náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ popsán podmíněnou hustotou $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$, $\{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ je regulární systém hustot. Necht' existuje kladné a konečné c , pro které platí:

$$c = \int f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})(\det J(\boldsymbol{\theta}))^{\frac{1}{2}} d\boldsymbol{\theta},$$

kde $J(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice. Pro apriorní hustotu $q(\boldsymbol{\theta})$ a aposteriorní hustotu $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ platí vztahy:

$$q(\boldsymbol{\theta}) = k (\det J(\boldsymbol{\theta}))^{\frac{1}{2}}, \quad k > 0$$

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = c f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})(\det J(\boldsymbol{\theta}))^{\frac{1}{2}},$$

⁶⁷ Hušková, M.: Bayesovské metody, UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, SPN Praha, první vydání, 1985, Praha, str. 13-7

⁶⁸ Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 25-6, Hušková, M.: Bayesovské metody, UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, SPN Praha, první vydání, 1985, Praha, str. 26-9

tuto apriorní hustotu nazýváme Jeffreysovou hustotou.⁶⁹

Existují-li vzhledem ke zkoumané problematice minulé realizované náhodné veličiny, můžeme použít k určení apriorní hustoty Bayesovské empirické metody. Necht' Y_1, \dots, Y_n jsou nezávislé náhodné veličiny realizované v minulosti s parametry $\theta_1, \dots, \theta_n$, kde $Y_i \sim f(y_i|\theta_i)$, $\theta_i \sim q(\theta)$. Pro Y_i platí vztahy:

$$f(y_i) = \int f(y_i|\theta)q(\theta)d\theta,$$

$$EY_i = E(E(Y_i|\theta)),$$

$$var Y_i = E(var(Y_i|\theta)) + E(E(Y_i|\theta) - EY_i)^2,$$

kde $f(y_i)$, EY_i a $var Y_i$ jsou nepodmíněná hustota, střední hodnota a rozptyl veličiny Y_i . Informace ohledně apriorní hustoty $q(\theta)$ spočívá ve znalosti pouze podoby jejího pravděpodobnostního rozdělení, nikoliv parametrů. Uvažujme tak předpis hustoty $q(\theta, \alpha)$, kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ je neznámý vektor parametrů, který odhadneme z realizovaného výběru Y_1, \dots, Y_n a výsledné odhady $\hat{\alpha}$ pak použijeme pro volbu apriorní hustoty $q(\theta, \hat{\alpha})$.⁷⁰

4.2. Portfolia rizikových aktiv

Použijme nyní poznatky z Bayesovské statistiky pro konstrukci optimálního portfolia rizikových aktiv. Necht' je dáno portfolio o rozsahu n rizikových aktiv s vektorem vah jejich relativního zastoupení $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)'$. Očekávané výnosnosti těchto aktiv jsou popsány náhodným n -rozměrným vektorem $r = (r_1, \dots, r_n)'$ a variační maticí $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$ typu $n \times n$. Pro očekávaný výnos a riziko portfolia platí již uvedené vztahy:

⁶⁹ Hušková, M.: Bayesovské metody, UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, SPN Praha, první vydání, 1985, Praha, str. 29-31

⁷⁰ Hušková, M.: Bayesovské metody, UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, SPN Praha, první vydání, 1985, Praha, str. 35-6

$$r_p = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{r}$$

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$$

$$1 = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{e}$$

Mějme datovou matici \mathbf{D} typu $n \times T$ popisující výnosnosti aktiv $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ portfolia, kde T značí počet dob pozorování. Označme \mathbf{R}_t vektorem výnosností aktiv v čase t , které nabývá hodnot $t = 1, \dots, T$. O vektoru výnosností aktiv portfolia předpokládáme, že náleží vícerozměrnému normálnímu rozdělení $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Zkoumejme dále na základě metod Bayesovské statistiky možnosti odhadů parametrů $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ a $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ v závislosti na míře znalosti apriorní informace o rozdělení vektoru \mathbf{R} .

4.2.1. Konstrukce estimátorů pomocí konjugované hustoty

Uvažujme existenci apriorní informace o parametrech $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$. Za tohoto předpokladu náleží konjugovaná apriorní hustota neznámé varianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ inverznímu Wishartovu rozdělení. Konjugovaná apriorní hustota vektoru $\boldsymbol{\mu}$ podmíněná parametrem $\boldsymbol{\Sigma}$ je popsána vícerozměrným normálním rozdělením. Pro odvození těchto vztahů nejprve vyjděme z jednorozměrného případu (Gelman 1995) a poté přejdeme k původnímu vícerozměrnému modelu rozdělení výnosností popsaných vektorem \mathbf{R} a počtem pozorování T (Gelman 1995, Rachev 2008). Necht' existuje t -rozměrný vektor \mathbf{X} pozorování nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, které náleží $N(\mu, \sigma^2)$. Pro apriorní hustoty σ^2 , $\mu|\sigma^2$ a sdruženou apriorní hustotu $q(\mu, \sigma^2)$ se uvažují rozdělení:

$$\mu|\sigma^2 \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{t_0}\right)$$

$$\sigma^2 \sim Inv - \chi^2(\kappa_0, \sigma_0^2)$$

$$q(\mu, \sigma^2) \propto \sigma^{-1} (\sigma^2)^{-\frac{\kappa_0}{2} + 1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\kappa_0 \sigma_0^2 + t_0 (\mu_0 - \mu)^2)\right)$$

$$q(\mu, \sigma^2) \sim N - Inv - \chi^2\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{t_0}, \kappa_0, \sigma_0^2\right)$$

Na základě vztahu $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) q(\boldsymbol{\theta})$ získáme s využitím $q(\mu, \sigma^2)$ a věrohodnostní funkce výběru normálně rozdělených veličin sdruženou posteriorní hustotu parametrů μ, σ^2 :

$$p(\mu, \sigma^2|\mathbf{x}) \sim N - Inv - \chi^2\left(\mu_t, \frac{\sigma_t^2}{t_t}, \kappa_t, \sigma_t^2\right),$$

$$kde \quad \mu_t = \frac{t_0}{t_0 + t} \mu_0 + \frac{t}{t_0 + t} \bar{x}$$

$$t_t = t_0 + t$$

$$\kappa_t = \kappa_0 + t$$

$$\kappa_t \sigma_t^2 = \kappa_0 \sigma_0^2 + (t - 1) s^2 + \frac{t_0 t}{t_0 + t} (\bar{x} - \mu_0)^2, \quad s^2 = \frac{1}{t - 1} \sum_{i=1}^t (x_i - \bar{x})^2$$

Podmíněná posteriorní hustota $\mu|\sigma^2, \mathbf{x}$ náleží rozdělení $N\left(\mu_t, \frac{\sigma_t^2}{t_t}\right)$ a marginální posteriorní rozdělení $p(\sigma^2|\mathbf{x}) \sim Inv - \chi^2(\kappa_t, \sigma_t^2)$. Uvedme ještě vztah pro marginální posteriorní hustotu μ :

$$p(\mu|\mathbf{x}) \propto \left(1 + \frac{t_t (\mu - \mu_t)^2}{\kappa_t \sigma_t^2}\right)^{-\frac{\kappa_t + 1}{2}},$$

jedná se o t -rozdělení s κ_t stupni volnosti.

$$p(\mu|\mathbf{x}) \sim t\left(\kappa_t, \mu_t, \frac{\sigma_t^2}{t_t}\right)$$

Zobecněním odvozených vztahů jednorozměrného případu získáme vztahy pro konjugované apriorní hustoty $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\Sigma} \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_0, \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\tau_0}\right)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \sim Inv - W(\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}, \nu_0)$$

$$q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{(\nu_0+n)}{2}+1} \exp\left(-\frac{1}{2}tr(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - \frac{\tau_0}{2}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)\right)$$

$$q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \sim N - Inv - W\left(\boldsymbol{\mu}_0, \frac{\boldsymbol{\Lambda}_0}{\tau_0}, \nu_0, \boldsymbol{\Lambda}_0\right)$$

Posteriorní hustotu $p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{r})$ získáme vynásobením apriorní hustoty $q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ věrohodnostní funkcí výběru výnosností aktiv portfolia.

$$p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{r}) \sim N - Inv - W\left(\boldsymbol{\mu}_T, \frac{\boldsymbol{\Lambda}_T}{\tau_T}, \nu_T, \boldsymbol{\Lambda}_T\right),$$

$$kde \quad \boldsymbol{\mu}_t = \frac{\tau_0}{\tau_0 + T} \boldsymbol{\mu}_0 + \frac{T}{\tau_0 + T} \bar{\mathbf{R}}$$

$$\tau_t = \tau_0 + T$$

$$\nu_t = \nu_0 + T$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_T = \boldsymbol{\Lambda}_0 + \mathbf{S} + \frac{\tau_0 T}{\tau_0 + T} (\bar{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\mu}_0)', \quad \mathbf{S} = \sum_{t=1}^T (\bar{\mathbf{R}}_t - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{R}}_t - \boldsymbol{\mu}_0)'$$

Marginální posteriorní hustota $p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{r})$ analogicky s jednorozměrným případem náleží Studentovu rozdělení:

$$p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{r}) \sim t \left(v_T - n + 1, \boldsymbol{\mu}_T, \frac{\boldsymbol{\Lambda}_T}{\tau_T(v_T - n + 1)} \right)$$

Posteriorní prediktivní hustota pro výnosnosti aktiv \mathbf{R}_{+1} náleží vícerozměrnému Studentovu t -rozdělení s $v_T - n + 1$ stupni volnosti:

$$f(\mathbf{r}_{+1}|\mathbf{r}) \sim t \left(v_T - n + 1, \boldsymbol{\mu}_T, \frac{\boldsymbol{\Lambda}_T}{(\tau_T + 1)(v_T - n + 1)} \right)$$

Střední hodnota očekávaných výnosností a varianční matice na základě prediktivní hustoty nabývají tvaru:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\tau_0}{\tau_0 + T} \boldsymbol{\mu}_0 + \frac{T}{\tau_0 + T} \hat{\boldsymbol{\mu}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{T + 1}{T(v_0 + n - 1)} \left(\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1} + (T - 1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\tau_0 T}{\tau_0 + T} (\boldsymbol{\mu}_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\boldsymbol{\mu}_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \right)$$

$$\text{kde } \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{R}_t, \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})'$$

Parametry $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ a $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ použijeme jako estimátory v úloze pro hledání optimálního portfolia. Je ovšem nutné podotknout, že o parametrech $\boldsymbol{\mu}_0, \tau_0, v_0$ a $\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}$ existuje předchozí apriorní informace.⁷¹

⁷¹ Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 98,103-6, Gelman A., Carlin J. B., Stern H. S., Rubin D. B.: Bayesian Data Analysis, Chapman & Hall, 1995, London, Chapman & Hall texts in statistical science series., ISBN 0-412-03991-5, str. 66-73,80-1

4.2.2. Konstrukce estimátorů pomocí Jeffreysovi hustoty

Na rozdíl od předchozího případu si nyní nejsme jisti pravděpodobnostním rozdělením parametrů $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$. Vzhledem k neexistenci apriorní informace použijeme pro konstrukci odhadů $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ a $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ Jeffreysovu hustotu. Vyděme opět z jednorozměrného modelu (Gelman 1995) a poté vymežeme vícerozměrný model výnosností aktiv (Gelman 1995, Rachev 2008). Necht' existuje t -rozměrný vektor pozorování \mathbf{X} nezávislých náhodných veličin, konkrétně výnosností aktiv portfolia, s uvažovaným marginálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Pro neinformativní apriorní hustotu parametrů μ, σ^2 klademe:

$$q(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

Sdružená posteriorní hustota $p(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x})$ je součinem neinformativní apriorní hustoty $q(\mu, \sigma^2)$ a věrohodnostní funkce t pozorování:

$$p(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x}) \propto \frac{1}{\sigma^{n+2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}((t-1)s^2 + t(\bar{x} - \mu)^2)\right),$$

$$\text{kde } s^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t (x_i - \bar{x})^2$$

Pro podmíněnou posteriorní hustotu $p(\mu | \sigma^2, \mathbf{x})$ a marginální posteriorní hustotu $p(\sigma^2 | \mathbf{x})$ platí následující vztahy:

$$p(\mu | \sigma^2, \mathbf{x}) \sim N\left(\bar{x}, \frac{\sigma^2}{t}\right)$$

$$p(\sigma^2 | \mathbf{x}) \propto \int p(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x}) d\mu \sim \text{Inv} - \chi^2(t-1, s^2)$$

Zbývá určit marginální posteriorní hustotu parametru $p(\mu|\mathbf{x})$, na základě integrace sdružené posteriorní hustoty $p(\mu, \sigma^2|\mathbf{x})$, $p(\mu|\mathbf{x})$ je popsána Studentovým t -rozdělením s $t - 1$ stupni volnosti:

$$p(\mu|\mathbf{x}) = \int_0^\infty p(\mu, \sigma^2|\mathbf{x}) d\sigma^2$$

$$p(\mu|\mathbf{x}) \propto \left(1 + \frac{t(\mu - \bar{x})^2}{(t-1)s^2}\right)^{-\frac{t}{2}} \sim t\left(t-1, \bar{x}, \frac{s^2}{t}\right),$$

Posteriorní prediktivní hustota $f(x_{+1}|\mathbf{x})$, která je vyjádřena obecným předpisem $f(x_{+1}|\mathbf{x}) = \int f(x_{+1}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta}$, náleží Studentovu rozdělení s $t - 1$ stupni volnosti:

$$f(x_{+1}|\mathbf{x}) \propto t\left(t-1, \bar{x}, \left(1 + \frac{1}{t}\right)s^2\right)$$

Přejdeme nyní k problematice vícerozměrnému modelu výnosností aktiv vyjádřených vektorem $\mathbf{R} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, jedná se opět o zobecnění dosud uvažovaného jednorozměrného případu. Předpokládejme počet pozorování T . Neinformativní apriorní hustota parametrů $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ je vyjádřena vztahem:

$$q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{(n+1)}{2}}$$

Tvar této hustoty lze také získat limitním přechodem z konjugované apriorní hustoty parametrů $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$:

$$q(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto \lim_{\substack{v_0 \rightarrow -1 \\ \tau_0 \rightarrow 0 \\ |\Lambda_0| \rightarrow 0}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{(v_0+n)}{2}+1} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(\Lambda_0 \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - \frac{\tau_0}{2} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)\right)$$

Analogicky s jednorozměrným modelem získáme posteriorní hustoty $\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{r}$ a $\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{r}$, které ve vícerozměrném případě náleží inverznímu Wishartovu a vícerozměrnému normálnímu rozdělení:

$$p(\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{r}) \sim \text{Inv} - W(T - 1, \mathbf{S}), \text{ kde } \mathbf{S} = \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \bar{\mathbf{R}})(\mathbf{R}_t - \bar{\mathbf{R}})'$$

$$p(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{r}) \sim N(\bar{\mathbf{R}}, \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{T})$$

Marginální posteriorní rozdělení $p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{r})$ a prediktivní posteriorní hustota $f(\mathbf{r}_{+1}|\mathbf{r})$ korespondují s předchozím případem a náleží vícerozměrnému t -rozdělení, tentokrát s $T - n$ stupni volnosti. Pro tyto hustoty a výsledné odhady parametrů určující konstrukci optimálního portfolia platí:

$$p(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{r}) \sim t\left(T - n, \bar{\mathbf{R}}, \frac{\mathbf{S}}{T(T - n)}\right)$$

$$f(\mathbf{r}_{+1}|\mathbf{r}) \sim t\left(T - n, \bar{\mathbf{R}}, \frac{\mathbf{S}}{T(T - n)\left(1 + \frac{1}{T}\right)}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{R}_t$$

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{T}\right)(T - 1)}{T - n - 2} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \text{ kde } \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T - 1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \quad ^{72}$$

⁷² Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 98, 102-3, Gelman A., Carlin J. B., Stern H. S., Rubin D. B.: Bayesian Data Analysis, Chapman & Hall, 1995, London, Chapman & Hall texts in statistical science series., ISBN 0-412-03991-5, str. 66-9, 81

4.2.3. Komparace množin efektivních portfolií

Pojem množina efektivních portfolií již byl vyložen v kapitole zabývající se tradičním modelem portfolia. Připomeňme rovněž v obecné podobě optimalizační úlohu spočívající v minimalizaci očekávaného rozptylu a výsledný vztah určující váhy zastoupení aktiv v portfoliu:

$$\min (\boldsymbol{\omega}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\omega}),$$

$$\boldsymbol{\omega}' \mathbf{e} = 1,$$

$$\boldsymbol{\omega}' \hat{\mathbf{r}} \geq r_p, \quad r_p \in \mathbb{R},$$

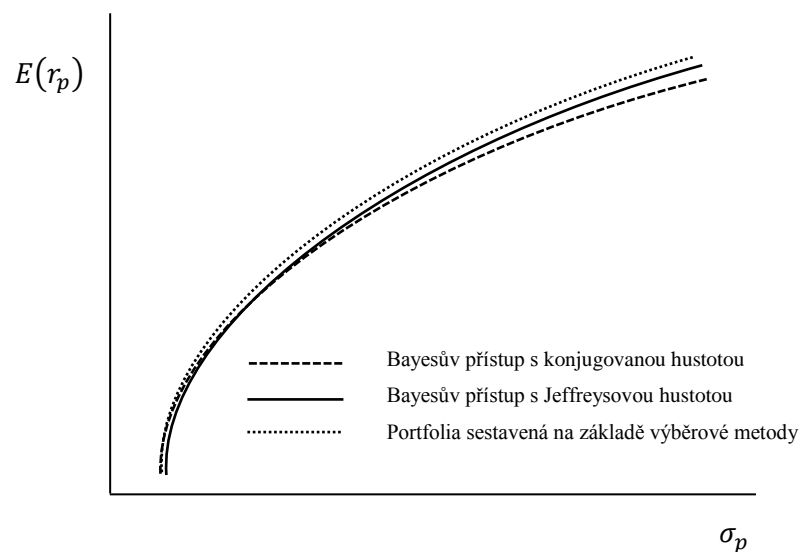
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}}{\mathbf{e}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\mathbf{r}}} \quad 73$$

Úloha směřující k hledání optimálního portfolia v tomto případě zůstává shodná i pro Bayesův přístup, liší se pouze získané parametry očekávaného výnosu aktiv a kovariance. Pokud bychom nyní po teoretické rovině porovnali hranice efektivních portfolií konstruovaných klasickým způsobem se dvěma výše uvedenými metodami Bayesovské statistiky, dospěli bychom k následujícím závěrům.

Hranice efektivních portfolií, jež je získaná na základě principu Jeffreysovi hustoty, by měla ležet graficky napravo od množiny efektivních portfolií klasického mean-variance přístupu. V tomto případě vedlo použití Bayesových metod ke konstrukci rizikovějších portfolií, což je opřeno o fakt, že tento přístup zahrnuje onu nejistotu ohledně parametrů do výpočetní procedury, která způsobuje vyšší rizikový profil takto získaných portfolií. Komparace hranice efektivních portfolií vypočtené pomocí principu konjugovaných hustot s tradičním přístupem je nejednoznačná, jak ukazuje následující grafické zobrazení.⁷⁴

⁷³ Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 101-2

⁷⁴ Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 105-8



Obr. 7. Komparace efektivních hranicí portfolií ⁷⁵

V případě konstrukce optimálního portfolia pomocí konjugovaných hustot hraje důležitý význam míra jistoty ohledně apriorního rozdělení varianční matice a očekávané výnosnosti aktiv. Parametr τ_0 určuje stupeň jistoty ohledně μ_0 , ν_0 je směrodatné pro Λ_0^{-1} . Čím vyšší je míra jistoty apriorní informace, tím více se množina efektivních portfolií získaná na základě konjugovaných hustot blíží hranici efektivních portfolií tradičního přístupu. ⁷⁶

⁷⁵ Převzato a upraveno z Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 107

⁷⁶ Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 104-8

5. Konstrukce investičních portfolií

Tato kapitola si klade za cíl implementovat výše uvedené přístupy v konstrukci investičních portfolií s využitím reálných dat akciových titulů, které tvoří klíčový index Vídeňské burzy ATX (Austrian Traded Index). Úvodní část této kapitoly je věnována popisu a deskriptivní statistice používaných dat, dále jsou konstruována investiční portfolia z vymezených akciových titulů indexu ATX a závěr této části práce obsahuje komparaci použitých statistických přístupů.

5.1. Vstupní data

Austrian Traded Index neboli zkráceně ATX je tvořen tzv. „blue chips“ akciovými tituly Vídeňské burzy, jejichž výčet včetně formálních charakteristik ke dni 18.6.2013 prezentuje níže zobrazená tabulka. Změny ve struktuře indexu jsou prováděny každý rok vždy v měsících březen a září s akcentem na zobchodovaný objem a kapitalizaci akciových titulů Vídeňské burzy, přičemž maximální možné povolené převrstvení jsou tři tituly.⁷⁷

Titul	ISIN	Stát	Počet akcií	Cena EUR	Podíl na indexu (%)
AMAG AUSTRIA METALL AG	AT00000AMAG3	Rakousko	35 264 000	23,50	0,88
ANDRITZ AG	AT0000730007	Rakousko	104 000 000	39,71	8,73
CA IMMOBILIEN ANLAGEN AG	AT0000641352	Rakousko	87 856 056	9,59	2,00
CONWERT IMMOBILIEN INVEST SE	AT0000697750	Rakousko	85 359 273	8,09	1,46
ERSTE GROUP BANK AG	AT0000652011	Rakousko	394 568 647	24,07	20,06
EVN AG	AT0000741053	Rakousko	179 878 402	9,86	0,94
IMMOFINANZ AG	AT0000809058	Rakousko	1 128 952 687	3,06	8,20
LENZING AG	AT0000644505	Rakousko	26 550 000	56,77	1,99
MAYR-MELNHOF KARTON AG	AT0000938204	Rakousko	20 000 000	83,77	2,21
OESTERR. POST AG	AT0000APOST4	Rakousko	67 552 638	31,11	2,77
OMV AG	AT0000743059	Rakousko	327 505 124	36,84	15,92
RAIFFEISEN BANK INTERNATIONAL AG	AT0000606306	Rakousko	195 505 124	24,95	3,86

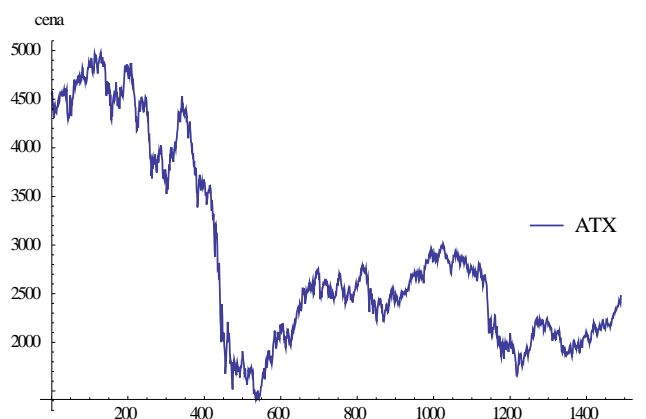
⁷⁷ Sepsáno z Wiener Börse.at (on-line), <http://www.wienerbourse.at/>, Index values, [cit. 18.6.2013 17:33], Dostupné z: <http://en.indices.cc/indices/details/atx/composition/>

RHI AG	AT0000676903	Rakousko	39 819 039	27,75	2,04
SCHOELLER- BLECKMANN OILFIELD EQUIPMENT AG	AT0000946652	Rakousko	16 000 000	76,65	2,27
TELEKOM AUSTRIA AG	AT0000720008	Rakousko	443 000 000	5,14	3,61
VERBUND AG KAT. A	AT0000746409	Rakousko	170 233 686	15,42	2,77
VIENNA INSURANCE GROUP AG	AT0000908504	Rakousko	128 000 000	38,05	6,43
VOESTALPINE AG	AT0000937503	Rakousko	172 449 163	27,90	10,16
WIENERBERGER AG	AT0000831706	Rakousko	117 526 764	9,61	2,98
ZUMTOBEL AG	AT0000837307	Rakousko	43 500 000	8,80	0,71
Kapitalizace indexu v EUR			37 866 606 885		

Tab. 1. Struktura indexu ATX ⁷⁸

Pro sestavení investičních portfolií v rámci jednotlivých statistických postupů jsou dány denní časové řady závěrečných cen zkoumaných akciových titulů, a to pro období 2.1.2007 - 2.1.2013, a dále pak tzv. předvýběr, což jsou obsahově téže časové řady, ale pro horizont 2.1.2004 – 28.12.2006, který je využíván v Bayesovské metodě konstrukce portfolia na základě použití estimátorů získaných pomocí konjugované hustoty.

Vzhledem k absenci vhodných časových řad akciových titulů Amag Austria Metall AG, Lenzing AG, Österreichische Post AG, Raiffeisen Bank International AG a Zumtobel AG, jsou v práci uvažovány pouze zbývající tituly indexu ATX. Následující graf ilustrativně popisuje cenový vývoj indexu ATX pro ve všech použitých konstrukčních metodách zkoumané období 2.1.2007 - 2.1.2013.



79

Obr. 8. Cenový vývoj indexu ATX 2.1.2007 - 2.1.2013

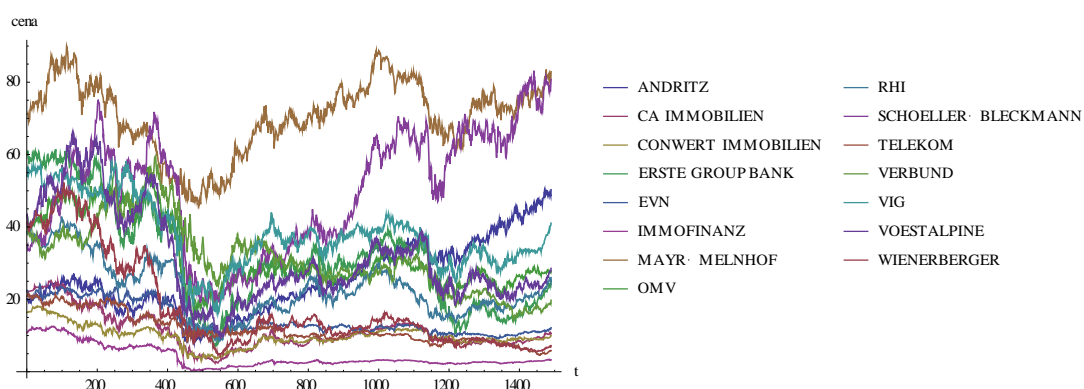
⁷⁸ Struktura ATX převzata a upravena z *Wiener Börse.at* (on-line), <http://www.wienerbourse.at/>, *Index values*, [cit. 18.6.2013 17:33], Dostupné z: <http://en.indices.cc/indices/details/atx/composition/>

Uvedme nyní základní statistický popis historických dat zkoumaného portfolia patnácti akciových titulů indexu ATX pro období 2.1.2007 - 2.1.2013, což činí celkem 1490 pozorování pro každou časovou řadu dílčích akcií.

Název titulu	Cena-průměr	Cena-Max	Cena-Min	Směr. odch.
ANDRITZ AG	25,55	50,30	7,98	9,80
CA IMMOBILIEN ANLAGEN AG	11,12	25,15	2,35	5,13
CONWERT IMMOBILIEN INVEST SE	9,81	18,13	2,93	2,96
ERSTE GROUP BANK AG	31,38	61,50	7,00	14,30
EVN AG	14,39	23,78	9,16	4,45
IMMOFINANZ AG	4,14	12,54	0,28	3,12
MAYR-MELNHOF KARTON AG	70,51	89,90	45,93	10,02
OMV AG	32,19	57,43	16,59	9,62
RHI AG	22,98	42,73	8,70	7,85
SCHOELLER-BLECKMANN OILFIELD EQUIPMENT AG	50,49	83,15	19,02	16,43
TELEKOM AUSTRIA AG	11,80	21,51	4,55	4,20
VERBUND AG KAT. A	31,53	59,30	14,50	9,65
VIENNA INSURANCE GROUP AG	38,18	58,18	16,00	9,57
VOESTALPINE AG	31,60	66,11	9,56	13,06
WIENERBERGER AG	17,68	52,27	4,39	12,83

Tab. 2. Statistická data zkoumaných akciových titulů ATX ⁸⁰

Následující graf přibližuje cenový vývoj všech zkoumaných akciových titulů ve sledovaném období 2.1.2007 - 2.1.2013.



Obr. 9. Cenový vývoj zkoumaných akciových titulů ATX 2.1.2007 - 2.1.2013 ⁸¹

⁷⁹ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroj dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra

⁸⁰ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroj dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra,

⁸¹ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroj dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra,

5.2. Sestavení investičních portfolií

Přistupme k vlastnímu sestavování investičních portfolií, jež se skládají z výše uvedených akciových titulů. Optimalizační úlohou pro získání vah jednotlivých složek portfolia zvolme maximalizaci Sharпова poměru s tímto předpisem:

$$\max \frac{\boldsymbol{\omega}'\hat{\boldsymbol{\mu}} - R_f}{\sqrt{\boldsymbol{\omega}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\omega}}}$$

$$\boldsymbol{\omega}'\mathbf{e} = 1$$

$$-1 \leq \boldsymbol{\omega} \leq 1,$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je hledaný vektor vah složek portfolia, \mathbf{e} je jednotkový vektor rozměru odpovídajícímu počtu akcií portfolia, R_f je zvolená bezriziková úroková míra, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ je vektor očekávaných výnosností akcií, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ představuje odhad varianční matice výnosností. Druhá podmínka klade omezení na každou dílčí váhu portfolia, vyplývá z ní také povolení short-selling. Existence transakčních nákladů není uvažována. Vzhledem k tomu, že se portfolia sestavují na 24 po sobě se opakujících měsíčních investičních horizontů (vysvětleno níže), je nutné v maximalizační úloze používat proměnlivou bezrizikovou úrokovou míru R_f . V práci je za R_f zvolena úroková míra Euribor 1M.⁸²

⁸² Sazba Euribor znamená Euro Interbank Offered Rate, převzato z European Central Bank (on-line), <http://www.ecb.int/home/html/index.en.html>, Annual report 2012, [cit. 23.7.2013], Dostupné z: <http://www.ecb.int/pub/pdf/annrep/ar2012en.pdf>, str. 231; Zkratka 1M vyjadřuje měsíční splatnost

Vektor $R_f - \text{Euribor 1M}$ v % p.a. ⁸³								
Datum rebalance	3.1.2011	2.2.2011	2.3.2011	1.4.2011	2.5.2011	1.6.2011	1.7.2011	3.8.2011
Euribor 1M	0,77	0,91	0,87	0,98	1,24	1,22	1,33	1,43
Datum rebalance	2.9.2011	3.10.2011	3.11.2011	2.12.2011	2.1.2012	3.2.2012	2.3.2012	2.4.2012
Euribor 1M	1,35	1,36	1,36	1,21	1,01	0,68	0,53	0,42
Datum rebalance	2.5.2012	1.6.2012	2.7.2012	2.8.2012	3.9.2012	3.10.2012	2.11.2012	3.12.2012
Euribor 1M	0,4	0,38	0,37	0,14	0,12	0,11	0,11	0,11

Tab. 3. Vektor Euribor 1M⁸⁴

Ústřední problematikou je výpočet estimátorů $\hat{\mu}$ a $\hat{\Sigma}$. Tyto odhady získáme pomocí statistických metod, které jsou vyloženy v teoretické části práce. Konkrétně odhad varianční matice se vypočte jednak tradiční výběrovou metodu, dále pak pomocí DCC GARCH procedury a Bayesova přístupu, ve kterém bude použita konstrukce estimátoru prostřednictvím Jeffreysovi a následně i konjugované hustoty.⁸⁵ Vektor očekávaných výnosností akciových titulů $\hat{\mu}$ se získá na základě výběrové metody historických dat a bude platit pro všechny použité statistické metody s výjimkou Bayesovy konjugované hustoty, kde dochází k jisté modifikaci. Dosažené estimátory očekávaného výnosu a rizika portfolia jsou pro všechny metody a rebalance zobrazeny v Příloze č. 1 na přiloženém CD, dokument s názvem „Estimatory.nb“.

Předmětem následujícího zkoumání jsou tedy konstrukce akciových portfolií na základě těchto čtyř statistických metod pro odhady parametrů a za použití jednotné optimalizační úlohy maximalizace Sharpova poměru. Portfolia jsou sestavována pro celkem 24 rebalancí, pokaždé s měsíčním investičním horizontem, pokrývají časové rozmezí konce časové řady cen akciových titulů 3.1.2011 - 2.1.2013. Po provedení rebalancí dojde k porovnání všech čtyř použitých statistických přístupů.

Datovou matici sloužící k výpočtu estimátorů tvoří historické měsíční výnosnosti složek portfolia, které se získají z časové řady denních konečných cen akciových titulů, přičemž je zvolen rozsah o délce prvních 48 měsíců, čili období 2.1.2007 - 3.1.2011. Datová základna pro konstrukci portfolií se vzhledem k opakujícím se rebalancím vždy o měsíc posouvá, zachovává tak stále stejný rozsah 48 měsíců časové řady cen akcií. Výnosnosti jsou určeny tímto předpisem:

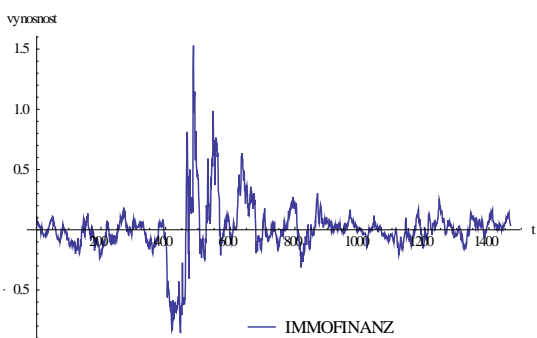
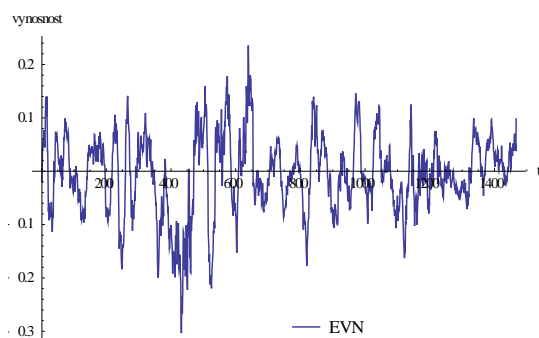
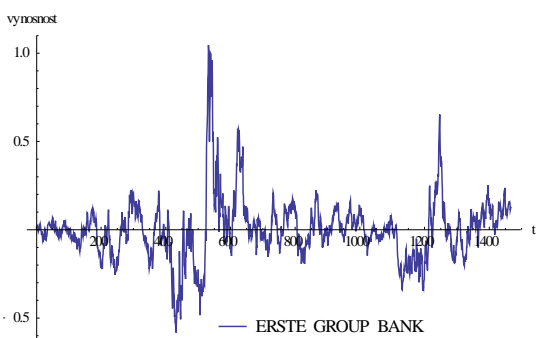
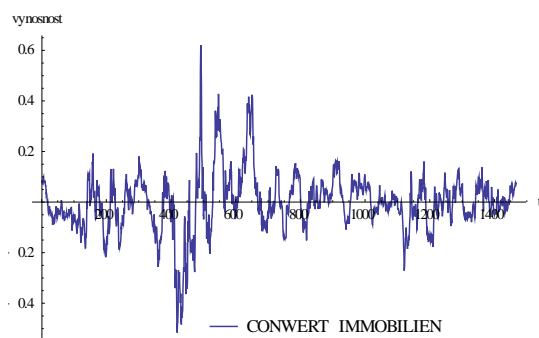
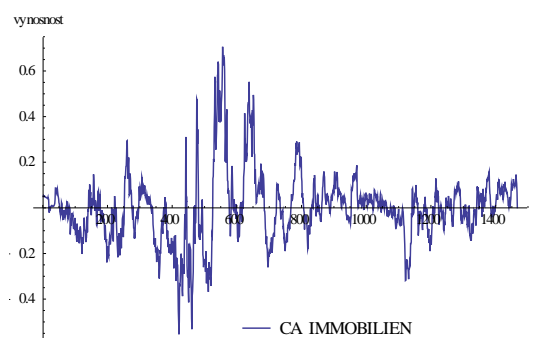
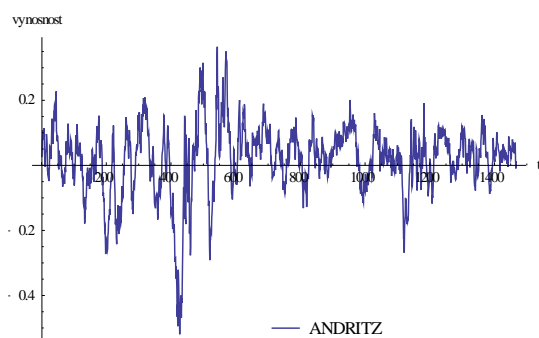
⁸³ V maximalizační úloze jsou sazby přečteny na měsíční úrokovou míru s použitím standardu 30E/360

⁸⁴ Zdroj dat: *Patria Online a.s., Patria Plus*

⁸⁵ U všech odhadů varianční matice je ověřena pozitivní definitnost

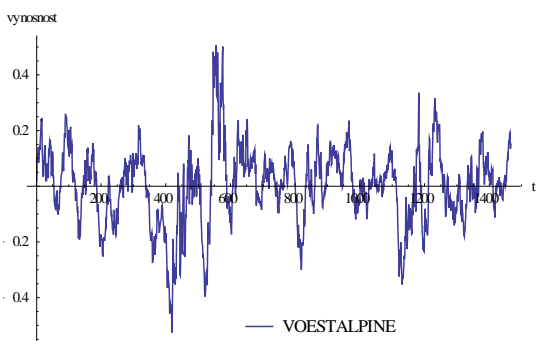
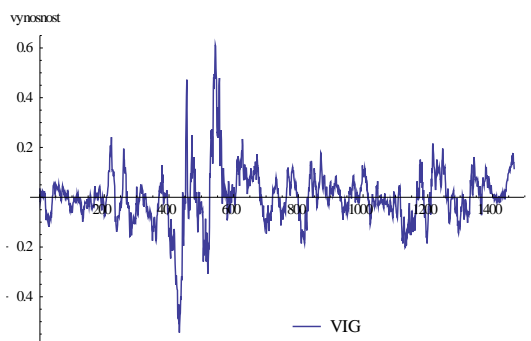
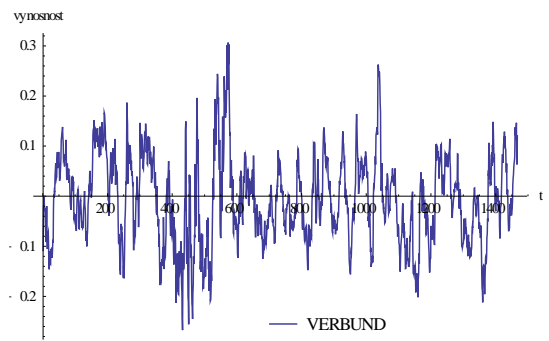
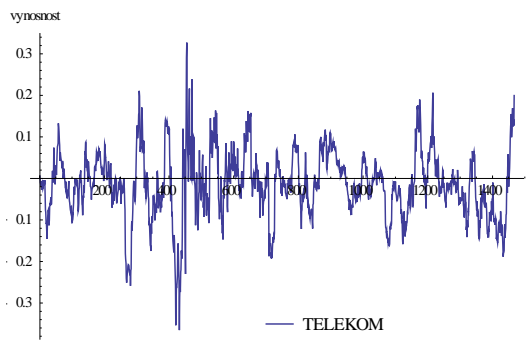
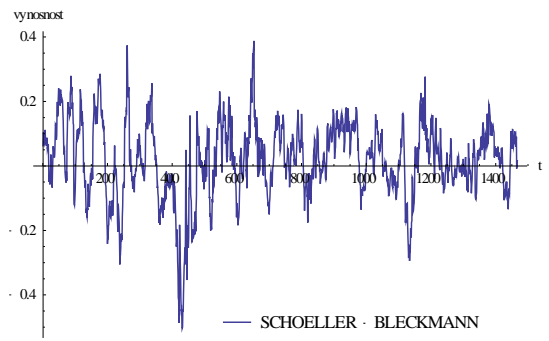
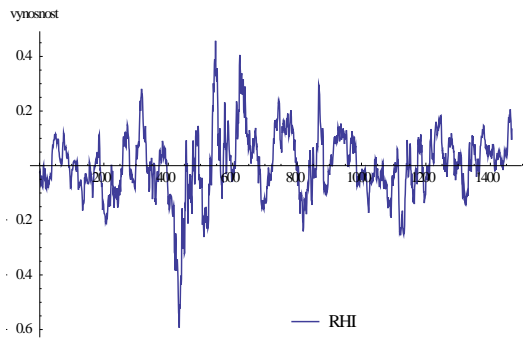
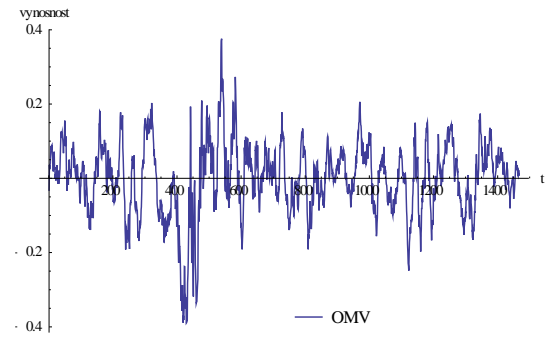
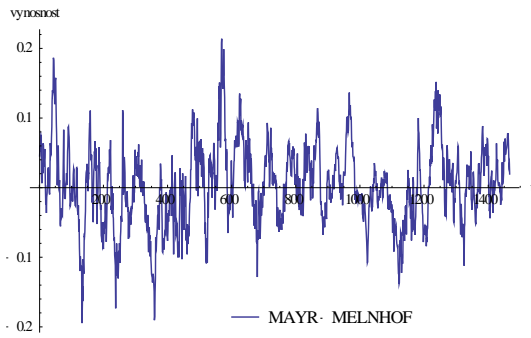
$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

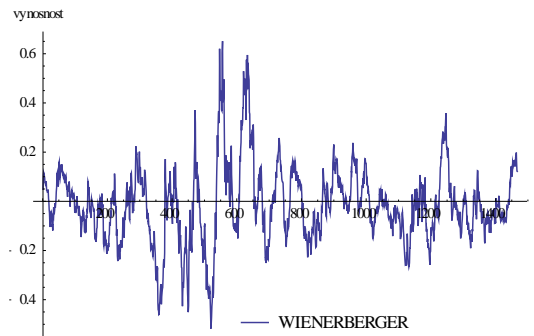
kde t je časové období jednoho kalendářního měsíce, P_t a P_{t-1} jsou ceny akcií v t a $t-1$.⁸⁶ Níže uvedené grafy ilustrativně zobrazují měsíční výnosnosti všech akciových titulů tvořících zkoumané portfolio indexu ATX ve sledovaném období 2.1.2007 - 2.1.2013.⁸⁷



⁸⁶ Výpočet měsíčních výnosností je proveden tak, aby se vždy v rámci časové řady obchodních dnů získaly pro určující období výpočtu nejbližší body odpovídající jednomu kalendářnímu měsíci.

⁸⁷ Pozn.: Pro výpočetní účely jsou v časových řadách nulové výnosnosti zaměněné za výnosnosti o hodnotě 0.001.





88

Obr. 10. Vývoj měsíčních výnosností zkoumaných akciových titulů ATX 2.1.2007 – 2.1.2013

5.2.1. Výběrová metoda konstrukce estimátorů

Přístupme k první statistické proceduře odhadů $\hat{\mu}$ a $\hat{\Sigma}$, a to k výběrové metodě. Nechť $\mathbf{R}_t = (R_1, \dots, R_{15})$ je vektor historických měsíčních výnosností zkoumaných akciových titulů o počtu $n = 15$ pro pozorování t , o kterém předpokládáme, že nabývá vícerozměrného normálního rozdělení. Estimátory parametrů μ a Σ získáme pomocí již v teoretické části práce vysvětlených vztahů:

$$\hat{\mu} = \bar{\mathbf{R}} \quad \hat{\Sigma} = \frac{T-1}{T} \mathbf{W},$$

$$\bar{\mathbf{R}} = (\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_{15}), \quad \bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{it} \quad \text{pro } i = 1, \dots, 15$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{T-1} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \bar{\mathbf{R}})(\mathbf{R}_t - \bar{\mathbf{R}})',$$

přičemž T je počet pozorování volené časové řady měsíčních výnosností.⁸⁹ Tuto proceduru spolu s maximalizací Sharпова poměru opakujeme pro každou rebalanci portfolia a vždy pro každý další odhad posouváme časovou řadu dat o jeden měsíc. Výsledné váhy složek portfolia uvádí následující tabulka:

⁸⁸ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroj dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra,

⁸⁹ Vzhledem k charakteru výpočtu měsíčních výnosností hodnota T pro jednotlivé odhady kolísá. Zde jsou uvedeny hodnoty T chronologicky dle rebalancí: 972, 973, 972, 975, 974, 976, 972, 974, 974, 974, 974, 978, 974, 976, 976, 976, 976, 974, 972, 974, 973, 973, 972, 976

Datum rebalance / Název titulu	3. 1. 2011	2. 2. 2011	2. 3. 2011	1. 4. 2011	2. 5. 2011	1. 6. 2011	1. 7. 2011	3. 8. 2011
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,225	-0,268	-0,382	-0,327	-0,348	-0,251	-0,188	-0,255
CONWERT IMMOBILIEN	0,086	0,112	0,266	0,453	0,581	0,650	0,839	0,903
ERSTE GROUP	0,154	0,119	0,112	0,128	0,192	0,085	0,093	0,177
EVN	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
IMMOFINANZ	0,002	0,063	0,075	0,052	0,071	0,076	0,068	0,035
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
OMV	-0,663	-0,612	-0,705	-0,919	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
RHI	-0,139	0,010	-0,112	-0,216	-0,373	-0,317	-0,385	-0,392
SCHOELLER- BLECKMANN	1,000	0,997	1,000	1,000	1,000	0,877	0,639	0,765
TELEKOM	-0,119	-0,371	-0,443	-0,409	-0,382	-0,360	-0,321	-0,425
VERBUND	0,281	0,633	0,758	0,829	0,851	0,941	1,000	0,880
VIG	0,107	0,087	0,272	0,296	0,255	0,278	0,217	0,229
VOESTALPINE	-0,168	-0,486	-0,652	-0,573	-0,442	-0,602	-0,552	-0,378
WIENERBERGER	-0,318	-0,284	-0,188	-0,314	-0,403	-0,376	-0,409	-0,540

Tab. 4.1. Vektory vah portfolií – Výběrová metoda konstrukce estimátorů ⁹⁰

Datum rebalance / Název titulu	2. 9. 2011	3. 10. 2011	3. 11. 2011	2. 12. 2011	2. 1. 2012	3. 2. 2012	2. 3. 2012	2. 4. 2012
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,316	0,008	-0,024	0,105	0,112	-0,013	-0,037	0,047
CONWERT IMMOBILIEN	0,905	0,893	0,983	0,832	0,425	0,332	0,173	0,084
ERSTE GROUP	0,070	-0,205	-0,168	-0,137	-0,030	0,042	0,085	-0,055
EVN	-1,000	-1,000	-1,000	-0,859	-0,807	-0,821	-0,810	-0,884
IMMOFINANZ	0,095	0,052	-0,007	-0,027	-0,021	-0,022	-0,009	0,004
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
OMV	-0,996	-0,637	-0,676	-0,754	-0,728	-0,649	-0,422	-0,386
RHI	-0,315	-0,031	-0,087	0,080	0,063	0,066	-0,058	0,116
SCHOELLER- BLECKMANN	0,784	0,521	0,649	0,816	0,804	0,650	0,581	0,538
TELEKOM	-0,480	-0,438	-0,310	-0,162	0,036	0,051	0,158	0,072
VERBUND	1,000	0,777	0,395	0,128	0,102	0,121	0,014	0,124
VIG	0,371	0,321	0,254	0,023	-0,136	-0,157	-0,130	0,011
VOESTALPINE	-0,634	-0,854	-0,656	-0,578	-0,537	-0,381	-0,415	-0,512
WIENERBERGER	-0,484	-0,405	-0,354	-0,467	-0,283	-0,219	-0,130	-0,160

Tab. 4.2. Vektory vah portfolií – Výběrová metoda konstrukce estimátorů ⁹¹

⁹⁰ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

⁹¹ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Datum rebalance / Název titulu	2. 5. 2012	1. 6. 2012	2. 7. 2012	2. 8. 2012	3. 9. 2012	3. 10. 2012	2. 11. 2012	3. 12. 2012
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	0,024	0,060	0,072	0,116	0,257	0,085	-0,028	0,114
CONWERT IMMOBILIEN	0,150	0,127	0,119	0,066	-0,057	0,006	0,006	0,193
ERSTE GROUP	-0,070	-0,060	-0,072	-0,036	-0,043	-0,015	0,079	0,080
EVN	-0,848	-0,732	-0,580	-0,426	-0,276	-0,599	-0,522	-0,639
IMMOFINANZ	0,014	-0,005	-0,031	-0,056	-0,072	0,062	0,186	0,142
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,989
OMV	-0,479	-0,398	-0,334	-0,231	-0,153	-0,101	-0,190	0,012
RHI	0,024	-0,037	-0,180	-0,246	-0,144	-0,062	0,072	0,257
SCHOELLER- BLECKMANN	0,593	0,411	0,341	0,420	0,490	0,672	0,865	1,000
TELEKOM	0,036	0,163	0,161	0,083	-0,163	-0,318	-0,549	-0,893
VERBUND	0,145	-0,031	-0,187	-0,429	-0,645	-0,564	-0,572	-0,417
VIG	0,105	0,117	0,151	0,190	0,329	0,515	0,507	0,216
VOESTALPINE	-0,562	-0,564	-0,547	-0,546	-0,380	-0,389	-0,535	-0,616
WIENERBERGER	-0,133	-0,052	0,085	0,095	-0,143	-0,292	-0,319	-0,437

Tab. 4.3. Vektory vah portfolií – Výběrová metoda konstrukce estimátorů ⁹²

5.2.2. Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty

Druhá z použitých metod sestavení portfolia se opírá o Bayesův přístup s konstrukcí estimátorů pomocí Jeffreysovi hustoty, kdy uvažujeme neexistenci apriorní informace o zkoumaném souboru dat. Necht' jsou splněny předpoklady v souladu s výše uvedenou výběrovou metodou. Odhady parametrů μ a Σ získáme v této proceduře za pomocí těchto předpisů:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{\left(1 + \frac{1}{T}\right)(T-1)}{T-n-2} \hat{\Sigma}, \text{ kde } \hat{\Sigma} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu}),$$

kde T je počet pozorování výnosností a n je počet akciových titulů roven 15. Výraz $\frac{\left(1 + \frac{1}{T}\right)(T-1)}{T-n-2}$ zohledňuje nejistotu nad parametrem Σ . Proceduru včetně maximalizace

⁹² Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Sharpova poměru opakujeme pro všech 24 rebalancí. Uvedme výsledné váhy portfolií:

Datum rebalance / Název titulu	3. 1. 2011	2. 2. 2011	2. 3. 2011	1. 4. 2011	2. 5. 2011	1. 6. 2011	1. 7. 2011	3. 8. 2011
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,225	-0,268	-0,382	-0,327	-0,348	-0,251	-0,188	-0,255
CONWERT IMMOBILIEN	0,086	0,112	0,266	0,453	0,581	0,650	0,839	0,903
ERSTE GROUP	0,154	0,119	0,112	0,128	0,192	0,085	0,093	0,177
EVN	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
IMMOFINANZ	0,002	0,063	0,075	0,052	0,071	0,076	0,068	0,035
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
OMV	-0,663	-0,612	-0,705	-0,919	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
RHI	-0,139	0,010	-0,112	-0,216	-0,373	-0,317	-0,385	-0,392
SCHOELLER- BLECKMANN	1,000	0,997	1,000	1,000	1,000	0,877	0,639	0,765
TELEKOM	-0,118	-0,371	-0,443	-0,409	-0,382	-0,360	-0,321	-0,425
VERBUND	0,281	0,633	0,758	0,829	0,851	0,941	1,000	0,880
VIG	0,107	0,087	0,272	0,296	0,255	0,278	0,217	0,229
VOESTALPINE	-0,168	-0,486	-0,652	-0,573	-0,442	-0,602	-0,552	-0,378
WIENERBERGER	-0,318	-0,284	-0,188	-0,314	-0,403	-0,376	-0,409	-0,540

Tab. 5.1. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty⁹³

Datum rebalance / Název titulu	2. 9. 2011	3. 10. 2011	3. 11. 2011	2. 12. 2011	2. 1. 2012	3. 2. 2012	2. 3. 2012	2. 4. 2012
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,316	0,008	-0,024	0,105	0,112	-0,013	-0,037	0,047
CONWERT IMMOBILIEN	0,905	0,893	0,983	0,832	0,425	0,332	0,173	0,084
ERSTE GROUP	0,070	-0,205	-0,168	-0,137	-0,030	0,042	0,085	-0,055
EVN	-1,000	-1,000	-1,000	-0,859	-0,807	-0,821	-0,810	-0,884
IMMOFINANZ	0,095	0,052	-0,007	-0,027	-0,021	-0,022	-0,009	0,004
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
OMV	-0,996	-0,637	-0,676	-0,754	-0,728	-0,649	-0,422	-0,386
RHI	-0,315	-0,031	-0,087	0,080	0,063	0,066	-0,058	0,116
SCHOELLER- BLECKMANN	0,784	0,521	0,649	0,816	0,804	0,650	0,581	0,538
TELEKOM	-0,480	-0,438	-0,310	-0,162	0,036	0,051	0,158	0,072
VERBUND	1,000	0,777	0,395	0,128	0,102	0,121	0,014	0,124
VIG	0,371	0,321	0,254	0,023	-0,136	-0,157	-0,130	0,011
VOESTALPINE	-0,634	-0,854	-0,656	-0,578	-0,537	-0,381	-0,415	-0,512
WIENERBERGER	-0,484	-0,405	-0,354	-0,467	-0,283	-0,219	-0,130	-0,160

Tab. 5.2. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty⁹⁴

⁹³ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Datum rebalance / Název titulu	2. 5. 2012	1. 6. 2012	2. 7. 2012	2. 8. 2012	3. 9. 2012	3. 10. 2012	2. 11. 2012	3. 12. 2012
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	0,024	0,060	0,072	0,116	0,257	0,085	-0,028	0,114
CONWERT IMMOBILIEN	0,150	0,127	0,119	0,066	-0,057	0,006	0,006	0,193
ERSTE GROUP	-0,070	-0,060	-0,072	-0,036	-0,043	-0,015	0,079	0,080
EVN	-0,848	-0,732	-0,580	-0,426	-0,276	-0,599	-0,522	-0,639
IMMOFINANZ	0,014	-0,005	-0,031	-0,056	-0,072	0,062	0,186	0,142
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,989
OMV	-0,479	-0,398	-0,334	-0,231	-0,153	-0,101	-0,190	0,012
RHI	0,024	-0,037	-0,180	-0,246	-0,144	-0,062	0,072	0,257
SCHOELLER- BLECKMANN	0,593	0,411	0,341	0,420	0,490	0,672	0,865	1,000
TELEKOM	0,036	0,163	0,161	0,083	-0,163	-0,318	-0,549	-0,893
VERBUND	0,145	-0,031	-0,187	-0,429	-0,645	-0,564	-0,572	-0,417
VIG	0,105	0,117	0,151	0,190	0,329	0,515	0,507	0,216
VOESTALPINE	-0,562	-0,564	-0,547	-0,546	-0,380	-0,389	-0,535	-0,616
WIENERBERGER	-0,133	-0,052	0,085	0,095	-0,143	-0,292	-0,319	-0,437

Tab. 5.3. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty⁹⁵

Váhy portfolií získané na základě tohoto Bayesova přístupu jsou při zaokrouhlování na tři desetinná místa v podstatě identické s váhami složek portfolií sestavených pomocí výběrové metody. Tento výsledek je dán podobou odhadu varianční matice lišící se od varianční matice ve výběrové metodě pouze o vynásobení konstantou, která v konstrukcích rebalancí mírně přesahuje hodnotu 1.

5.2.3. Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty

Přístupme k další statistické metodě sestavení portfolia, tentokrát pomocí Bayesova přístupu s konstrukcí estimátorů parametrů μ a Σ pomocí konjugované hustoty. Tato procedura se odvíjí od části ilustrativní práce „*Illustration: Mean-Variance Optimal Portfolio with Portfolio Constraints*“ a „*Illustration: Bayesian Portfolio Selection*“ v publikaci: „*Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian*

⁹⁴ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

⁹⁵ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Methods in Finance“.⁹⁶ Dle výkladu teoretické části práce za předpokladu normálního rozdělení výnosností akcií se potřebné odhady pro optimalizační úlohu získají na základě těchto vztahů:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\tau_0}{\tau_0 + T} \boldsymbol{\mu}_0 + \frac{T}{\tau_0 + T} \hat{\boldsymbol{\mu}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{T + 1}{T(v_0 + n - 1)} \left(\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1} + (T - 1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\tau_0 T}{\tau_0 + T} (\boldsymbol{\mu}_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\boldsymbol{\mu}_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \right)$$

$$\text{kde } \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{R}_t, \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})',$$

kde $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ jsou, pro které je určena datová základna časové řady cen akciových titulů za období 2.1.2007 - 2.1.2013. T je pak počet pozorování pro tyto odhady použitých výnosností, $n = 15$ je počet akciových titulů. Apriorní informaci o zkoumaném souboru dat představuje tzv. předvýběr, což je časová řada konečných cen zkoumaných akciových titulů pro období 2.1.2004 – 28.12.2006. Rozsah předvýběru činí celkem 743 pozorování. Pro účely dalších výpočtu se opět upraví do podoby měsíčních výnosností stejným způsobem jako časová řada cen v období 2.1.2007 - 2.1.2013.

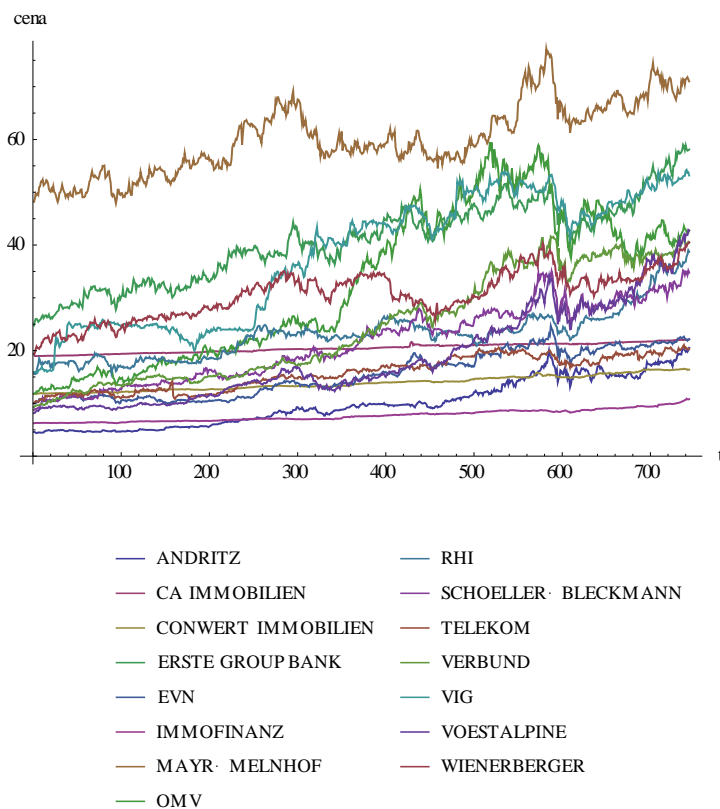
Parametr $\boldsymbol{\mu}_0$ je vektor průměrných měsíčních výnosností předvýběru ($\hat{\boldsymbol{\mu}}^P$) vypočtený na základě výběrové metody, čímž jej považujeme za informativní v relaci k vektoru $\hat{\boldsymbol{\mu}}$. Parametru τ_0 přisuzujeme hodnotu 200. Vzhledem k počtu pozorování základního souboru dat T , které je v rebalancích rovno cca. 975, představuje tak přibližně pětinou váhu. V závislosti na podmínce $v_0 > n + 1$ nabývá v_0 konstanty 17. Relativně nízké hodnoty τ_0 a v_0 zohledňují určitou nejistotu ohledně parametrů $\boldsymbol{\mu}_0$ a $\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}$. Matice $\boldsymbol{\Lambda}_0^{-1}$ je rovna $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^P * (v_0 - n - 1)$, přičemž $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^P$ je varianční matice, která je určena na základě výběrové metody z předvýběru:

⁹⁶ Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 99-100, 106-9

$$\hat{\mu}^P = \frac{1}{Z} \sum_{z=1}^Z \mathbf{R}_z^P, \quad \hat{\Sigma}^P = \frac{1}{Z-1} \sum_{z=1}^Z (\mathbf{R}_z^P - \hat{\mu}^P)(\mathbf{R}_z^P - \hat{\mu}^P),$$

kde Z je počet pozorování měsíčních výnosností předvýběru dosahující hodnoty 724, \mathbf{R}_z^P vektor výnosností v čase z v předvýběru, $\hat{\mu}^P$ vektor průměrných měsíčních výnosností akciových titulů. Estimátory $\tilde{\mu}$ a $\tilde{\Sigma}$ jsou závislé na přisuzovaném významu apriorní informace a odrážejí nejistotu nad vypovídající úrovní parametrů $\hat{\mu}$ a $\hat{\Sigma}$ základního souboru dat.⁹⁷

Následující graf zobrazuje cenový vývoj akciových titulů sestavovaného portfolia v období předvýběru:



Obr. 11. Cenový vývoj zkoumaných akciových titulů ATX⁹⁸

2.1.2004 – 28.12.2006

⁹⁷ Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0, str. 98, 106-8

⁹⁸ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroj dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra

Na základě této metody a opětovném použití optimalizační úlohy maximalizace Sharпова poměru bylo dosaženo v rebalancích těchto vah složek portfolia:

Datum rebalance / Název titulu	3. 1. 2011	2. 2. 2011	2. 3. 2011	1. 4. 2011	2. 5. 2011	1. 6. 2011	1. 7. 2011	3. 8. 2011
ANDRITZ	1,000	0,976	0,789	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,432	-0,435	-0,518	-0,538	-0,541	-0,442	-0,393	-0,445
CONWERT IMMOBILIEN	-0,112	-0,071	0,063	0,181	0,313	0,366	0,495	0,511
ERSTE GROUP	0,149	0,083	0,052	0,102	0,157	0,078	0,090	0,150
EVN	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
IMMOFINANZ	0,036	0,082	0,094	0,074	0,087	0,082	0,073	0,057
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	0,943	0,795	0,861	0,904	0,930	1,000
OMV	-0,522	-0,431	-0,429	-0,672	-0,808	-0,809	-0,801	-0,766
RHI	-0,251	-0,079	-0,153	-0,319	-0,428	-0,375	-0,430	-0,422
SCHOELLER- BLECKMANN	1,000	0,830	0,827	0,997	0,931	0,808	0,647	0,730
TELEKOM	-0,310	-0,479	-0,458	-0,514	-0,468	-0,419	-0,387	-0,520
VERBUND	0,442	0,772	0,859	0,993	1,000	1,000	1,000	0,920
VIG	0,335	0,295	0,442	0,512	0,470	0,469	0,424	0,422
VOESTALPINE	-0,074	-0,329	-0,379	-0,398	-0,266	-0,372	-0,331	-0,221
WIENERBERGER	-0,260	-0,213	-0,133	-0,214	-0,307	-0,290	-0,317	-0,415

Tab. 6.1. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty⁹⁹

Datum rebalance / Název titulu	2. 9. 2011	3. 10. 2011	3. 11. 2011	2. 12. 2011	2. 1. 2012	3. 2. 2012	2. 3. 2012	2. 4. 2012
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,495	-0,224	-0,234	-0,155	-0,091	-0,163	-0,160	-0,074
CONWERT IMMOBILIEN	0,472	0,447	0,544	0,446	0,199	0,149	0,033	-0,059
ERSTE GROUP	0,051	-0,178	-0,150	-0,152	-0,074	-0,022	0,006	-0,113
EVN	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
IMMOFINANZ	0,105	0,069	0,022	0,015	0,013	0,010	0,018	0,027
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
OMV	-0,695	-0,387	-0,438	-0,478	-0,505	-0,462	-0,286	-0,265
RHI	-0,350	-0,115	-0,154	-0,026	-0,007	0,000	-0,091	0,065
SCHOELLER- BLECKMANN	0,733	0,539	0,647	0,796	0,813	0,704	0,642	0,590
TELEKOM	-0,572	-0,539	-0,429	-0,332	-0,128	-0,112	0,002	-0,077
VERBUND	1,000	0,818	0,516	0,382	0,337	0,344	0,243	0,309
VIG	0,537	0,482	0,415	0,272	0,083	0,052	0,062	0,189
VOESTALPINE	-0,436	-0,628	-0,491	-0,439	-0,447	-0,350	-0,383	-0,475
WIENERBERGER	-0,350	-0,282	-0,249	-0,328	-0,193	-0,151	-0,086	-0,117

Tab. 6.2. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty¹⁰⁰

⁹⁹ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Datum rebalance / Název titulu	2. 5. 2012	1. 6. 2012	2. 7. 2012	2. 8. 2012	3. 9. 2012	3. 10. 2012	2. 11. 2012	3. 12. 2012
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,095	-0,061	-0,045	-0,015	0,104	-0,037	-0,145	-0,034
CONWERT IMMOBILIEN	0,009	0,004	0,005	-0,048	-0,182	-0,072	-0,059	0,076
ERSTE GROUP	-0,135	-0,130	-0,141	-0,114	-0,132	-0,074	0,004	0,001
EVN	-1,000	-0,926	-0,779	-0,655	-0,543	-0,654	-0,498	-0,553
IMMOFINANZ	0,036	0,021	-0,003	-0,024	-0,032	0,069	0,144	0,102
MAYR- MELNHOF	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,738	0,543	0,462
OMV	-0,347	-0,287	-0,233	-0,126	-0,036	0,008	-0,061	0,116
RHI	-0,008	-0,052	-0,183	-0,247	-0,153	-0,068	0,039	0,174
SCHOELLER- BLECKMANN	0,646	0,500	0,432	0,515	0,578	0,661	0,758	0,848
TELEKOM	-0,113	-0,003	0,000	-0,084	-0,320	-0,328	-0,428	-0,675
VERBUND	0,351	0,213	0,061	-0,147	-0,320	-0,249	-0,195	-0,058
VIG	0,274	0,279	0,305	0,349	0,496	0,576	0,567	0,340
VOESTALPINE	-0,523	-0,530	-0,517	-0,517	-0,349	-0,336	-0,432	-0,489
WIENERBERGER	-0,093	-0,028	0,098	0,112	-0,111	-0,233	-0,235	-0,310

Tab. 6.3. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty¹⁰¹

5.2.4. Modelování volatilitý pomocí DCC GARCH

Poslední ze zkoumaných metod pro konstrukci portfolia je procedura DCC GARCH, která probíhá ve dvou krocích. V první části předpokládáme tento matematický předpis popisující výnosnost akciového titulu:

$$y_t = \mu_t + e_t$$

$$e_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

kde y_t je v tomto případě měsíční výnos i -tého akciového titulu pro t , e_t jsou tzv. inovace, μ_t je střední hodnota výnosností pro t a ε_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, jejichž střední hodnota nabývá 0 a rozptyl 1.

Za předpokladu $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ je použit pro popis volatilitý i -tého akciového titulu zkoumaného portfolia indexu ATX model GARCH(1,1):

¹⁰⁰ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

¹⁰¹ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 * e_{t-1}^2 + \beta_1 * \sigma_{t-1}^2$$

$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1$$

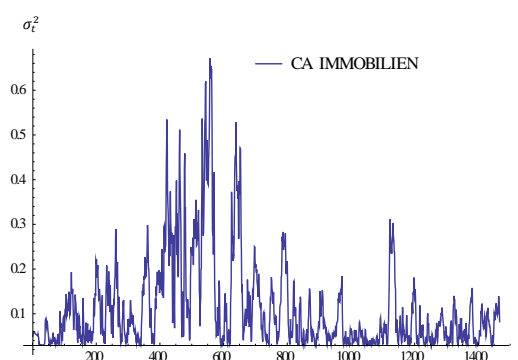
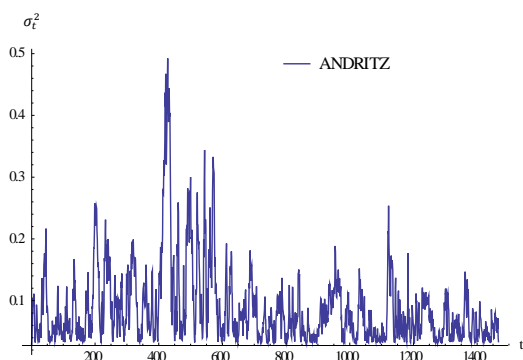
Odhad parametrů $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ modelu je proveden maximalizací logaritmické věrohodnostní funkce:

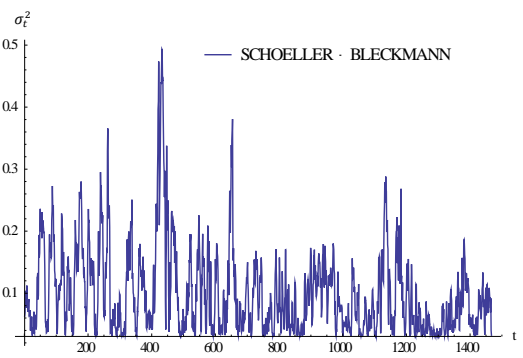
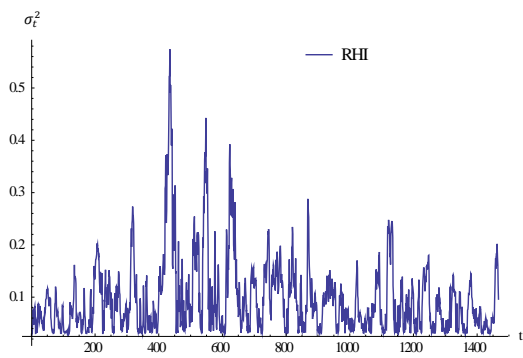
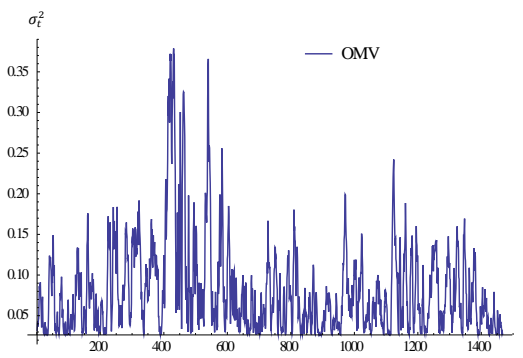
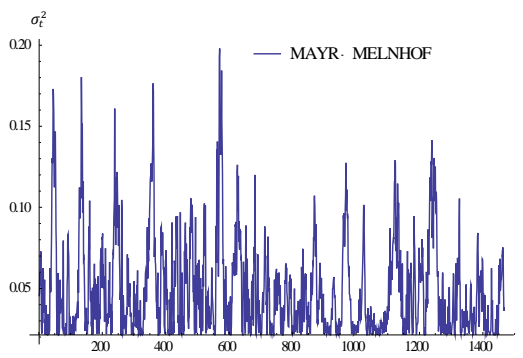
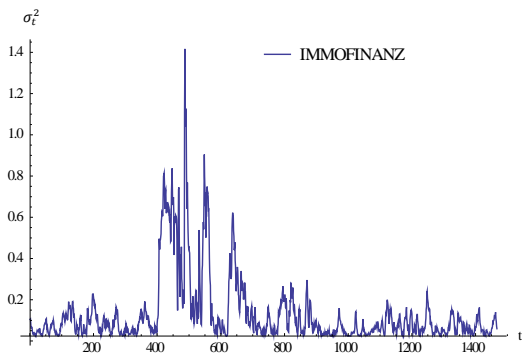
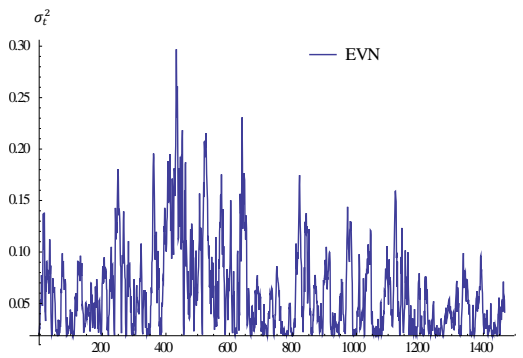
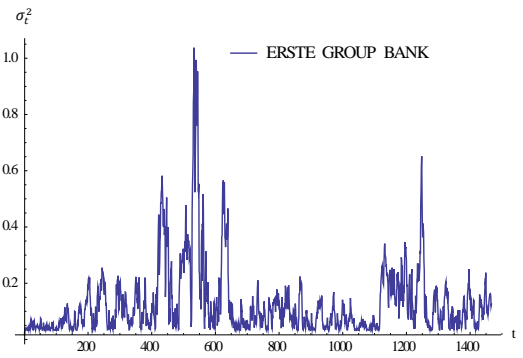
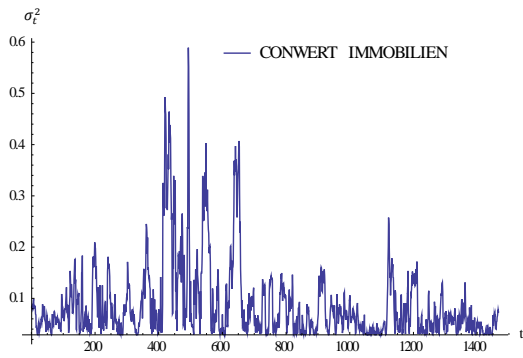
$$\ln(L) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{e_t^2}{\sigma_t^2} \right],$$

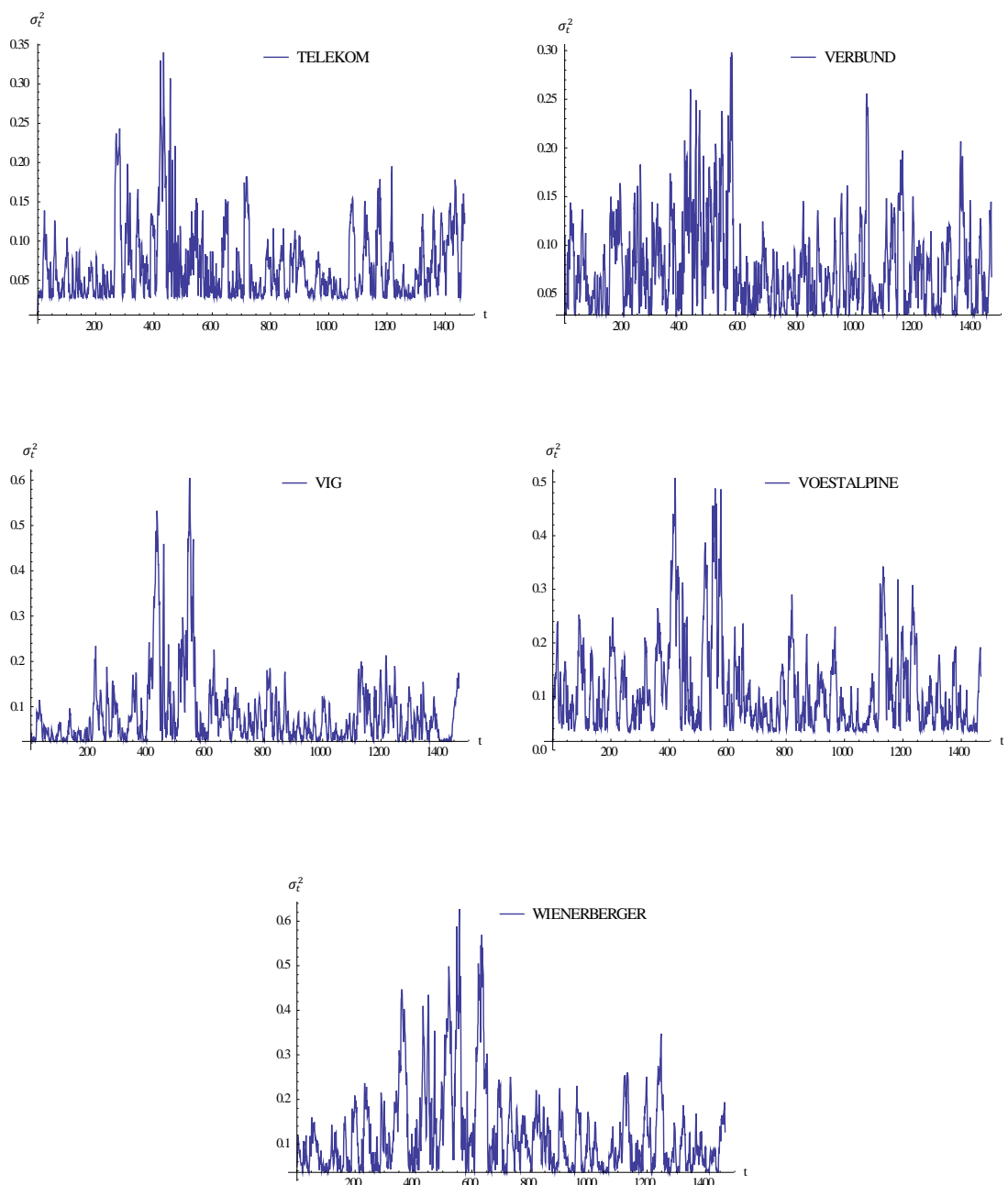
kde T je počet pozorování měsíčních výnosností získané opět z časové řady konečných cen akciových titulů 2.1.2007 - 2.1.2013 stejným způsobem jako v předchozích úlohách. Ve výpočetní proceduře je pro každý akciový titul volena $\mu_t = 0$ pro všechna t . Pro účely rekurze GARCH je za první hodnotu σ_0^2 položena $\sigma_0^2 = e_0^2 = y_0^2$, přičemž za y_0 se považuje první hodnota z časové řady měsíčních výnosností.

Modely GARCH(1,1) jsou zkonstruovány pro všech $n = 15$ akciových titulů portfolia. Rozsah časové řady cen akcií, ze které jsou vypočteny výnosnosti určené jakožto datová základna pro další konstrukci odhadů parametrů potřebných k sestavení portfolií pro rebalance, činí opět 48 měsíců.

Následující grafy ilustrativně zobrazují model GARCH(1,1) výnosností všech akciových titulů v plném rozsahu zkoumaného období 2.1.2007 - 2.1.2013.







102

Obr. 12. GARCH(1,1) zkoumaných akciových titulů ATX 2.1.2007 - 2.1.2013

V druhém kroku procedury DCC GARCH se uvažuje vícerozměrný předpis výnosností všech $n = 15$ složek sestavovaného portfolia:

¹⁰² Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroj dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra,

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{e}_t,$$

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \boldsymbol{\Gamma}_t \mathbf{D}_t, \quad \mathbf{D} = \mathbf{diag}\{\sigma_{it}, \dots, \sigma_{15t}\},$$

přičemž model je již vymezen v teoretické části práce. Ústředním předmětem konstrukce modelu se stává volatilní matice \mathbf{H}_t typu $n \times n$. Předpokládejme $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_t \sim N(0, \boldsymbol{\Gamma}_t)$ a $\mathbf{e}_t \sim N(0, \mathbf{H}_t)$, kde $\boldsymbol{\Gamma}_t$ je časově proměnná korelační matice $\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Diagonální matice \mathbf{D}_t jsou tvořeny odmocninami veličinami σ_{it}^2 , které jsou vymodelovány GARCH(1,1) v prvním kroku procedury. Korelační matici lze rozepsat do podoby:

$$\boldsymbol{\Gamma}_t = \mathbf{diag}\{\mathbf{Q}_t\}^{-1} \mathbf{Q}_t \mathbf{diag}\{\mathbf{Q}_t\}^{-1},$$

přičemž matice \mathbf{Q}_t se získá použitím vztahu:

$$\mathbf{Q}_t = (1 - a - b)\bar{\mathbf{Q}} + a * \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^T + b \mathbf{Q}_{t-1},$$

což je opět GARCH model, kde $\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T$ a pro parametry a, b platí tato omezení:

$$a \geq 0, b \geq 0, a + b < 1$$

Parametry a, b se vypočítají na základě maximalizace logaritmické korelační části věrohodnostní funkce:

$$\ln L_C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\boldsymbol{\Gamma}_t| + \boldsymbol{\varepsilon}_t' \boldsymbol{\Gamma}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde T je počet pozorování vektoru výnosností. Ve výpočetní proceduře uvažujeme $\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{0}$ pro všechna t a v rekurzi pokládáme $\mathbf{Q}_0 = \bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T$. Varianční matice se pomocí modelu DCC GARCH odhaduje opět pro všechny rebalance se stejným systémem posouvání datové základny měsíčních výnosností jako tomu bylo

u výběrové metody a Bayesova přístupu s Jeffreysovou hustotou. Odhad parametru μ se opět provádí pomocí výběrové metody. Výsledné váhy složek portfolií jsou:

Datum rebalance / Název titulu	3. 1. 2011	2. 2. 2011	2. 3. 2011	1. 4. 2011	2. 5. 2011	1. 6. 2011	1. 7. 2011	3. 8. 2011
ANDRITZ	1,000	0,169	0,458	0,369	1,000	0,497	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,504	-0,340	-0,477	-0,308	-0,480	-0,177	-0,069	-0,162
CONWERT IMMOBILIEN	0,774	-0,134	-0,072	0,419	0,501	0,745	0,561	0,754
ERSTE GROUP	0,175	0,541	0,435	0,539	0,779	0,493	0,675	0,370
EVN	-1,000	-1,000	-1,000	-0,702	-1,000	-1,000	-0,469	-1,000
IMMOFINANZ	0,365	1,000	1,000	1,000	1,000	0,809	0,263	1,000
MAYR- MELNHOF	0,758	0,883	0,437	0,673	0,154	-0,062	0,276	0,124
OMV	-0,361	0,080	-0,003	-0,093	-0,646	-0,421	-0,539	-0,527
RHI	-0,253	-0,121	-0,210	-0,339	-0,511	-0,552	-0,229	-0,523
SCHOELLER- BLECKMANN	0,851	0,800	1,000	0,377	1,000	1,000	0,199	0,550
TELEKOM	-0,190	-0,346	-0,173	-0,510	-0,313	-0,028	-0,401	-0,684
VERBUND	0,047	0,056	0,356	0,165	0,485	0,262	0,486	0,750
VIG	0,306	0,217	0,089	0,800	0,266	0,338	-0,004	0,203
VOESTALPINE	-0,057	-0,380	-0,371	-0,390	-0,309	-0,233	-0,199	-0,258
WIENERBERGER	-0,912	-0,426	-0,469	-1,000	-0,926	-0,671	-0,549	-0,598

Tab. 7.1. Vektory vah portfolií – Modelování volatilitu pomocí DCC GARCH¹⁰³

Datum rebalance / Název titulu	2. 9. 2011	3. 10. 2011	3. 11. 2011	2. 12. 2011	2. 1. 2012	3. 2. 2012	2. 3. 2012	2. 4. 2012
ANDRITZ	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
CA IMMOBILIEN	-0,140	-0,240	1,000	0,034	0,320	-0,006	0,191	-0,247
CONWERT IMMOBILIEN	0,145	0,833	0,269	0,123	0,716	1,000	0,611	-0,311
ERSTE GROUP	0,021	0,040	0,207	-0,044	-0,003	0,018	-0,182	0,147
EVN	-0,464	-1,000	-0,923	-1,000	-0,658	-1,000	-1,000	-0,551
IMMOFINANZ	0,547	1,000	0,332	0,570	0,294	1,000	0,299	0,857
MAYR- MELNHOF	0,464	1,000	1,000	0,869	0,408	0,252	0,958	0,486
OMV	-0,032	-0,144	-0,340	-0,079	-0,403	-0,490	-0,271	-0,111
RHI	-0,108	-0,284	-0,063	0,473	-0,018	-0,241	-0,078	-0,260
SCHOELLER- BLECKMANN	0,035	0,711	-0,050	0,079	0,700	0,891	0,166	0,576
TELEKOM	-0,311	-0,632	-0,141	-0,348	-0,165	-0,319	0,377	-0,206
VERBUND	0,449	0,139	0,257	0,031	-0,054	-0,514	-0,138	-0,101
VIG	-0,024	0,012	-0,252	-0,164	-0,111	-0,159	0,405	0,197
VOESTALPINE	-0,188	-0,435	-0,295	-0,271	-0,542	-0,283	-0,336	-0,219
WIENERBERGER	-0,394	-1,000	-1,000	-0,275	-0,484	-0,148	-1,000	-0,256

Tab. 7.2. Vektory vah portfolií – Modelování volatilitu pomocí DCC GARCH¹⁰⁴

¹⁰³ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Datum rebalance / Název titulu	2. 5. 2012	1. 6. 2012	2. 7. 2012	2. 8. 2012	3. 9. 2012	3. 10. 2012	2. 11. 2012	3. 12. 2012
ANDRITZ	0,067	0,445	0,653	0,344	0,195	0,635	0,315	0,268
CA IMMOBILIEN	0,045	-0,019	0,050	0,272	0,778	-0,283	-0,198	-0,091
CONWERT IMMOBILIEN	-0,091	0,224	0,162	0,270	-0,187	0,953	0,056	0,100
ERSTE GROUP	0,269	0,060	0,066	0,239	0,528	0,030	0,044	-0,064
EVN	-1,000	-1,000	-0,175	-0,928	-0,266	-1,000	0,240	-0,156
IMMOFINANZ	1,000	0,226	1,000	0,473	0,734	0,158	1,000	1,000
MAYR- MELNHOF	1,000	0,696	1,000	1,000	0,640	1,000	-0,146	-0,166
OMV	-0,149	-0,045	-0,692	-0,654	-0,186	-0,377	-0,131	0,114
RHI	-0,270	-0,144	-0,327	-0,035	-0,299	-0,494	-0,157	-0,053
SCHOELLER- BLECKMANN	1,000	0,844	0,145	0,436	0,101	1,000	0,109	0,049
TELEKOM	-0,078	0,047	0,139	0,017	-0,111	0,049	-0,050	-0,204
VERBUND	-0,083	-0,086	-0,391	-0,093	-1,000	-0,619	-0,052	0,315
VIG	0,011	0,029	-0,054	0,506	0,184	0,705	0,157	-0,108
VOESTALPINE	-0,191	-0,172	-0,478	-0,924	0,254	-0,408	-0,170	0,101
WIENERBERGER	-0,530	-0,105	-0,098	0,078	-0,366	-0,351	-0,016	-0,106

Tab. 7.3. Vektory vah portfolií – Modelování volatility pomocí DCC GARCH¹⁰⁵

5.3. Backtesting

Poslední část této kapitoly se věnuje porovnání použitých statistických metod pro konstrukci investičních portfolií. Toto srovnání se zakládá na ryze praktické úloze opírající se o výše stanovené rebalance. Jelikož jsou ceny akciových titulů v měně EUR, mějme tedy počáteční investiční kapitál 1 000 000 EUR. Investování bude pro každou z vypracovaných statistických metod probíhat následujícím způsobem. První rebalance (3.1.2011) je prvním okamžikem sestavení portfolií s horizontem držby jednoho měsíce do druhé rebalance. Kapitál 1 000 000 EUR bude v den první rebalance investován do nákupu akciových titulů dle vektoru vah složek portfolia, který je pro tuto rebalanci vypočten, za aktuální cenu akcií připadající na tento den.¹⁰⁶ Portfolio je drženo do druhé rebalance, kdy se veškeré akciové tituly prodají a zároveň nakoupí nové dle vektoru vah určeného pro tuto rebalanci za příslušné ceny. Celý postup se opakuje i pro následující rebalance, celkový investiční

¹⁰⁴ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

¹⁰⁵ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

¹⁰⁶ Pro tyto účely je stejně jako v předchozích podkapitolách použita časová řada denních konečných cen akciových titulů.

horizont pokrývá období 3.1.2011 - 2.1.2013. Přístupme nyní k výsledkům jednotlivých investičních strategií, které zahrnují i klíčové ukazatele.

Výběrová metoda konstrukce estimátorů					
Rebalance	Výnos portfolia	Realizovaná volatilita	R_f (%)	Sharpův poměr (rebalance)	Sharpův poměr (anualizovaný)
3. 1. 2011	-0,0685	0,0831	0,0641	-10,0148	-24,1166
2. 2. 2011	-0,0069	0,0508	0,0758	-2,9689	-9,8625
2. 3. 2011	0,0753	0,0511	0,0725	28,5694	151,5963
1. 4. 2011	-0,0056	0,0416	0,0816	-3,7059	-12,3937
2. 5. 2011	0,0361	0,0360	0,1033	27,0702	114,1304
1. 6. 2011	-0,0652	0,0542	0,1016	-22,5515	-55,1117
1. 7. 2011	-0,0198	0,0704	0,1108	-4,2120	-13,0276
3. 8. 2011	-0,1256	0,1168	0,1191	-9,2912	-16,9975
2. 9. 2011	-0,0386	0,1020	0,1125	-3,8107	-10,6692
3. 10. 2011	0,0806	0,0789	0,1133	12,7713	69,7580
3. 11. 2011	0,0056	0,0566	0,1133	1,4078	4,9995
2. 12. 2011	0,0359	0,0711	0,1008	6,8971	29,0530
2. 1. 2012	0,0176	0,0645	0,0841	4,0392	15,3601
3. 2. 2012	0,0135	0,0586	0,0566	3,7689	14,0274
2. 3. 2012	0,0375	0,0641	0,0441	9,0207	38,4850
2. 4. 2012	0,0400	0,0528	0,0350	14,2047	61,4897
2. 5. 2012	-0,0176	0,0721	0,0333	-3,4454	-10,8261
1. 6. 2012	-0,0043	0,0707	0,0316	-0,9222	-3,1148
2. 7. 2012	0,0161	0,0485	0,0308	6,6817	25,2600
2. 8. 2012	0,0331	0,0515	0,0116	12,4214	51,7495
3. 9. 2012	0,0322	0,0515	0,0100	12,1081	50,2067
3. 10. 2012	0,0085	0,0599	0,0091	2,3315	8,4584
2. 11. 2012	0,0644	0,0458	0,0091	30,7206	153,4697
3. 12. 2012	0,0019	0,0391	0,0091	1,1880	4,1567
Celkový výnos za investiční období: 12,7531%					
Anualizovaný výnos za investiční období: 6,1853%					
Anualizovaná realizovaná volatilita za investiční období: 22,4867%					
Anualizovaný bezrizikový výnos za investiční období: 0,7692%					
Anualizovaný Sharpův poměr: 0,2408					

Tab. 8. Výsledky rebalancí - Výběrová metoda konstrukce estimátorů ¹⁰⁷

¹⁰⁷ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica a Microsoft Excel 2010, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty					
Rebalance	Výnos portfolia	Realizovaná volatilita	R_f (%)	Sharpův poměr (rebalance)	Sharpův poměr (anualizovaný)
3. 1. 2011	-0,0685	0,0831	0,0641	-10,0148	-24,1166
2. 2. 2011	-0,0069	0,0508	0,0758	-2,9689	-9,8625
2. 3. 2011	0,0753	0,0511	0,0725	28,5696	151,5976
1. 4. 2011	-0,0056	0,0416	0,0816	-3,7059	-12,3937
2. 5. 2011	0,0361	0,0360	0,1033	27,0702	114,1304
1. 6. 2011	-0,0652	0,0542	0,1016	-22,5515	-55,1117
1. 7. 2011	-0,0198	0,0704	0,1108	-4,2122	-13,0281
3. 8. 2011	-0,1256	0,1168	0,1191	-9,2912	-16,9975
2. 9. 2011	-0,0386	0,1020	0,1125	-3,8107	-10,6692
3. 10. 2011	0,0806	0,0789	0,1133	12,7713	69,7580
3. 11. 2011	0,0056	0,0566	0,1133	1,4077	4,9992
2. 12. 2011	0,0359	0,0711	0,1008	6,8971	29,0529
2. 1. 2012	0,0176	0,0645	0,0841	4,0392	15,3604
3. 2. 2012	0,0135	0,0586	0,0566	3,7689	14,0273
2. 3. 2012	0,0375	0,0641	0,0441	9,0207	38,4850
2. 4. 2012	0,0400	0,0528	0,0350	14,2047	61,4900
2. 5. 2012	-0,0176	0,0721	0,0333	-3,4454	-10,8260
1. 6. 2012	-0,0043	0,0707	0,0316	-0,9222	-3,1146
2. 7. 2012	0,0161	0,0485	0,0308	6,6816	25,2596
2. 8. 2012	0,0331	0,0515	0,0116	12,4214	51,7497
3. 9. 2012	0,0322	0,0515	0,0100	12,1081	50,2069
3. 10. 2012	0,0085	0,0599	0,0091	2,3315	8,4584
2. 11. 2012	0,0644	0,0458	0,0091	30,7204	153,4692
3. 12. 2012	0,0019	0,0391	0,0091	1,1879	4,1565
Celkový výnos za investiční období: 12,7532%					
Anualizovaný výnos za investiční období: 6,1853%					
Anualizovaná realizovaná volatilita za investiční období: 22,4867%					
Anualizovaný bezrizikový výnos za investiční období: 0,7692 %					
Anualizovaný Sharpův poměr: 0,2408					

Tab. 9. Výsledky rebalancí - Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty¹⁰⁸

¹⁰⁸ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica a Microsoft Excel 2010, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty					
Rebalance	Výnos portfolia	Realizovaná volatilita	R_f (%)	Sharpův poměr (rebalance)	Sharpův poměr (anualizovaný)
3. 1. 2011	-0,0579	0,0768	0,0641	-9,9135	-25,1860
2. 2. 2011	-0,0143	0,0482	0,0758	-6,4575	-20,6101
2. 3. 2011	0,0686	0,0469	0,0725	30,8371	157,2862
1. 4. 2011	-0,0052	0,0413	0,0816	-3,5391	-11,8617
2. 5. 2011	0,0329	0,0363	0,1033	24,1912	100,1928
1. 6. 2011	-0,0513	0,0520	0,1016	-19,3927	-50,8413
1. 7. 2011	-0,0229	0,0684	0,1108	-5,1240	-15,5854
3. 8. 2011	-0,1238	0,1163	0,1191	-9,2425	-17,0497
2. 9. 2011	-0,0548	0,1053	0,1125	-5,0492	-12,9970
3. 10. 2011	0,0898	0,0747	0,1133	15,9100	91,7711
3. 11. 2011	-0,0002	0,0585	0,1133	-0,3976	-1,3671
2. 12. 2011	0,0403	0,0688	0,1008	8,2823	35,7709
2. 1. 2012	0,0270	0,0586	0,0841	7,6186	30,5344
3. 2. 2012	0,0143	0,0533	0,0566	4,8301	18,0532
2. 3. 2012	0,0304	0,0611	0,0441	8,0406	32,9387
2. 4. 2012	0,0331	0,0515	0,0350	12,3694	51,4858
2. 5. 2012	-0,0266	0,0723	0,0333	-5,1503	-15,4203
1. 6. 2012	0,0023	0,0705	0,0316	0,4021	1,4083
2. 7. 2012	0,0087	0,0491	0,0308	3,4661	12,5736
2. 8. 2012	0,0443	0,0496	0,0116	17,9665	79,8388
3. 9. 2012	0,0295	0,0497	0,0100	11,9094	48,6223
3. 10. 2012	0,0087	0,0590	0,0091	2,4717	8,9785
2. 11. 2012	0,0612	0,0466	0,0091	28,1689	138,0474
3. 12. 2012	0,0067	0,0411	0,0091	3,8928	13,9828
Celkový výnos za investiční období: 12,1699 %					
Anualizovaný výnos za investiční období: 5,9103%					
Anualizovaná realizovaná volatilita za investiční období: 21,9858%					
Anualizovaný bezrizikový výnos za investiční období: 0,7692%					
Anualizovaný Sharpův poměr: 0,2338					

Tab. 10. Výsledky rebalancí - Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty ¹⁰⁹

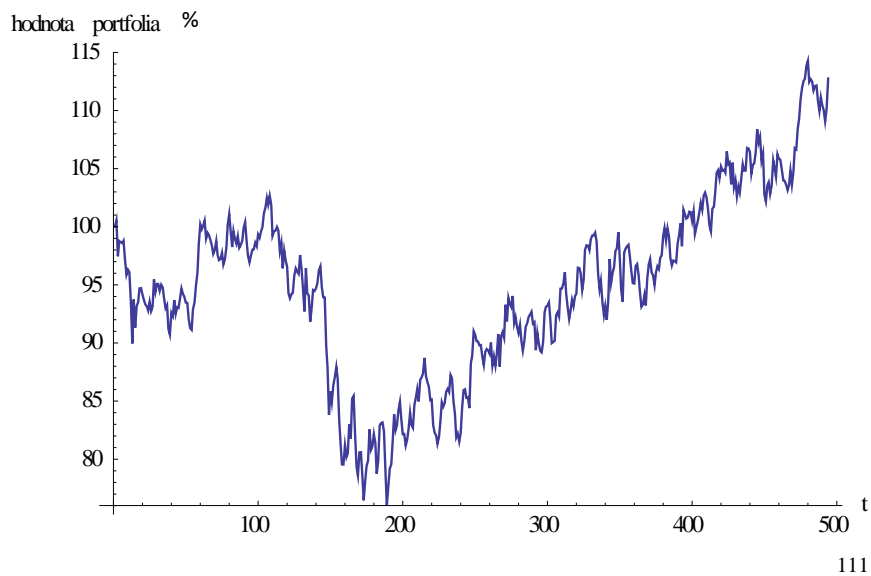
¹⁰⁹ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica a Microsoft Excel 2010, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Modelování volatilitý pomocí DCC GARCH					
Rebalance	Výnos portfolia	Realizovaná volatilita	R_f (%)	Sharpův poměr (rebalance)	Sharpův poměr (anualizovaný)
3. 1. 2011	-0,0687	0,0804	0,0641	-10,7420	-25,8359
2. 2. 2011	-0,0083	0,0475	0,0758	-4,0239	-13,2638
2. 3. 2011	0,0835	0,0612	0,0725	22,1015	123,0529
1. 4. 2011	-0,0169	0,0374	0,0816	-12,6547	-39,8135
2. 5. 2011	0,0353	0,0514	0,1033	12,9710	54,4526
1. 6. 2011	-0,0412	0,0928	0,1016	-4,9061	-13,5540
1. 7. 2011	-0,0560	0,0687	0,1108	-12,0945	-30,9411
3. 8. 2011	-0,1531	0,1598	0,1191	-6,0446	-9,7939
2. 9. 2011	-0,0734	0,0984	0,1125	-7,6902	-18,0270
3. 10. 2011	0,1184	0,0811	0,1133	17,8050	121,9735
3. 11. 2011	-0,0563	0,0654	0,1133	-13,4153	-34,2791
2. 12. 2011	0,0194	0,0625	0,1008	4,7047	18,0518
2. 1. 2012	-0,0209	0,0697	0,0841	-4,4681	-13,7583
3. 2. 2012	0,0139	0,0754	0,0566	2,3465	8,7529
2. 3. 2012	0,0410	0,0707	0,0441	8,1329	35,3998
2. 4. 2012	0,0348	0,0576	0,0350	10,3941	43,6768
2. 5. 2012	-0,0579	0,0867	0,0333	-7,7486	-19,7187
1. 6. 2012	0,0089	0,0837	0,0316	1,2263	4,4547
2. 7. 2012	0,0194	0,0559	0,0308	6,1098	23,5327
2. 8. 2012	0,0646	0,0595	0,0116	18,2333	91,1453
3. 9. 2012	0,0567	0,0765	0,0100	9,6779	46,2163
3. 10. 2012	-0,0163	0,0632	0,0091	-4,1094	-13,0188
2. 11. 2012	0,1332	0,1302	0,0091	7,8592	59,3267
3. 12. 2012	-0,0019	0,1306	0,0091	-0,1159	-0,3972
Celkový výnos za investiční období: 0,9453%					
Anualizovaný výnos za investiční období: 0,0471%					
Anualizovaná realizovaná volatilita za investiční období: 28,6098%					
Anualizovaný bezrizikový výnos za investiční období: 0,7692%					
Anualizovaný Sharpův poměr: -0,0104					

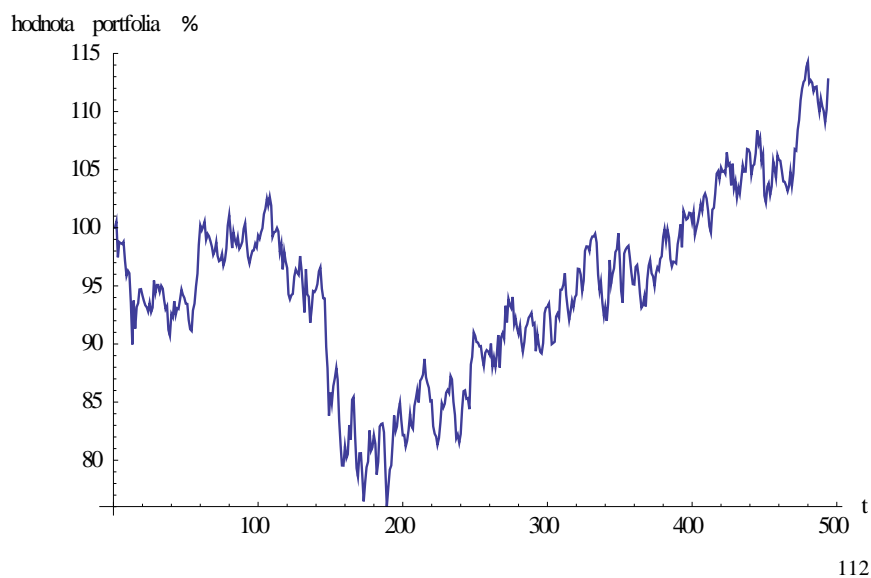
Tab. 11. Výsledky rebalancí – Modelování volatilitý pomocí DCC GARCH ¹¹⁰

¹¹⁰ Vlastní výpočty ve Wolfram Mathematica a Microsoft Excel 2010, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

Následující grafy zobrazují vývoj portfolií v rozsahu celého investičního období 3.1.2011 - 2.1.2013 na denní bázi.



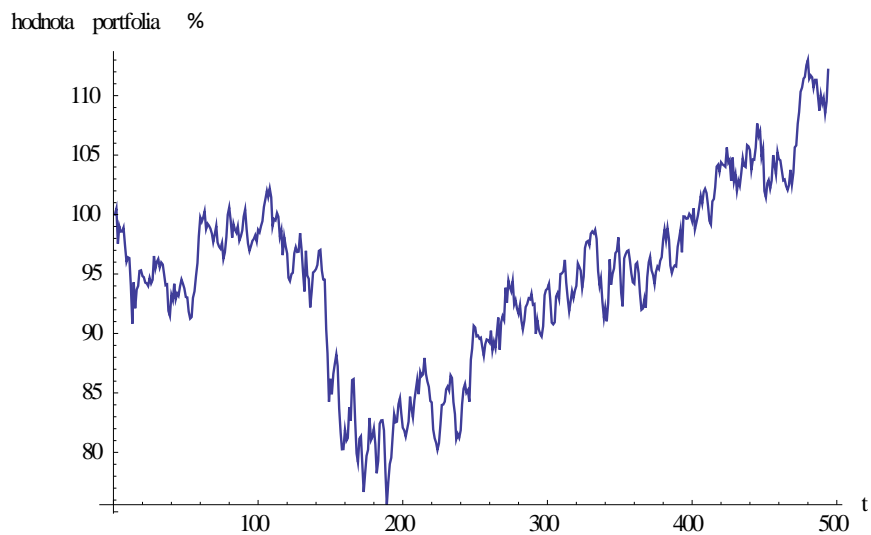
Obr. 13. Vývoj portfolia – Výběrová metoda konstrukce estimátorů



Obr. 14. Vývoj portfolia – Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty

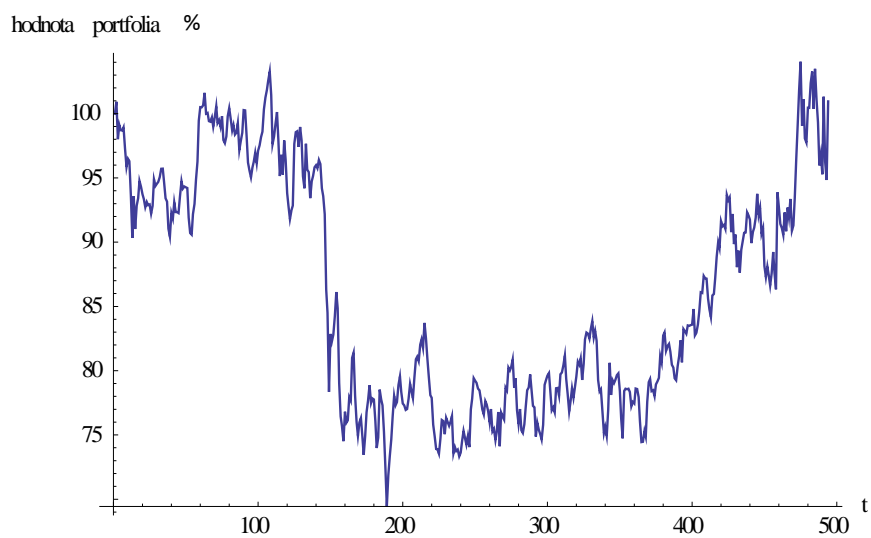
¹¹¹ Vlastní výpočty v Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

¹¹² Vlastní výpočty v Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus



113

Obr. 15. Vývoj portfolia – Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty

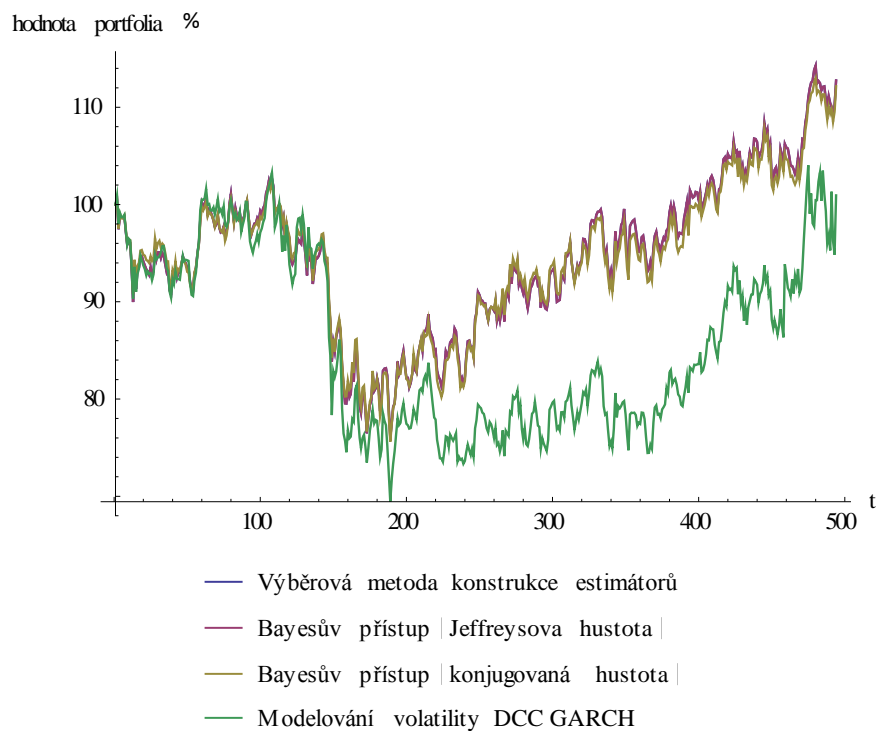


114

Obr. 16. Vývoj portfolia – Modelování volatilitý pomocí DCC GARCH

¹¹³ Vlastní výpočty v Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

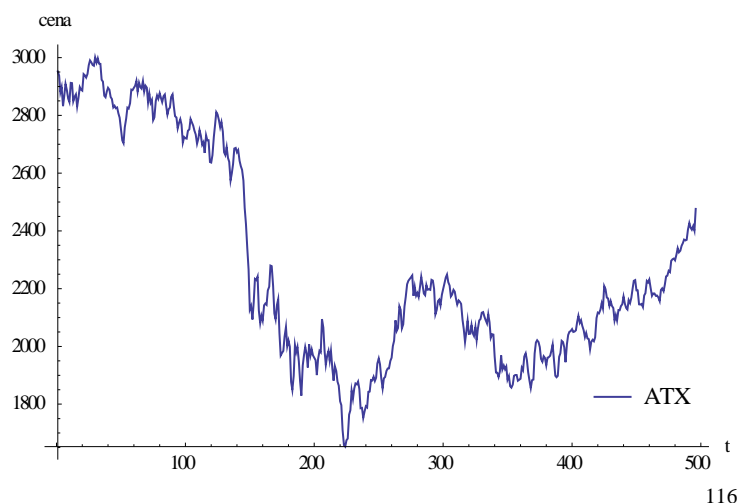
¹¹⁴ Vlastní výpočty v Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus



Obr. 17. Souhrnný vývoj portfolií

115

Před samotným posouzením jednotlivých statistických metod uvedme pomocí následujícího grafu ilustrativní vývoj ceny indexu ATX ve sledovaném období 3.1.2011 – 2.1.2013, v němž jsou zastoupeny akciové tituly tvořící zkoumané investiční portfolio.



116

Obr. 18. Cenový vývoj indexu ATX 3.1.2011 – 2.1.2013

¹¹⁵ Vlastní výpočty v Mathematica, Zdroje dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra, Patria Online a.s., Patria Plus

¹¹⁶ Vlastní výpočty v Mathematica, Zdroj dat: Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra

Dne 3.1.2011 činila cena indexu ATX 2 9517,88 EUR, k datu 2.1.2013 je evidována cena 2 476,24 EUR. Za toto investiční období index ATX oslabil přibližně o 16,1131%. Implementované investiční strategie vzhledem k této skutečnosti dosáhly za období 3.1.2011 – 2.1.2013 zhodnocení portfolia v rozmezí 0,9453% až 12,7531%. Je ovšem nutno podotknout, že bylo použito pro podmínku dílčí váhy složek portfolia ($-1 \leq \omega \leq 1$) spíše ukázkového teoretického modelu, neboť nelze takto zvoleného omezení předpokládat v reálném obchodování.

Výběrová metoda konstrukce estimátorů parametrů μ a Σ společně s Bayesovým přístupem za použití Jeffreysovi hustoty, kdy předpokládáme neexistenci apriorní informace, přinesli takřka shodné výsledky vah složek portfolia u všech provedených rebalancí. Tyto dvě metody dospěli ke stejnému estimátoru očekávaných výnosností akciových titulů portfolia a prakticky rovnocennému odhadu variančních matic. Anualizovaný Sharpův poměr za investiční období činil pro oba přístupy přibližně 0,2408. Anualizované veličiny výnosu a realizované volatility za zvolený investiční horizont dosáhli úrovně přibližně 6,1853% a 22,4867%. Zohlednění nejistoty ohledně parametru rizika portfolia v Bayesově přístupu s použitím Jeffreysovi hustoty se tak na základě těchto výsledků neprojevovalo.

Třetí použitou procedurou k sestavení investičních portfolií je Bayesův přístup s konstrukcí estimátorů pomocí konjugované hustoty, kde je předpokládána existence apriorní informace v podobě tzv. předvýběru, což je časová řada cen akciových titulů v období 2.1.2004 – 28.12.2006. Tato metoda přispěla k mírnému snížení celkového výnosu na 12,1699% (v anualizované podobě 5,9103%) oproti v předchozích metodách dosažené hodnotě přibližně 12,7531%. Anualizované veličiny realizovaná volatility portfolia a Sharpův poměr za investiční období mírně poklesly na 21,9858% a 0,2338. Vzhledem k charakteru optimalizační úlohy se z investičního hlediska opět neprojevovalo zohlednění nejistoty nad parametry $\hat{\mu}$ a $\hat{\Sigma}$ základního souboru dat, přestože odhady variančních matic dosahují oproti ostatním postupům velmi vysokých hodnot.

Výsledky doposud zkoumaných statistických procedur jsou velmi podobné, což rovněž platí i pro sledovaný denní vývoj hodnoty takto získaných portfolií, který je patrný z Obr.13 až Obr.15. Metoda opírající se o modelování volatility pomocí DCC GARCH procedury dospěla oproti předchozím postupům k odlišnému charakteru odhadu variančních matic. Celkový výnos byl ovšem s hodnotou pouhých 0,9453% nejnižší, v anualizované verzi pak 0,0471%. Sharpův poměr a realizovaná volatility

v anualizované podobě za investiční horizont činili -0,0104 a 28,6098%. Tato procedura v některých rebalancích přinesla nabytí širší škály hodnot, ovšem za cenu několika významnějších poklesů oproti zbylým metodám, především pak v měsíčních investičních horizontech začínajících dny 1.7.2011, 3.8.2011, 2.9.2011 a 2.5.2012.

Závěr

V teoretické části diplomové práce, která zaujímá kapitoly 1 až 4, byly vyloženy klíčové pojmy moderní teorie portfolia a následně byly popsány vybrané statistické postupy používané k nalezení odhadů očekávaného výnosu a rizika portfolia, konkrétně tradiční výběrová metoda, modelování volatility pomocí vícerozměrného GARCH modelu s akcentem na DCC GARCH proceduru a Bayesův přístup s konstrukcí estimátorů pomocí Jeffreysovi a konjugované hustoty.

Pátá kapitola, kterou lze označit za praktickou část diplomové práce, byla věnována implementaci těchto statistických postupů při sestavování investičních portfolií za jednotně pro všechny použité metody zvolené optimalizační úlohy, a to maximalizace Sharpova poměru, kde za bezrizikovou úrokovou míru byla považována sazba Euribor 1M.

Konstruovaná portfolia obsahovala patnáct akciových titulů Austrian Traded Index, který je tvořen tzv. „blue chips“ Vídeňské burzy. Datovou základnu pro aplikaci statistických procedur představovala časová řada konečných cen těchto akcií za období 2.1.2007 - 2.1.2013 a v Bayesově přístupu konstrukce estimátorů pomocí konjugované hustoty ještě i starší časový horizont 2.1.2004 – 28.12.2006, přičemž ve výpočtech se dále nepoužívaly ceny, ale z nich vypočtené měsíční výnosnosti akciových titulů.

Portfolia byla sestavována na investiční horizont období 3.1.2011 – 2.1.2013, který byl tvořen celkem 24 dílčími měsíčními intervaly, ve kterých byla portfolia vždy převrstvována. Každá ze čtyř používaných statistických procedur tak dospěla k celkem 24 vektorům vah složek portfolia. Datová základna pro konstrukci odhadů parametrů nabývala rozsahu 48 měsíců časové řady cen akciových titulů a vzhledem k sestavení portfolia pro každou rebalanci se tak vždy v čase o měsíc posouvala směrem od nejstaršího údaje k nejnovějšímu.

Po konstrukci investičních portfolií byla učiněna komparace použitých statistických postupů pomocí tzv. backtesting. Předpokládala se existence kapitálu o hodnotě 1 000 000 EUR, která byla investována v den první rebalance podle vypočtených vah složek portfolia na měsíční investiční horizont, tedy do další rebalance. První den druhé rebalance bylo portfolio prodáno a koupeno nové dle aktuálně vypočtených vah portfolia za ceny akciových titulů určené k tomuto dni a drženo pět na měsíční

investiční horizont. Takto se postupovalo ve všech určených rebalancích portfolia. Pro každou z měsíčních rebalancí byla následně vypočtena výnosnost, realizovaná volatilita portfolia a Sharpův poměr. Za dvouletý investiční horizont byly v anualizované podobě určeny klíčové veličiny Sharpův poměr, výnos a realizovaná volatilita portfolia. Tento postup byl učiněn pro všechny použité statistické procedury.

Během sledovaného období 3.1.2011 – 2.1.2013 dosáhl index ATX, ve kterém zaujímají konstruovaná investiční portfolia patnáct z celkových dvaceti akciových titulů, výnosnosti přibližně – 16,1131 %, přičemž zhodnocení zkoumaného portfolia se za použití výše uvedených statistických postupů pohybovalo na hodnotách od 0,9453% do 12,7531 %.

K velmi podobným výsledkům ohledně celkové výnosnosti a anualizovaného Sharpova poměru dospěla portfolia, jejichž parametry byly odhadnuty na základně výběrové metody a Bayesova přístupu s použitím Jeffreysovi hustoty. Celková výnosnost takto sestavených portfolií činila přibližně 12,7531%. Anualizovaný Sharpův poměr a rovněž i anualizovaná realizovaná volatilita za investiční období dosáhli takřka stejných hodnot pro obě metody, a to přibližně 0,2408 a 22,4867%. Zohlednění nejistoty nad parametrem rizika se tak v této použité Bayesově metodě v ukazatelích neprojevovalo.

Sestavení investičního portfolia použitím Bayesova přístupu s konstrukcí estimátorů pomocí konjugované hustoty přinesl nepatrně nižší celkovou výnosnost 12,1699%. Anualizované veličiny Sharpův poměr a realizovaná volatilita za investiční horizont činili 0,2338 a 21,9858%. Apriorní informace, což je již zmíněná starší časová řada cen akciových titulů pro horizont 2.1.2004 – 28.12.2006, a zvolené hodnoty příslušných parametrů zohledňující nejistotu tak neměly z hlediska zkoumaných výsledků na sestavení investičních portfolií významný vliv.

Postup konstrukce portfolia s využitím modelování volatility pomocí DCC GARCH procedury přinesl zhodnocení portfolia o pouhých 0,9453% a zvýšení anualizované realizované volatility na 28,6098%. Sharpův poměr v anualizované podobě činil -0,0104. Sestavená investiční portfolia v některých měsíčních rebalancích nabyla významnějších poklesů proti předchozím postupům, což je patrné i z grafického znázornění vývoje denní hodnoty portfolia.

Dle výsledků této práce lze za vhodné metody k sestavení investičního portfolia zvolených akciových titulů vzhledem k dosažené celkové výnosnosti a anualizované

realizované volatility považovat tradiční výběrovou metodu a Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi i konjugované hustoty. Tyto metody dosáhli velmi podobných výsledků i denního vývoje hodnoty portfolia. Je ovšem nutné podotknout, že výsledky Bayesův přístupu s konjugovanou hustotou jsou částečně ovlivněny subjektivním prisouzením vypovídající úrovně apriorní informace.

Význam Bayesova přístupu, ať již s konstrukcí estimátorů pomocí Jeffreysovi nebo konjugované hustoty, spatřuji především v pohledu na rizikovost portfolia, které vzhledem k existující nejistotě nad zkoumanými parametry může nabývat významnějšího než námi očekávaného charakteru.

Seznam použité literatury a zdrojů

Alexander G. J., Francis J. C.: Portfolio Analysis, Englewood Cliffs: Prentice-hall, třetí vydání, 1986, Prentice-hall foundations of finance series, ISBN 0-13-686825-8

Anděl J.: Statistické metody, Matfyzpress, čtvrté upravené vydání, 2007, Praha, ISBN 80-7378-003-8

Anděl J.: Základy matematické statistiky, Matfyzpress, druhé opravené vydání, 2007, Praha, ISBN 80-7378-001-1

Arlt J., Arltová M.: Ekonomické časové řady, Professional Publishing, první vydání, 2009, Praha, ISBN 978-80-86946-85-6

Barigozzi M.: Estimation of GARCH models, London School of Economics, UK, CIDE – Bertinoro – Courses for PhD students, [cit. 21.4.2013], Dostupné z: http://www.barigozzi.eu/mb/Teaching_files/GARCHestimation.pdf

Bauwens L., Korobilis D.: Bayesian methods, Core Discussion Paper 2011/61, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), [cit. 25.10.2012], Dostupné z: http://www.uclouvain.be/cps/ucl/doc/core/documents/coredp2011_61web.pdf

Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. V. K.: Multivariate GARCH Models: A Survey, Journal of Applied Econometrics. Jan/Feb2006, Vol. 21 Issue 1, p79-109. 31p.

Blake D.: Analýza finančních trhů, GRADA Publishing, 1995, Praha, ISBN 80-7169-201-8

Bollerslev T., Engle F., Wooldridge J. M.: A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances, Journal of Political Economy, Vol. 96, No. 1, (Feb.,1988), pp. 116-131

Bollerslev T.: Modeling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 72, No. 3, 1990, 498-505, [cit. 22.10.2012], Dostupné z: http://public.econ.duke.edu/~boller/Published_Papers/restat_90.pdf

Bollerslev T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 31 (1986) 307-327, North-Holland

Brada J.: Teorie portfolia, Fakulta financí a účetnictví, VŠE v Praze, Ediční oddělení VŠE Praha, 1996, Praha, ISBN 90-7079-259-0

Cipra T.: Finanční ekonometrie, Ekopress, první vydání, 2008, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9

Cipra T.: Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou, Ekopress, druhé vydání, 2005, Praha, ISBN 80-86119-91-2

Diamantopoulos, K.; Vrontos, I. D.: A Student-t Full Factor Multivariate GARCH Model, *Computational Economics*, January 2010, v. 35, iss. 1, pp. 63-83

Dupač V., Hušková M.: Pravděpodobnost a matematická statistika, UK v Praze, Nakladatelství Karolinum, 4. dotisk prvního vydání, 2009, Praha, ISBN 978-80-246-0009-3

Dupáčová J.: Markowitzův model optimální volby portfolia. Předpoklady, data, alternativy, [cit. 12.10.2012], Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dupacova/downloads/Markowitz.pdf>

Dupáčová J., Hurt J., Štěpán J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publisher, 2002, Dordrecht, ISBN 1-4020-0840-6

Dupáčová J., Lachout P.: Úvod do optimalizace, Matfyzpress, první vydání, 2011, Praha, ISBN 978-80-7378-176-7

Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N.: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, John Wiley & Sons, Inc, šesté vydání, 2003, Hoboken, ISBN 0-471-23854-6

Engle R.: Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models, Forthcoming Journal of Business and Economic Statistics, 2002, [cit. 18.4.2012], Dostupné z:
<http://faculty.chicagobooth.edu/jeffrey.russell/teaching/finecon/readings/dccfinal.pdf>

Engle R.: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol.50, No.4 (Jul.1982), pp. 987 - 1007

Engle F., Sheppard K.: Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, NBER Working Paper No. 8554, 2001

European Central Bank (on-line), <http://www.ecb.int/home/html/index.en.html>, Annual report 2012, [cit. 23.7.2013],
Dostupné z: <http://www.ecb.int/pub/pdf/annrep/ar2012en.pdf>

Fabozzi F. J., Focardi S. M., Kolm P. N.: Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration, John Wiley & Sons, Inc, 2006, Hoboken, ISBN 0-471-69900-4

Flidr D.: Alternativní metody odhadu optimálního zajišťovacího poměru a jeho aplikace při řízení kurzového rizika, bakalářská práce, Fakulta financí a účetnictví, Katedra měnové teorie a politiky, Studijní obor: Finance, VŠE v Praze, rok obhajoby 2012

Focardi S. M., Fabozzi F. J.: The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management, John Wiley & Sons, Inc, 2004, Hoboken, Wiley finance series. The Frank J. Fabozzi series, ISBN 0-471-46599-2

Gelman A., Carlin J. B., Stern H. S., Rubin D. B.: Bayesian Data Analysis, Chapman & Hall, 1995, London, Chapman & Hall texts in statistical science series., ISBN 0-412-03991-5

Giri N. C.: Multivariate Statistical Inference, Academic Press, 1977, New York, Probability and mathematical statistics., ISBN 0-12-285650-3

Hafner C. M., Franses P. H.: A Generalized Dynamic Conditional Correlation Model: Simulation and Application to Many Assets, Econometric Reviews, November-December 2009, v. 28, iss. 6, pp. 612-31

Hamala M.: Nelineárne programovanie, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatury, druhé vydání, 1976, Bratislava, Matematické metódy v ekonomike.

Hanzák T., Mikoška M.: Markowitzův model, zápočtová úloha, Optimalizace II s aplikací financích (EKN004), LS 2005/06, MFF UK, obor Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie, [cit. 12.2.2013], Dostupné z: <http://www.quantitative.cz/file/53/markowitz-model-tomas-hanzak-marek-mikoska-2006-in-czech.pdf>

Hebák P., Hustopecký J., Jarošová E., Pecáková I.: Vícerozměrné statistické metody (1), Informatorium, druhé přepracované vydání, 2007, Praha, ISBN 978-80-7333-056-9

Huang Y.: Some Properties for A Portfolio Optimization Model, Mathematica Aeterna, Vol. 2, 2012, no. 7, 589 – 591

Hurt J.: Výpočetní prostředky finanční a pojistné matematiky LS 2012/2013, přednášky předmětu NMF308, MFF UK v Praze, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~hurt/VPFPM2013.nb>

Hurt J.: Výpočetní prostředky finanční a pojistné matematiky LS 2011/2012, přednášky předmětu NFAP007, MFF UK v Praze, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~hurt/VPFPM2012.nb>

Hušková, M.: Bayesovské metody, UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, SPN Praha, první vydání, 1985, Praha

Kariya T.: Quantitative Methods for Portfolio Analysis, MTV Model Approach, Kluwer Academic Publisher, 1993, Dordrecht, Theory and decision library. Series B, Mathematical and statistical methods; Vol. 23., ISBN 0-7923-2254-1

Lachout P.: Matematické programování, pracovní text k přednášce „EKN012 Optimalizace I“, MFF UK, 2011, [cit. 24.7.2013], Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/Optima1/111016-MP_skripta.pdf

Lin Mei-Chen, Chou Pin-Huang, The Pitfall of Using Sharpe Ratio, Finance Letters, 2003, 1,84-89, ISSN 1740-6242, [cit. 24.7.2013], Dostupné z: <http://www.mgt.ncu.edu.tw/~chou/sharpe.pdf>

Malá I.: Vybrané kapitoly z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, Vysoká škola ekonomická v Praze, Nakladatelství Oeconomica, 2009, Praha, ISBN: 978-80-245-1613-4

Markowitz Harry M.: Portfolio selection: efficient diversification of investments, Blackwell, druhé vydání, 1995, Cambridge, ISBN 1-55786-108-0

Markowitz H.: Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol.7, No.1, (Mar.1952), pp.77-91

Maštalíř J.: Struktura a vlastnosti modelu GARCH(1,1), bakalářská práce, Fakulta financí a účetnictví, Katedra měnové teorie a politiky, Studijní obor: Finance, VŠE v Praze, rok obhajoby 2009

Merton R. C.: An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 7, No.4 (Sep., 1972), 1851-1872

Microsoft Excel 2010

Minović J. Z.: Modeling Multivariate Volatility Processes: Theory and Evidence, Theoretical and Applied Economics, 2009, vol. 05 (534), issue 05 (534), pages 21-44, [cit. 20.10.2012], Dostupné z: <http://store.ectap.ro/articole/385.pdf>

Mitra S., Ji T.: Risk Measures in Quantitative Finance, International Journal of Business Continuity and risk Management, Vol. 1, Number 2/2010, str. 125-135, DOI: 10.1504/IJBCRM.2010.033634

Nezvalová H.: Bayesovské metody analýzy dat, diplomová práce, Masarykova Univerzita, Přírodovědecká fakulta, Studijní program: Aplikovaná matematika, Studijní obor: Finanční matematika, Brno, 2010

Orskaug E.: Multivariate DCC-GARCH Model -With Various Error Distributions, Norsk Regnesentral, SAMBA/19/09, 2009

Patria Online a.s., Patria Plus

Prášková Z., Lachout P.: Základy náhodných procesů, UK v Praze, Nakladatelství Karolinum, 2. dotisk prvního vydání, 2005, Praha, ISBN 80-7184-688-0

Rachev S. T., John S. J. H., Bagasheva B. S., Fabozzi F. J.: Bayesian Methods in Finance, John Wiley & Sons, Inc, 2008, Hoboken, The Frank J. Fabozzi series., ISBN 978-0-471-92083-0

Sharpe W. F., Alexander G. J.: Investice, Victoria Publishing, čtvrté vydání, 1994, Praha, ISBN 80-85605-47-3

Silvennoinen A., Teräsvirta T.: Multivariate GARCH models, CREATES Research Paper 2008-6, [cit. 22.10.2012], Dostupné z: ftp://ftp.econ.au.dk/creates/rp/08/rp08_06.pdf

Steinbach M. C.: Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis, SIAM Review, Vol. 43, No. I, pp. 31-85

Steiner A.: Annualized Volatility (February 18, 2012), [cit. 24.7.2013], Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2007620>

Štolc Z.: Finanční optimalizace, diplomová práce, Fakulta informatiky a statistiky, Hlavní specializace: ekonometrie a operační výzkum, VŠE v Praze, 2010

Thomson Reuters, Reuters 3000 Xtra

Veselá J.: Investování na kapitálových trzích, ASPI, 2007, Praha, ISBN 978-80-7357-297-6

Wiener Börse.at (on-line), <http://www.wienerborse.at/>, Index values, [cit. 18.6.2013 17:33], Dostupné z: <http://en.indices.cc/indices/details/atx/composition/>

Wolfram Mathematica 9.0.1.0. Student Edition

Zmeškal Z. a kol.: Finanční modely, Ekopress, druhé vydání, 2004, Praha, ISBN 80-86119-87-4

Seznam obrázků

Obr. 1. Množina přípustných portfolií	14
Obr. 2. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = 1$	16
Obr. 3. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = -1$	17
Obr. 4. Portfolio aktiv X, Y, $\rho_{XY} = 0$	18
Obr. 5. Konkávnost efektivní množiny portfolií	21
Obr. 6. CML a Markowitzova efektivní hranice	30
Obr. 7. Komparace efektivních hranicí portfolií	57
Obr. 8. Cenový vývoj indexu ATX 2.1.2007 - 2.1.2013	59
Obr. 9. Cenový vývoj zkoumaných akciových titulů ATX 2.1.2007 - 2.1.2013	60
Obr. 10. Vývoj měsíčních výnosností zkoumaných akciových titulů ATX 2.1.2007 - 2.1.2013	63-65
Obr. 11. Cenový vývoj portfolia ATX 2.1.2004 - 28.12.2006	71
Obr. 12. GARCH(1,1) zkoumaných akciových titulů ATX 2.1.2007 - 2.1.2013	74-76
Obr. 13. Vývoj portfolia – Výběrová metoda konstrukce estimátorů	84
Obr. 14. Vývoj portfolia – Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty	84
Obr. 15. Vývoj portfolia – Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty	85
Obr. 16. Vývoj portfolia – Modelování volatility pomocí DCC GARCH	85
Obr. 17. Souhrnný vývoj portfolií	86
Obr. 18. Cenový vývoj indexu ATX 3.1.2011 – 2.1.2013	86

Seznam tabulek

Tab. 1. Struktura indexu ATX	58-59
Tab. 2. Statistická data zkoumaných akciových titulů ATX	60
Tab. 3. Vektor Euribor 1M	62
Tab. 4.1. Vektory vah portfolií – Výběrová metoda konstrukce estimátorů	66
Tab. 4.2. Vektory vah portfolií – Výběrová metoda konstrukce estimátorů	66
Tab. 4.3. Vektory vah portfolií – Výběrová metoda konstrukce estimátorů	67
Tab. 5.1. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty	68
Tab. 5.2. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty	68
Tab. 5.3. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty	69
Tab. 6.1. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty	72
Tab. 6.2. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty	72
Tab. 6.3. Vektory vah portfolií – Bayesův přístup s použitím konjugované hustoty	73
Tab. 7.1. Vektory vah portfolií – Modelování volatility pomocí DCC GARCH	78
Tab. 7.2. Vektory vah portfolií – Modelování volatility pomocí DCC GARCH	78

Tab. 7.3. Vektory vah portfolií – Modelování volatility pomocí DCC GARCH	79
Tab. 8. Výsledky rebalancí - Výběrová metoda konstrukce estimátorů	80
Tab. 9. Výsledky rebalancí - Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty	81
Tab. 10. Výsledky rebalancí - Bayesův přístup s použitím Jeffreysovi hustoty	82
Tab. 11. Výsledky rebalancí – Modelování volatility pomocí DCC GARCH	83

Seznam použitých zkratek

ANDRITZ	ANDRITZ AG (akciový titul)
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
ATX	Austrian Traded Index
BEKK	Model Baba, Engle, Kraft, Kroner (1995)
CA IMMOBILIEN	CA IMMOBILIEN ANLAGEN AG (akciový titul)
CCC GARCH	Constant Conditional Correlations GARCH
CML	Capital Market Line
CONWERT IMMOBILIEN	CONWERT IMMOBILIEN INVEST SE (akciový titul)
DCC GARCH	Dynamic Conditional Correlations GARCH
DVEC	Diagonal VEC
ERSTE GROUP	ERSTE GROUP BANK AG (akciový titul)
EURIBOR 1M	Euro Interbank Offered Rate (měsíční splatnost)
EVN	EVN AG (akciový titul)
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
IMMOFINANZ	IMMOFINANZ AG (akciový titul)
MAYR-MELNHOF	MAYR-MELNHOF KARTON AG (akciový titul)
M-GARCH	Multivariate GARCH
OMV	OMV AG (akciový titul)
RHI	RHI AG (akciový titul)
SCHOELLER-BLECKMANN	SCHOELLER-BLECKMANN OILFIELD EQUIPMENT AG (akciový titul)
TELEKOM	TELEKOM AUSTRIA AG (akciový titul)
VEC	Model Bollerslev, Engle, Wooldridge (1998)
VERBUND	VERBUND AG KAT. A (akciový titul)
VIG	VIENNA INSURANCE GROUP AG (akciový titul)
VOESTALPINE	VOESTALPINE AG (akciový titul)
WIENERBERGER	WIENERBERGER AG (akciový titul)

Přílohy

Příloha č. 1

Příloha č. 1 diplomové práce se nachází na přiloženém CD, dokument s názvem „Estimatory.nb“