Posudek vedoucího diplomové práce Bc. Michala Kozáka
Bifurkace v matematických modelech v biologii

Práce je věnována globálním vlastnostem bifurkačních větví stacionárních řešení systému dvou parabolických rovnic reakce-difúze vykazujících Turingovu nestabilitu řízenou difúzí (diffusion-driven instability). V první kapitole jsou odvozeny známé předpoklady, zaručující tento efekt, tj. stabilitu základního prostorově konstantního stacionárního řešení jakožto řešení systému bez difúze a nestabilitu tohoto řešení pro koeficienty difúze d_1, d_2 z jisté podmnožiny (oblast nestability) kladného kvadrantu v $\mathbb{R}^2$. Ve druhé kapitole se na základě známé obecné bifurkační věty Rabinowitzova typu dokazuje existence globálních bifurkačních větví bifurkujících z kritických bodů násobnosti 1 a v případě prostorové dimenze 1 i z kritických bodů násobnosti 2. Ve třetí kapitole se v případě prostorové dimenze 1 ukazuje nekompaktnost těchto bifurkačních větví. Všechny základní myšlenky jsou převzaty z časopisecké literatury, ale uvažují se slabá řešení, zatímco ve výchozích článcích se pracuje s řešeními klasickými. Navíc bifurkačním parametrem je všude d_1 při pevném $d_2 = d_2^0$, zatímco ve výchozích článcích je bifurkačním parametrem d_2 při pevném $d_1 = d_1^0$. Čtvrtá kapitola je věnována speciálnímu případu Thomasova modelu. Dokazuje se regularita slabých řešení a s její pomocí se odvozují apriorní odhady řešení. Ukazuje se, že bifurkační větve nemohou obsahovat body s velkými parametry d_1. V závěru práce se ze zmíněných výsledků odvozuje, že v případě Thomasova modelu a prostorové dimenze 1 pro každou dvojici parametrů d_1, d_2 ležící v oblasti nestability existuje alespoň jedno stacionární prostorově nekonstantní řešení. Podobný výsledek je znám z literatury pro model Lengyel-Epsteinův.

Téma práce je značně náročné, bylo vybráno pro studenta, u něhož jsem předpokládal v budoucnu zájem o vědeckou práci a který se velice aktivně projevoval na mezioborovém semináři, s nímž problematika souvisí. Bylo nutno použít základní znalosti nelineární funkcionální analýzy, základy teorie bifurkací, slabých řešení parciálních diferenciálních rovnic a jejich regularity. K průběhu práce mám jisté výhrady, seriozní snahu o sepsání textu jsem viděl teprve velice pozdě. Výsledný text považuji celkem za pěkný, i když v něm dosud přežívají nepřesnosti a formulační chyby. Např. v definici množiny S na str. 17 by měl být uzávěr v $\mathbb{R}^+ \times [W^{1,2}]^2$, přičemž $\mathbb{R}^+$ by měla být množina kladných reálných čísel (nikoli nezáporných, jak je uvedeno v seznamu značení). Při současné definici S a $\mathbb{R}^+$ není jasné, proč je $\mu \neq 0$ v důkaze tvrzení 3.1 a proč $[0, U] \notin S^0$ v důkaze tvrzení 3.2(ii). Na str. 35 bych považoval za vhodné přesnější vysvětlení, proč (3.4) vede ke sporu s kompaktností množiny S^0.

Výsledky práce jsou v jistém smyslu původní, i když jsou modifikací výsledků známých. Podle mého názoru by autor nyní byl schopen výsledek týkající se Thomasova modelu uvedený v závěru rozšířit na jistou obecnější třídu modelů tak, že by byl publikovatelný.

Předložená práce splňuje požadavky na diplomové práce kladené. Po úspěšné obhajobě navrhuji hodnocení velmi dobře.

V Praze 2. 9. 2013 prof. RNDr. Milan Kučera, DrSc.