Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martin Michálek

Analýza disipativních rovnic v neomezených oblastech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2013

Chtěl bych zde srdečně poděkovat vedoucímu mé diplomové práce, docentu Daliboru Pražákovi, za vlídný přístup, podnětné připomínky a nemalou dávku času, kterou mi věnoval.

Poděkování též patří mým rodičům a Katce za veškerou podporu a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne ....

Název práce: Analýza disipativních rovnic v neomezených oblastech

Autor: Martin Michálek

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., katedra matematické analýzy

Abstrakt: V první části práce jsou uvedeny a zkoumány prostory funkcí, jež jsou vhodné pro analýzu parciálních diferenciálních rovnic v neomezených oblastech. Výsledky jsou poté aplikovány v druhé části na semilineární vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^d$ s nelineárním zdrojovým členem a nelineárním tlumením. Pro zdrojový člen předpokládáme omezenost polynomem s podkritickým růstem. Člen tlumení je striktně monotónní s polynomiálním růstem. Existence časově neomezených řešení je dokázána použitím konečné rychlosti šíření. Za dodatečných předpokladů na člen tlumení je odvozena disipativita v lokálně uniformních prostorech a existence lokálně kompaktního atraktoru.

Klíčová slova: Prostory s váhovou funkcí, Lokálně uniformní prostory, Semilineární vlnová rovnice s tlumením, Lokálně kompaktní atraktor

Title: Analysis of dissipative equations in unbounded domains

Author: Martin Michálek

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In the first part of this thesis, suitable function spaces for analysis of partial differential equations in unbounded domains are introduced and studied. The results are then applied in the second part on semilinear wave equation in $\mathbb{R}^d$ with nonlinear source term and nonlinear damping. The source term is supposed to be bounded by a polynomial function with a subcritical growth. The damping term is strictly monotone and satisfying a polynomial-like growth condition. Global existence is proved using finite speed of propagation. Dissipativity in locally uniform spaces and the existence of a locally compact attractor are then obtained after additional conditions imposed on the damping term.

Keywords: Weighted spaces, Locally uniform spaces, Semilinear damped wave equation, Locally compact attractor

Obsah

1. Úvod

V průběhu posledních padesáti let se do značné míry rozšířily znalosti v oblasti disipativních evolučních rovnic.[1] Řešení těchto rovnic (ve vhodném smyslu) jsou definována globálně v časové proměnné (tedy pro všechny časy z intervalu $(0, \infty)$) a je vhodné na ně nahlížet jako na vývoj fázového prostoru v čase. V tomto kontextu se zkoumají asymptotické vlastnosti řešení pro velké časy, přičemž si můžeme klást (nejen) následující otázky:

- Jakým způsobem řešení „měřit“? Přesněji - jaký prostor zvolit jako fázový?
- Existují řešení pro všechny časy?
- Jsou řešení pro velké časy v nějakém smyslu omezena?
- Jaké je limitní chování řešení?

Pro disipativní třídy evolučních rovnic (nejčastěji pro rovnice parabolické, vlnové s tlumením, Navier-Stokesovy) byly tyto otázky zodpovězeny důkladně v případě rovnic na omezené oblasti. Za fázový prostor jsou v tomto případě nejčastěji brány podprostory Sobolevových prostorů. Trajektorie řešení jsou v těchto prostorech omezeny a velmi často limitně přitahovány ke kompaktním množinám konečné dimenze (atraktorům). Pro tyto výsledky můžeme čtenáře odkázat například na monografii [BV92].

Při přechodu na neomezenou oblast vyvstávají určité nepříjemnosti. Mezi nejpodstatnější patří absence kompaktních vnoření, jež jsou při konstrukci atraktoru klíčovým nástrojem. Funkce z prostoru $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ jsou navíc „daleko“ od počátku „malé“. Tím se třída možných řešení ochuzuje o periodická (případně skoroperiodická) řešení vzhledem k prostorovým proměnným.

Je tudíž příhodné na neomezených oblastech pracovat s jinými prostory funkcí. Dosud se osvědčila volba „lokálně uniformních“ prostorů (definovaných níže), jež začali používat A.V. Babin and M. I. Vishik (viz reference v [MZ08], Section 5). Jde o prostory stejně lokálně integrovatelných funkcí (přesnou definici uvedeme v Kapitole 2). Následující odkazy jsou na články, v nichž autoři využívají stejné prostory funkcí. V případě parabolické rovnice na neomezené oblasti se jedná o články - [MS95], [CD04], [Zel03] a [GPS10]. Pro vlnovou rovnici můžeme uvést články [Fei96] a [Zel01]. Další odkazy (i na další typy disipativních rovnic na neomezené oblasti) pak může čtenář nalézt v [MZ08], Section 5.

Cílem práce je shrnout základní vlastnosti speciálních prostorů funkcí a demonstrovat jejich aplikaci na analýzu vlnové rovnice.

Pro pohodlí čtenáře zde uvedeme členění práce:

- Kapitola 2 obsahuje základní vlastnosti již zmíněných speciálních prostorů funkcí, neboť v odborné literatuře k tématu diferenciálních rovnic na neomezené množině nebývají tyto vlastnosti zdůrazňovány nebo dokazovány. Na závěr kapitoly může čtenář ve formě poznámek nalézt stručný přehled

[1] Matematickou definici disipativity si představíme v Kapitole 7. Z fyzikálního pohledu lze disipativitu chápat jako ztrátu „použitelné“ formy energie - k níž dochází například při přeměně kinetické energie na teplo pomocí tření. Tento pojem se prvně objevuje v díle lorda Kelvina.

důležitých aplikací speciálních prostorů funkcí. Autor v této části čerpal z článků [CD04], [Fei96], [GPS10], [MS95], [Zel03] a [Zel01].

- Kapitoly 3, 4, 5 a 6 zahrnují klíčovou část diplomové práce - analýzu vlnové rovnice s nelineárním zdrojovým členem a s nelineárním členem tlumení. Tato část navazuje na články [Fei96] a [Zel01], ve kterých je zkoumána rovnice s lineárním tlumením. Existence a jednoznačnost řešení je zobecněna na rovnice s polynomiálním omezením na tlumení libovolného řádu počínaje lineárním. Kapitolu 5 rozšiřuje diskuze shrnující vlastnosti řešení na neomezené oblasti v závislosti na volbě fázového prostoru. Důkaz existence absorbující množiny ve fázovém prostoru uniformně lokálních funkcí provedeme pro člen tlumení omezený lineárním růstem, a to i zdola. Existenci lokálně kompaktního atraktoru ukážeme pro globálně lipschitzovské tlumení, jehož derivace je kladná a odražená od nuly (přesné formulace čtenář nalezne v uvedených kapitolách). Autorovy není známo, zda jsou tyto restriktivní podmínky k důkazu existence atraktoru nutné - v Kapitole 10 může čtenář nalézt souhrn komplikací, jež se vyskytují v případě obecnějšího členu tlumení v případě rovnice na neomezené oblasti.

- V Kapitole 7 jsou pro úplnost uvedeny základní pojmy z teorie dynamických systémů společně se zavedením pojmu lokálně kompaktního atraktoru.

- Kapitola 8 poskytuje doplňující znalosti o Sobolevových a Bochnerových prostorech, které nebývají v klasické literatuře zmiňovány. Tamtéž jsou uvedena důležitá technická lemmata používána při zkoumání na vlnové rovnice.

- Kapitola 9 zahrnuje důležitá tvrzení širšího tematického okruhu, jež opět patří k pomocným nástrojům pro předchozí části práce.

Zdůrazněme, že Kapitoly 8 a 9 slouží jako souhrn pojmů a dodatkových tvrzení pro Části I a II, a proto nebývají řazeny do hlubších kontextů a souvislejších textů. V závěru práce je uveden souhrn důležitého značení společně se symboly, které jsou natolik ustálené, že jejich definice není v textu zdůrazněna.

Část I

Prostory funkcí a příklady použití

2. Speciální prostory funkcí

V této kapitole uvedeme stručný přehled prostorů funkcí, které jsou vhodné k analýze rovnic na neomezených oblastech. Zmíníme vlastnosti, jež odpovídají vlastnostem klasických Sobolevových prostorů, a zdůrazníme ty, ve kterých se tyto prostory liší. Zároveň uvedeme, jaké důsledky pro aplikace mohou zmíněné rozdíly přinášet.

Úmluva. Prostory uvedené v této kapitole uvažujeme nad integrovatelnými funkcemi na celém $\mathbb{R}^d$. Proto ve značení těchto prostorů nebudeme většinou tuto oblast zdůrazňovat.[1]

2.1 Prostory s váhovou funkcí

Pro $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ definujme

$$\phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x) = e^{-\sqrt{1+\varepsilon^2|x-\bar{x}|^2}} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^d.$$

Tuto funkci budeme pro naše účely nazývat *váhovou funkcí* nebo konkrétněji *váhovou funkcí se středem* $\bar{x}$ *a mírou poklesu* ε v případě, že by mohlo dojít k nejednoznačnostem.

Pro libovolné $\varepsilon > 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ a $k \in \mathbb{N}$ je funkce $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ třídy $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Zároveň pro každý multiindex α existuje kladné číslo C_α splňující

$$|D^\alpha \phi_{\varepsilon,\bar{x}}| \leq C_\alpha \varepsilon^{|\alpha|} \phi_{\varepsilon,\bar{x}}, \tag{2.1}$$

což nahlédneme derivováním reálné funkce $t \mapsto e^{-\sqrt{1+t^2}}$.

2.1.1 Zavedení a základní vlastnosti

Pro $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ označme $\mu_{\varepsilon,\bar{x}}$ míru $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x$, neboli míru na σ–algebře $\mathfrak{M}$ (lebesgueovsky měřitelných podmnožin $\mathbb{R}^d$) danou předpisem

$$\mu_{\varepsilon,\bar{x}}(E) = \int_E \phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } E \in \mathfrak{M}.$$

Značíme-li λ d–rozměrnou Lebesgueovu míru, pak $\mu_{\varepsilon,\bar{x}} \ll \lambda$ a $\lambda \ll \mu_{\varepsilon,\bar{x}}$, neboli množiny nulové míry se shodují, takže můžeme používat termín „skoro všude“ místo „$\mu_{\varepsilon,\bar{x}}$–skoro všude“.

Klasickým způsobem zaveďme prostory $L^p(\mu_{\varepsilon,\bar{x}})$ pro $p \in [1,\infty]$. Místo $L^p(\mu_{\varepsilon,\bar{x}})$ budeme používat kratší značení $L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$. Z teorie míry je známo, že $L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$ tvoří Banachův prostor (pro $p = 2$ dokonce Hilbertův s kanonickým skalárním součinem, jenž značíme $(\cdot,\cdot)_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}}$). Navíc pro $p \in [1,\infty)$ můžeme duální prostor k $L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$ klasickým způsobem ztotožnit s prostorem $L^q_{\varepsilon,\bar{x}}$ pro $q = p/(p-1)$, případně $q = \infty$.

Základní důležité vlastnosti prostorů $L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$ odvodíme díky jejich blízké souvislosti s prostory $L^p(\mathbb{R}^d)$, jež je předmětem následujícího zřejmého lemmatu.

[1] V článcích [Zel01] a [Zel03] autor místo celého prostoru $\mathbb{R}^d$ pracuje s oblastmi, jež jsou stejnoměrně $\mathcal{C}^m$–regulární (viz také [AF03] – „The Uniform $\mathcal{C}^m$–Regularity Condition“, §4.10) pro dostatečně velké přirozené m. Na hranici oblasti se pro úlohy následně předpokládá homogenní Dirichletova okrajová podmínka. Všechny důležité rozdíly mezi omezenými a neomezenými oblastmi jsou však již znatelné v případě celého prostoru.

Lemma 2.1. *Nechť $p \in [1, \infty]$, ψ je kladná měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$ a $\mu = \psi \, \mathrm{d}x$. Potom zobrazení $T \colon L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mu)$ definované předpisem*

$$T(f) = f \, \psi^{-1/p}$$

je izometrický izomorfismus $L^p(\mathbb{R}^d)$ na $L^p(\mu)$.

Přehlédneme-li navíc k vlastnostem, jež se izomorfismem zachovávají (separabilita a reflexivita), získáme:

Důsledek 2.2. *Prostory $L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$ jsou pro $p \in [1, \infty)$ separabilní a pro $p \in (1, \infty)$ reflexivní.*

Značení. Uvažujme $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty]$. Pro lokálně integrovatelné funkce $u \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ s lokálně integrovatelnými distributivními derivacemi do řádu k (včetně) definujme funkcionály

$$\|u\|^p_{W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p_{\varepsilon,\bar{x}}} \quad \text{pro } p < \infty,$$
$$\|u\|^\infty_{W^{k,\infty}_{\varepsilon,\bar{x}}} = \max_{|\alpha| \le k} \{\|D^\alpha u\|_{L^\infty_{\varepsilon,\bar{x}}}\}.$$

Dále značme $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ prostor výše uvedených funkcí u, pro něž

$$\|u\|_{W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}} < \infty.$$

Uvedený funkcionál indukuje normu na prostoru $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ (po standardním ztotožnění funkcí rovných skoro všude). Takto zavedený normovaný vektorový prostor budeme nadále značit pouze $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$. Jak uvidíme v následující užitečné analogii Lemmatu 2.1, po topologické stránce si prostory $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ a $W^{1,p}_{\varepsilon,\bar{x}}(\mathbb{R}^d)$ odpovídají.

Lemma 2.3. *Buďte $p \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť $\psi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ je kladná funkce splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ a multiindexy α, $|\alpha| \le k$, nerovnost*

$$|D^\alpha \psi(x)| \le c \, \psi(x)$$

s kladnou reálnou konstantou c. Označme si $\mu = \psi \, \mathrm{d}x$. Potom zobrazení

$$T \colon W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \to W^{k,p}(\mu)$$

definované předpisem

$$T(f) = f \, \psi^{-1/p}$$

je izomorfismus $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ na $W^{k,p}(\mu)$.[2]

Důkaz. Pro $k = 1$ berme $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ a počítejme

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla \left(f \, \psi^{-1/p}\right)\right\|_{L^p(\mu)} &= \left\|\nabla f \, \psi^{-1/p} - (1/p) \, f \, \psi^{-(1+p)/p} \, \nabla \psi\right\|_{L^p(\mu)} \\
&\le \left\|\nabla f \, \psi^{-1/p}\right\|_{L^p(\mu)} + (c/p) \left\|f \, \psi^{-1/p}\right\|_{L^p(\mu)} \\
&= \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + (c/p) \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\le 2 \max\{1, \, c/p\} \, \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

[2]Prostor $W^{k,p}(\mu)$ definujeme analogicky jako $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ pro míru μ.

Z uvedené nerovnosti plyne omezenost operátoru T. Předpisem $\tilde{T}g \mapsto \psi^{1/p}\, g$ zaveďme operátor $\tilde{T}\colon W^{k,p}(\mu) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Zcela analogicky k předchozí nerovnosti získáme

$$\left\|\nabla\left(g\,\psi^{1/p}\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 2\max\{1,\, c/p\}\, \|g\|_{W^{1,p}(\mu)}$$

pro libovolné $g \in W^{1,p}(\mu)$, tudíž operátor $\tilde{T}$ je dobře definovaný a spojitý. Jelikož $T \circ \tilde{T} = \mathrm{Id}_{W^{k,p}(\mu)}$ a $\tilde{T} \circ T = \mathrm{Id}_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)}$, stačí si rozmyslet injektivitu operátoru T. Ta je ovšem zřejmá.

Pro případ $k > 1$ můžeme uplatnit indukci, neboť

$$\|u\|^p_{W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}} = \|u\|^p_{W^{k-2,p}_{\varepsilon,\bar{x}}} + \sum_{|\alpha|=k-1} \|D^\alpha u\|^p_{W^{1,p}_{\varepsilon,\bar{x}}}.$$

□

Důsledek 2.4. *Prostory $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ jsou úplné, separabilní pro $p \in [1,\infty)$ a reflexivní pro $p \in (1,\infty)$.*

Dodejme, že pro $p = 2$ jsou příslušné prostory Hilbertovy se skalárním součinem

$$(u,v)_{W^{k,2}_{\varepsilon,\bar{x}}} = \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}}\,.$$

2.1.2 Věty o vnoření a husté podmnožiny

Z omezenosti funkce $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ a jejích derivací plyne vnoření $W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$, přičemž prostor vpravo je vždy větší (obsahuje například konstantní funkce). Vzhledem k její integrovatelnosti platí $L^p_{\varepsilon,\bar{x}} \hookrightarrow L^q_{\varepsilon,\bar{x}}$ pro všechna $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Triviálně též $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}} \hookrightarrow L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$. Jak uvidíme v následujícím příkladu, koncový prostor předchozího vnoření není možné zlepšit.

Příklad 2.5. Nechť $p \in [1,\infty)$. Uvažujme funkci $\psi_a(x) = \phi_{\varepsilon,\bar{x}}^{-a/p}$, jež je exponenciálně rostoucí. Zřejmě platí nerovnost $|\nabla\psi_a| \leq c\psi_a$, tudíž pro $0 \leq a \leq 1$ patří funkce ψ_a do prostoru $W^{1,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$. Nicméně pro libovolné $q > p/a$ funkce ψ_a nenáleží do prostoru $L^q_{\varepsilon,\bar{x}}$.

Viděli jsme, že důležitou roli v předchozím příkladu hrála mocnina váhové funkce. Pokud změníme koncový prostor, jmenovitě uvážíme na něm váhu s vyšší mírou poklesu, získáme obdoby vět o vnoření.

Pozorování 2.6 (Věty o spojitém vnoření). Máme-li $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ spojitě vnořeno do $W^{m,q}(\mathbb{R}^d)$ $(k \geq m,\ q \geq p)$, můžeme zkonstruovat následující komutativní diagram:

$$\begin{array}{ccc} W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}} & \xrightarrow{\ \Phi\ } & W^{m,q}_{\varepsilon,\bar{x}} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi^{1/p}_{\varepsilon,\bar{x}}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \phi^{-1/q}_{\varepsilon,\bar{x}}} \\ W^{k,p} & \hookrightarrow & W^{m,q} \end{array}$$

Vidíme, že $\Phi(g) = g\,\phi_{\varepsilon,\bar{x}}^{(q-p)/(qp)}$ je spojité zobrazení. Pro $g \in W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}(\mathbb{R}^d)$ ovšem z definice prostorů s váhou:

$$\|\Phi(g)\|_{W^{m,q}_{\varepsilon,\bar{x}}} = \|g\|_{W^{m,q}_{\tilde{\varepsilon},\bar{x}}},$$

kde $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon q/p$. Odtud plyne vnoření $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}} \hookrightarrow W^{m,q}_{\tilde{\varepsilon},\bar{x}}$. Navíc nemůžeme, obdobně jako v Příkladu 2.5, při daných exponentech ε a $\tilde{\varepsilon}$ zvětšit exponent q u prostoru, do něhož zanořujeme.

Pozorování 2.7 (Věty o kompaktním vnoření). Navážeme-li na předchozí pozorování, můžeme si všimnout, že vnoření $W^{1,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ do $L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$ nemůže být kompaktní. To by totiž přímo implikovalo (dle diagramu) kompaktnosti vnoření $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ do $L^p(\mathbb{R}^d)$, které zřejmě neplatí.

Zvýšíme-li ovšem míru poklesu váhové funkce pro prostor, do něhož vnořujeme, mohou být výsledná vnoření kompaktní. Uvažujme například k, m, p a q jako v předchozím pozorování, pro něž je navíc vnoření $W^{k,p}(B(0,1)) \hookrightarrow W^{m,q}(B(0,1))$ kompaktní. Potom pro libovolné $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon q/p$ platí

$$W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{m,q}_{\tilde{\varepsilon},\bar{x}}.$$

Díky výběru k, m, q a p existuje dle Pozorování 2.6 konstanta K, pro kterou

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^q \, \phi_{\varepsilon q/p,\bar{x}} < K,$$

kdykoliv $\|u\|_{W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}} \leq 1$. Díky Hölderově nerovnosti (s dvojicí exponentů 1 a ∞) nalezneme pro libovolné $\delta > 0$ číslo $R > 0$, pro něž

$$\int_{B(0,R)^c} |u|^q \, \phi_{\tilde{\varepsilon},\bar{x}} < \delta$$

nezávisle na u z jednotkové koule $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$. Tím můžeme převést otázku kompaktnosti na omezenou množinu. Tam již snadno aplikujeme předpokládané kompaktní vnoření pro Sobolevovy prostory ke konstrukci konečné δ-sítě pro libovolné $\delta > 0$.

Lemma 2.8. *Nechť $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Potom množina hladkých funkcí s kompaktním nosičem je hustá v prostoru $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$.*

Důkaz. Pro odpovídající Sobolevovy prostory je tvrzení pravdivé. Díky hladkosti funkcí $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ je zobrazení T z Lemmatu 2.3 vzájemně jednoznačným zobrazením na množině hladkých funkcí s kompaktním nosičem. Nakonec zbývá připomenout, že spojitá zobrazení v topologických prostorech převádějí husté množiny na husté podmnožiny obrazu. □

2.1.3 Duální prostory

Při reprezentaci duálu k prostorům s váhovou funkcí můžeme postupovat obdobně jako v případě Sobolevových prostorů. Pomocí zobrazení $u \mapsto (D^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}$ můžeme izometricky izomorfně vnořit prostor $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ na uzavřený podprostor F součinu prostorů $L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$, který budeme stručně značit X. Dle Hahn-Banachovy věty jde každý prvek duálního prostoru k F rozšířit na prvek X^* se stejnou normou. S přihlédnutím k Rieszově větě o reprezentaci pro $\theta \in (W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}})^*$ existují funkce $f_\alpha \in L^q_{\varepsilon,\bar{x}}$, $q = p/(p-1)$ takové, že

$$\theta(u) \equiv \langle \theta, u \rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^d} f_\alpha \, D^\alpha u \, \phi_{\varepsilon,\bar{x}}. \tag{2.2}$$

Dle zmiňovaného důsledku Hahn-Banachovy věty je norma funkcionálu θ infimem norem $(f_\alpha)_{|\alpha|\le k}$ v součinu prostorů $L^q_{\varepsilon,\bar{x}}$, kde infimum bereme přes všechny $(f_\alpha)_{|\alpha|\le k}$, pro něž platí (2.2).

Můžeme postupovat i druhým způsobem a popsat duální prostor k $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ jako zúplnění vektorového prostoru $L^q_{\varepsilon,\bar{x}}$ vzhledem k normě

$$\|u\| = \sup_{\substack{v\in W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}},\\ \|v\|_{W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}}=1}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} u\, v\, \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \right|.$$

Zmíněná tvrzení jsou přímočarými analogiemi těch, jež jsou uvedena v [AF03] §3.7 – §3.14, a proto jejich důkaz zde vynecháme.

2.2 Lokálně uniformní prostory

2.2.1 Zavedení a základní vlastnosti

Značení. Nechť $p \in [1,\infty)$. Pro měřitelné funkce $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uvažujme funkcionál

$$\|u\|_{L^p_b} = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \|u\|_{L^p(B(y,1))},$$

kde $B(y,1)$ značí otevřenou kouli se středem v bodě y a jednotkovým poloměrem. Označme L^p_b prostor měřitelných funkcí[3] u splňujících $\|u\|_{L^p_b} < \infty$.

Do třídy funkcí L^p_b patří všechny esenciálně omezené funkce a zároveň periodické funkce splňující příslušnou podmínku integrovatelnosti.

Není těžké si rozmyslet, že $\|\cdot\|_{L^p_b}$ zavádí normou na L^p_b. Prostor $(L^p_b, \|\cdot\|_{L^p_b})$ je navíc úplný, což je důsledkem následujících dvou lemmat.

Lemma 2.9. *Nechť $\mathcal{T}$ je množina všech krychlí v $\mathbb{R}^d$ se středy v bodech s celočíselnými souřadnicemi a s hranou délky 1. Na L^p_b definujme normu*[4]

$$\|u\|_{p,\mathcal{T}} = \sup_{C\in\mathcal{T}} \|u\|_{L^p(C)}.$$

Potom $(L^p_b, \|\cdot\|_{p,\mathcal{T}})$ je Banachův prostor.

Důkaz. Očíslujme si krychle ze systému $\mathcal{T} = \{C_k : k \in \mathbb{N}\}$ a uvažujme cauchyovskou posloupnost $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dle definice normy je posloupnost restrikcí $\{u_n \restriction_{C_k}\}$ cauchyovská v úplném prostoru $L^p(C_k)$ (a to stejnoměrně vůči k); její limitu značme $\tilde{u}_k$. Nechť u_k je rozšíření funkce $\tilde{u}_k$ nulou na celé $\mathbb{R}^d$. Položme

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k.$$

Funkce u je dobře definovaná, měřitelná a navíc

$$\|u_n - u\|_{p,\mathcal{T}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_n - u\|_{L^p(C_k)} \to 0, \quad n\to\infty,$$

neboť konvergence na jednotlivých krychlích jsou stejnoměrné vůči k. □

[3] po ztotožnění funkcí rovných skoro všude

[4] systém $\mathcal{T}$ pokrývá $\mathbb{R}^d$ až na množinu nulové míry, proto nepůjde pouze o seminormu

Lemma 2.10. *Prostor* $(L^p_b, \|\cdot\|_{p,\mathcal{T}})$ *je izomorfní s* $(L^p_b, \|\cdot\|_{L^p_b})$.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z ekvivalence obou norem. Každou krychli z $\mathcal{T}$ můžeme pokrýt nějakou koulí s jednotkovým poloměrem. Naopak každou kouli s jednotkovým poloměrem pokryjeme (až na množinu nulové míry) 2^d krychlemi z $\mathcal{T}$, a tudíž

$$\|\cdot\|_{p,\mathcal{T}} \le \|\cdot\|_{L^p_b} \le 2^{d/p}\|\cdot\|_{p,\mathcal{T}}.$$

□

Značení. Nechť $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Značme $W^{k,p}_b$ funkce $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$ se slabými lokálně integrovatelnými derivacemi do stupně k (včetně), pro které

$$\|u\|^p_{W^{k,p}_b} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p_b} < \infty.$$

Funkcionál $\|\cdot\|_{W^{k,p}_b}$ zavádí normou na $W^{k,p}_b$. Neřekneme-li jinak, budeme na $W^{k,p}_b$ uvažovat právě tuto normu. Takto zavedené prostory budeme souhrnně nazývat *lokálně uniformními prostory.*

Lemma 2.11. *Nechť* $k \in \mathbb{N}$ *a* $p \in [1,\infty)$. *Potom je* $W^{k,p}_b$ *úplný prostor, který není separabilní ani reflexivní a pro* $p = 2$ *není izomorfní Hilbertovu prostoru.*

Důkaz. Obdobně jako v §2.1.3 můžeme $W^{k,p}_b$ vnořit izometricky izomorfně na podprostor $(L^p_b)^m$ (pro vhodně velké přirozené číslo m). Ukážeme uzavřenost tohoto podprostoru. Uvažujme u_n, u a $v \in L^p_b$ splňující

$$\|u_n - u\|_{L^p_b} \to 0 \qquad \text{a} \qquad \|D^\alpha u_n - v\|_{L^p_b} \to 0. \tag{2.3}$$

Nechť $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ je systém otevřených koulí o poloměru 1, který tvoří lokálně konečné pokrytí[5] množiny $\mathbb{R}^d$. K němu existuje příslušný rozklad jednotky tvaru $1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n$, kde ν_n jsou hladké funkce splňující $\mathrm{supp}(\nu_n) \subset B_n$. Dle (2.3) platí $D^\alpha u = v$, uvažujeme-li restrikce těchto funkcí na libovolné B_n. Totéž ukážeme i globálně. Pro $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ obdržíme

$$\int_{\mathbb{R}^d} v\,\psi = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n\right) v\,\psi = (-1)^\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_n} u\, D^\alpha(\nu_n\,\psi) = (-1)^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} u\, D^\alpha \psi,$$

protože $0 = D^\alpha(1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} D^\alpha \nu_n$.

Prostory $W^{k,p}_b$ nejsou separabilní ani reflexivní, neboť obsahují podprostor izomorfní s ℓ_∞. Mějme $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ otevřené jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$, jež jsou navzájem disjunktní i po zdvojnásobení poloměru. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ uvažujme hladkou funkci u_j s nosičem v B_j splňující $\|u_j\|_{W^{k,p}_b} = 1$. Zároveň můžeme chtít, aby u_j byla prostorovou translací u_1 pro libovolné $j \in \mathbb{N}$. Definujme zobrazení $T\colon \ell_\infty \to W^{k,p}_b$ předpisem

$$T\big((a_j)_{j\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{j=1}^\infty a_j\, u_j,$$

[5] průnik libovolného spočetného podsystému je prázdný

kde sumu bereme ve smyslu konvergence skoro všude. Zřejmě potom

$$\left\|T\big((a_j)_{j\in\mathbb{N}}\big)\right\|_{W_b^{k,p}} = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| \cdot \|u_j\|_{W_b^{k,p}} = \|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell_\infty},$$

tudíž T je dokonce izometrie.

Kdyby se na prostorech $W_b^{k,2}$ dal zavést skalární součin s normou ekvivalentní $\|\cdot\|_{W_b^{k,2}}$, byl by prostor $W_b^{k,2}$ nutně reflexivní, což je spor s předchozí částí důkazu.

□

2.2.2 Věty o vnoření a husté podmnožiny

Výběr množin tvaru koule pro lokální integraci umožňuje velmi snadno rozšířit platnost vět o vnoření ze Sobolevových prostorů. Vycházíme přitom z faktu, že konstanty pro lokální vnoření nezávisejí na výběru koule.

Pozorování 2.12 (Věty o vnoření). Platí-li $W^{k,p}(B) \hookrightarrow W^{m,q}(B)$ pro klasické Sobolevovy prostory na kouli B o poloměru 1, potom $W_b^{k,p} \hookrightarrow W_b^{m,q}$. Speciálně tedy $W_b^{1,2} \hookrightarrow L_b^{2d/(d-2)}$ pro $d > 2$. Stejně tak zůstávají zachována všechna vnoření do prostoru spojitých a spojitě hölderovských funkcí. Zřejmě ale žádné z těchto vnoření nemůže být kompaktní.

Jak jsme viděli výše, vlastnosti prostorů L_b^p jsou blízké vlastnostem Lebesgueových prostorů $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nejinak tomu je v otázce hustých podmnožin.

Značení. Nechť $z \in \mathbb{R}^d$. Označme τ_z operátor posunutí definovaný

$$\tau_z(u)(\cdot) = u(\cdot + z).$$

Položme

$$\widehat{L}_b^p = \left\{ u \in L_b^p\colon \lim_{|z|\to 0} \|u - \tau_z(u)\|_{L_b^p} = 0 \right\}$$

a uvažujme na $\widehat{L}_b^p$ normu $\|\cdot\|_{L_b^p}$. Analogicky k předchozím postupům zaveďme $\widehat{W}_b^{k,p}$.

Vcelku snadno se dá ukázat, že $\widehat{L}_b^p$ je uzavřeným podprostorem L_b^p. Je-li totiž $u_n \to u$ v L_b^p, $u_n \in \widehat{L}_b^p$, potom

$$\|\tau_z(u) - u\|_{L_b^p} \le \|\tau_z(u) - \tau_z(u_n)\|_{L_b^p} + \|\tau_z(u_n) - u_n\|_{L_b^p} + \|u_n - u\|_{L_b^p}.$$

První a poslední sčítanec konverguje k nule nezávisle na z. Prostřední sčítanec je možno libovolně zmenšit pro pevné n, pokud se $|z|$ blíží k 0. Z toho již snadno plyne $u \in \widehat{L}_b^p$.

Následující příklad ukazuje, že ne všechny funkce z L_b^p patří do $\widehat{L}_b^p$.

Příklad 2.13. Nechť $p \in [1, \infty)$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $B_n = B\left(2n\vec{e_1}, \frac{1}{n^{p/d}}\right)$, kde $\vec{e_1}$ je první vektor kanonické báze $\mathbb{R}^d$, a definujme funkci

$$u(x) = \frac{1}{|B(0,1)|} \sum_{n=1}^{\infty} n\, \chi_{B_n}(x).$$

Zřejmě $\|u\|_{L_b^p} = 1$. Pro libovolné $h > 0$ zároveň

$$\|u(\cdot) - u(\cdot + h\vec{e_1})\|_{L_b^p} = 1,$$

neboť můžeme nalézt n, pro něž

$$B\left(2n\vec{e_1}, \frac{1}{n^{p/d}}\right) \cap B\left((2n+h)\vec{e_1}, \frac{1}{n^{p/d}}\right) = \emptyset.$$

Pozorování 2.14. Nechť u je omezená funkce třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ s omezenými prvními derivacemi. Potom dle věty o střední hodnotě

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{B(y,1)} |u(x+z)-u(x)|^p \leq C|z|^p \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\nabla u(y)|^p, \tag{2.4}$$

tudíž $u \in \widehat{L}^p_b$. Hladké funkce s omezenými derivacemi tedy netvoří hustou podmnožinu L^p_b.

Poznámka. Prostor $\widehat{L}^p_b$ není separabilní ani reflexivní.[6] Na druhou stranu díky dodatečné podmínce (spojitosti vůči translaci) obsahuje hladké omezené funkce s omezenými derivacemi jako hustý podprostor. Důkaz tohoto tvrzení se dá vést přes zhlazování konvolucí, jež je k obdobnému účelu použito v článku [CD04], Part II, Lemma 3.

Lemma 2.15. *Označme $\mathcal{C}^\infty_b$ všechny hladké a omezené funkce na $\mathbb{R}^d$, jejichž derivace všech řádů jsou též omezené (ne nutně stejně omezené). Potom $\mathcal{C}^\infty_b$ je hustá v prostoru $\widehat{W}^{k,p}_b$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ a $p \in (1,\infty)$.*

2.3 Vzájemné vztahy zavedených prostorů

Začněme uvedením klíčového vztahu mezi výše definovanými prostory funkcí. Uveďme, že tvoří zcela zásadní roli v konstrukci disipativního odhadu v lokálně uniformních prostorech (viz Věta 6.3), a to nejen pro vlnovou rovnici.

Lemma 2.16. *Nechť $\varepsilon > 0$, $p \in [1,\infty)$ a $k \in \mathbb{N}_0$. Funkce u náleží pro všechna $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ do prostoru $W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ a splňuje*

$$\sup_{\bar{x}\in\mathbb{R}^d} \|u\|_{W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}} < \infty, \tag{2.5}$$

právě když $u \in W^{k,p}_b$. Navíc existují kladné konstanty C_1, C_2, pro něž platí

$$C_1\|u\|_{W^{k,p}_b} \leq \sup_{\bar{x}\in\mathbb{R}^d} \|u\|_{W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}} \leq C_2\|u\|_{W^{k,p}_b}. \tag{2.6}$$

Důkaz. Každá měřitelná funkce f splňuje

$$\int_{B(y,1)} |f|^p \leq e^\varepsilon \int_{B(y,1)} |f|^p \phi_{\varepsilon,y} \leq e^\varepsilon \|f\|^p_{L^p_{\varepsilon,y}},$$

pro všechna $y \in \mathbb{R}^d$. Platí-li (2.5) pro (slabě diferencovatelnou) funkci u, potom $u \in W^{k,p}_b$ a první nerovnost v (2.6) je zaručena.

[6] Z podobného důvodu jako L^p_b.

Pro $f \in L^p_b$, uvažujme $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jednotkové krychle jako v Lemmatu 2.9. Odhadujme

$$\|f\|^p_{L^p_{\varepsilon,\bar{x}}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{C_k} |f|^p \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \leq \|f\|^p_{L^p_b} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{y\in C_k} |\phi_{\varepsilon,\bar{x}}(y)| \leq e\|f\|^p_{L^p_b} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{y\in C_k} e^{-\varepsilon|y-\bar{x}|}. \tag{2.7}$$

Suma vpravo je konvergentní a omezená nezávisle na $\bar{x}$. Lze ji totiž vhodně přeuspořádat na $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $a_k \approx k^{d-1}e^{-\varepsilon k}$. Máme-li tedy $u \in W^{k,p}_b$, potom zřejmě $u \in W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$, platí druhá nerovnost v (2.6), a tudíž i nerovnost (2.5). □

Další lemma (jehož snadný důkaz lze nalézt například v [Zel01]) představuje užitečný nástroj nahrazující věty o spojitém vnoření, jež v prostorech s váhovými funkcemi neplatí v dostatečném rozsahu (jak jsme již viděli). Toto lemma následně budeme aplikovat v Lemmatu 2.18.

Lemma 2.17. *Nechť $p \in [1,\infty)$, $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$. Potom existují konstanty C_1 a C_2 takové, že*

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x)|u(x)|^p \,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x) \int_{B(x,1)} |u(y)|^p \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x)|u(x)|^p \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Lemma 2.18. *Uvažujme $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$. Nechť $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ splňuje pro všechna reálná r nerovnost $|f'(r)| \leq c(1+|r|^p)$, kde $c > 0$ a $p \leq 2/(d-2)$ (případně $p \in [1,\infty)$ pro $d < 3$). Potom pro u, $v \in W^{1,2}_b$ platí*

$$\|f(u)-f(v)\|_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \leq Q\left(\|u\|_{W^{1,2}_b}, \|v\|_{W^{1,2}_b}\right) \|u-v\|_{W^{1,2}_{\varepsilon,\bar{x}}},$$

kde Q je spojitá funkce rostoucí v obou složkách.

Důkaz. Mějme u, $v \in W^{1,2}_b$ a počítejme

$$f(u)-f(v) = \int_0^1 f'(su+(1-s)v)\,\mathrm{d}s\,(u-v). \tag{2.9}$$

Označme si $w_s = su + (1-s)v$ pro $s \in [0,1]$. Z vět o vnoření mezi lokálně uniformními prostory získáváme

$$\|w_s\|_{L^{2d/(d-2)}_b} \leq C_1 \left(\|u\|_{W^{1,2}_b} + \|v\|_{W^{1,2}_b}\right), \tag{2.10}$$

kde C_1 nezávisí na s, u ani v. Vzhledem k růstové podmínce na funkci f' odhadujme

$$\|f'(w_s)\|_{L^d_b} \leq C_2 \left\|1+|w_s|^{2/(d-2)}\right\|_{L^d_b} \leq C_3 \left(1 + \|w_s\|^{2/(d-2)}_{L^{2d/(d-2)}_b}\right). \tag{2.11}$$

Pro $l = \int_0^1 f'(su+(1-s)v)\,\mathrm{d}s$ shrnutím předchozích odhadů získáme

$$\|l\|_{L^d_b} \leq \sup_{s\in[0,1]} \|f'(w_s)\|_{L^d_b} \leq \tilde{Q}\left(\|u\|_{W^{1,2}_b}, \|v\|_{W^{1,2}_b}\right).$$

Použitím Lemmatu 2.17, rovnosti (2.9) a Hölderovy nerovnosti na Lebesgueových prostorech na kouli získáme

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |f(u)-f(v)|^2 \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x \le C_4 \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x) \int_{B(x,1)} |f(u(y))-f(v(y))|^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&\le C_4 \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x) \, \|l\|^2_{L^d(B(x,1))} \, \|u-v\|^2_{L^{2d/(d-2)}(B(x,1))} \\
&\le C_5 \|l\|^2_{L^d_b} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x) \, \|u-v\|^2_{W^{1,2}(B(x,1))} \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Aplikací druhé nerovnosti Lemmatu 2.17 obdržíme dokazovaný odhad. □

Obdobný sled nerovností jako v (2.7) (kde nesčítáme přes všechna $k \in \mathbb{N}$) vede přímočaře k důkazu následujícího tvrzení (viz také Pozorování 2.7).

Lemma 2.19. *Buď $\varepsilon > 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ a $\mathcal{B} \subseteq L^2_b$ omezená množina. Potom pro libovolné $\delta > 0$ existuje $R > 0$ takové, že platí*

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |u(x)|^2 \phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x) \,\mathrm{d}x < \delta$$

pro libovolné $u \in \mathcal{B}$.

Úmluva. V dalších kapitolách budeme argument váhové funkce vynechávat, budeme psát $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ místo $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}(x)$.

2.4 Výběr fázového prostoru pro rovnice na neomezené oblasti

Označme si $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ fázový prostor tvořený funkcemi z prostoru s váhovou funkcí $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$. Pro některé třídy rovnic je možné pro libovolné počáteční podmínky z $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ nalézt řešení se spojitými trajektoriemi v $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ (neboli z prostoru $\mathcal{C}([0,\infty);\Phi_{\varepsilon,\bar{x}})$). Mezi tyto třídy patří například lineární rovnice s omezenými koeficienty. Stačí využít Galerkinovu metodu pro energetické rozhraní dané $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ (jak totiž uvidíme v Kapitole 5, lze odvodit téměř identické apriorní odhady jako pro rovnici na omezené oblasti).[7] Další možností je volba nelinearit takových, aby apriorní odhady již zaručovaly potřebnou regularitu řešení (v případě níže zkoumané vlnové rovnice má tyto vlastnosti nelinearita g, a to díky dolnímu odhadu v (G_3). Obdobně v článku [GPS10] splňuje tento požadavek zdrojová nelinearita).

V případě obecnějších koeficientů nebo nelinearit nelze tento postup použít z důvodu nemožnosti vnoření prostoru $W^{1,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$ do „lepšího“ prostoru než je $L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$. Prostory s váhovou funkcí tedy tvoří spíše pomocné nástroje k získávání výsledků pro rovnice s daty z lokálně uniformních prostorů.

Shrňme ještě různé techniky, kterými lze odvodit existenci a vlastnosti řešení rovnic na neomezené oblasti. V článcích [GPS10], [Zel03] se pro existenci používá

[7] Není potom těžké si rozmyslet, že tímto způsobem můžeme odvozovat existenci řešení na třídě funkcí s vhodným exponenciálním růstem (nebo naopak poklesem, pokud místo váhové funkce $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ bereme $\phi^{-1}_{\varepsilon,\bar{x}}$). Vzhledem k větám o vnoření pro prostory s váhovou funkcí můžeme pro vhodná data nalézt klasická řešení.

limitní přechod v řešeních úlohy na omezené oblasti s nulovou okrajovou podmínkou (řešení jsou přitom dodefinována nulou vně omezené oblasti). V případě studie [CD04] byla k důkazu existence využita teorie analytických semigrup. K důkazu existence lokálně kompaktního atraktoru (přesná definice se nachází v Kapitole 7) se v [GPS10] osvědčila aplikace parabolické kompaktnosti ℓ–trajektorií. V článcích [Zel03] a [CD04] autoři existenci atraktoru odvozují na základě odhadů vyšší regularity, tudíž na zhlazovacích vlastnostech parabolické rovnice.

V případě hyperbolických rovnic (viz [Fei96], [Zel01] a kapitoly níže) se hojně využívá konečné rychlosti šíření při odvozování výsledků. Pro důkaz existence atraktoru je potom aplikována metoda rozdělení řešení na „kompaktní" a „malou" část jako v případě omezené oblasti.

Poznámka. V některých případech je použití prostorů s váhovou funkcí nejen pomocné, ale i primárně žádané. Volba vhodné váhové funkce (ne nutně tvaru $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$) může přinést v případě určitých druhů rovnic lepší energetické rozhraní než základní Sobolevovy prostory. Vhodnou volbou prostorů se tak dají zpřístupnit základní energetické metody, jejichž použití by v kontextu obyčejných Sobolevových prostorů nebylo možné (viz krátký přehled v následujícím odstavci).

Pro konkrétní případy rovnic, na které se tato metoda aplikovala, můžeme čtenáře odkázat na články [KO83] a [KS02]. V prvním jmenovaném se autoři zabývají Dirichletovou úlohou pro lineární operátory eliptického typu. Při volbě vhodných váhových funkcí jsou výsledky aplikovatelné

- na rovnice na neomezené oblasti,
- na rovnice s neomezenými daty,
- na rovnice, ve kterých je klíčová bilineární forma pozitivně definitní, ale nikoliv koercivní (tudíž není možné aplikovat nástroje typu Laxova-Milgramova lemmatu).

Ve druhém citovaném článku se prostory s váhovou funkcí volí pro analýzu semilineární vlnové rovnice na neomezené oblasti s členem $\phi(x) \triangle u$, kde ϕ^{-1} je omezená a integrovatelná. Názorněji - rychlost šíření vln je daleko od počátku tlumena. Na složce fázového prostoru určené pro časovou derivaci řešení je pak uvažován prostor L^2 s váhovou funkcí ϕ^{-1}.

2.5 Závěrečné komentáře

Poznámka. V článcích autoři většinou používají méně regulární váhové funkce.[8] K získávání výsledků o slabých řešeních rovnic druhého řádu tyto váhové funkce postačují. Nicméně výše zavedené prostory mohou být aplikovány v případě rovnic vyššího stupně nebo pokud chceme odvodit vyšší regularitu řešení.

Poznámka. Část o hustých podmnožinách v prostorech L^p_b byla převzata z článku [CD04]. Příklad 2.13 byl inspirován jednodimenzionálním případem v [MS95].

[8] Můžeme uvést jako příklad funkci $e^{-|x|}$ v článcích [Zel01], [Zel03], [GPS10].

Část II

Vlnová rovnice na neomezené oblasti

3. Zkoumaná rovnice

Hlavním tématem následujících kapitol práce bude vlnová parciální diferenciální rovnice s nelineárním tlumením a nelineárním zdrojovým členem. Uvažujme úlohu

$$\left.\begin{array}{ll}\partial_{tt}u - \triangle u + g(\partial_t u) + \alpha u + f(u) = h & \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) & \text{pro } x\in\mathbb{R}^d\end{array}\right\} \tag{3.1}$$

pro $\alpha > 0$ a $d \in \mathbb{N}$. Hledáme funkci $u = u(t,x)$, která by (alespoň v nějakém slabším smyslu) řešila úlohu (3.1). Zároveň nás zajímá chování této funkce pro velké časy.

Úmluva. V celém textu budeme Laplaceův operátor $\triangle$ a operátory gradientu ∇ a divergence „div“ uvažovat pouze vzhledem k prostorovým proměnným. Korektně bychom měli psát $\triangle_x$, ∇_x a div_x, zůstaneme ovšem u neindexovaného značení, jenž bývá pro evoluční rovnice typické.

3.1 Předpoklady na nelineární členy

Pro zdrojovou nelinearitu f předpokládáme

(F_1) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,

(F_2) pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ odhad

$$|f'(r)| \le \gamma_1(|r|^{\rho-1} + 1),$$

(F_3) $f' \ge -\beta$,

(F_4) $\liminf_{|r|\to\infty} f(r)/r > 0$,

kde β a γ_1 jsou kladná reálná čísla a

$$\left.\begin{array}{ll}\rho < \dfrac{d}{d-2} & \text{pro } d > 2, \\ \rho \in (0,\infty) & \text{pro } d = 1,\ 2.\end{array}\right\} \tag{3.2}$$

Po členu tlumení g vyžadujeme, aby splňoval

(G_1) $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,

(G_2) $g(0) = 0$, g striktně rostoucí,

(G_3) pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ odhad

$$\gamma_2|r|^{\mu+1} - \gamma_3 \le g(r)r \le \gamma_4(|r|^{\mu+1} + 1),$$

kde γ_j jsou kladná reálná čísla a $\mu \in [1,\infty)$.

Poznámka. Předem uveďme, že existence a jednoznačnost řešení bude dokázána v plném rozsahu zmíněných dat v Kapitole 5. Tamtéž uvedeme dodatečné vlastnosti řešení rovnice na neomezené oblasti. Následně v Kapitole 6 odvodíme pro $\mu = 1$ disipativitu dynamického systému tvořeného řešeními. Za dodatečného předpokladu $\gamma < g' < 1/\gamma$ pro $\gamma > 0$ dokážeme existenci lokálně kompaktního atraktoru.

Pozorování 3.1. Shrňme několik snadných (avšak často užívaných) důsledků, které plynou z předpokladů na jednotlivé nelinearity.

- Z podmínky (G_2) plyne $g(r)\,r \geq 0$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$ a zároveň pro všechna reálná čísla a a b platí

$$(g(a) - g(b))(a - b) \geq 0.$$

- Pomocí (F_1), (F_3) a (F_4) můžeme rozložit f na součet $f_1 + f_2$ tak, aby pro všechna reálná r platilo

  - $f_1,\, f_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,
  - $f_1(r)r \geq 0,\ f(0) = 0$,
  - $|f_1'(r)| \geq -\beta$,
  - $f_1'(r) \leq \gamma_1(|r|^{\rho-1} + 1)$,
  - $|f_2(r)| + |f_2'(r)| \leq \gamma_5$

  pro vhodné $\gamma_5 > 0$ závisející na f.

- Z nerovnosti $-\gamma_5 \leq f_2'(r) \leq \gamma_5$ a předchozího bodu získáme nerovnost $|f_2(r)| \leq \gamma_5|r|$ pro všechna reálná r.

- Díky (F_2) platí odhad

$$|f_1(r)| \leq \gamma_1 \int_0^{|r|} (|s|^{\rho-1} + 1)\,\mathrm{d}s \leq \gamma_6(|r|^{\rho} + 1).$$

- Konstantu γ_4 můžeme uvažovat takovou, aby zároveň platilo

$$|g(r)| \leq \gamma_4(|r|^{\mu} + 1).$$

Značení. Položme

$$F_1(r) = \int_0^r f_1(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dle předchozího pozorování $f_1(r)r \geq 0$, a tedy funkce F_1 je nezáporná na celé reálné přímce. Zároveň pro všechna reálná r platí

$$F_1(r) \leq \gamma_7(|r|^{\rho+1} + 1).$$

Taktéž

$$F_1(r) = \int_0^r f_1(s) + \beta s\,\mathrm{d}s - \frac{\beta}{2}r^2 \leq f_1(r)r + \frac{\beta}{2}r^2. \tag{3.3}$$

Poznámka (Problematika konstant). Kvůli teoretickému zaměření diplomové práce a kvůli přehlednosti nebudeme vytvářet odhady s optimálními konstantami. Budeme využívat různou symboliku pro konstanty různých typů kvůli snadnější orientaci v delších odhadech.

Malými řeckými písmeny značíme konstanty související s daty úlohy (převážně s růstovými omezeními na nelineární členy). Velkým písmenem C, případně opatřeným indexem či vlnkou, budeme značit konstanty, jež vzniknou jako funkce[1] předchozích konstant (a to jak malých řeckých, tak i těch typu C s nižšími indexy). Dále tak budeme značit konstanty pro věty o vnoření mezi prostory funkcí.

V odhadech budeme také používat konstanty Q, jež budou souviset s normami počátečních podmínek nebo s normou pravé strany úlohy. Konstanty Q mohou zahrnovat i konstanty všech předchozích typů a mohou být také shrnuty do konstanty typu C (ovšem případně až při svém druhém výskytu).

Číslování konstant umožňuje čtenáři sledovat jejich změnu v průběhu odhadu. Platnost číslování se vztahuje vždy k jednomu důkazu či jednomu ucelenému odhadu. Zároveň mějme úmluvu, že všechny konstanty typu C a Q budou větší než jedna.

Úmluva. Pro funkce budeme používat dva typy značení

- **tučné** písmo si vyhrazujeme pro vektorové funkce, především pro funkce z Bochnerových prostorů (viz také §8.2),

- normálním písmem pak označujme reálné funkce.

Často se vektorové funkce dají reprezentovat funkcemi na kartézském součinu (nejčastěji $(0,T)\times\Omega$) a naopak (viz §8.2.1). Vzhledem k různorodosti používaných metod je vhodné střídat mezi těmito reprezentacemi. Proto také k vektorové funkci značené tučným písmem můžeme někdy uvažovat příslušnou reprezentující funkci ve smyslu §8.2.1, kterou značíme normálním písmem. Primárně budeme slabá řešení uvažovat jako vektorové funkce a silná řešení jako funkce na kartézském součinu.

Pro časové derivace vektorových funkcí používáme symbol $'$, zatímco u funkce definované na $(0,T)\times\Omega$ značíme parciální derivaci podle času symbolem ∂_t.

3.2 Stručný přehled použitých metod

Jednotícím prvkem následujících tří kapitol jsou energetické odhady, jež slouží jako nástroj k odvození většiny výsledků. K důkazu existence řešení na omezené oblasti využijeme obdobné metody jako v [Lio69] (podobné byly užity okrajově i v [Fei95]). Na neomezené množině je důkaz existence založen na existenci řešení na omezené oblasti a konečné rychlosti šíření, jež je pro vlnové rovnice charakteristická. Tento postup byl použit i v [Eva10] (Kapitola 12., Věta 12.2), [Fei96] a [Zel01]. Díky konečné rychlosti šíření odvodíme i další vlastnosti řešení na neomezené množině. Pro důkaz jednoznačnosti řešení na obou typech oblastí aplikujeme metodu testování časovými diferencemi[2], která pochází z článku [KL02]. Ačkoliv to na první pohled nemusí být zřejmé, jednoznačnost hraje také důležitou roli v odvozování dodatečných vlastností řešení. Pro odvození disipativního odhadu a existence lokálně kompaktního atraktoru je využito obdobné schéma jako v [Fei96].

[1] vždy tyto funkce uvažujeme spojité a rostoucí v každé složce

[2] teoretický podklad pro použití této metody může čtenář nalézt v §8.2.2

4. Vlnová rovnice na omezené oblasti

Po celou kapitolu budeme uvažovat prostorově (i časově) omezenou variantu již zavedené úlohy (3.1) s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou:

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} - \triangle u + g(u_t) + \alpha u + f(u) = h \qquad & \text{v } (0,T)\times\Omega,\\ u(0,x) = u_0(x) \qquad & \text{pro } x\in\Omega,\\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \qquad & \text{pro } x\in\Omega,\\ u(t,x) = 0 \qquad & \text{pro } (t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

kde Ω je omezená oblast s hladkou hranicí (pro následné aplikace si vystačíme s množinami tvaru koule). Pro nelineární členy f a g předpokládejme (F_1) – (F_4) a (G_1) – (G_3). Čas $T > 0$ bude po celou dobu fixovaný.

4.1 Druhy řešení a otázka jejich existence

Definice. Uvažujme $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ a $\mathbf{h} \in L^2\left((0,T); L^2(\Omega)\right)$. Vektorovou funkci $\mathbf{u}\colon [0,T] \to W_0^{1,2}(\Omega)$ nazveme *slabým řešením* úlohy (4.1), jestliže

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u} \in \mathcal{C}\left([0,T]; W_0^{1,2}(\Omega)\right),\\ &\mathbf{u}' \in \mathcal{C}\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^{\mu+1}\left((0,T); L^{\mu+1}(\Omega)\right),\\ &\mathbf{u}(0) = u_0, \quad \mathbf{u}'(0) = u_1 \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

a pro všechna $\psi \in \mathcal{D}\left((0,T)\times\Omega\right)$ platí:

$$\begin{aligned} -\int_0^T \Big(\mathbf{u}'(t), \partial_t\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \Big(\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \Big(g(\mathbf{u}'(t)), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t \\ + \int_0^T \Big(\alpha\mathbf{u}(t), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \Big(f(\mathbf{u}(t)), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \Big(\mathbf{h}(t), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pozorování 4.1. Mějme $\mathbf{u}$ slabé řešení úlohy (4.1). Platnost (4.3) pro všechna uvažovaná ψ můžeme chápat jako rovnost dvou lineárních funkcionálů na prostoru hladkých funkcí s kompaktním nosičem. Z regularity řešení vyplývá, že se jedná o omezené funkcionály na prostoru

$$W_0^{1,2}\left((0,T)\times\Omega\right) \cap L^{\mu+1}\left((0,T)\times\Omega\right). \tag{4.4}$$

Z argumentu hustoty plyne platnost rovnosti (4.3) i pro všechny funkce kvality (4.4).

Pro další účely bude vhodné odvodit formu rovnosti (4.3), která je platná při testování[1] funkcemi $\mathcal{D}\left([0,T]\times\Omega\right)$. Pro $\psi \in \mathcal{D}\left([0,T]\times\Omega\right)$ můžeme položit $\psi_n = r_n\psi$ (kde r_n pochází z (8.10))[2]. Funkce ψ_n zřejmě splňují regularitu (4.4),

[1] testováním budeme rozumnět dosazení dané funkce do slabé formulace úlohy; přípustnou testovací funkcí pak rozumíme funkci, pro níž ve slabé formulaci nastane rovnost

[2] jedná se o „seřezávací“ funkci vzhledem k časové proměnné

proto pro ně platí rovnost (4.3), ve které následně provedeme limitní přechod pro $n \to \infty$. K odvození limity prvního integrálu použijeme Lemma 8.18. Přechod v ostatních členech je již triviální. Pro všechna $\psi \in \mathcal{D}([0,T] \times \Omega)$ tedy platí

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \Big(\mathbf{u}'(t), \partial_t\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \Big(\mathbf{u}'(T), \psi(T,\cdot)\Big) - \Big(\mathbf{u}'(0), \psi(0,\cdot)\Big) \\
&+ \int_0^T \Big(\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \Big(g(\mathbf{u}'(t)), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^T \Big(\alpha\mathbf{u}(t), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \Big(f(\mathbf{u}(t)), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \Big(\mathbf{h}(t), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Na závěr poznamenejme, že z hustoty (viz Lemma 8.17) jsou přípustnými testovacími funkcemi slabé formulace (4.5) funkce třídy

$$L^2\left((0,T); W_0^{1,2}(\Omega)\right) \cap W^{1,2}\left((0,T); L^2(\Omega)\right) \cap L^{\mu+1}\left((0,T); L^{\mu+1}(\Omega)\right).$$

V další části textu budeme pro stručnost *regulárními daty* nazývat data, jež splňují $u_0 \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_1 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{2\mu}(\Omega)$, $h \in W_0^{1,2}((0,T) \times \Omega)$.

Definice. Nechť $\mathbf{u}$ je slabé řešení ve smyslu předchozí definice. Potom $\mathbf{u}$ nazveme *silným řešením* úlohy (4.1), jestliže navíc

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{u} \in L^\infty\left((0,T); W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\
&\mathbf{u}' \in L^\infty\left((0,T); W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\
&\mathbf{u}'' \in L^2\left((0,T); L^2(\Omega)\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Pozorování 4.2. Je-li $\mathbf{u}$ silným řešením, můžeme díky dodatečné regularitě všechny derivace v (4.3) převést pomocí per–partes[3] z funkce ψ na řešení:

$$\int_0^T \Big(\mathbf{u}''(t) - \triangle\mathbf{u}(t) + g(\mathbf{u}'(t)) + f(\mathbf{u}(t)), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \Big(h, \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Takto převedená rovnost platí díky klasickému argumentu plynoucímu z hustoty i pro všechna $\psi \in L^{\mu+1}((0,T) \times \Omega)$. Předpokládaná regularita (4.6) a Pozorování 8.14 umožňuje $\mathbf{u}$ ztotožnit s funkcí $u \in W^{2,2}((0,T) \times \Omega)$ a $\mathbf{u}'$ s funkcí z $L^{\mu+1}((0,T) \times \Omega)$. Pak platí rovnost z (4.1) jakožto rovnost dvou funkcí z prostoru $L^{(\mu+1)/\mu}((0,T) \times \Omega)$. Speciálně jde o rovnost skoro všude na $(0,T) \times \Omega$.

Značení. Nechť $u = u(t,x)$ je měřitelná funkce na nějaké měřitelné podmnožině $\mathbb{R}^{d+1}$. Značme

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[u] &= \frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\alpha|u|^2, \\
\mathcal{F}[u] &= \frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\alpha|u|^2 + F_1(u),
\end{aligned}$$

jestliže příslušné derivace existují alespoň jako slabé. Obdobně pro vektorovou funkci $\mathbf{u} \in L^2((0,T); W^{1,2}(\Omega))$ s $\mathbf{u}' \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$ použijme značení $\mathcal{E}[\mathbf{u}] = \mathcal{E}[u]$ a $\mathcal{F}[\mathbf{u}] = \mathcal{F}[u]$, kde $u \in W^{1,2}((0,T) \times \Omega)$ reprezentuje $\mathbf{u}$ ve smyslu Lemmatu 8.14.

[3] připomeňme, že pro sobolevovské funkce taktéž platí per–partes, viz Lemma 8.4

4.2 Apriorní odhady

Nejprve odvodíme základní apriorní odhady, neboť pro další postup budou nepostradatelné.

Předpokládejme, že $u = u(t,x)$ je hladkou funkcí řešící úlohu (4.1) s hladkými daty a s pravou stranou nulovou na hranici Ω.

4.2.1 Odhady prvního řádu

Rovnost (4.1) v libovolném čase $t \in (0,T)$ přenásobme $\partial_t u$ a integrujme přes množinu Ω.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_{tt} u\, \partial_t u \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \triangle u\, \partial_t u \,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(\partial_t u)\, \partial_t u \,\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega \alpha u\, \partial_t u \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u)\, \partial_t u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega h\, \partial_t u \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vzhledem k regularitě funkcí můžeme na druhý integrál aplikovat větu o integraci per–partes. Přihlédneme-li navíc k homogenní Dirichletově podmínce,

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pro } (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega,$$

obdržíme

$$\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{F}[u] \,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(\partial_t u)\, \partial_t u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega h\, \partial_t u \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_2(u)\, \partial_t u \,\mathrm{d}x.$$

Použitím věty o derivaci integrálu závislém na parametru, dále aplikací Youngovy nerovnosti na členy pravé strany a Pozorování (3.1) získáme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \mathcal{F}[u] \,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(\partial_t u)\, \partial_t u \,\mathrm{d}x \le \int_\Omega h^2 + |\partial_t u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \gamma_5 |u|^2 + \gamma_5 |\partial_t u|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{4.7}$$

Přihlédnutím ke (G_2) a (4.7) získáme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \mathcal{F}[u] \,\mathrm{d}x + \gamma_2 \int_\Omega |\partial_t u|^{\mu+1} \,\mathrm{d}x \\ \le \gamma_3 |\Omega| + \int_\Omega h^2 \,\mathrm{d}x + C_1 \int_\Omega \mathcal{F}[u] \,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.8}$$

pro vhodné $C_1 > 0$ závisící pouze na datech úlohy. Konečně Gronwallova nerovnost použitá na (4.8) implikuje odhadu

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathcal{F}[u](\tau, x) \,\mathrm{d}x + \gamma_2 \int_0^\tau \int_\Omega |\partial_t u|^{\mu+1} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ \le e^{C_1 \tau} \left(C_2 \tau + \int_\Omega \mathcal{F}[u](0,x) \,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_\Omega h^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \right)\end{aligned} \tag{4.9}$$

pro všechna $\tau \in (0,T)$. Připomeňme ještě, že dle (F_2) a základní věty o vnoření[4] obdržíme

$$\int_\Omega F(u_0) \,\mathrm{d}x \le \gamma_7 \left(|\Omega| + \|u_0\|_{\rho+1}^{\rho+1} \right) \le C_3 \left(1 + \|u_0\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{\rho+1} \right). \tag{4.10}$$

[4]platí totiž $\rho + 1 < 2d/(d-2)$

Dohromady tedy máme odhady pro „bochnerovské“ normy řešení u v závislosti na čase a integrálních normách počátečních podmínek:

$$\sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega \mathcal{F}[u](\tau,x)\,\mathrm{d}x + \gamma_2 \|\partial_t u\|^{\mu+1}_{L^{\mu+1}((0,T)\times\Omega)} \tag{4.11}$$
$$\leq e^{C_1 T}\left(C_2 T + Q_1(\|u_0\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \|u_1\|_{L^2(\Omega)}, \|h\|_{L^2((0,T)\times\Omega)})\right).$$

4.2.2 Odhady vyššího řádu

Rovnici (4.1) můžeme derivovat podle času, čímž dostaneme

$$\partial_{tt} v - \triangle v + g'(\partial_t u)\,\partial_t v + \alpha\, v + f'(u)\, v = \partial_t h,$$

kde $v = \partial_t u$. Násobením rovnice funkcí $\partial_t v$ a integrací přes množinu Ω získáme[5]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \mathcal{E}[v](t,x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g'(\partial_t u)\,|\partial_t v|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega f'(u)\, v\,\partial_t v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_t h\,\partial_t v\,\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

Dle (G_1) a (G_2) je derivace g nezáporná. V závislosti na datech úlohy můžeme odhadnout $f'(u)$. V předchozí části jsme získali odhad pro u v normě $L^\infty\big((0,T); W_0^{1,2}(\Omega)\big)$. Ze základní věty o vnoření snadno odvodíme taktéž odhad v $L^\infty\big((0,T); L^{2d/(d-2)}(\Omega)\big)$. Vzhledem k předpokladu (F_2) a předchozímu apriornímu odhadu tedy $f'(u)$ můžeme odhadnout v normě prostoru $L^\infty\big((0,T); L^d(\Omega)\big)$, neboli

$$\|f'(u)\|_{L^\infty\left((0,T);L^d(\Omega)\right)} \leq Q_2(Q_1).$$

Podle Youngovy a Hölderovy nerovnosti obdržíme

$$\left|\int_\Omega f'(u)\, v\,\partial_t v\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |f'(u)|^2\,|v|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\|\partial_t v\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.13}$$
$$\leq Q_2\,\|v\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\partial_t v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Shrnutím odhadů (4.12) a (4.13) získáme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \mathcal{E}[v]\,\mathrm{d}x \leq Q_2\left(\int_\Omega \mathcal{E}[v]\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\partial_t h|^2\,\mathrm{d}x\right). \tag{4.14}$$

Gronwallova nerovnost potom implikuje odhadu

$$\int_\Omega \mathcal{E}[v](\tau,x)\,\mathrm{d}x \leq e^{Q_2\tau}\left(\int_\Omega \mathcal{E}[v](0,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau\int_\Omega |\partial_t h|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) \tag{4.15}$$

pro všechna $\tau\in[0,T]$. Uvědomme si, že pro $x\in\Omega$

$$v(0,x) = u_1(x)$$

a

$$\partial_t v(0,x) = \partial_{tt} u(0,x) = \triangle u_0(x) - g(u_1(x)) - f(u_0(x)) - \alpha u_0(x) + h(0,x). \tag{4.16}$$

[5] uvědomme si, že $\partial_t v(t,x) = \partial_{tt} u(t,x) = 0$ pro $x\in\partial\Omega$

Použitím (F_2) a základního sobolevovského vnoření[6] odhadujme

$$\int_\Omega |f(u_0)|^2 \, \mathrm{d}x \le \gamma_6(|\Omega| + \|u_0\|^{2\rho}_{L^{2\rho}(\Omega)}) \le Q_4(\|u_0\|_{W^{1,2}(\Omega)}). \tag{4.17}$$

Po dosazení (4.16) a (4.17) do (4.15) a následném snadném odhadu získáme

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathcal{E}[v](T,x) \, \mathrm{d}x \qquad (4.18)\\ &\quad\le C_5 e^{Q_3 T} \left(\|u_0\|^2_{W^{2,2}} + \|u_1\|^2_{W^{1,2}} + \|g(u_1)\|^2_{L^2} + \|h\|^2_{W^{1,2}(0,T;L^2)} + Q_4 \right),\end{aligned}$$

což je opět odhad závislý pouze na datech úlohy (4.1).

Nakonec násobme rovnici pro u funkcí $\triangle u_t$. Po integrování a provedení integrace per–partes[7] obdržíme

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \partial_t(\nabla\partial_t u) \, \nabla\partial_t u \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \partial_t(\triangle u) \, \triangle u \, \mathrm{d}x + \int_\Omega g'(\partial_t u) \, \nabla(\partial_t u) \, \nabla(\partial_t u) \, \mathrm{d}x \qquad (4.19)\\ &+ \alpha \int_\Omega \nabla u \, \partial_t(\nabla u) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega f(u) \, \partial_t(\triangle u) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla h \, \nabla(\partial_t u) \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Počítejme

$$\int_\Omega f(u) \, \partial_t(\triangle u) \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega f(u) \triangle u \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f'(u) \, \partial_t u \, \triangle u \, \mathrm{d}x.$$

Využitím nezápornosti g', Youngovy nerovnosti, nulovosti funkce $\partial_t u$ na hranici Ω a odhadu analogickému (4.13) získáme pro $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\|\nabla\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\triangle u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega f(u)\triangle u \, \mathrm{d}x \right) \qquad (4.20)\\ &\quad\le Q_5 \|\nabla(\partial_t u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\triangle u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla h\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

přičemž

$$Q_5 = Q_5(\|f'(u)\|_{L^\infty\left((0,T);L^d(\Omega)\right)}) = Q_5(Q_1).$$

Zřejmě také

$$\left| \int_\Omega f(u) \, \triangle u \, \mathrm{d}x \right| \le \|f(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\triangle u\|^2_{L^2}. \tag{4.21}$$

Upravme (4.20) na tvar, na který budeme moci uplatnit Gronwallovu nerovnost:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\|\nabla\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\triangle u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega f(u)\triangle u \, \mathrm{d}x + \|f(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}&\le Q_5 \|\partial_t u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\triangle u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+ 2\int_\Omega f(u)\triangle u \, \mathrm{d}x + \|f(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla h\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f(u)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

[6] platí totiž $2\rho < 2d/(d-2)$

[7] připomeňme, že $g(0) = 0$ a funkci h jsme předpokládali nulovou na hranici

Derivovaná funkce na prvním řádku (4.22) je nezáporná, zároveň obdobně jako v (4.13) získáme nerovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f(u)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\int_\Omega f(u)\, f'(u)\, \partial_t u \,\mathrm{d}x \le \|f(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + Q_2\|\partial_t u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Člen $\|\partial_t u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ odhadneme pomocí Poincarého nerovnosti. Poté aplikací Gronwallovy a Youngovy nerovnosti a (4.21) odvodíme pro libovolné $t \in [0,T]$ odhad

$$\begin{aligned} &\|\nabla\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\triangle u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le C_6 e^{(Q_2+Q_5)T}\Big(\|\nabla\partial_t u(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\triangle u(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|\nabla u(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad\qquad + \|\nabla h\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} + Q_6 T\Big), \end{aligned} \tag{4.23}$$

kde $Q_6 = Q_6(\|u_0\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \|u_1\|_{L^2(\Omega)}, \|h\|_{L^2((0,T)\times\Omega)})$ získáme využitím (F_2) a (4.11) k odhadu $\|f(u)\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Připomeňme si nerovnost[8]

$$\|w\|_{W^{2,2}}(\Omega) \le \tilde{C}\|l\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.24}$$

pro w řešící homogenní Dirichletovu úlohu

$$\triangle w = l$$

s pravou stranou $l \in L^2$.

Aplikací Poincarého nerovnosti a nerovnosti (4.24) na (4.23) obdržíme pro libovolné $\tau \in [0,T]$ nerovnost

$$\begin{aligned} &\|\partial_t u(\tau,\cdot)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|u(\tau,\cdot)\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} \\ &\le C_7 e^{(Q_2+Q_5)T}\left(Q_6 T + \|u_0\|^2_{W^{2,2}(\Omega)} + \|u_1\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.3 Otázka existence a jednoznačnosti řešení

Věta 4.3. *Pro regulární data u_0, u_1 a* $\mathbf{h}$ *existuje silné řešení úlohy* (4.1).

Důkaz. Postupujme v podobném duchu jako v [Lio69], Chapitre 1, §3.2, Théorème 3.1.

Nejprve zaveďme konečně-dimenzionální projekci úlohy (4.1). Berme $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vlastní čísla operátoru $-\triangle$ na $W_0^{1,2}(\Omega)$, neboli funkce splňující

$$\big(\nabla\omega_n, \nabla\psi\big) = \lambda_n(\omega_n, \psi), \quad \text{pro všechna } \psi \in W_0^{1,2}.$$

Jak známo, tyto funkce jsou třídy $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (uvažujeme hladkou hranici Ω) a tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(\Omega)$.[9] Označme $\mathbb{P}_n$ ortonormální projekci v prostoru $L^2(\Omega)$ na podprostor generovaný $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ a hledejme funkci

$$u_n = u_n(t,x) = \sum_{j=1}^n d_n^j(t)\omega_j(x) \tag{4.26}$$

[8] viz také [Eva10], §6.3.2

[9] viz například [Eva10], Chapter 6, §6.5.1, Theorem 1

řešící konečně-dimenzionální projekci úlohy (4.1). Tím rozumíme splnění (4.3) pro $\psi = \omega_j$, $j = 1, \dots, n$ libovolné a nabývání počátečních podmínek ve smyslu

$$\left.\begin{aligned} d_n^j(0) &= \big(u_0^n, \omega_j\big), \\ (d_n^j)'(0) &= \big(u_1^n, \omega_j\big), \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

kde u_0^n, $u_1^n \in \operatorname{span}\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ splňují[10]

$$\begin{aligned} u_0^n &\to u_0 \quad \text{ve } W^{2,2}(\Omega), \\ u_1^n &\to u_1 \quad \text{ve } W^{1,2}(\Omega) \cap L^{2\mu}(\Omega). \end{aligned}$$

Projektovanou úlohu můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{d_n}''(t) + \mathbb{A}\mathbf{d_n}(t) + \mathbb{F}(\mathbf{d_n}(t)) + \mathbb{G}(\mathbf{d_n}'(t)) = \mathbb{P}_n(\mathbf{h}(t)), \tag{4.28}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \Big(\big(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j\big) + \alpha\big(\omega_i, \omega_j\big)\Big)_{i,j=1,\dots,n}, \\ \mathbb{F}(\mathbf{d_n}(t)) &= \Big(\big(f(u_n), \omega_1\big), \dots, \big(f(u_n), \omega_n\big)\Big), \\ \mathbb{G}(\mathbf{d_n}'(t)) &= \Big(\big(g(\partial_t u_n), \omega_1\big), \dots, \big(g(\partial_t u_n), \omega_n\big)\Big). \end{aligned}$$

K (4.28) ještě přidejme počáteční podmínky (4.27).

Uvedený systém obyčejných diferenciálních rovnic má řešení dle Peanovy věty na $[0, T_1)$ pro nějaké $T_1 > 0$. Po vynásobení rovnosti (4.28) funkcí $\mathbf{d_n}'$ můžeme téměř zopakovat apriorní odhad vedoucí k (4.11). Nedochází tedy k „blow-upu“ řešení (4.28), tudíž je možné ho prodloužit za T_1. Tím pádem existuje řešení (4.28) na celém $[0, T]$. Funkci u_n danou (4.26) nazývejme n–tou galerkinovskou aproximací.

Nyní přejděme k otázce konvergence galerkinovských aproximací. Pro ty můžeme odvodit odhady analogické apriorním odhadům vyššího řádu závislé pouze na projekcích dat úlohy. K odvození (4.18) derivujme rovnost (4.28) podle času a násobme ji $\mathbf{d_n}''$. Odhad (4.25) potom získáme skalárním násobením (4.28) funkcí

$$\big((d_n^1)'(t)\lambda_1, \dots, (d_n^n)'(t)\lambda_n\big)\,,$$

přičemž si uvědomme, že $\lambda_j\omega_j = -\triangle\omega_j$. Obdržíme tak následující stejnoměrné odhady:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{u_n} \\ \mathbf{u_n}' \\ \mathbf{u_n}'' \end{matrix}\right\} \text{ jsou stejně omezené v } \left\{\begin{array}{l} L^\infty\left((0,T); W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\ L^{\mu+1}\left((0,T); L^{\mu+1}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left((0,T); W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\ L^2\left((0,T); L^2(\Omega)\right). \end{array}\right.$$

Pozorování 8.14 umožňuje ztotožnit $\mathbf{u_n}$ s funkcemi $u_n \in W^{2,2}((0,T)\times\Omega)$ a zároveň $\mathbf{u_n}'$ s funkcemi $\partial_t u_n \in L^{\mu+1}((0,T) \times \Omega)$, přičemž platí

$$\left.\begin{matrix} u_n \\ \partial_t u_n \end{matrix}\right\} \text{ jsou stejně omezené v prostoru } \left\{\begin{array}{l} W^{2,2}((0,T) \times \Omega), \\ L^{\mu+1}((0,T) \times \Omega). \end{array}\right.$$

[10]Existence aproximujících posloupností plyne z vět o eliptické regularitě (viz například [Eva10], §6.3.2, Theorem 5). Stačí využít spojitosti řešícího operátoru $\Psi\colon W^{k,2}(\Omega) \to W^{k+2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ homogenní Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor, matematické indukce a spojitosti hustého vnoření $W^{k,2} \cap W_0^{1,2} \hookrightarrow L^{2\mu}$ pro dostatečně velké k.

Dle růstových podmínek na nelinearity f a g taktéž

$$\left.\begin{matrix} f(u_n) \\ g(\partial_t u_n) \end{matrix}\right\} \text{ jsou stejně omezené v prostoru } \left\{\begin{matrix} L^2((0,T)\times\Omega)), \\ L^{(\mu+1)/\mu}((0,T)\times\Omega)). \end{matrix}\right.$$

Z reflexivity výše uvedených prostorů plyne existence funkcí u, $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ splňujících (po přechodu k vhodné podposloupnosti)

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{ve } W^{2,2}((0,T)\times\Omega), \\ g(\partial_t u_n) &\rightharpoonup \tilde{g} && \text{v } L^{(\mu+1)/\mu}((0,T)\times\Omega)), \\ f(u_n) &\rightharpoonup \tilde{f} && \text{v } L^2((0,T)\times\Omega)). \end{aligned}$$

Kombinací omezenosti $\mathbb{P}_n h(t)$, silné konvergence pro skoro všechna $t \in (0,T)$ a Lemmatu 9.1 získáme (opět po případném přechodu k podposloupnosti)

$$\mathbb{P}_n(h) \rightharpoonup h \quad \text{v } L^2((0,T)\times\Omega)).$$

Limitním přechodem odvodíme pro všechna $\psi(t,x) = \kappa(t)\omega_n(x)$, kde $\kappa \in \mathcal{D}(0,T)$ a $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \Big(\partial_{tt} u(t,\cdot), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \Big(\triangle u(t,\cdot), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \Big(\tilde{g}(t,\cdot), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^\infty \Big(\alpha u(t,\cdot), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \Big(\tilde{f}(t,\cdot), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \Big(h(t,\cdot), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Jde o rovnost dvou funkcionálů z prostoru $(L^{\mu+1}((0,T)\times\Omega))^*$ na množině všech funkcí tvaru $\psi = \kappa\,\omega_n$ jako výše. Konečně (4.29) platí pro všechna

$$\psi \in M = \overline{\operatorname{span}\{\kappa\omega_n\colon\ \kappa \in \mathcal{D}(0,T),\ n \in \mathbb{N}\}}^{L^{\mu+1}((0,T)\times\Omega)}.$$

Funkce ω_n tvoří ortonormální bázi $L^2(\Omega)$, také jsme si již rozmysleli, že jejich lineární obal je hustý i v prostoru $L^{\mu+1}(\Omega)$. Z Lemmatu 8.17 a reprezentovatelnosti vektorových funkcí funkcemi na kartézském součinu dostáváme $M = L^{\mu+1}((0,T)\times\Omega)$. Podle vět o kompaktním vnoření

$$W^{2,2}((0,T)\times\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,2}((0,T)\times\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2((0,T)\times\Omega),$$

proto také při přechodu k podposloupnostem

$$\begin{aligned} u_n &\to u && \text{ve } W^{1,2}((0,T)\times\Omega), \\ \partial_t u_n &\to \partial_t u && \text{v } L^2((0,T)\times\Omega). \end{aligned}$$

Dalšími přechody k podposloupnostem také

$$\begin{aligned} u_n &\to u && \text{skoro všude v } (0,T)\times\Omega, \\ \partial_t u_n &\to \partial_t u && \text{skoro všude v } (0,T)\times\Omega \end{aligned}$$

a ze spojitosti funkcí f a g

$$\begin{aligned} f(u_n) &\to f(u) && \text{skoro všude v } (0,T)\times\Omega, \\ g(\partial_t u_n) &\to g(\partial_t u) && \text{skoro všude v } (0,T)\times\Omega. \end{aligned}$$

Díky Lemmatu 9.1 tedy $\tilde{f} = f(u)$ a $\tilde{g} = g(\partial_t u)$. Dle základních vět o vnoření do třídy spojitých vektorových funkcí pro Bochnerovy prostory navíc

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}\left([0,T]; W_0^{1,2}(\Omega)\right),$$
$$\mathbf{u}' \in \mathcal{C}\left([0,T]; L^2(\Omega)\right).$$

Zbývá ověřit nabývání počátečních podmínek. To je ovšem téměř přímočarý důsledek Lemmatu 8.18. □

Věta 4.4 (Stabilita řešení). *Uvažujme $\{(u_0^n, u_1^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost regulárních počátečních podmínek, jež je cauchyovská v prostoru $W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Buď $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost funkcí z $W_0^{1,2}((0,T)\times\Omega)$ cauchyovská v $L^2((0,T)\times\Omega)$. Označme $u_n = u_n(t,x)$ příslušná silná řešení úlohy s pravou stranou h_n splňující počáteční podmínky $u_n(0,\cdot) = u_0^n$ a $\partial_t u_n(0,\cdot) = u_1^n$. Potom*

$$\left.\begin{array}{ll} \{\mathbf{u_n}\}_{n=1}^{\infty} & \textit{je cauchyovská v } \mathcal{C}([0,T]; W^{1,2}(\Omega)), \\ \{\mathbf{u_n}'\}_{n=1}^{\infty} & \textit{je cauchyovská v } \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega)). \end{array}\right\} \tag{4.30}$$

Důkaz. Dle Pozorování 4.2 splňují u_n příslušné rovnice skoro všude na množině $(0,T)\times\Omega$. Pro libovolná m, $n \in \mathbb{N}$ si vezměme rozdíl těchto rovnic, ten násobme $\partial_t(u_m - u_n)$ a integrujme přes časoprostorový válec $(0,\tau)\times\Omega$ pro libovolné $\tau \in (0,T)$. Obdobnými postupy jako ve výše uvedených apriorních odhadech (oprávněnost jednotlivých operací plyne z §8.1) získáme

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathcal{E}[u_m - u_n](\tau,x)\,\mathrm{d}x \ + 2\int_0^\tau \int_\Omega \big(g(\partial_t u_m) - g(\partial_t u_n)\big)\left(\partial_t u_m - \partial_t u_n\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_\Omega \mathcal{E}[u_m - u_n](0,x)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^\tau \int_\Omega \big|f(u_m) - f(u_n)\big|\,\big|\partial_t u_m - \partial_t u_n\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+ 2\int_0^\tau \int_\Omega \big|h_n - h_m\big|\,\big|\partial_t u_m - \partial_t u_n\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Silná řešení splňují základní odhad (4.11), z něhož díky silné konvergenci posloupností dat plyne

$$\int_\Omega \mathcal{E}[u_n](t,x)\,\mathrm{d}x \le C_1, \tag{4.32}$$
$$\|\partial_t u_n\|_{L^{\mu+1}(\Omega\times(0,T))} \le C_1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $t \in (0,T)$. Přihlédnutím k monotonii funkce g, neboli předpokladu (G_2), pozorujeme, že

$$\int_0^\tau \int_\Omega \big(g(\partial_t u_m) - g(\partial_t u_n)\big)\left(\partial_t u_m - \partial_t u_n\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \ge 0.$$

Na pravé straně (4.31) zbývá odhadnout člen se zdrojovou nelinearitou. K tomu využijeme růstový předpoklad (F_2) a Lemma 9.5 pro $q = 2d/(d-2)$, $r = 2$ a $p = \rho$. Získáme tak pro $t \in (0,T)$

$$\|f(u_m) - f(u_n)\|_{L^2(\Omega)} \le C_2 \|u_m - u_n\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \tag{4.33}$$

kde C_2 závisí na Ω, γ_1 a konstantě omezující posloupnost $\{\|u_n\|_{W^{1,2}((0,T)\times\Omega)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, jejíž velikost plyne z (4.7).

Shrnutím (4.32) a (4.33) získáme odhad

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathcal{E}[u_m - u_n](\tau, x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathcal{E}[u_m - u_n](0, x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq 2 \int_0^\tau \|f(u_m) - f(u_n)\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t u_m - \partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\tau 2\|h_n - h_m\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t u_m - \partial_t u_n\|_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\tau \|h_n - h_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + C_3 \int_0^\tau \int_\Omega \mathcal{E}[u_m - u_n](t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

ve kterém velikost C_3 závisí na C_2.

Použitím Gronwallovy nerovnosti obdržíme

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in(0,T)} \int_\Omega \mathcal{E}[u_m - u_n](t, x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \left(1 + C_4 T e^{C_3 T}\right) \left(\int_\Omega \mathcal{E}[u_m - u_n](0, x)\,\mathrm{d}x + \|h_n - h_m\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} \right).
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Z cauchyovskosti (vzhledem k příslušným normám) jednotlivých posloupností na pravé straně nerovnosti (4.34) plynou oba body dokazovaného tvrzení. □

Věta 4.5. *Nechť $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ a $\mathbf{h} \in L^2\big((0,T); L^2(\Omega)\big)$. Potom existuje slabé řešení úlohy* (4.1).

Důkaz. Vezměme si libovolnou posloupnost $\{(u_0^n, u_1^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ regulárních počátečních podmínek splňující $(u_0^n, u_1^n) \to (u_0, u_1)$ ve $W^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Berme také libovolné funkce $h_n \in W_0^{1,2}((0,T)\times\Omega)$ pro něž příslušné vektorové funkce konvergují k $\mathbf{h}$ v normě $L^2\left((0,T); L^2(\Omega)\right)$. Příslušná posloupnost řešení $\{\mathbf{u_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dle Věty 4.4 konverguje díky úplnosti $\mathcal{C}\left([0,T]; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ k vektorové funkci $\mathbf{u}$. Obdobně posloupnost $\{\mathbf{u_n}'\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje v prostoru $\mathcal{C}\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$ k funkci $\mathbf{v}$. Pro libovolnou funkci $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ potom platí

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \mathbf{u}(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbf{u_n}(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} - \int_0^T (\mathbf{u_n})'(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \mathbf{v}(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

a tedy $\mathbf{u}' = \mathbf{v}$.

Nyní ověřme požadavky z definice slabého řešení. Zřejmě $\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}'$ jsou spojité vzhledem k času. Proto také

$$
\mathbf{u}(0) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{u_n}(0) = \lim_{n\to\infty} u_0^n = u_0
$$

a obdobně $\mathbf{u}'(0) = u_1$.

Funkce $\mathbf{u_n}$ splňují identitu (4.3) pro libovolné $\psi \in \mathcal{D}((0,T)\times\Omega)$. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ získáme

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(\mathbf{u_n}'(t), \partial_t\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t \to \int_0^T \Big(\mathbf{u}'(t), \partial_t\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t, \\
&\int_0^T \Big(\nabla\mathbf{u_n}(t), \nabla\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t \to \int_0^T \Big(\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t, \\
&\int_0^T \Big(\alpha\mathbf{u_n}(t), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t \to \int_0^T \Big(\alpha\mathbf{u}(t), \psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Zbývá limitně přejít v nelineárních členech. V případě f postačuje již dokázaná nerovnost (4.33), díky které obdržíme

$$\int_0^T \Big(f(\mathbf{u_n}(t)), \psi(t,\cdot)\Big)\, \mathrm{d}t \to \int_0^T \Big(f(\mathbf{u}(t)), \psi(t,\cdot)\Big)\, \mathrm{d}t.$$

Zřejmě

$$\mathcal{C}\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left((0,T); L^2(\Omega)\right),$$

a proto $\partial_t u_n$ silně konverguje k $\partial_t u$ i v prostoru $L^2((0,T)\times\Omega)$. Můžeme nalézt podposloupnost (značme ji stejně), pro niž konvergence platí bodově, a to ve skoro všech bodech $(0,T)\times\Omega$. Díky spojitosti funkce g potom

$$g(\partial_t u_n) \to g(\partial_t u) \ \text{ skoro všude v } (0,T)\times\Omega. \tag{4.36}$$

Připomeňme stejnoměrný odhad (4.32), jenž platí i nyní. Využitím růstového omezení (G_3) na funkci g tedy

$$\|g(\partial_t u_n)\|_{L^{(\mu+1)/\mu}} \leq C_1 \left\|1 + |\partial_t u_n|^\mu\right\|_{L^{(\mu+1)/\mu}} \leq C_3 + C_2\|\partial_t u_n\|^\mu_{L^{\mu+1}} \leq C_4.$$

Díky reflexivitě příslušných prostorů existují (vybrané) posloupnosti $\{\partial_t u_n\}_{n=1}^\infty$, $\{g(\partial_t u_n)\}_{n=1}^\infty$ (jež značíme stejně) a funkce w, $\tilde{g}$ splňující

$$\begin{aligned} \partial_t u_n &\rightharpoonup w && \text{v } L^{\mu+1}((0,T)\times\Omega), \\ g(\partial_t u_n) &\rightharpoonup \tilde{g} && \text{v } L^{(\mu+1)/\mu}((0,T)\times\Omega). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ze slabé konvergence potom obdržíme

$$\int_0^T \left(g(\mathbf{u_n}'(t)), \psi(t,\cdot)\right) \mathrm{d}t \to \int_0^T \left(\tilde{g}(t,\cdot), \psi(t,\cdot)\right) \mathrm{d}t.$$

Z limitních přechodů (4.36), (4.37) a Lemmatu 9.1 plyne rovnost $g(\partial_t u)$ a $\tilde{g}$, stejně tak $\partial_t u$ a w skoro všude. Proto platí (4.2) i (4.3). □

4.3.1 Jednoznačnost

Níže uvedené Lemma 4.10 zaručuje jednoznačnost slabých řešení, jež jsou aproximovatelná silnými řešeními. Apriori však nemůžeme vyloučit existenci dalších slabých řešení, ke kterým neexistuje aproximující posloupnost. Jak je v případě hyperbolické úlohy charakteristické, slabou verzi rovnice není možné testovat časovou derivací řešení, neboť její regularita k tomu nepostačuje. Pro dvě řešení u a v stejné úlohy vede formální testování rozdílu rovností (4.1) funkcí $\mathbf{u}' - \mathbf{v}'$ k rovnosti

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{E}[\mathbf{u}-\mathbf{v}](\tau,x)\,\mathrm{d}x &+ \int_0^\tau \Big(f(\mathbf{u}(t)) - f(\mathbf{v}(t)), \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^\tau \Big(g(\mathbf{u}'(t)) - g(\mathbf{v}'(t)), \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)\Big)\,\mathrm{d}t = 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Lemma 4.6. *Nechť* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *jsou slabá řešení rovnice* (4.1) *splňující pro všechna* $\tau \in (0,T]$ *rovnost* (4.38). *Potom* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Důkaz. Díky lokální lipschitzovskosti $f\colon W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ (viz také Lemma 9.5) a monotonii funkce g získáme odhad

$$\int_\Omega \mathcal{E}[\mathbf{u}-\mathbf{v}](T,x)\,\mathrm{d}x \le C\int_0^T \|\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|\mathbf{u}'(t)-\mathbf{v}'(t)\|_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t. \tag{4.39}$$

Následným aplikováním Youngovy nerovnosti na pravou stranu (4.39) a použitím Gronwallovy nerovnosti obdržíme závěr dokazovaného tvrzení. □

Z teorie regularit pochází účinná metoda, jež činí korektními obdobné formální postupy (ve kterých je potřeba testovat rovnici funkcí vyšší regularity než máme k dispozici). Místo příslušných derivací testujeme rovnici diferencemi (numerickými aproximacemi derivace), jejichž regularita je zpravidla vyšší. Formálně odvozené vztahy pak ospravedlní limitní přechod. Část §8.2.2 poskytuje abstraktní rámec, jenž poslouží ke korektnímu odvození rovnosti (4.38) pro dvě slabá řešení.

Věta 4.7. *Existuje nejvýše jedno slabé řešení úlohy* (4.1).

Důkaz. Nechť $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou slabá řešení pro stejná data. Položme $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Potom $\mathbf{w}$ splňuje (4.2) a $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}'(0) = 0$. Označme $D^h[\mathbf{w}]$ časovou symetrickou diferenci funkce $\mathbf{w}$ pro $h > 0$ (přesná definice je uvedena v §8.2.2). Jak vyplývá z Lemmatu 8.15 a Pozorování 4.1, platí rovnost (4.5) pro $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ a testovací funkci $\psi = D^h[\mathbf{w}]$. Získáme tedy

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \Big(\mathbf{w}'(t), \big(D^h[\mathbf{w}]\big)'(t)\Big)\,\mathrm{d}t + \Big(\mathbf{w}'(T), D^h[\mathbf{w}](T)\Big) \\
&+\int_0^T \Big(\nabla\mathbf{w}(t), \nabla D^h[\mathbf{w}](t)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \Big(g(\mathbf{u}'(t)) - g(\mathbf{v}'(t)), D^h[\mathbf{w}](t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&+\alpha\int_0^T \Big(\mathbf{w}(t), D^h[\mathbf{w}](t)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \Big(f(\mathbf{u}(t)) - f(\mathbf{v}(t)), D^h[\mathbf{w}](t)\Big)\,\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Proveďme rozbor jednotlivých členů pro $h \to 0$.

Aplikací první části Lemmatu 8.16 pro Hilbertův prostor $W_0^{1,2}$ obdržíme

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left(\int_0^T \Big(\nabla\mathbf{w}(t), \nabla D^h[\mathbf{w}](t)\Big)\,\mathrm{d}t + \alpha\int_0^T \Big(\mathbf{w}(t), D^h[\mathbf{w}](t)\Big)\,\mathrm{d}t\right) \\
&\quad= \frac{1}{2}\Big(\|\nabla\mathbf{w}(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|\mathbf{w}(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).
\end{aligned}$$

Druhá část zmiňovaného lemmatu pro $H = L^2(\Omega)$ zase zajišťuje limitní přechod

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left(-\int_0^T \Big(\mathbf{w}'(t), \big(D^h[\mathbf{w}]\big)'(t)\Big)\,\mathrm{d}t + \Big(\mathbf{w}'(T), D^h[\mathbf{w}](T)\Big)\right) \\
&\quad= \frac{1}{2}\|\mathbf{w}'(T)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

K ověření identity (4.38) (a tedy dle Lemmatu 4.6 k dokončení důkazu jednoznačnosti) postačuje ukázat alespoň pro nějakou podposloupnost h_n konvergující k nule

$$D^{h_n}[\mathbf{w}] \rightharpoonup \mathbf{w}' \quad \text{v } L^{\mu+1}\big(0,T; L^{\mu+1}(\Omega)\big).$$

Potom je totiž možné limitně přejít v posledních dvou výrazech (4.40).

Funkce $D^h[\mathbf{w}]$ jsou stejně omezeny v prostoru $L^{\mu+1}\left((0,T); L^{\mu+1}(\Omega)\right)$ (viz (8.7) v Lemmatu 8.15 níže). Z reflexivity tohoto prostoru existuje slabě konvergentní posloupnost $\{D^{h_n}[\mathbf{w}]\}_{n\in\mathbb{N}}$, jejíž limitu značme $\tilde{\mathbf{w}}'$. S přihlédnutím k Lemmatu 9.1 postačuje ověřit $w_{h_n} \to \partial_t w$ skoro všude na $(0,T)\times\Omega$, kde w_{h_n} a $\partial_t w$ reprezentují $D^{h_n}[\mathbf{w}]$ a $\mathbf{w}'$. Bodová konvergence vhodných reprezentantů w_{h_n} ke slabé parciální derivaci $\partial_t w$ je však známým faktem - viz například [EG92], §4.9.2, Theorem 2. □

4.4 Konečná rychlost šíření vln

Je obecně známo, že klasická řešení lineární hyperbolické úlohy splňují konečnou rychlost šíření vln; přesněji jde o konečnou rychlost šíření „energie" (a to nejen v případě, kdy eliptický prostorový operátor odpovídá Laplaceovu operátoru[11]). Zároveň tato vlastnost implikuje jednoznačnosti klasických řešení.

Značení. Pro kladná reálná čísla R a τ splňující $\tau < R$ položme

$$K(x_0,\tau,R) = \left\{(t,x)\in(0,\tau)\times\mathbb{R}^d\colon |x-x_0| < R-t\right\}.$$

Geometricky se jedná o „zužující se" (komolý) kužel s podstavou o poloměru R a výškou τ.

Zároveň budeme značit λ_{d+1} Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^{d+1}$ a $\mathcal{H}_d$ d–dimenzionální Hausdorffovu míru na $\mathbb{R}^{d+1}$.

V prvním z následujících dvou Lemmat dokážeme, že „energie" řešení v rámci kuželů K závisí pouze na „energii" počátečních podmínek v rozsahu podstavy kužele a samozřejmě na „energii", kterou dodá pravá strana rovnice v rozsahu kužele. Druhé lemma (které nevyplývá, na rozdíl od lineární rovnice, z prvního lemmatu) pak zaručuje rovnost dvou řešení uvnitř časoprostorovém kuželu, shodují-li se počáteční podmínky na jeho podstavě.

Lemma 4.8. *Uvažujme* $\mathbf{u}$ *slabé řešením úlohy* (4.1) *s počátečními podmínkami* $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ *a s pravou stranou* $\mathbf{h} \in L^2\left((0,T);L^2(\Omega)\right)$. *Nechť dále* $0 < R \le T$ *a* $x_0 \in \Omega$. *Potom existuje* $C > 0$ *takové, že pro všechna* $\tau \in [0,R]$ *platí*

$$\int_{\Omega_\tau} \mathcal{F}[\mathbf{u}](\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x \le \left(1 + C\tau e^{C\tau}\right)\left(\int_{\Omega_0}\mathcal{F}[\mathbf{u}](0,\cdot)\,\mathrm{d}x + \int_0^R \|\mathbf{h}(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right), \tag{4.41}$$

kde $\Omega_s = \Omega_{x_0,s,R} = \Omega\cap B(x_0,R-s)$. *Konstanta* C *přitom závisí na* R.

Důkaz. Uvažujme nejprve $\mathbf{u}$ silné řešení pro daná regulární data. Rovnost (4.1) násobme funkcí $\partial_t u$ (viz také Pozorování 4.2) a proveďme integraci přes množinu $K = K(x_0,\tau,R)\cap\Omega$. Funkce $\partial_t u$ náleží $W^{1,2}((0,T)\times\Omega)$ a stejně tak i ∇u.

[11] V §7.2.4 monografie [Eva10] je uvedena souvislost mezi koeficienty u druhých prostorových derivací hyperbolické rovnice a Riemannovu metrikou, jíž se rychlost šíření vlny řídí. Operátor $\triangle$ potom indukuje klasickou eukleidovskou metriku, čemuž odpovídá charakteristický časoprostorový kužel.

Obdobnými postupy jako ve výše uvedených apriorních odhadech (oprávněnost jednotlivých operací plyne z §8.1) získáme

$$\int_K \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u]\,\mathrm{d}\lambda_{d+1} - \int_K \operatorname{div}(\nabla u\,\partial_t u)\,\mathrm{d}\lambda_{d+1} + \int_K g(\partial_t u)\,\partial_t u\,\mathrm{d}\lambda_{d+1} = \int_K (h - f_2(u))\,\partial_t u\,\mathrm{d}\lambda_{d+1}.$$

Použitím Gaussovy-Greenovy věty[12] pro sobolevovské funkce (viz Lemma 8.5) můžeme předchozí rovnost přepsat do tvaru

$$\int_{\partial K} \mathcal{F}[u]\,\nu_t\,\mathrm{d}\mathcal{H}_d - \int_{\partial K} \nabla u \bullet \overrightarrow{\nu_x}\,\partial_t u\,\mathrm{d}\mathcal{H}_d + \int_K g(\partial_t u)\partial_t u\,\mathrm{d}\lambda_d = \int_K (h - f_2(u))\partial_t u\,\mathrm{d}\lambda_d, \tag{4.42}$$

kde $\overrightarrow{\nu}(t,x) = (\nu_t(t,x), \overrightarrow{\nu_x}(t,x))$ značí vnější normálový vektor k hranici K, který existuje v $\mathcal{H}_d$–skoro každém bodě ∂K. Uvědomme si, že

$$\nu_t(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } (t,x) \in \Omega_\tau, \\ -1, & \text{pro } (t,x) \in \Omega_0, \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\nu_x}(t,x) = \begin{cases} \overrightarrow{0}, & \text{pro } (t,x) \in \Omega_\tau, \\ \overrightarrow{0}, & \text{pro } (t,x) \in \Omega_0. \end{cases}$$

Dále si označme $P = \partial K \backslash (\Omega_0 \cup \Omega_\tau)$ a položme

$$P_1 = P \cap \partial\Omega, \quad P_2 = P \backslash P_1.$$

Z regularity silného řešení plyne $\partial_t u = 0$ na množině P_1 (kde rovnost uvažujeme ve smyslu stop), zde také $\nu_t = 0$ (až na podmnožinu Hausdorffovy míry nula). Pro $(t,x) \in P_2$ zase platí $\nu_t(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $|\overrightarrow{\nu_x}(t,x)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dle uvedeného tedy rovnost (4.42) přejde v

$$\int_{\Omega_\tau} \mathcal{F}[u](\tau,\cdot)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} \mathcal{F}[u](0,\cdot)\,\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{P_2} \mathcal{F}[u]\,\mathrm{d}\mathcal{H}_d - \int_{P_2} \nabla u \bullet \overrightarrow{\nu_x}\,\partial_t u\,\mathrm{d}\mathcal{H}_d + \int_K g(\partial_t u)\,\partial_t u\,\mathrm{d}\lambda_{d+1} = \int_K (h - f_2(u))\,\partial_t u\,\mathrm{d}\lambda_{d+1}. \tag{4.43}$$

Odhadujme pomocí Youngovy nerovnosti na člen $|\nabla u\, u_t|$ výraz

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{P_2} \mathcal{F}[u]\,\mathrm{d}\mathcal{H}_d - \int_{P_2} \nabla u \bullet \overrightarrow{\nu_x}\,\partial_t u\,\mathrm{d}\mathcal{H}_d \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{P_2}\left(\mathcal{F}[u] - \frac{1}{2}|u_t|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}\mathcal{H}_d \geq 0, \tag{4.44}$$

přičemž oprávněnost těchto operací plyne z dodatečných vlastností operátoru stop, které je možné nalézt v Lemmatu 8.3. Použitím (4.43), (4.44), (G_2) a Youngovy nerovnosti na člen $|(h - f_2(u))\,\partial_t u|$ získáme

$$\int_{\Omega_\tau} \mathcal{F}[u](\tau,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} \mathcal{F}[u](0,\cdot)\,\mathrm{d}x \leq \tilde{Q}(f_2,h) + \frac{1}{2}\int_K |\partial_t u|^2\,\mathrm{d}\lambda_{d+1},$$

[12] vzhledem k časové a prostorové složce

kde

$$\tilde{Q}(f_2, h) = \frac{1}{2}\int_K |f_2(u)|^2 + |h|^2 \,\mathrm{d}\lambda_{d+1} \leq \frac{\gamma_5}{2}\int_K |u|^2 \,\mathrm{d}\lambda_{d+1} + \frac{1}{2}\int_K |h|^2 \,\mathrm{d}\lambda_{d+1}$$
$$\leq \gamma_5 \int_0^\tau \int_{\Omega_t} \mathcal{F}[u](t,\cdot)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_K |h|^2 \,\mathrm{d}\lambda_{d+1}.$$

Nerovnost (4.41) potom odvodíme aplikací Gronwallovy nerovnosti na (vzhledem k regularitě $\mathbf{u}$ spojitou) funkci $t \mapsto \int_{\Omega_t} \mathcal{F}[\mathbf{u}](t,x)\,\mathrm{d}x$.

Nechť $\mathbf{u}$ je slabé řešení pro počáteční podmínky $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ a pravou stranu $h \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$. Vezměme si libovolnou posloupnost regulárních dat (u_0^n, u_1^n) konvergující k (u_0, u_1) ve $W_0^{1,2} \times L^2$ a dále funkcí h_n třídy $W_0^{1,2}((0,T)\times\Omega)$ konvergující k $\mathbf{h}$ v $L^2((0,T); L^2(\Omega))$. Přihlédneme-li k Větě 4.4 (o stabilitě) a k jednoznačnosti slabých řešení, vidíme, že pro všechna $t \in (0,T)$ platí

$$\|\mathbf{u_n}(t) - \mathbf{u}(t)\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0,$$
$$\|\mathbf{u_n}'(t) - \mathbf{u}'(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Aplikací Lemmatu 9.5 získáme

$$\|F(\mathbf{u_n}(t)) - F(\mathbf{u}(t))\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|\mathbf{u_n}(t) - \mathbf{u}(t)\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \tag{4.45}$$

proto tedy pro libovolné $\tau \in (0,R)$

$$\int_{\Omega_\tau} \mathcal{F}[\mathbf{u_n}](\tau,x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_\tau} \mathcal{F}[\mathbf{u}](\tau,x)\,\mathrm{d}x.$$

Ze silné konvergence také

$$\|\mathbf{h_n} - \mathbf{h}\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} \to 0.$$

Uvedené konvergence samozřejmě platí i vzhledem k normám na podmnožinách, tudíž nerovnost (4.41) splňují i slabá řešení.

□

Pozorování 4.9. Nechť $\mathbf{u}$ je řešením úlohy (4.1) s počátečními podmínkami s nosičem v $B(x_0,R) \subseteq \Omega$ a pravou stranou s nosičem v $K = K(x_0,\tau,R)$. Potom u musí být nulové v rámci každého „kuželu“ $K' = K(y_0,\tau,r) \cap \Omega$, pokud $B(x_0,R) \cap B(y_0,r) = \emptyset$. Takže pro všechna $t \in (0,\tau)$ má $\mathbf{u}(t)$ nosič v $B(x_0, R+t)$. Z čehož plyne oprávněnost pojmu „konečná rychlost šíření“.

V následujícím lemmatu a důkazu zachovejme značení jako v Lemmatu 4.8. Všimněme si, že se jedná o lokalizovanou verzi Věty o stabilitě.

Lemma 4.10. *Nechť* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *jsou slabá řešení úlohy* (4.1) *s počátečními podmínkami* (u_0,u_1) *a* (v_0,v_1) *a s pravými stranami* $\mathbf{h}$ *a* $\tilde{\mathbf{h}}$. *Uvažujme* $x_0 \in \Omega$, $0 < R \leq T$ *a značme* $\Omega_s = B(x_0, R-s)$. *Potom pro rozdíl řešení* $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ *platí*

$$\|\mathbf{w}'(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_\tau)} + \|\mathbf{w}(\tau)\|^2_{W^{1,2}(\Omega_\tau)} \tag{4.46}$$
$$\leq \left(1 + C\tau e^{C\tau}\right)\left(\|\mathbf{w}'(0)\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\mathbf{w}(0)\|^2_{W^{1,2}(\Omega_0)} + \int_0^R \|\mathbf{h}(t) - \tilde{\mathbf{h}}(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)}\,\mathrm{d}t\right)$$

pro libovolné $\tau \in (0,R)$. *Konstanta* C *přitom závisí na* R *a pouze na datech úloh v rámci kuželu, konkrétně na* $\|\mathbf{u}(0)\|_{W^{1,2}(\Omega_0)}$, $\|\mathbf{v}(0)\|_{W^{1,2}(\Omega_0)}$, $\|\mathbf{u}'(0)\|_{L^2(\Omega_0)}$ *a* $\|\mathbf{v}'(0)\|_{L^2(\Omega_0)}$.

Důkaz. Postupujme obdobně jako v předchozím důkazu – odhad (4.46) odvoďme pro silná řešení u a v s regulárními daty. Díky Větě o stabilitě ho pak můžeme převést na slabá řešení.

Rovnici (4.1) pro v odečteme od rovnice, kterou splňuje u. Rozdíl rovnic násobme funkcí $\partial_t w$ a integrujeme přes K. S lineární částí rovnice můžeme zacházet stejně jako v předchozím lemmatu. Získáme tak

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\tau} \mathcal{E}[w](\tau, x)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_0} \mathcal{E}[w](0, x)\,\mathrm{d}x + \int_K (g(\partial_t u) - g(\partial_t v))\,\partial_t w\,\mathrm{d}\lambda_{d+1} \\ = -\int_K (f(u) - f(v))\,\partial_t w\,\mathrm{d}\lambda_{d+1} + \int_K (h - \tilde{h})\partial_t w\,\mathrm{d}\lambda_{d+1}.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Obdobně jako dříve použijme Lemma 9.5 k odhadování

$$\int_0^\tau \|f(u) - f(v)\|^2_{L^2_{\Omega_t}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^\tau C_1(t)\|w\|^2_{W^{1,2}(\Omega_t)}\,\mathrm{d}t.$$

Funkce $C_1(t)$ závisí na míře Ω_t, konstantě sobolevovského vnoření a dále na mocninách $\|\mathbf{u}(t)\|_{W^{1,2}(\Omega_t)}$ a $\|\mathbf{v}(t)\|_{W^{1,2}(\Omega_t)}$. Ty jsou ovšem z nerovnosti (4.41) omezeny daty úlohy restringovanými na Ω_0. Stejně tak je omezena míra Ω_s a konstanty pro vnoření.[13] Proto existuje C_2 takové, že $C_1(t) \leq C_2$ nezávisle na t.

Využitím (G_2) získáme

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\tau} \mathcal{E}[w](\tau, x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\Omega_0} \mathcal{E}[w](0, x)\,\mathrm{d}x \\ + C_2 \int_0^\tau \int_{\Omega_t} \mathcal{E}[w](t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \|\mathbf{h}(t) - \tilde{\mathbf{h}}(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Odhad (4.46) pak plyne použitím Gronwallovy nerovnosti. □

Pozorování 4.11. Nechť Ω' je oblast s hladkou hranicí. Uvažujme kužel K tak, aby jeho podstava byla podmnožinou $\Omega \cap \Omega'$. Dále mějme $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ řešení uvažované rovnice na Ω a Ω' (v příslušném pořadí). Shodují-li se jejich počáteční podmínky a pravé strany v rámci kužele K ve smyslu předpokladu předchozího lemmatu, pak se řešení shodují v K. To je zcela zřejmé v případě silných řešení. Slabá řešení pak můžeme aproximovat silnými s daty shodující se v rámci kuželu K.

4.4.1 Odhady vyššího řádu

Je přirozené se ptát, zda v případě regulárních dat bude pro řešení platit obdoba (4.41) pro normy na prostoru $W^{1,2} \times W^{2,2}$.

První způsob, který k tomuto výsledku vede, je založen na myšlence opětovného použití již dokázaných výsledků pro časovou derivaci rovnice (4.1). Víme, že časové derivace silných řešení zderivovanou rovnici v jistém slabém smyslu splňují. Takto můžeme postupovat v případě lineárního g. Obecněji hraje v aplikaci tohoto postupu důležitou roli kvalita derivace funkce g.

[13] Jsou-li všechny řezy Ω_s převeditelné na Ω_0 difeomorfismy se stejnoměrně omezenými Jakobiány, potom i konstanty pro vnoření jsou stejně omezené (což je případ, kdy Ω je koule). Stačí též, aby existovalo konečně mnoho řezů takových, na které lze ostatní stejnoměrně omezenými difeomorfismy převést (což je případ Ω s hladkou hranicí).

Další možnost, již v našem případě zvolíme, spočívá ve využití kombinace Lemmatu 4.8 společně s odhady vyššího řádu na řešení na celém prostoru. Hlavní myšlenka v odvozování odhadů pro libovolné řešení u spočívá v konstrukci odhadu pro funkci v, která řeší úlohu s jinými daty a shoduje se s u na předem zvoleném kuželu K (dle Lemmatu 4.10). Pro tuto funkci si rozmyslíme, že je řešením rovnice na množině Ω', jejíž velikost úzce souvisí s rozměry kuželu K (a nikoliv na Ω). Na funkci v pak aplikujeme odhady druhého řádu (v rámci *celé* oblasti Ω').

Následující Lemma vyplývá přímo z věty [Eva10], Theorem 1, §5.4.[14] Důkaz pro případ $k = 1$ může čtenář nalézt v téže monografii (v případě k obecného je možné se odkázat na [AF03], Theorem 5.22).

Lemma 4.12 (Operátor rozšíření na funkce s nulovou stopou)**.** *Uvažujme $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty)$ a $\mathcal{C}^\infty$ oblasti U, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ splňující $\overline{U} \subseteq V$. Potom existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro libovolné $w \in W^{k,p}(U)$ existuje $\tilde{w} \in W_0^{k,p}(V)$, které rozšiřuje funkci w a navíc splňuje*

$$\|\tilde{w}\|_{W^{k,p}(V)} \leq C\|w\|_{W^{k,p}(U)}. \tag{4.49}$$

Konstanta C závisí pouze na U, V, m, k a p.

Lemma 4.13. *Nechť u_0, u_1 a h jsou regulární data a nechť u je silným řešením úlohy (4.1) pro tato data. Nechť $K = K(x_0, \tau, R)$ pro $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < \tau < R$ a $B(x_0, R) \subseteq \Omega$. Potom pro skoro všechna $t \in (0, \tau)$ platí*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}''(t)\|^2_{L^2(B(x_0,R-t))} + \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{W^{1,2}(B(x_0,R-t))} + \|\mathbf{u}(t)\|^2_{W^{2,2}(B(x_0,R-t))} \\ &\leq Q\left(R, \|u_1\|_{L^{2\mu}(B(x_0,R))}, \|u_1\|_{W^{1,2}(B(x_0,R))}, \|u_0\|_{W^{2,2}(B(x_0,R))}, \|h\|_{W^{1,2}((0,T)\times\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Důkaz. Podle Lemmatu 4.12 nalezneme k restrikcím u_0 a u_1 na kouli $B(x_0, R)$ rozšíření $\tilde{u}_0 \in W_0^{2,2}(B(x_0, 2R))$ a $\tilde{u}_1 \in W_0^{1,2}(B(x_0, 2R)) \cap L^{2\mu}(\Omega)$. Obdobně nalezneme $\tilde{h} \in W_0^{1,2}((0, T) \times B(x_0, 2R))$ rozšiřující $h\restriction_K$ a splňující (4.49).[15] Nechť $\tilde{u}$ je silným řešením rovnice (4.1) na $\Omega' = B(0, 2R)$ s počátečními podmínkami $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ a pravou stranou $\tilde{h}$. Pro $\tilde{u}$ platí nerovnosti (4.18) a (4.25), jež závisejí pouze na datech úlohy (zdůrazněme, že součástí odhadu je míra množiny $B(x_0, 2R)$, která závisí pouze na R). Normy dat s vlnkou můžeme odhadnout pomocí (4.49). Dle Lemmatu 4.10 se $\tilde{u}$ shoduje s u na K, což zaručuje splnění nerovnosti (4.50). $\square$

[14] Jedná se o Whitneyovu konstrukci rozšíření sobolevovské funkce, jak je poznamenáno v [AF03].

[15] Množina K sice není hladká, nicméně můžeme obdobnými technikami jako v odkazovaných důkazech prodloužit h nejprve na komolý kužel K' rozšiřující K. Potom nalezneme $\mathcal{C}^\infty$ oblast L splňující $K \subseteq L \subseteq K'$, na kterou aplikujeme přislušné lemma.

5. Korektnost úlohy na $\mathbb{R}^d$

Jak bývá v moderní teorii diferenciálních rovnic obvyklé, otázka existence řešení a jeho vlastnosti úzce souvisí s výběrem fázového prostoru a s definicí pojmu řešení. Již bylo poznamenáno výše, že příhodným fázovým prostorem pro asymptotickou analýzu rovnic na neomezené oblasti jsou lokálně uniformní prostory (případně součin lokálně uniformních prostorů).

V evolučních úlohách na omezené oblasti se mezi požadavky na slabé řešení zahrnuje jistá forma spojitosti vzhledem k časové proměnné. Konkrétní takovou podmínkou je spojitost trajektorií ve fázovém prostoru úlohy.[1]

Dále budeme používat následující značení pro prostory s jejich přirozenými normami:

$$\begin{aligned}
\Phi_b &= W_b^{1,2} \times L_b^2, \\
\widehat{\Phi}_b &= \widehat{W}_b^{1,2} \times \widehat{L}_b^2, \\
\Phi_{\varepsilon,\bar{x}} &= W_{\varepsilon,\bar{x}}^{1,2} \times L_{\varepsilon,\bar{x}}^2.
\end{aligned}$$

Jak uvidíme níže, konkrétně v Příkladu 5.4, zaručení regularity $\mathcal{C}([0,\infty);\Phi_b)$ pro počáteční podmínky z Φ_b není obecně možné. Řešení dokonce nemusí být silně měřitelné v kontextu Bochnerových prostorů. Jde o důsledek omezujících vlastností prostoru Φ_b, ke kterým patří především neseparabilita a nemožnost aproximace hladkými funkcemi.[2]

Níže uvedená definice byla motivována články [GPS10], [Zel01] a [Zel03]. Od řešení budeme vyžadovat spojitost vzhledem k slabším topologiím na fázovém prostoru Φ_b.

Definice. Buďte $(u_0,u_1) \in \Phi_b$ a $\mathbf{h} \in L^2\left((0,T);L_b^2(\mathbb{R}^n)\right)$. Řekneme, že vektorová funkce $\mathbf{u}$ je *slabým řešením* úlohy (3.1), jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathbf{u},\mathbf{u}') \in \mathcal{C}\left([0,\infty);\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}\right), \\
&\mathbf{u}' \in L_{\mathrm{loc}}^{\mu+1}\left([0,\infty);L_{\varepsilon,\bar{x}}^{\mu+1}\right), \\
&\|\mathbf{u}'\|_{L_b^2}^2 + \|\mathbf{u}\|_{W_b^{1,2}}^2 \in L_{\mathrm{loc}}^\infty([0,\infty)),
\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

$\mathbf{u}(0) = u_0$, $\mathbf{u}'(0) = u_1$ a pro všechna $\psi \in \mathcal{D}\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$ platí:

$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty \Big(\mathbf{u}'(t),\partial_t\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \Big(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \Big(\alpha\mathbf{u}(t),\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\infty \Big(g(\mathbf{u}'(t)),\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \Big(f(\mathbf{u}(t)),\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \Big(\mathbf{h}(t),\psi(t,\cdot)\Big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

[1] Obdobný pojem spojitosti poskytují mild-řešení v kontextu teorie semigrup.

[2] Analogickou nespojitost slabých řešení vzhledem k silné topologii Φ_b v případě parabolické rovnice je možné nalézt v článku [CD04], ve které protipříklad není konstruován. Autoři využívají teorie analytických semigrup (dodatečné odkazy je možné nalézt ve zmíněném článku), ve které hustota generátoru semigrupy ve fázovém prostoru je ekvivalentní „silné spojitosti“ slabých řešení v kontextu semigrup.

Pozorování 5.1 (Ekvivalentní verze rovnosti (5.2)). Vezměme si slabé řešení (4.1) a označme ho $\mathbf{u}$. Zcela analogicky k Pozorování 4.1 můžeme postupovat i na neomezené oblastí. Jediným rozdílem bude změna „energetického prostoru“. Vezměme $\psi \in \mathcal{D}((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ libovolné, potom $\psi\, \phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ má tutéž kvalitu. Platí proto

$$\begin{aligned} &-\int_0^\infty \Big(\mathbf{u}'(t), \partial_t \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t + \int_0^\infty \Big(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t \\ &+ \int_0^\infty \Big(g(\mathbf{u}'(t)) + \alpha \mathbf{u}(t) + f(\mathbf{u}(t)), \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \Big(\mathbf{h}(t), \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \Big(\nabla \mathbf{u}(t), \psi(t,\cdot)\nabla \phi_{\varepsilon,\bar{x}}\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Po formální stránce jde o téměř o stejnou rovnost, jakou byla výchozí. Jediným rozdílem je člen s $\nabla\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$, jenž se charakteristicky vyskytuje při použití prostorů s váhovou funkcí. Připomeňme si z Kapitoly 2 omezenost $\nabla\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ a berme T libovolné kladné. Zcela analogicky k Pozorování 4.1 můžeme uplatnit Lemma 8.18 „o seřezávání“ a argumenty o hustotě. Dojdeme tak k platnosti analogie (4.5) v kontextu $L^{(\mu+1)/\mu}_{\varepsilon,\bar{x}}$:

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \Big(\mathbf{u}'(t), \partial_t \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t + \Big(\mathbf{u}'(T), \psi(T,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} - \Big(\mathbf{u}'(0), \psi(0,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \qquad (5.4)\\ &+ \int_0^T \Big(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t + \int_0^T \Big(g(\mathbf{u}'(t)), \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t \\ &+ \int_0^T \Big(\alpha \mathbf{u}(t), \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t + \int_0^T \Big(f(\mathbf{u}(t)), \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \Big(\mathbf{h}(t), \psi(t,\cdot)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t - \int_0^T \Big(\nabla \mathbf{u}(t), \psi(t,\cdot)\nabla \phi_{\varepsilon,\bar{x}}\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Připomeňme si platnost vnoření

$$W^{1,2}_b \hookrightarrow L^{2d/(d-2)}_b \hookrightarrow L^{2d/(d-2)}_{\varepsilon,\bar{x}}, \tag{5.5}$$

která zajišťují vhodný odhad v prostorech s váhovou funkcí pro člen se zdrojovou nelinearitou. Argument založený na hustotě společně s Lemmatem 8.17 umožňuje rozšířit prostor přípustných testovacích funkcí (5.4) na

$$L^2_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty); W^{1,2}_{\varepsilon,\bar{x}}\right) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty); L^2_{\varepsilon,\bar{x}}\right) \cap L^{\mu+1}_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty); L^{\mu+1}_{\varepsilon,\bar{x}}\right). \tag{5.6}$$

5.1 Jednoznačnost řešení na neomezených oblastech

Ačkoliv slabá řešení splňují stejnou integrální rovnost, jakou je ta (jednoznačně daná) na omezené množině, není jejich jednoznačnost apriori jasná. Důvod spočívá v dodatečném požadavku na okrajovou podmínku na omezené množině. Jednoznačnost odvodíme energetickou metodou v kontextu prostorů s váhovou funkcí. Využijeme již osvědčenou metodu časových diferencí.

Věta 5.2. *Pro* $u_0 \in W^{1,2}_b$, $u_1 \in L^2_b$ *a* $h \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); L^2_b)$ *existuje nejvýše jedno slabé řešení* (3.1).

Důkaz. Buďte $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ dvě řešení úlohy pro daná data. Berme libovolné $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$. Zvolme $T > 0$ a ukažme $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{v}(\tau)$ pro $\tau \in [0, T]$. Všimněme si, že Lemmata 8.15 a 8.16 můžeme použít i v případě prostorů s váhovou funkcí. Obdobně jako ve Větě 4.7 tak obdržíme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}[\mathbf{w}](\tau, x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x + \int_0^\tau \Big(f(\mathbf{u}(t)) - f(\mathbf{v}(t)), \mathbf{w}'(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t \\ + \int_0^\tau \Big(g(\mathbf{u}'(t)) - g(\mathbf{v}'(t)), \mathbf{w}'(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \Big(\nabla \mathbf{w}(t), \mathbf{w}'(t)\, \nabla \phi_{\varepsilon,\bar{x}}\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Díky předpokladu (5.1) smíme použít Lemma 2.18, ze kterého plyne

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^\tau (f(\mathbf{u}(t)) - f(\mathbf{v}(t)), \mathbf{w}')_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t\right| \\ &\quad \leq \left(\sup_{t\in[0,\tau]} Q\left(\|\mathbf{u}(t)\|_{W_b^{1,2}}, \|\mathbf{v}(t)\|_{W_b^{1,2}}\right)\right) \int_0^\tau \|\mathbf{w}(t)\|_{W_{\varepsilon,\bar{x}}^{1,2}} \|\mathbf{w}'(t)\|_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t \\ &\quad \leq C_1 \int_0^\tau \|\mathbf{w}(t)\|^2_{W_{\varepsilon,\bar{x}}^{1,2}} + \|\mathbf{w}'(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Využitím uvedených odhadů a monotonie g získáváme pro libovolné $\tau \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}[\mathbf{w}](\tau, x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x \leq C_2 \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}[\mathbf{w}](t, x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.$$

Standardním použitím Gronwallova lemmatu a spojitosti vzhledem k času tudíž $\mathbf{w}(\tau) = 0$ pro $\tau \in [0, T]$ libovolné. □

5.2 Existence a dodatečné vlasntosti řešení

Věta 5.3. *Pro dané $u_0 \in W_b^{1,2}$, $u_1 \in L_b^2$ a $\mathbf{h} \in L^2_{\mathrm{loc}}([0, \infty); L_b^2)$ existuje slabé řešení úlohy* (3.1).

Důkaz. Postup rozdělme do několika kroků.

1. Pro $r > 0$ značme $B_r = B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme 1–lipschitzovskou funkci $\eta_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in B_{2n}, \\ 1 - \operatorname{dist}(x, B_{2n}), & \text{pro } x \in B_{2n+1} \setminus \overline{B_{2n}}, \\ 0, & \text{pro } x \in (B_{2n+1})^c. \end{cases}$$

Položme $u_0^n = u_0\, \eta_n\restriction_{B_{2n+1}}$, $u_1^n = u_1\, \eta_n\restriction_{B_{2n+1}}$ a všimněme si, že jde o vhodné počáteční podmínky k úloze (4.1) na omezené oblasti B_{2n+1} s pravou stranou $h_n = h\, \eta_n\restriction_{B_{2n+1}}$. Označme $\mathbf{u_n}$ vzhledem k času spojitého reprezentanta příslušného slabého řešení[3] na množině B_{2n+1} definovaného na časovém intervalu $[0, n]$.

Díky konečné rychlosti šíření (Lemma 4.10) pro všechna n, $j \in \mathbb{N}$ a $t \in [0, n]$ platí

$$\begin{aligned}\mathbf{u_n}(t)\restriction_{B_{2n-t}} &= \mathbf{u_{n+j}}(t)\restriction_{B_{2n-t}}, \\ \mathbf{u_n}'(t)\restriction_{B_{2n-t}} &= \mathbf{u_{n+j}}'(t)\restriction_{B_{2n-t}}.\end{aligned}$$

[3] jehož existence je zaručena Větou 4.5

Proto je korektní definovat funkce u a v předpisem přes $n \in \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{aligned} u(t,x) &= u_n(t,x) \\ v(t,x) &= v_n(t,x) \end{aligned}\right\} \quad \text{pro s. v. } (t,x) \in (0,n) \times B(0,n), \tag{5.9}$$

kde u_n a v_n jsou reprezentanty vektorových funkcí $\mathbf{u_n}$ a $\mathbf{u_n}'$.

2. Není těžké si rozmyslet, že u i v jsou měřitelné reálné funkce a náleží třídě $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Navíc na libovolné omezené podoblasti $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ se shodují s nějakým slabým řešením rovnice na omezené oblasti (viz Pozorování 4.11). Proto také $v = \partial_t u$ ve smyslu distribucí a zároveň existují slabé parciální derivace u podle x–ových proměnných. Navíc pro libovolné $\psi \in \mathcal{D}((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ platí (5.2).

3. Zvolme $T > 0$ libovolné. Počáteční podmínky náležejí do lokálně uniformních prostorů a pravá strana do $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); L^2_b)$, a proto využitím Lemmatu 4.8 pro $R = T + 1$ a libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^d$ a $t \leq T$ získáme

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}(t)\|^2_{W^{1,2}(B(x_0,1))} + \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2(B(x_0,1))} \\ &\qquad \leq C_1(T) \left(Q\left(\|u_0\|_{W^{1,2}_b}, T \right) + \|u_1\|^2_{L^2_b} + \|h\|_{L^2\left((0,T);L^2_b\right)} \right), \end{aligned} \tag{5.10}$$

kde Q získáme obdobným odhadem jako v (4.10). Přechod k supremu v nerovnosti (5.10) přes všechna $x_0 \in \mathbb{R}^d$ implikuje $(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t)) \in \Phi_b$ pro každé $t \in [0,T]$. Vzhledem ke stejnoměrnosti uvedeného odhadu pro pevné $T > 0$ je poslední požadavek (5.1) splněn. Spojitost vzhledem k fázovému prostoru $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ odvodíme pro časovou derivaci řešení (spojitost $\mathbf{u}$ lze získat zcela analogicky). Lemma 2.19 umožňuje pro libovolné $\delta > 0$ nalézt $R > 0$, pro něž platí nerovnost

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\bar{x},R)} |\partial_t u(t,x)|^2 \, \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \leq \delta$$

nezávisle na čase $t \in [0,T]$. Jak již bylo zmíněno, funkce u se shoduje na libovolném kuželu s nějakým slabým řešením na omezené množině. Na omezené množině je spojitost vzhledem k časové proměnné součástí definice, a proto

$$\int_{B(\bar{x},R)} |u(t+h,x) - u(t,x)|^2 \, \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \to 0 \quad \text{pro } h \to 0,$$

případně $h \to 0^+$, když $t = 0$. Nabývání počátečních podmínek je potom již snadným důsledkem.

4. Zbývá pro všechna $T > 0$ ukázat $\mathbf{u}' \in L^{\mu+1}\left((0,T); L^{\mu+1}_{\varepsilon,\bar{x}}\right)$. Pro tento účel se vraťme k funkcím $\mathbf{u_n}$. Obdobně jako ve větách o jednoznačnosti můžeme slabou verzi rovnice testovat funkcemi $D^h[\mathbf{u_n}]\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$, přičemž přechodem pro $h \to 0$ získáme[4]

$$\begin{aligned} &\int_{B_{2n+1}} \mathcal{F}[\mathbf{u_n}](T,x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x + \gamma_2 \int_0^T \int_{B_{2n+1}} |\mathbf{u_n}'|^{\mu+1} \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{B_{2n+1}} \mathcal{F}[\mathbf{u_n}](0,x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x - \int_0^T \int_{B_{2n+1}} \nabla \mathbf{u_n} \, \mathbf{u_n}' \, \nabla \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \, \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^T \int_{B_{2n+1}} (\mathbf{h} - f_2(\mathbf{u_n})) \, \mathbf{u_n}' \, \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.11}$$

[4] taktéž díky omezenosti a globální lipschitzovskosti $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$

Funkce $\mathbf{u_n}$ má nulovou stopu na hranici B_{2n+1}, a proto ji lze mimo tuto množinu rozšířit nulou se zachováním slabých prostorových derivací. Můžeme tedy v předchozí rovnosti uvažovat prostorový integrál přes celé $\mathbb{R}^d$. Již rutinními odhady vedoucími ke Gronwallovu lemmatu obdržíme nerovnost

$$\|\mathbf{u_n}'\|_{L^{\mu+1}\left((0,T);L^{\mu+1}_{\varepsilon,\bar{x}}\right)} \leq C,$$

kde C nezávisí na n. Z reflexivity vyplývá po přechodu k podposloupnosti konvergence

$$\mathbf{u_n}' \rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{v } L^{\mu+1}\left((0,T); L^{\mu+1}_{\varepsilon,\bar{x}}\right).$$

Důsledkem konstrukce řešení a konečné rychlosti šíření $\partial_t u_n \to \partial_t u$ skoro všude na $(0,T) \times \mathbb{R}^d$. Použitím Lemmatu 9.1 a shodě pojmu „skoro všude“ a „μ–skoro všude“ pro $\mu = \phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x$. □

Nabízí se otázka, zda neplatí $u \in \mathcal{C}([0,T];\Phi_b)$. Následující příklad ukazuje, že v případě vlnové rovnice nemusejí být slabá řešení ani silně měřitelná (jako vektorové funkce s oborem hodnot Φ_b). Z čehož plyne nespojitost vzhledem k času. Kvůli neměřitelnosti nepatří řešení do prostoru $L^\infty((0,T);\Phi_b)$.

Příklad 5.4. Pro $d = 1$ uvažujme rovnici

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u + \partial_t u + \frac{1}{4}u = 0 \tag{5.12}$$

s počátečními podmínkami $u_0 = \theta \in W^{1,2}_b$, $u_1 = \theta/2 - \theta'$, kde $'$ značí jednorozměrnou slabou derivaci.[5] Funkce tvaru „postupující vlny“ $u(t,x) = e^{-t/2}\,\theta(x-t)$ odpovídá slabému řešení ve smyslu uvedené definice. K tomu postačuje odvodit regularitu (5.1) pro funkce $\mathbf{u}$, (splnění rovnice ve smyslu distribucí je totiž snadnou aplikací integrace per–partes). Není těžké si rozmyslet, že derivací vektorové funkce $\mathbf{u}(t) = u(t,\cdot)$ je

$$\mathbf{u}'(t) = -e^{-t/2}\left(\frac{1}{2}\theta(\cdot - t) + \theta'(\cdot - t)\right).$$

Spojitost trajektorií (a tedy i nabývání počátečních podmínek) vzhledem k $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ vyplývá z Lemmatu 2.19 a spojitosti operátoru translace na „klasických“ Lebesgueových prostorech nad omezenou množinou. Zřejmě též pro skoro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t)) \in \Phi_b,$$

navíc velikosti jejich norem ve Φ_b klesají s časem.

Vhodnou volbou funkce θ můžeme docílit neměřitelnosti $\mathbf{u}\colon \mathbb{R} \to W^{1,2}_b$. Definujme pro tento účel funkci $\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem[6] pro $x \in \mathbb{R}$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot \chi_{[n, n+1/n^2]}(x).$$

Platí potom $\nu \in L^2_b$, nicméně pro různá t_1, $t_2 \in (0,1)$

$$\|\nu(t_1,\cdot) - \nu(t_2,\cdot)\|_{L^2_b} = 1. \tag{5.13}$$

[5] Tvar rovnice (přesněji konstanta 1/4 u členu u) a počátečních podmínek se dá nalézt „ansatzem“ $u(t,x) = \eta(t)\,\theta(x-t)$.

[6] všimněme si blízké souvislosti s Příkladem 2.13

Položme

$$\theta(x) = \int_0^x \nu(x) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Není těžké ukázat, že θ nabývá pouze hodnot z intervalu $[0,1]$ a ν je její slabou derivací. Proto také $\theta \in W_b^{1,2}$. Vezměme si $u = u(t,x) = e^{-t/2}\theta(x-t)$ a pro t_1, $t_2 \in (0,1)$ upravujme

$$\begin{aligned} &\partial_x u(t_1,\cdot) - \partial_x u(t_2,\cdot) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}\left(e^{-t_1/2} - e^{-t_2/2}\right)\theta(\cdot - t_1)}_{\kappa_1(t_1,t_2)} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t_2}\left(\theta(\cdot - t_1) - \theta(\cdot - t_2)\right)}_{\kappa_2(t_1,t_2)} \\ &+ \underbrace{\left(e^{-t_1/2} - e^{-t_2/2}\right)\nu(\cdot - t_1)}_{\kappa_3(t_1,t_2)} - \underbrace{e^{-t_2}\left(\nu(\cdot - t_1) - \nu(\cdot - t_2)\right)}_{\kappa_4(t_1,t_2)}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Zřejmě potom při použití formalismu malého „o“

$$\left.\begin{aligned} \|\kappa_1(t_1,t_2)\|_{L_b^2} &\le \mathrm{o}\big(|t_1 - t_2|\big)\,\|\theta\|_{L_b^2} \\ \|\kappa_3(t_1,t_2)\|_{L_b^2} &\le \mathrm{o}\big(|t_1 - t_2|\big)\,\|\nu\|_{L_b^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{pro } |t_1 - t_2| \to 0.$$

Dále použitím Jensenovy nerovnosti a Fubiniovy věty[7] obdržíme

$$\begin{aligned} \|\kappa_2(t_1,t_2)\|_{L_b^2}^2 &= \sup_{r\in\mathbb{R}} \int_r^{r+1} |\theta(x-t_1) - \theta(x-t_2)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\le \sup_{r\in\mathbb{R}} \int_r^{r+1} |t_1 - t_2| \int_{t_1}^{t_2} |\nu(x-s)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \le |t_1 - t_2|^2 \|\nu\|_{L_b^2}^2. \end{aligned}$$

Konečně díky (5.13) získáváme

$$\|\kappa_4(t_1,t_2)\|_{L_b^2} \ge e^{-1}.$$

Musí tedy existovat $\delta > 0$ takové, že pro všechna $0 < t_1 < t_2 < \delta$ platí

$$\|\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{u}(t_2)\|_{W_b^{1,2}} \ge \frac{1}{2e}. \tag{5.15}$$

Funkce $\mathbf{u}\colon \mathbb{R} \to W_b^{1,2}$ tudíž není (silně) měřitelná. Kdyby tomu tak bylo, potom dle Pettisovy věty (viz například Kapitola 8) musí být její obor hodnot esenciálně separabilní. Vynecháme-li z intervalu $(0,\delta)$ množinu nulové míry N, zbylá množina zůstává nespočetná. Proto dle (5.15) obsahuje $\theta(\mathbb{R}\setminus N)$ nespočetně mnoho různých prvků, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou odražené od nuly. Množina $\theta(\mathbb{R}\setminus N)$ tedy nemůže být separabilní (nezávisle na výběru množiny nulové míry), čímž jsme dospěli ke sporu s esenciální separabilitou.

Poznámka. Vzhledem k jednoznačnosti nemůže existovat jiné řešení úlohy z předchozího příkladu, jež by mělo spojité trajektorie vzhledem k Φ_b.

Lemma 5.5. *Uvažujme $u_0 \in W_b^{2,2}$, $u_1 \in W_b^{1,2} \cap L_b^{2\mu}$, $\mathbf{h} \in L^2_{\mathrm{loc}}\big([0,\infty); W_b^{1,2}\big) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty); L_b^2\right)$. Potom příslušné řešení (3.1) náleží do prostoru $\mathcal{C}([0,\infty); W_b^{1,2})$ a jeho časová derivace je třídy $\mathcal{C}([0,\infty); L_b^2)$.*

[7] bez újmy na obecnosti berme $t_1 < t_2$

Důkaz. Existence řešení vyplývá z Věty 5.3. Díky Lemmatu 4.13 jsou normy $\|\mathbf{u}(t)\|_{W_b^{2,2}}$, $\|\mathbf{u}'(t)\|_{W_b^{1,2}}$ a $\|\mathbf{u}''(t)\|_{L_b^2}$ stejně omezené pro t z každého pevně zvoleného omezeného intervalu. Odhady

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{u}(t_2)\|_{W_b^{1,2}} &\leq |t_1 - t_2| \sup_{s\in[t_1,t_2]} \|\mathbf{u}'(s)\|_{W_b^{1,2}},\\ \|\mathbf{u}'(t_1) - \mathbf{u}'(t_2)\|_{L_b^2} &\leq |t_1 - t_2| \sup_{s\in[t_1,t_2]} \|\mathbf{u}''(s)\|_{L_b^2},\end{aligned}$$

pak zaručují zmiňovanou spojitost. □

Následující lemma ukazuje, že v případě možnosti aproximace dat úlohy v prostoru Φ_b „regulárními daty“ (ve smyslu předchozího lemmatu) jsou trajektorie řešení spojité i vzhledem k silné topologii Φ_b.

Lemma 5.6. *Buďtě $u_0 \in \widehat{W}_b^{1,2}$, $u_1 \in \widehat{L}_b^2$ a $h \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); \widehat{L}_b^2)$. Potom slabé řešení $\mathbf{u}$ úlohy (3.1) splňuje $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \in \mathcal{C}([0,\infty); \Phi_b)$.*

Důkaz. Zřejmě se stačí omezit na důkaz spojitosti v čase na $[0,T]$ pro libovolné $T > 0$. Dle Lemmatu 2.15 existují posloupnosti $\{u_0^n\}$ a $\{u_1^n\}$ funkcí třídy $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ a posloupnost $\{h_n\}$ funkcí třídy $\mathcal{C}_b^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ takových, že

$$\begin{aligned} u_0^n &\to u_0 \quad \text{ve } \widehat{W}_b^{1,2},\\ u_1^n &\to u_1 \quad \text{v } \widehat{L}_b^2,\\ \mathbf{h_n} &\to \mathbf{h} \quad \text{v } L^2\left((0,T); \widehat{L}_b^2\right).\end{aligned}$$

Nechť $\mathbf{u_n}$ jsou příslušná řešení rovnice na neomezené oblasti. Prostorově stejnoměrná konvergence dat vzhledem k nerovnosti (4.46) (a Pozorování 4.11) postačuje ke cauchyovskosti $(\mathbf{u_n}, \mathbf{u_n}')$ v prostoru $\mathcal{C}([0,T]; \Phi_b)$. Limita této posloupnosti se shoduje s $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ na libovolném kuželu $K = K(x_0, \tau, R)$ díky jednoznačnosti a konečné rychlosti šíření. □

Pozorování 5.7. Všimněme si, že všechna tvrzení této i předchozí kapitoly zůstávají v platosti i v případě, kdy člen tlumení v rovnici chybí (v tomto případě $\mu = 1$). Stejně tak můžeme uvažovat rovnost v (3.2). Tyto předpoklady hrají důležitou roli až v případě asymptotických vlastností.

6. Asymptotické vlastnosti řešení

Analýzu vlnové rovnice na neomezené oblasti uzavřeme odvozením existence lokálně kompaktního atraktoru. Poznamenejme, že používané pojmy z teorie dynamických systémů může čtenář nalézt v Kapitole 7.

Před začátkem zesilme požadavky na rovnici – uvažujme dále pouze $\mu = 1$ a pravou stranu $h \in L^2_b$ nezávislou na časové proměnné.

Pro $t \in [0, \infty)$ definujme operátor $S_t \colon \Phi_b \to \Phi_b$ předpisem

$$S_t\big((u_0, u_1)\big) = \big(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t)\big),$$

kde $\mathbf{u}$ je slabým řešením rovnice (3.1) s počátečními podmínkami $(u_0, u_1) \in \Phi_b$. Symbolem $\mathcal{S}$ značme systém operátorů $\{S_t \colon t \in [0, \infty)\}$.

Poznámka. Lehce se ověří, že dvojice $(\Phi_b, \mathcal{S})$ splňuje „algebraické“ požadavky dynamického systému; zbývající spojitost operátorů S_t je dokázána níže. Trajektorie $t \mapsto S_t((u_0, u_1))$ jsou spojité vzhledem ke slabší topologii dané normou $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ pro $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ libovolné. Tato topologie se na Φ_b shoduje s $W^{1,2}_{\mathrm{loc}} \times L^2_{\mathrm{loc}}$.[1]

Lemma 6.1 (Spojitost operátorů S_t)**.** *Nechť $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$. Potom*

1. *zobrazení $S_t \colon (\Phi_b, \|\cdot\|_{\Phi_b}) \to (\Phi_b, \|\cdot\|_{\Phi_b})$ je lokálně lipschitzovské,*
2. *je-li $\mathcal{B}$ omezená ve Φ_b, je $S_t \colon (\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}}) \to (\Phi_b, \|\cdot\|_{\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}})$ lipschitzovské.*

Důkaz. První část tvrzení vyplývá téměř přímočaře z nerovnosti (4.46). Bereme-li počáteční podmínky z $B(0, R) \subseteq \Phi_b$, potom konstanta lipschitzovskosti vzhledem k $B(0, R)$ závisí R a na počtu jednotkových koulí v $\mathbb{R}^d$, jimiž se dá pokrýt koule o poloměru $t + 1$.

Při důkazu druhé části můžeme postupovat obdobně jako v případě Věty o stabilitě (Věta 4.4). Označme si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ slabá řešení s počátečními podmínkami (u_0, u_1), $(v_0, v_1) \in \mathcal{B}$ a odvozujme odhad pro rozdíl $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ v kontextu prostorů s váhovou funkcí. Formální testování $\mathbf{w}'$ standardně ospravedlníme pomocí techniky časových diferencí. Přebývající člen s derivací váhové funkce, konkrétně

$$\int_0^t \Big(\nabla \mathbf{w}(s), \mathbf{w}'(s) \nabla \phi_{\varepsilon,\bar{x}}\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}s,$$

snadno odhadneme použitím Youngovy nerovnosti. V odhadu

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \Big(f(\mathbf{u}(s)) - f(\mathbf{v}(s)), \mathbf{w}'(s)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}s \\
&\qquad \leq Q\left(\|u_0\|_{W^{1,2}_b}, \|v_0\|_{W^{1,2}_b}\right) \int_0^t \|\mathbf{w}(s)\|^2_{W^{1,2}_{\varepsilon,\bar{x}}} + \|\mathbf{w}'(s)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

použijeme Youngovu nerovnost a Lemma 2.18. Pomocí Gronwallovy nerovnosti poté obdržíme odhad

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}[\mathbf{w}](t, x)\, \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x \leq C(\mathcal{B}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}[\mathbf{w}](0, x)\, \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x,$$

z něhož zřejmě vyplývá závěr druhé části tvrzení. □

[1] viz Kapitola 7.

6.1 Disipativní odhad

Základní technika k odvození disipativního odhadu[2] pro hyperbolickou rovnici na omezené oblasti spočívá v testování rovnice funkcí $u_t + \delta u$, kde u je řešením příslušné rovnice a δ vhodné kladné reálné číslo.

Zmíněný postup se s mírnou obměnou dá aplikovat i v případě neomezených oblastí. Nejprve provedeme disipativní odhad vůči normě na prostorech s váhovou funkcí $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ pro vhodné $\varepsilon > 0$. Tento odhad (což je důsledek volby fázového prostoru) nebude záviset na $\bar{x}$, z čehož vyplyne disipativita vzhledem k Φ_b. Poznamenejme, že tento postup je charakteristický pro rovnice na neomezené množině.

Lemma 6.2. *Existují kladná reálná čísla ε, ζ, $\tilde{C}$ a C taková, že pro slabé řešení* $\mathbf{u}$ *úlohy* (3.1) *splňující počáteční podmínky* $(u_0, u_1) \in \Phi_b$ *platí nerovnost*[3]

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\mathbf{u})(T,x)\,\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x \leq \tilde{C} e^{-\zeta T} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\mathbf{u})(0,x)\,\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x + C \tag{6.1}$$

pro všechna $T > 0$.

Důkaz. Berme $T > 0$ a t_1, $t_2 \in [0, T]$ libovolné, $t_1 < t_2$. Jak jsme si již rozmysleli v částech o jednoznačnosti (Věta 4.7 a 5.2), můžeme metodou časových diferencí ospravedlnit testování (5.4) funkcí $\mathbf{u}' + \delta\,\mathbf{u}$, kde δ bude upřesněno níže. Získáme tak

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[\mathbf{u}](t_2,x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x + \delta\Big(\mathbf{u}'(t_2), \mathbf{u}(t_2)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \tag{6.2}$$

$$- \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[\mathbf{u}](t_1,x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x - \delta\Big(\mathbf{u}'(t_1), \mathbf{u}(t_1)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \tag{6.3}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \Big(g(\mathbf{u}'(t)), \mathbf{u}'(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}t - \delta \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}}\,\mathrm{d}t \tag{6.4}$$

$$+ \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(f_1(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}t + \delta \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} + \alpha\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}}\,\mathrm{d}t \tag{6.5}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big(h - f_2(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t) + \delta\mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}t - \delta\int_{t_1}^{t_2} \Big(g(\mathbf{u}'(t)), \mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}t \tag{6.6}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \Big(\nabla\mathbf{u}(t), (\mathbf{u}'(t) + \delta\mathbf{u}(t))\,\nabla\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}t. \tag{6.7}$$

Nejprve si uvědomme, že díky předpokladům na f_1 a nerovnosti (3.3) máme pro libovolné $\delta_1 \in (0,1)$ dolní dohad

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \Big(f_1(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}t &\geq \delta_1 \int_{t_1}^{t_2} \Big(f_1(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}t \\ &\geq \delta_1 \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d} F_1(\mathbf{u}(t)[x])\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \frac{\delta_1\beta}{2}\int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{6.8}$$

[2]disipativním odhadem myslíme nerovnost, která zaručuje existenci absorbující omezené množiny

[3]při zachování značení z Kapitoly 4

Dle předpokladu (G_3) obdržíme

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} \Big(g(\mathbf{u}'(t)), \mathbf{u}'(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t - \delta \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t \\ &\geq (\gamma_2 - \delta) \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t - \gamma_3 C_\varepsilon (t_2 - t_1),\end{aligned}$$

kde

$$C_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Pro $\delta_2 > 0$ libovolné pomocí Cauchyovy a Youngovy nerovnosti získáme[4]

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} \Big(h - f_2(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t) + \delta \mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\delta_2} \int_{t_1}^{t_2} \|h - f_2(\mathbf{u}(t))\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t \\ &+ \delta_2 \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t + \delta^2 \delta_2 \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Dále pak z omezenosti f_2 obdržíme

$$\frac{1}{2\delta_2} \int_{t_1}^{t_2} \|h - f_2(\mathbf{u}(t))\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\delta_2} (t_2 - t_1) \big(\|h\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} + \gamma_5^2 C_\varepsilon\big).$$

Obdobně jako v odhadu (6.9)

$$\begin{aligned}&- \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(g(\mathbf{u}'(t)), \mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t \leq \frac{\delta}{2\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \|g(\mathbf{u}'(t))\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t + \frac{\delta\alpha}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\gamma_4^2 \delta}{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t + \frac{\delta\alpha}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t + \frac{\gamma_4^2 \delta}{\alpha} C_\varepsilon (t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Pro odhad členu (6.7) využijeme globální lipschitzovskosti $\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ a obdobných obratů jako výše, dohromady

$$\begin{aligned}&- \int_{t_1}^{t_2} \Big(\nabla \mathbf{u}(t), (\mathbf{u}'(t) + \delta \mathbf{u}(t))\, \nabla \phi_{\varepsilon,\bar{x}}\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t \\ &\leq C_1 \varepsilon \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} + \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} + \delta^2 \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}} \,\mathrm{d}t \right).\end{aligned}$$

Lehce nahlédneme, že pro libovolné $\delta_3 > 0$ platí

$$\delta\delta_3 \int_{t_1}^{t_2} \Big(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t \geq -\frac{\delta_3 \delta}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}'(t)\|^2 \nabla \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t - \frac{\delta_3 \delta}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}(t)\|^2 \nabla \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}t.$$

[4]zároveň si uvědomme, že pro libovolnou normu platí $\|a + b\|^2 \leq 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.

Shrneme-li jednotlivé odhady, získáme

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[\mathbf{u}](t_2,x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x + \delta\Big(\mathbf{u}'(t_2),\mathbf{u}(t_2)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \\
&- \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[\mathbf{u}](t_1,x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x - \delta\Big(\mathbf{u}'(t_1),\mathbf{u}(t_1)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}} \\
&+ \left(\gamma_2 - \delta - \delta_2 - \frac{\gamma_4^2\delta}{\alpha} - C_1\varepsilon - \frac{\delta_3\delta}{2}\right)\int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}}\,\mathrm{d}t \\
&+ \delta\delta_1\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d} F_1(\mathbf{u}(t)[x])\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + (\delta - C_1\varepsilon)\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}}\,\mathrm{d}t \\
&+ \delta\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\delta_1\beta}{2} - C_1\delta\varepsilon - \frac{\delta_3}{2}\right)\int_{t_1}^{t_2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2_{\varepsilon,\bar{x}}}\,\mathrm{d}t \\
&+ \delta_3\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(\mathbf{u}'(t),\mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}t \le C_2(t_2-t_1),
\end{aligned}
$$

kde C_2 je kladné reálné číslo, jehož velikost nezávisí na T ani $\mathbf{u}$. Vhodnou volbou dosud volných parametrů (například v pořadí δ_1, δ, δ_2, ε a δ_3) můžeme nalézt $\zeta > 0$, pro které

$$
\eta(t_2) - \eta(t_1) + \zeta\int_{t_1}^{t_2}\eta(t)\,\mathrm{d}t \le C_2(t_2-t_1),
$$

kde

$$
\eta(t) = \int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}[\mathbf{u}](t,x)\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x + \delta\Big(\mathbf{u}'(t),\mathbf{u}(t)\Big)_{\varepsilon,\bar{x}}.
$$

Bez újmy na obecnosti jsme mohli navíc uvažovat $\delta < \min\{1,\alpha\}$, a tedy funkce η je nezáporná. Konstanty ζ a C_2 nezávisejí na T, jenž bylo bráno libovolné nezáporné. Z Gronwallovy nerovnosti (Lemma 9.4) pak pro všechna $T > 0$ platí

$$
\eta(T) \le e^{-\zeta T}\eta(0) + C_2.
$$

Odhad (6.1) konečně vyplývá z Cauchyovy a Youngovy nerovnosti použité na součin $\big(\mathbf{u}'(t),\mathbf{u}(t)\big)_{\varepsilon,\bar{x}}$. □

Věta 6.3. *Dynamický systém $(\Phi_b,\mathcal{S})$ je disipativní. Lze navíc nalézt omezenou uzavřenou absorbující množinu $\mathcal{B}$ v Φ_b, jež je pozitivně invariantní vůči $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Uvažujme ε takové, aby platila nerovnost (6.1). Pro $u_0 \in W_b^{1,2}$ použijme obdobný odhad jako v (4.10), nerovnost (2.6) a vnoření[5] z Pozorování 2.12. Obdržíme

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} F_1(u_0(x))\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x \le \gamma_7\int_{\mathbb{R}^d}|u_0|^{\rho+1}\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x + \gamma_7 C_\varepsilon \\
&\le \gamma_7\|u_0\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}_{\varepsilon,\bar{x}}} + \gamma_7 C_\varepsilon \le \gamma_7 C_1\|u_0\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}_b} + C_2 \le \gamma_7 C_3\|u_0\|^{\rho+1}_{W^{1,2}_b} + C_2,
\end{aligned}
$$

kde C_ε je jako v Lemmatu 6.2. Pokračujme v odhadování (6.1) následovně:

$$
\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}(\mathbf{u})(T,x)\,\phi_{\varepsilon,\bar{x}}\,\mathrm{d}x \le e^{-\zeta T}Q\left(\|u_0\|_{W^{1,2}_b},\|u_1\|_{L^2_b}\right) + C. \tag{6.10}
$$

[5] poznamenejme, že $\rho + 1 < 2d/(d+2)$

Z nezápornosti funkce F_1 taktéž

$$\sup_{\bar{x}\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(\mathbf{u})(T,x)\, \phi_{\varepsilon,\bar{x}} \,\mathrm{d}x \le e^{-\zeta T} Q\left(\|u_0\|_{W_b^{1,2}}, \|u_1\|_{L_b^2}\right) + C.$$

Konečně využitím vztahu mezi prostory s váhovou funkcí a lokálně uniformními prostory, konkrétně aplikací první nerovnosti v (2.6), získáváme

$$\|\mathbf{u}'(T)\|_{L_b^2}^2 + \|\mathbf{u}(T)\|_{W_b^{1,2}}^2 \le e^{-\zeta T} Q_1\left(\|u_0\|_{W_b^{1,2}}, \|u_1\|_{L_b^2}\right) + C_1.$$

Množina $\mathcal{B}_0 = B(0, C_1 + 1) \subseteq \Phi_b$ je tedy absorbující. Speciálně pro $\mathcal{B}_0$ existuje t_0, pro které $S_t(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathcal{B}_0$ kdykoliv $t \ge t_0$. Potom omezená množina

$$\bigcup_{t\ge t_0} S_t(\mathcal{B}_0)$$

je invariantní vůči semigrupě $\mathcal{S}$. Ze spojitosti jednotlivých operátorů S_t vyhovuje množina

$$\mathcal{B} = \overline{\bigcup_{t\ge t_0} S_t(\mathcal{B}_0)}^{\Phi_b}.$$

všem požadovaným vlastnostem. □

6.2 Existence lokálně kompaktního atraktoru

Přidejme ještě poslední předpoklad na g. Nechť existuje $\gamma > 0$ takové, že pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ platí $\gamma < g'(r) < 1/\gamma$.

Pro tento případ odvodíme slabší formu asymptotické kompaktnosti $(\Phi_b, \mathcal{S})$, a to konkrétně vzhledem k topologii Φ_{loc}. V případě vlnové rovnice se osvědčila metoda rozdělení řešení na kompaktní část a část, jež konverguje (stejnoměrně vzhledem k $\mathcal{B}$) k nulové funkci.[6]

Pro $\lambda \in (0,\infty)$ uvažujme neklesající funkci $m_\lambda \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty))$, která splňuje

$$\begin{aligned} m_\lambda(r) &= 0 \qquad \text{pro } 0 \le r \le \lambda,\\ m_\lambda(r) &= 1 \qquad \text{pro } r > \lambda + 1. \end{aligned}$$

Pro $(u_0, u_1) \in \mathcal{B}$ značme $\mathbf{u}$ slabé řešení rovnice (3.1). Dále uvažujme následující úlohy na $\mathbb{R}^d$:

$$\left.\begin{aligned} w_{tt} - \triangle w + g(w_t) + \alpha w &= (1 - m_\lambda(|x|))(-f(u) + h),\\ w(0,\cdot) &= 0,\\ w_t(0,\cdot) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

a

$$\left.\begin{aligned} v_{tt} - \triangle v + \alpha v &= -g(u_t) + g(w_t) + m_\lambda(|x|)(-f(u) + h),\\ v(0,\cdot) &= u_0(\cdot),\\ v_t(0,\cdot) &= u_1(\cdot). \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

[6]Na rozdíl od parabolických rovnic totiž nedochází u vlnové rovnice ke „zhlazování“ řešení v konečném čase.

Dle Věty 5.3 a Pozorování 5.7 existuje slabé globální řešení (6.11), značme ho $\mathbf{w}$. Táž věta implikuje následné existenci $\mathbf{v}$, slabého řešení (6.12). Součet $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ potom slabě řeší úlohu

$$\left.\begin{aligned} (v+w)_{tt} - \triangle(v+w) + \alpha(v+w) = -g(u_t) - f(u) - h,\\ (v+w)(0,\cdot) = u_0(\cdot),\\ (v_t+w_t)(0,\cdot) = u_1(\cdot). \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Vzhledem k Větě 5.2 o jednoznačnosti $\mathbf{u} = \mathbf{v}+\mathbf{w}$.

Lemma 6.4. *Existují $\tilde{\varepsilon}$, ζ a $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathcal{B})$ kladná reálná čísla taková, že pro libovolné $\lambda > 0$ a $(u_0, u_1) \in \mathcal{B}$ splňuje $\mathbf{v}$, řešení úlohy* (6.12)*, nerovnost*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}[\mathbf{v}](T,x)\phi_{\tilde{\varepsilon},0}\,\mathrm{d}x \le \tilde{C}\left(e^{-\zeta T} + \sup_{\tau\in[0,\infty)} \|m_\lambda f(\mathbf{u}(\tau))\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon},0}} + \|m_\lambda h\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon},0}}\right). \tag{6.14}$$

Důkaz. Pro $\mathbf{u}$ a $\mathbf{w}$, řešení příslušných rovnic, platí

$$g(\mathbf{u}') - g(\mathbf{w}') = \left(\int_0^1 g'(s\mathbf{u}' + (1-s)\mathbf{w}')\,\mathrm{d}s\right)\mathbf{v}'.$$

Vzhledem k dodatečné podmínce na nelineární člen g platí

$$0 < \gamma \le \int_0^1 g'(s\mathbf{u}' + (1-s)\mathbf{w}')\,\mathrm{d}s \le 1/\gamma$$

pro skoro všechna $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. Dále můžeme postupovat jako v Lemmatu 6.2 – testovat rovnici funkcí $(v_t + \delta v)\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ a odvozovat odhady. Explicitně uveďme pouze ty nerovnosti, jež v důkazu Lemmatu 6.2 přímo nefigurují:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big(g(\mathbf{u}'(t)) - g(\mathbf{w}'(t)), \mathbf{v}'(t)\Big)_{\tilde{\varepsilon},0}\,\mathrm{d}t - \delta\int_0^T \|\mathbf{v}'(t)\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon},0}}\,\mathrm{d}t\\ &\ge (\tilde{\gamma}-\delta)\int_0^T \|\mathbf{v}'(t)\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon},0}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} &\delta\int_0^T \Big(g(\mathbf{u}'(t)) - g(\mathbf{w}'(t)), \mathbf{v}(t)\Big)_{\tilde{\varepsilon},0}\,\mathrm{d}t\\ &\quad\le \frac{\delta}{2\tilde{\gamma}^2\alpha}\int_0^T \|\mathbf{v}'(t)\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon},0}}\,\mathrm{d}t + \frac{\delta\alpha}{2}\int_0^T \|\mathbf{v}(t)\|^2_{L^2_{\tilde{\varepsilon},0}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Využitím stejných postupů jako v části o disipativitě[7] získáme pro $\mathbf{v}$ odhad analogický (6.10), z něhož plyne dokazované tvrzení. □

Parametr $\tilde{\varepsilon}$ odvozený v předchozím lemmatu si pro další postup fixujme.

[7]všimněme si, že díky dodatečným předpokladům na data zmizely z odhadů konstanty C_ε

Důsledek 6.5. *Pro libovolné $\delta > 0$ existuje λ a T_0 splňující*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}[\mathbf{v}](T_0, x)\phi_{\bar{\varepsilon},0}\,\mathrm{d}x \leq \delta$$

pro všechna $\mathbf{v}$ *řešící úlohu* (6.12) *s počátečními podmínkami* $(u_0, u_1) \in \mathcal{B}$.

Důkaz. Normy $\|f(\mathbf{u})\|_{L^2_b}$ jsou stejně omezené nezávisle na počátečních podmínkách z $\mathcal{B}$. Vzhledem k tomu, že $h \in L^2_b$, plyne tvrzení z nerovnosti (6.14) přihlédnutím k Lemmatu 2.19. □

Lemma 6.6. *Nechť λ a T_0 jsou libovolná kladná reálná čísla. Potom je množina*

$$\{(\mathbf{w}(T_0), \mathbf{w}'(T_0))\colon \mathbf{w} \textit{ řeší } (6.11) \\ \textit{pro } \mathbf{u} \textit{ s počátečními podmínkami } (u_0, u_1) \in \Phi_b\}$$

kompaktní v $\Phi_{\bar{\varepsilon},0}$.

Důkaz. Všimněme si, že data pro úlohu (6.11) jsou kompaktně nesená. Díky konečné rychlosti šíření, přesněji Lemmatu 4.8, a jednoznačnosti slabých řešení je funkce $\mathbf{w}$ pro $t \in [0, T_0]$ řešením úlohy (4.1) na *omezené* množině

$$\tilde{B} = B(\lambda + 1 + T_0).$$

Uvažujme zobrazení $\Psi\colon L^2((0,T_0) \times \tilde{B}) \to W^{1,2}(\tilde{B}) \times L^2(\tilde{B})$ definované předpisem[8]

$$\Psi(\tilde{h}) = (\tilde{\mathbf{w}}(T_0), \tilde{\mathbf{w}}'(T_0))$$

kde $\mathbf{w}$ je řešením úlohy

$$\tilde{w}_{tt} - \triangle\tilde{w} + g(\tilde{w}_t) + \alpha\tilde{w} = \tilde{h}$$

na omezené množině $\tilde{B}$ s nulovou stopou na hranici a s nulovými počátečními podmínkami.

Věta 4.4, speciálně nerovnost (4.34), zaručuje spojitost operátoru Ψ. Uvažujme množinu

$$\mathcal{P} = \{(f(u) + h)\restriction_{(0,T_0)\times\tilde{B}}\colon \mathbf{u} \text{ splňuje } (3.1) \text{ s } (u_0, u_1) \in \mathcal{B}\}.$$

Připomeňme, že z růstového předpokladu (F_2) a ostré nerovnosti (3.2) platí pro vhodné $c > 0$ odhady

$$\|f(\mathbf{u})\|_{L^2\left((0,T_0);L^2(\tilde{B})\right)} \leq Q_1\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2\left((0,T_0);W^{1,2}(\tilde{B})\right)}\right),$$
$$\|f'(\mathbf{u})\|_{L^2\left((0,T_0);L^{d+c}(\tilde{B})\right)} \leq Q_2\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2\left((0,T_0);W^{1,2}(\tilde{B})\right)}\right).$$

Dle Hölderovy nerovnosti potom

$$\|f'(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\|_{L^2\left((0,T_0);L^q(\tilde{B})\right)} \leq Q_3\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2\left((0,T_0);W^{1,2}(\tilde{B})\right)}\right),$$
$$\|f'(\mathbf{u})\mathbf{u}'\|_{L^2\left((0,T_0);L^q(\tilde{B})\right)} \leq Q_4\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2\left((0,T_0);W^{1,2}(\tilde{B})\right)}\right)$$

[8]vzhledem k časové spojitosti slabých řešení má definice smysl

pro $q > 2d/(d+2)$. Díky omezenosti $\mathcal{B}$ v Φ_b jsou předchozí odhady stejnoměrné pro $\mathbf{u}$ řešící rovnici (3.1) s počátečními podmínkami $(u_0, u_1) \in \mathcal{B}$. Funkce na kartézském součinu $(0, T_0) \times B$ reprezentující $f(\mathbf{u})$ jsou stejně omezené v prostoru $W^{1,q}((0, T_0) \times B)$, který je kompaktně vnořený do $L^2((0, T_0) \times B)$. Proto je také množina

$$\{f(u)\restriction_{(0,T_0)\times\tilde{B}} : \mathbf{u} \text{ splňující (3.1) s počátečními podmínkami } (u_0, u_1) \in \mathcal{B}\}$$

kompaktní v $L^2((0, T_0) \times \tilde{B})$. Odtud plyne kompaktnost $\mathcal{P}$ a následně i množiny $\Psi(\mathcal{P})$. Vzhledem k nulovým stopám funkcí $\tilde{\mathbf{w}}(T_0)$ na hranici $\tilde{B}$ můžeme tyto funkce rozšířit nulou na celý prostor $\mathbb{R}^d$ při zachování původních norem a kvalit funkcí. Ze spojitosti vnoření

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$$

následně plyne kompaktnost $\Psi(\mathcal{P})$ i vzhledem k $\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$. □

Finální část důkazu existence lokálně kompaktního atraktoru již odpovídá závěru z článku [Fei96]. Pro úplnost ji uveďme celou.

Položme

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t\geq 0} \overline{S_t(\mathcal{B})}^{\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}}.$$

Lemma 6.7. *Množina $\mathcal{A}$ je kompaktní vzhledem k $\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$.*

Důkaz. Vzhledem k definici je $\mathcal{A}$ zřejmě uzavřená a dle Důsledku 6.5 a Lemmatu 6.6 i kompaktní v $\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$. Pro libovolné $\delta > 0$ totiž nalezneme $T_0 > 0$, pro které $S_{T_0}(\mathcal{B})$, a tedy i $\overline{S_{T_0}(\mathcal{B})}^{\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}}$ a $\mathcal{A}$, pokryje konečná δ–síť příslušící metrice na $\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$. □

Lemma 6.8. *Nechť $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je rostoucí posloupnost časů jdoucí do nekonečna a buď $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost prvků z $\mathcal{B}$. Potom existuje vybraná posloupnost z $\{S_{t_n}(b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergující k prvku množiny $\mathcal{A}$ vzhledem k topologii na $\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$.*[9]

Důkaz. Díky Důsledku 6.5 a Lemmatu 6.6 existuje posloupnost $T_n \to \infty$ taková, že pro $S_{T_n}(\mathcal{B})$ existuje konečná $1/n$–síť. Případným přechodem k podposloupnostem a přeznačením můžeme docílit toho, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platilo $T_n < t_n < T_{n+1}$. Potom $\{S_{t_n}(b_n)\}_{n=j}^{\infty} = \{S_{T_j}(S_{t_n - T_j}(b_n))\}_{n=j}^{\infty}$, a tedy i $\{S_{t_n}(b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ musí být prekompaktní vzhledem k $\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$. □

Poznámka. Z definice $\mathcal{A}$ vyplývá, že každý její prvek se dá napsat jako $\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$–limita posloupnosti $\{S_{t_n}(b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pro $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jako v předchozím lemmatu.

Lemma 6.9. *Množina $\mathcal{A}$ je striktně invariantní vzhledem k $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Klíčovou roli v důkazu tvrzení hraje spojitost jednotlivých S_t vzhledem ke slabé topologii (druhá části Lemmatu 6.1). Je-li $a \in \mathcal{A}$, existuje posloupnost $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ a $t_n \to \infty$ splňující

$$S_{t_n}(b_n) \to a \quad \text{vzhledem k normě } \Phi_{\tilde{\varepsilon},0}.$$

[9] Jinými slovy – dynamický systém $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ je asymptoticky kompaktní vzhledem k topologii dané $\Phi_{\tilde{\varepsilon},0}$.

Pro libovolné $t \in [0, \infty)$ potom $S_{t_n}(b_n) = S_t(S_{t_n - t}(b_n))$ alespoň pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$. Vzhledem k Lemmatu 6.8 existuje $c \in \mathcal{A}$ a vybraná posloupnost z $S_{t_n - t}(b_n)$, kterou budeme značit stejně a pro niž platí

$$S_{t_n - t}(b_n) \to c \quad \text{vzhledem k normě } \Phi_{\bar{\varepsilon},0}.$$

Proto $a = S_t(c)$, a tedy $\mathcal{A} \subseteq S_t(\mathcal{A})$ pro libovolné $t \in [0, \infty)$.

K důkazu opačné inkluze berme $t \in [0, \infty)$ a libovolné $a = S_t(c)$ pro $c \in \mathcal{A}$. Existují posloupnosti $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $b_n \in \mathcal{B}$ a $t_n \to \infty$ splňující

$$S_{t_n}(b_n) \to c \quad \text{vzhledem k normě } \Phi_{\bar{\varepsilon},0}.$$

Díky spojitosti operátorů semigrupy $\mathcal{S}$ potom

$$a = S_t(c) = S_t\left(\lim_{n \to \infty} S_{t_n}(b_n)\right) = \lim_{n \to \infty} S_{t + t_n}(b_n),$$

a tedy $a \in \mathcal{A}$. □

Lemma 6.10. *Platí*

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{dist}_{\Phi_{\bar{\varepsilon},0}}(S_t(\mathcal{B}), \mathcal{A}) = 0.$$

Důkaz. Nechť pro spor existuje $\delta > 0$ a posloupnosti $t_n \to \infty$ a $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $b_n \in \mathcal{B}$, pro něž

$$\mathrm{dist}_{\Phi_{\bar{\varepsilon},0}}(S_{t_n}(b_n), \mathcal{A}) > \delta. \tag{6.15}$$

Z Lemmatu 6.8 plyne existence vybrané posloupnosti z $\{S_{t_n}(b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, která konverguje k prvku $\mathcal{A}$ vzhledem k $\Phi_{\bar{\varepsilon},0}$. To je však ve sporu s (6.15). □

Věta 6.11. *Množina $\mathcal{A}$ je lokálně kompaktním atraktorem dynamického systému $(\Phi_b, \mathcal{S})$.*

Důkaz. Uvědomme si, že topologie prostoru Φ_{loc} v restrikci na podprostor Φ_b je metrizovatelná metrikou odvozenou od normy $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ pevné (viz Kapitola 7).

Z Věty 6.3 a Lemmatu 6.10 plyne

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{dist}_{\Phi_{\bar{\varepsilon},0}}(S_t(B), \mathcal{A}) = 0$$

pro libovolnou omezenou množinu $B \subseteq \Phi_b$. S přihlédnutím k charakteristice lokálně kompaktního atraktoru (Lemma 7.3) tvrzení plyne z Lemmat 6.7, 6.9 a 6.10. □

Poznámka. Můžeme také nahlédnout, že díky invariantnosti je $\mathcal{A}$ jediná množina, jež splňuje podmínky lokálně kompaktního atraktoru.

Je-li pravá strana rovnice (3.1) konstantní funkcí, jedná se o autonomní rovnici i vzhledem k prostorovým proměnným, a proto $\mathcal{A}$ je navíc invariantní vůči prostorovému posunutí. Množina $\mathcal{A}$ navíc přitahuje omezené množiny Φ_b vzhledem k silnější topologii Φ_b (důkaz je možné nalézt v [Fei96]).

Je-li $f_2 = 0$ a h patří do uzávěru hladkých funkcí s kompaktním nosičem vzhledem k normě Φ_b, potom $\mathcal{A}$ je dokonce globálním atraktorem $(\Phi_b, \mathcal{S})$ (pro důkaz můžeme čtenáře odkázat na článek [Zel01], Chapter 6).

Část III

Dodatky

7. Pojmy z teorie dynamických systémů

V této části připomeneme matematickou strukturu, jež se používá při zkoumání vlastností řešení autonomních[1] evolučních rovnic pro velké časy. Zároveň uvedeme některé základní pojmy, které se s asymptotickými vlastnostmi pojí. Kvůli zaměření diplomové práce toto téma zdaleka nevyčerpáme. Ucelený obecný přehled může čtenář nalézt například v monografii [MZ08].

7.1 Základní definice

Pojem dynamického systému, poskytuje abstraktní rámec k analýze globálních[2] řešení evolučních rovnic. Tento pojem zachycuje charakteristickou algebraickou strukturu řešení korektně definovaných („well–posed“) úloh a zároveň poskytuje nástroj k „měření“. V případě parciálních diferenciálních rovnic jsou tímto nástrojem integrální metriky, které v širším významu odpovídají určité formě energie. V kontextu dynamických systémů je možné popsat důležité kvalitativní vlastnosti řešení rovnic. V této práci se zabýváme pouze pojmy *disipativita* a *atraktor*.[3]

Definice. *Dynamickým systémem* rozumíme dvojici $(X, \mathcal{S})$, kde $X = (X, \rho_X)$ značí metrický prostor s metrikou ρ_X a $\mathcal{S}$ systém zobrazení $\{S_t \colon t \in [0, \infty)\}$ z X do X, která splňují

- $S_0 = I$,
- $S_{t_1+t_2} = S_{t_1} \circ S_{t_2}$ pro libovolná t_1, $t_2 > 0$,
- pro všechna $t \in [0, \infty)$ jsou zobrazení $S_t \colon X \to X$ spojitá.

Množinu X nazýváme *fázovým prostorem* dynamického systému $(X, \mathcal{S})$, systém $\mathcal{S}$ potom *semigrupou* na X.

Vzdálenost mezi množinami fázového prostoru budeme měřit *Hausdorffovou semidistancí*[4] , kterou pro A, $B \subseteq X$ definujeme předpisem

$$\operatorname{dist}_{(X,\rho_X)}(A, B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \rho_X(x, y).$$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je dynamický systém.

- Řekneme, že množina $B \subseteq X$ je *pohlcující*, jestliže pro libovolnou omezenou množinu $C \subseteq X$ existuje $t_0 \geq 0$ splňující $S_t(C) \subseteq B$ pro všechna $t > t_0$.

[1] Autonomní rovnicí budeme rozumnět rovnici s daty nezávislými na čase.

[2] Definovaných pro všechny časy počínaje $t = 0$.

[3] Pro názornost uveďme, že tyto pojmy souvisejí se snahou popsat řešení rovnic pro velké časy „šetrnějším“ způsobem – zpravidla pomocí „malé“ množiny, která „přitahuje“ ostatní řešení (a to navíc v určitém stejnoměrném smyslu).

[4] Hausdorffova semidistance není metrikou. Rovnost $\operatorname{dist}_X(A, B) = 0$ totiž nastává, právě když $A \subseteq \overline{B}$.

- Nechť $D \subseteq X$. Řekneme, že D je *invariantní* (vůči semigrupě $\mathcal{S}$), jestliže $S_t(D) \subseteq D$ pro všecha $t \geq 0$.
- Nechť $D \subseteq X$. Řekneme, že D je *striktně invariantní* (vůči semigrupě $\mathcal{S}$), jestliže $S_t(D) = D$ pro všecha $t \geq 0$.
- Množinu $A \subseteq X$ nazveme *přitahující*, jestliže pro libovolnou omezenou množinu $B \subseteq X$ platí
$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_{(X,\rho_X)}(S_t(B), A) = 0.$$
- Dynamický systém $(X, \mathcal{S})$ nazveme „disipativním“, jestliže v něm existuje omezená pohlcující množina.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je dynamický systém a $\mathcal{A} \subseteq X$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *globálním atraktorem* (dynamického systému $(X, \mathcal{S})$), jestliže

- $\mathcal{A}$ je kompaktní,
- $\mathcal{A}$ je striktně invariantní,
- $\mathcal{A}$ je přitahující.

7.2 Slabší pojetí pojmu atraktor

Poznámka. V případě, kdy pro rovnice na neomezených oblastech uvažujeme fázový prostor s lokálně uniformní topologií, je kompaktnost z definice atraktoru velmi silným požadavkem. Pro ilustraci můžeme uvést příklad uvedený v [Zel01], kde za fázový prostor berme $\Phi_b = W_b^{1,2} \times L_b^2$. Funkce $u(t,x) = \mathrm{tgh}(x/\sqrt{2})$ je stacionárním řešením rovnice

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u + g(\partial_t u) + u^3 - u = 0.$$

Stejně tak pro všechna $h \in \mathbb{R}$ je funkce $v_h = v_h(t,x) = u(t, x+h)$ stacionárním řešením zmíněné rovnice. Pokud by existoval globální atraktor $\mathcal{A}$, potom by nutně $v_h \in \mathcal{A}$ pro všechna $h \in \mathbb{R}$. To ovšem dává spor s kompaktností $\mathcal{A}$ vzhledem k lokálně uniformní topologii, neboť není těžké si uvědomit, že $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ nemá hromadný bod ve Φ_b.

Přirozenějším požadavkem v případě rovnic na neomezené oblasti je uvažovat pro atraktor pouze kompaktnost při restrikci na omezenou oblast.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je dynamický systém na metrickém prostoru $X = (X, \rho)$. Buď τ topologií na X, jež je slabší[5] než topologie generovaná ρ. Řekneme, že množina $\mathcal{A} \subseteq X$ je $\big((X,\rho),(X,\tau)\big)$–atraktorem systému $(X, \mathcal{S})$, jestliže

- množina $\mathcal{A}$ je kompaktní vzhledem k (X, τ),
- $\mathcal{A}$ je striktně invariantní vzhledem k $\mathcal{S}$,

[5]všechny prvky τ jsou otevřenými množinami vzhledem k ρ

- $\mathcal{A}$ *přitahuje* všechny omezené množiny z (X, ρ) vzhledem k topologii τ, neboli pro libovolnou množinu B omezenou v (X, ρ) a množinu $\mathcal{O} \in \tau$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$, existuje t_0 splňující pro všechna $t \geq t_0$
$$S_t(B) \subseteq \mathcal{O}.$$

Lemma 7.1. *Nechť (X, τ) je topologický prostor a σ je metrikou na X metrizující τ. Potom*
$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_{(X,\sigma)}(S_t(B), A) = 0, \tag{7.1}$$
právě když pro libovolnou množinu $\mathcal{O} \in \tau$, $A \subseteq \mathcal{O}$, existuje t_0 splňující pro všechna $t > t_0$
$$S_t(B) \subseteq \mathcal{O}.$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že
$$\operatorname{dist}_{(X,\sigma)}(C, D) < \delta,$$
právě když
$$C \subseteq \bigcup_{d\in D} B_{(X,\sigma)}(d, \delta),$$
kde
$$B_{(X,\sigma)}(d, \delta) = \{c \in X : \sigma(d, c) < \delta\}.$$
□

Pozorování 7.2. Nechť $\mathcal{A}$ je $\big((X, \rho), (X, \tau)\big)$–atraktorem $(X, \mathcal{S})$ a σ metrikou na X metrizující τ. Potom $\mathcal{A}$ je i $\big((X, \rho), (X, \sigma)\big)$–atraktorem.

Následující tvrzení je snadným důsledkem výše uvedených definic a pozorování, proto zde jeho důkaz vynecháme.

Lemma 7.3. *Nechť $((X, \rho), \mathcal{S})$ je dynamický systém a τ je topologie na X slabší než topologie generovaná ρ. Nechť σ je metrikou na X, jež metrizuje τ. Jestliže $\mathcal{A} \subseteq X$ je*

- *kompaktní vzhledem k (X, σ),*
- *striktně invariantní,*
- *splňuje (7.1) pro všechny množiny B omezené v (X, ρ),*

potom $\mathcal{A}$ je $((X, \rho), (X, \tau))$–atraktorem dynamického systému $((X, \rho), \mathcal{S})$.

Poznámka. Kanonickou volbou fázového prostoru v případě rovnic na neomezené oblasti je Banachův prostor (Φ_b, ρ), kde metrika ρ je generována normou na lokálně uniformním prostoru Φ_b. Za topologii τ bereme topologii lokálně konvexního vektorového prostoru $\Phi_{\text{loc}} = W^{1,2}_{\text{loc}} \times L^2_{\text{loc}}$, přičemž v restrikci na Φ_b je tato topologie metrizována $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$.[6]

[6]Ekvivalence topologií se snadno ověří důkazem spojitosti pseudonorem $\|\cdot\|_{W^{1,2}\times L^2(B(0,R))}$ na prostoru $(\Phi_b, \|\cdot\|_{\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}})$ pro $R > 0$.

Definice. Nechť ρ a τ jsou jako v předchozí poznámce a $\mathcal{S}$ nechť je semigrupa na Φ_b. Množinu $\mathcal{A} \subseteq \Phi_b$ nazveme *lokálně kompaktním atraktorem*[7] dynamického systému $(\Phi_b, \mathcal{S})$, jestliže $\mathcal{A}$ je $((\Phi_b, \rho), (\Phi_b, \tau))$–atraktorem dynamického systému $(\Phi_b, \mathcal{S})$.

[7] v literatuře se též používá pojem $(\Phi_b, \Phi_{\mathrm{loc}})$–atraktor, jež navazuje na výše uvedenou abstraktní definici

8. Základní prostory funkcí

V této kapitole uvedeme pouze tvrzení, jež většinou nejsou součástí základní literatury se zaměřením na Sobolevovy a Bochnerovy prostory. Jmenovitě půjde o problematiku reprezentace funkcí jistých Bochnerových prostorů pomocí integrovatelných funkcí na kartézském součinu a o tvrzení související s časovými diferencemi. Čtenář může základní pojmy a důležité vlastnosti Sobolevových a Bochnerových prostorů nalézt například v monografiích [AF03][1], [EG92][2] a [GGZ74][3].

8.1 Sobolevovy prostory

Tato část bude věnována rozšíření platnosti vět z diferenciálního a integrálního kalkulu na sobolevovské funkce. Není-li řečeno jinak, uvažujeme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ omezenou s lipschitzovskou hranicí.

Důkaz následujícího lemmatu, které záměrně uvádíme v konkrétní podobě, plyne například z Lemmatu 3 článku [MM79].[4]

Lemma 8.1 (Derivace složené funkce). *Nechť f je reálná funkce třídy $\mathcal{C}^1$ splňující růstový předpoklad (F_2), buď dále $u \in W^{1,2}((0,T)\times\Omega)$. Potom $F(u) \in W^{1,1}(\Omega)$ a platí*

$$f(u)\,\partial_t u = \partial_t F(u),$$

kde $F(r) = \int_0^r f(s)\,\mathrm{d}s$.

Důkaz následujícího lemmatu plyne přímočaře z možnosti aproximovat sobolevovské funkce funkcemi hladkými až do hranice.

Lemma 8.2 (Derivace součinu). *Nechť $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a $v \in W^{1,q}(\Omega)$, kde p, $q \in (1,\infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Potom $u\,v \in W^{1,1}(\Omega)$ a platí ve smyslu slabých derivací rovnost*

$$\partial_{x_j}(u\,v) = \partial_{x_j}(u)\,v + u\,\partial_{x_j}(v)$$

pro libovolné $j \in \{1,\dots,d\}$

Symbolem T označujme operátor stop $T\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, o němž je známo, že je spojitý pro všechna $p \in [1,\infty)$ (a dokonce zaručuje lepší kvalitu funkce na hranici než L^p).

Lemma 8.3 (Rozšířené vlastnosti operátoru stop). *Uvažujme funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a $v \in W^{1,q}(\Omega)$, kde p, $q \in (1,\infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Potom*

$$T(u\,v) = T(u)\,T(v) \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Jestliže navíc $u \geq 0$ skoro všude na Ω, potom

$$\int_{\partial\Omega} T(u)\,\mathrm{d}\mathcal{H}_{d-1} \geq 0.$$

[1]základní definice, věty o vnoření, reprezentace spojitými a hladkými funkcemi

[2]sobolevovské funkce a absolutní spojitost po skoro všech přímkách

[3]teorie Bochnerových prostorů - slabé časové derivace, popis duálních prostorů, reflexivita, věty o vnoření, husté podmnožiny

[4]Důkaz vyplývá z charakterizace sobolevovských funkcí pomocí absolutně spojitých funkcí po přímkách a platnosti tvrzení pro $d = 1$, jež bylo dokázáno la Vallée Poussinem.

Důkaz. První části vyplývá z obdobného aproximačního argumentu jako důkaz věty o integraci per–partes níže.

Pro důkaz druhé části si rozmysleme, že nezáporné sobolevovské funkce můžeme aproximovat nezápornými hladkými funkcemi. Nejprve nalezněme funkci $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ rozšiřující funkci u. Jak známo, $|w| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, přičemž $|w| = u$ skoro všude na Ω. Posloupnost funkcí w_n vzniklých zhlazením $|w|$ „klasickým" nezáporným hladkým konvolučním jádrem konverguje ve $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ k funkci $|w|$. Funkce w_n jsou zřejmě nezáporné. Konečně funkcionál na $W^{1,p}(\Omega)$ daný předpisem

$$v \mapsto \int_{\partial\Omega} T(v)\,\mathrm{d}\mathcal{H}_{d-1}$$

je spojitý, a proto

$$\int_{\partial\Omega} T(u)\,\mathrm{d}\mathcal{H}_{d-1} = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} T(w_n)\,\mathrm{d}\mathcal{H}_{d-1} \geq 0.$$

□

Úmluva. V textu značení operátoru T vynechávejme.

Lemma 8.4 (Integrace per–partes)**.** *Uvažujme funkce $f \in W^{1,p}(\Omega)$ a $g \in W^{1,q}(\Omega)$ pro $1/p + 1/q = 1$. Potom*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, g\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f\, g\, \nu_j\,\mathrm{d}\mathcal{H}_{d-1} - \int_\Omega f\,\frac{\partial g}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x, \tag{8.1}$$

kde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$ je normálový vektor k $\partial\Omega$.

Je-li $\Omega = \mathbb{R}^d$, potom platí uvedená rovnost bez integrálu přes hranici.

Důkaz. Integrály jsou konvergentní, což plyne z Hölderovy nerovnosti a ze zmíněné omezenosti operátoru stop. Jsou-li obě funkce hladké až do hranice, je tvrzení důsledkem Gaussovy–Greenovy věty. Uvažujme dále g hladkou funkci až do hranice a f dle předpokladu. Z teorie Sobolevových prostorů víme, že existuje posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hladkých funkcí až do hranice Ω, pro niž

$$f_n \to f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Proto využitím předchozích limitních přechodů a omezenosti operátoru stop dostaneme

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, g\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_j}\, g\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} f_n\, g\,\nu_j\,\mathrm{d}\mathcal{H}_{d-1} - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\frac{\partial g}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\partial\Omega} f\, g\,\nu_j\,\mathrm{d}\mathcal{H}_{d-1} - \int_\Omega f\,\frac{\partial g}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nyní stačí tento závěr použít pro případ, kdy obě funkce splňují lemmatem předpokládané vlastnosti.

Je-li $\Omega = \mathbb{R}^d$, postupujme obdobně - stačí sobolevovské funkce aproximovat funkcemi s kompaktním nosičem. □

Stejný argument lze využít k důkazu verze Gaussovy-Greenovy věty pro sobolevovské funkce.

Lemma 8.5 (Gaussova-Greenova věta)**.** *Nechť* $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_d)$ *pro* $f_j \in W^{1,1}(\Omega)$, *potom*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \bullet \vec{\nu}\,\mathrm{d}\mathcal{H}_{d-1},$$

kde $\vec{\nu}$ *značí vektor vnější normály k* $\partial\Omega$.

8.2 Bochnerovy prostory

Přístup ke slabým řešením evolučních rovnic se blízce pojí s teorií Bochnerových prostorů. Ty zdůrazňují význačnost časové proměnné, která najednou stojí na trochu jiné úrovni než proměnné prostorové.

Přirozená otázka, která se v souvislosti s Bochnerovými prostory nabízí, je otázka souvislosti mezi vektorovými funkcemi typu $L^p((0,T); L^p(\Omega))$ a funkcemi na součinu $(0,T) \times \Omega$. V monografiích, které se svým tématem dotýkají teorie Bochnerových prostorů, zmínky o této souvislosti chybí. Z toho důvodu byl autor motivován ke stručnému sepsání základních spojitostí mezi zmíněnými třídami funkcí, a to i s případným důkazem.

Nebude-li řečeno jinak, budeme v této části symbolem X značit Banachův prostor s normou $\|\cdot\|_X$ a symbolem I označovat (libovolný) reálný interval. Pro čtenářovo pohodlí uveďme základní definice, s nimiž budeme v důkazech pracovat.

Definice. Zobrazení $\mathbf{s}\colon I \to X$ nazveme

- *jednoduchou funkcí*, jestliže existuje konečně mnoho měřitelných množin $E_j \subseteq I$ a prvků $x_j \in X$ tak, že

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{E_j}(t) x_j,$$

  Bochnerův integrál jednoduché funkce $\mathbf{s}$ pak definujeme následovně

$$\int_I \mathbf{s}(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{j=1}^{k} |E_j| x_j,$$

- *(silně) měřitelnou funkcí*, jestliže existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\mathbf{s_n}$ splňujících

$$\|\mathbf{s_n}(t) - \mathbf{s}(t)\|_X \to 0,\ \text{pro skoro všechna } t \in I,$$

- *slabě měřitelnou*, jestliže pro všechna x^* z duálního prostoru k X je funkce $t \mapsto x^*(\mathbf{s}(t))$ (lebesgueovsky) měřitelná.

- *bochnerovsky integrovatelnou*, jestliže existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\{\mathbf{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ splňující

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|\mathbf{s}(t) - \mathbf{s_n}(t)\|_X\,\mathrm{d}t = 0$$

  Bochnerův integrál bochnerovsky integrovatelné funkce $\mathbf{s}$ pak definujeme

$$\int_I \mathbf{s}(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \int_I \mathbf{s_n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka. Definice integrálu jednoduché funkce není závislá na jejích ekvivalentních vyjádřeních. Pomocí cauchyovskosti se dá snadno ukázat, že limita z definice Bochnerova integrálu existuje a je dána jednoznačně bez ohledu na aproximující posloupnost jednoduchých funkcí $\mathbf{s_n}$. Definice je tedy korektní.

Značení. Uvažujme $p \in [1, \infty]$

- symbolem $L^p(I;X)$ značíme všechny silně měřitelné funkce $\mathbf{f}\colon I \to X$, pro než

$$\left.\begin{aligned} \left(\int_I \|\mathbf{f}(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} &< \infty, \text{ když } p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in I} \|\mathbf{f}(t)\|_X &< \infty, \text{ když } p = \infty. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

- symbolem $\mathcal{C}(I;X)$ značíme všechny spojité funkce z I do X.

Poznámka. Pokud ztotožníme vektorové funkce prostoru $L^p(I;X)$, které se rovnají skoro všude na množině I, získáme tak Banachův prostor s normou danou (8.2). Pro tyto prostory se užívá pojem *Bochnerovy prostory.*

Definice. Uvažujme X_1 a X_2 Banachovy prostory, pro něž platí $X_1 \subseteq X_2$ a $I \subseteq \mathbb{R}$ otevřený interval. Nechť $\mathbf{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X_1)$ a $\mathbf{g} \in L^1_{\mathrm{loc}}(I;X_2)$ (tj. vektorově integrovatelné na každém kompaktním podintervalu I). Řekneme, že $\mathbf{g}$ je *slabou derivací* funkce $\mathbf{f}$, jestliže pro všechny funkce $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ platí

$$\int_I \mathbf{f}(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I \mathbf{g}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.3}$$

Značme $\mathbf{f}' = \mathbf{g}$.

Značení. Jestliže $\mathbf{f}$ i $\mathbf{f}' \in L^p(I;X)$, značíme $\mathbf{f} \in W^{1,p}(I;X)$.

8.2.1 Vektorové funkce a funkce na kartézském součinu

Ukážeme si, že za určitých předpokladů můžeme ztotožňovat vektorové funkce třídy $L^p(I;L^p(\Omega))$ s integrovatelnými funkcemi na kartézském součinu $I \times \Omega$. Přičemž uvažujeme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ měřitelnou.

Nejprve uveďme dvě klíčové věty, jež se hojně uplatňují v teorii Bochnerových prostorů. Jejich důkaz může čtenář nalézt například ve 40. a 42. kapitole skript [LM95].

Věta 8.6 (Pettis)**.** *Vektorová funkce* $\mathbf{f}\colon I \to X$ *je (silně) měřitelná, právě když je slabě měřitelná a její obor hodnot je esenciálně–separabilní*[5]*.*

Věta 8.7 (Bochner)**.** *Nechť* $\mathbf{f} : I \to X$ *je silně měřitelná. Potom* $\mathbf{f}$ *je bochnerovsky integrovatelná, právě když* $\int_I \|\mathbf{f}(t)\|_X \,\mathrm{d}t < \infty$*.*

Uveďme dva důsledky těchto vět.

Důsledek 8.8. *Nechť* X *je Banachův prostor a* $\mathbf{f}\colon I \to X$ *nechť je spojitá funkce. Potom* $\mathbf{f}$ *je (silně) měřitelná.*

[5] existuje množina $N \subseteq I$ nulové míry, pro niž $\mathbf{f}(I \backslash N)$ je separabilní podmnožina X

Důkaz. Stačí si uvědomit, že spojitým obrazem separabilní množiny je opět separabilní množina. Stejně tak složením libovolného spojitého funkcionálu se spojitou funkcí $\mathbf{f}$ vznikne spojitá, tudíž i měřitelná, reálná funkce. Tvrzení tedy vyplývá z Pettisovy věty. □

Důsledek 8.9. *Je-li* $\mathbf{f} : I \to X$ *bochnerovsky integrovatelná, potom*

$$\left\| \int_I \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \leq \int_I \|\mathbf{f}(t)\|_X\,\mathrm{d}t. \tag{8.4}$$

Tato nerovnost plyne z možnosti vyjádřit normu prvku pomocí aplikace funkcionálu (z jednotkové sféry duálního prostoru) na tento prvek a z možnosti záměny pořadí integrálu a spojitého funkcionálu.

Lemma 8.10. *Nechť* $p \in [1, \infty)$*, potom pro každou funkci* $f \in L^p(I \times \Omega)$ *existuje vektorová funkce třídy* $\mathbf{f} \in L^p(I; L^p(\Omega))$ *splňující*

$$\mathbf{f}(t) = f(t, \cdot) \quad \textit{pro skoro všechna } t \in I. \tag{8.5}$$

.

Důkaz. Díky Fubiniově větě je pro skoro všechna $t \in I$ funkce $f(t, \cdot)$ třídy $L^p(\Omega)$. Z teorie míry plyne lebesgueovská měřitelnost funce $t \mapsto \int_I f(t, x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ pro libovolně brané $\phi \in L^q(\Omega)$, kde $q = p/(p-1)$. Tím získáváme slabou měřitelnost funkce $\mathbf{f}$ (využili jsme též základní reprezentace duálů k Lebesgueovým prostorům). Tudíž Pettisova věta a separabilita $L^p(\Omega)$ (uvažujeme totiž $p \in [1, \infty)$) implikuje silné měřitelnosti funkce $\mathbf{f}$. Aplikací Fubiniovy věty získáme

$$\int_I \|\mathbf{f}(t)\|^p_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_I \int_\Omega |f(t, x)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \infty,$$

a proto $\mathbf{f} \in L^p(I; L^p(\Omega))$. □

Následující snadný příklad ukazuje, že měřitelnost je v případě neseparability koncového prostoru X velmi silnou vlastností.

Příklad 8.11. Označme D množinu $\{(x, y) \in (0, 1)^2 : x > y\}$. Funkce χ_D zřejmě patří do prostoru $L^\infty((0, 1)^2)$. Definujme vektorovou funkci $\mathbf{f} : (0, 1) \to L^\infty$ předpisem $\mathbf{f}(t) = \chi_D(t, \cdot)$. Vezmeme-li libovolnou množinu $N \subseteq (0, 1)$ míry nula, pak $\mathbf{f}((0, 1) \setminus N)$ není separabilní podmnožina L^∞. Vždy v ní totiž můžeme nalézt nespočetnou množinu navzájem stejně vzdálených bodů. Pro libovolné $0 < t_1 < t_2 < 1$ totiž platí $\|\mathbf{f}(t_1) - \mathbf{f}(t_2)\|_\infty = 1$. Dle Pettisovy věty nemůže být $\mathbf{f}$ silně měřitelná.

Lemma 8.12. *Nechť* $p \in [1, \infty)$ *a* $\mathbf{f} \in L^p(I; L^p(\Omega))$*, potom existuje* $f \in L^p(I \times \Omega)$*, pro kterou platí* (8.5)*.*

Důkaz. Stačí si rozmyslet pouze měřitelnost, neboť konečnost normy pak plyne z Fubiniovy věty. Nejprve předpokládejme Ω i I s konečnou mírou. Dle Bochnerovy věty je $\mathbf{f}$ bochnerovsky integrovatelná. Z definice Bochnerova integrálu tedy existují jednoduché funkce $\mathbf{f_n} : I \to L^p(\Omega)$, pro které

$$\int_I \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f_n}(t)\|_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}t \to 0.$$

Definujme funkce $f_n = f_n(t,x)$ předpisem $f_n(t,\cdot) = \mathbf{f_n}(t)$ pro $t \in I$. Každá funkce f_n je zřejmě měřitelná na součinu $I \times \Omega$. Dle Fubiniovy věty

$$\begin{aligned}\int_{I\times\Omega} |f_n - f_m| &= \int_I \|f_n(t,\cdot) - f_m(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_I \|\mathbf{f_n}(t) - \mathbf{f_m}(t)\|_{L^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\ &\le C(p,|\Omega|)\int_I \|\mathbf{f_n}(t) - \mathbf{f}(t)\|_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}t + C(p,|\Omega|)\int_I \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f_m}(t)\|_{L^p(\Omega)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je tedy cauchyovská v $L^1(I\times\Omega)$. Označme f její limitu a počítejme

$$\begin{aligned}\int_I \|f(t,\cdot) - \mathbf{f}(t)\|_{L^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t \le &\int_I \|f(t,\cdot) - f_n(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_I \|\mathbf{f_n}(t) - \mathbf{f}(t)\|_{L^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{8.6}$$

Nutně tedy pro skoro všechna $t \in I$ platí $\tilde{f}(t,\cdot) = \mathbf{f}(t)$ v $L^1(\Omega)$.

V případě Ω obecné měřitelné můžeme množinu rozdělit na spočetně mnoho disjunktních podmnožin konečné míry $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$. Funkce f je pak měřitelná na každé množině $I\times\Omega_n$, z čehož zřejmě plyne i globální měřitelnost. Analogicky můžeme postupovat i v případě, kdy I není omezená. □

Lemma 8.13. *Buď $p \in [1,\infty)$. Nechť $\mathbf{u} \in W^{1,p}(I; L^1(\Omega))$ a reálné funkce u, v na součinu $Q = I\times\Omega$ reprezentují $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$. Potom $v = \partial_t u$ ve smyslu distribucí.*

Důkaz. Berme $\psi \in \mathcal{D}(Q)$. Funkce na řezech, $t \mapsto \psi(t,x)$, jsou pro každé $x \in \Omega$ prvky prostoru $\mathcal{D}(I)$. Dle Fubiniovy věty

$$\begin{aligned}\int_Q u\,\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \int_\Omega\int_I \mathbf{u}(t)[x]\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega\int_I \mathbf{u}'(t)[x]\,\psi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_Q v\,\psi.\end{aligned}$$

□

Lemma 8.14. *Uvažujme $p \in [1,\infty)$ a*

$$\mathbf{f} \in W^{1,p}(I; L^p(\Omega)) \cap L^p(I; W^{1,p}(\Omega)).$$

Potom funkce f reprezentující $\mathbf{f}$ ve smyslu Lemmatu 8.12 náleží do prostoru $W^{1,p}(I\times\Omega)$.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem Lemmat 8.13 a 8.12. □

8.2.2 Časové diference

Motivací této části je otázka jednoznačnosti slabých řešení diferenciálních rovnic hyperbolického typu.[6]

[6]podrobnější komentář k této problematice je možné nalézt v §4.3.1

Značení. Nechť $\mathbf{v} \in \mathcal{C}([0,T];X)$ a $h > 0$, potom symbolem $D^h[\mathbf{v}]$ značme funkci

$$D^h[\mathbf{v}](t) = \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t-h)}{2h}, \quad t \in [0,T],$$

kde dodefinujme

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t+h) = \mathbf{v}(T) & \text{pro } t+h > T, \\ \mathbf{v}(t-h) = \mathbf{v}(0) & \text{pro } t-h < 0. \end{cases}$$

Vektorovou funkci $D^h[\mathbf{v}]$ budeme nazývat *časovou diferencí* funkce $\mathbf{v}$ velikosti h.

Lemma 8.15. *Uvažujme X, Y a Z Banachovy prostory, kde $X \hookrightarrow Y$, $Z \hookrightarrow Y$. Buďte $m \in [1,\infty)$ a $h > 0$. Jestliže $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0,T],X)$ a $\mathbf{u}' \in L^1((0,T);Y) \cap L^m((0,T);Z)$, potom*

$$D^h[\mathbf{u}] \in \mathcal{C}([0,T],X) \cap L^m((0,T);Z),$$

přičemž $D^h[\mathbf{u}]$ jsou v $L^m((0,T);Z)$ stejně omezeny.

Důkaz. Spojitost $D^h[\mathbf{u}]$ je zřejmá, proto stačí ukázat její integrovatelnost. Dodefinujme nejprve $\mathbf{u}'$ vektorem $\mathbf{0}$ na intervalech $(-h,0)$ a $(T,T+h)$ (rozšířená funkce náleží do stejných Bochnerových prostorů a je slabou derivací funkce $\mathbf{u}$, jež mimo $[0,T]$ spojitě dodefinujeme konstantou). Newtonova-Leibnitzova formule zůstává platná i pro vektorové funkce třídy $W^{1,1}(0,T;Y)$.[7] Proto v Y platí rovnost

$$D^h[\mathbf{u}](t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \mathbf{u}'(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{pro } t \in [0,T].$$

Pravá strana náleží prostoru $L^m(0,T;Z)$ pro všechna $h > 0$. Využitím nerovnosti (8.4) a Jensenovy nerovnosti získáme

$$\|D^h[\mathbf{u}](t)\|_Z^m \le \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \|\mathbf{u}'(s)\|_Z^m\,\mathrm{d}s.$$

Aplikací Fubiniovy věty[8] potom

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} \|\mathbf{u}'(s)\|_Z^m\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \|\mathbf{u}'(t+s)\|_Z^m\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \qquad (8.7)\\ &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_0^T \|\mathbf{u}'(t+s)\|_Z^m\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_0^T \|\mathbf{u}'(t)\|_Z^m\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^T \|\mathbf{u}'(t)\|_Z^m\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

z čehož vyplývá zbytek dokazovaného tvrzení. □

Následující lemma poskytuje důležitou informaci o limitním přechodu pro časové diference a je převzato z článku [KL02].

[7] Jedná se o základní poznatek z teorie Bochnerových prostorů, čtenáře lze odkázat na Theorem 2 z §5.9.2 monografie [Eva10].

[8] plně si vystačíme s její verzí pro reálné funkce

Lemma 8.16 ([KL02]). *Mějme* $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0,T];H)$ *pro* H *Hilbertův prostor. Potom*

$$\lim_{h\to 0} \int_0^T (\mathbf{u}, D^h[\mathbf{u}])_H \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}(T)\|_H^2 - \|\mathbf{u}(0)\|_H^2\right).$$

Pokud navíc $\mathbf{u}' \in \mathcal{C}([0,T];H)$*, potom*

$$\lim_{h\to 0} \int_0^T (\mathbf{u}', (D^h[\mathbf{u}])')_H \,\mathrm{d}t = 0 \quad \textit{pro všechna } h > 0$$

a pro $h \to 0$

$$\begin{aligned} &D^h[\mathbf{u}](t) \rightharpoonup \mathbf{u}'(t) \ \textit{v } H \quad \textit{pro skoro všechna } t \in (0,T),\\ &D^h[\mathbf{u}](0) \rightharpoonup \frac{1}{2}\mathbf{u}'(0) \ \textit{a } D^h[\mathbf{u}](T) \rightharpoonup \frac{1}{2}\mathbf{u}'(T) \ \textit{v } H. \end{aligned}$$

8.2.3 Další pomocná tvrzení

Lemma 8.17. *Nechť* X *je Banachův prostor a* S *je jeho hustá podmnožina. Potom lineární kombinace vektorových funkcí tvaru* $\mathbf{v}(t) = \psi(t)\,\mathbf{s}$ *pro* $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ *a* $\mathbf{s} \in S$ *tvoří hustý podprostor* $W^{k,p}((0,T);X)$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}_0$ *a* $p \in [1,\infty)$*.*

Důkaz. V první části důkazu ukažme, že množina „polynomů“ tvaru

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{j=0}^{n} t^j s_j, \quad \text{kde } s_j \in S \tag{8.8}$$

je hustá v prostoru $C^k([0,T];X)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$. Pro $k = 0$ a $S = X$ je možné k důkazu použít aproximaci analogiemi k reálným Bernsteinovým polynomům (viz [GGZ74], Kapitel IV, Satz 1.3). Pro S obecnou hustou v X můžeme ke každému „polynomu“

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=0}^{n} t^j x_j, \quad \text{kde } x_j \in S$$

uvažovat polynom $\mathbf{p}(t)$ tvaru (8.8) s koeficienty $\|x_j - s_j\|_X < \varepsilon$ pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$.

Pro $k = 1$ potom libovolná funkce $\mathbf{u} \in C^1([0,T];X)$ splňuje rovnost

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathbf{u}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{8.9}$$

Funkci $\mathbf{u}'$ můžeme aproximovat „polynomy“ $\{\mathbf{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, tvaru (8.8) v prostoru $\mathcal{C}([0,T];X)$. Dále uvažujme posloupnost s_n prvků z S konvergující k $\mathbf{u}(0)$. Potom

$$\mathbf{q_n}(t) = s_n + \int_0^t \mathbf{p_n}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

aproximují v $\mathcal{C}([0,T];X)$ vektorovou funkci $\mathbf{u}$ a platí $\mathbf{q_n}' = \mathbf{p_n}$. Proto $\mathbf{q_n}$ aproximují $\mathbf{u}$ také v $\mathcal{C}^1([0,T];X)$ a zřejmě mají koeficienty z S.

Pro $k > 1$ můžeme uplatnit matematickou indukci.

Nyní můžeme důkaz dokončit tím, že ukážeme hustotu vektorových funkcí z $\mathcal{C}^k([0,T];X)$ v prostoru $W^{k,p}((0,T);X)$.

Pro $k=0$ můžeme vycházet z hustoty jednoduchých funkcí v Bochnerových prostorech pro $p \in [1,\infty)$ (viz [GGZ74], Kapitel IV, Lemma 1.3) a dále použít aproximaci „po částech lineárními“ funkcemi analogicky k reálným funkcím. Dále můžeme postupovat zcela analogicky jako výše. Pro spojitého reprezentanta funkce $\mathbf{u}$ totiž platí (8.9) (viz také [Eva10], §5.9.2, Theorem 2). □

Pro účely následujícího lemmatu uvažujme funkci

$$r_n(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{pro } t \in [0,1/n], \\ n\left(t - \dfrac{1}{n}\right) \quad \text{pro } t \in [1/n, 2/n], \\ 1 \quad \text{pro } t \in [2/n, T-2/n], \\ n\left(T - \dfrac{1}{n} - t\right) \quad \text{pro } t \in [T-2/n, T-1/n], \\ 0 \quad \text{pro } t \in [T-1/n, T]. \end{cases} \tag{8.10}$$

Lemma 8.18 (Lemma „o seřezávání“)**.** *Uvažujme H Hilbertův prostor a vektorové funkce $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0,T];H)$ a $\mathbf{v} \in W^{1,2}((0,T);H)$. Potom pro vektorové funkce $\mathbf{v}_n$, definované $\mathbf{v}_n = r_n\,\mathbf{v}$, platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_n'(t)\Big)_H \,\mathrm{d}t = \tag{8.11}$$
$$\int_0^T \Big(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}'(t)\Big)_H \,\mathrm{d}t + \Big(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)\Big)_H - \Big(\mathbf{u}(T), \mathbf{v}(T)\Big)_H,$$

kde $\mathbf{v}(0)$ a $\mathbf{v}(T)$ jsou dány jednoznačně ve smyslu stop.

Důkaz. Využitím (absolutní) spojitosti funkce $\mathbf{v}$ můžeme postupovat zcela analogicky jako při důkazu tohoto tvrzení pro reálné funkce, jenž je přímočarý. □

9. Appendix

Zbývá uvést a případně dokázat pomocná tvrzení, jež byla pro přehlednost zařazena až na konec textu.

První lemma patří ke klíčovým nástrojům k určení limity slabě konvergentní posloupnosti (viz také [Lio69], Chapitre 1, Lemme 1.3).

Lemma 9.1. *Nechť μ je σ–konečná míra na X a buď $p \in [1, \infty)$. Uvažujme dále μ–měřitelné funkce u_n, u a v, pro které platí*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad v\ L^p(\mu), \\ u_n &\to v \quad \mu\text{–skoro všude na } X. \end{aligned}$$

Potom $v = u$ μ–skoro všude.

Důkaz. Nejprve předpokládejme μ konečnou míru na X. Pro libovolně zvolené $k \in \mathbb{N}$ získáme z Jegorovovy věty množinu N_k, $\mu(N_k) \leq 1/k$, pro kterou $u_n \rightrightarrows v$ na $X \backslash N_k$. Proto také $u_n \to v$ v $L^p(X \backslash N_k, \mu)$. Ze silné konvergence plyne slabá, tudíž z jednoznačnosti slabých limit $v = u$ μ–skoro všude na $\cup_{k \in \mathbb{N}} (X \backslash N_k)$, tudíž $v = u$ skoro všude na X.

Máme-li μ σ–konečnou, můžeme X uvažovat jako disjunktní sjednocení spočetně mnoha μ–měřitelných množin konečné míry. Na každou množinu rozkladu pak stačí aplikovat předchozí část důkazu. $\square$

Základní nerovnosti

Standardní nerovnosti, mezi které patří Cauchyova, Hölderova, Jensenova, Poincarého (pro sobolevovské funkce s nulovou stopou) a Youngova nerovnost, zde nebudeme připomínat (čtenáře přitom můžeme odkázat například na monografii [Eva10], Appendix B, v případě Poincarého nerovnosti na §5.6.1, Theorem 3 a §6.5.1, Theorem 2).

Klíčovou roli v teorii evolučních rovnic hraje Gronwallova nerovnost, jež zajišťuje odhad funkce splňující určitý typ integrální nerovnice. Uveďme tuto nerovnost ve třech verzích, ve kterých je v práci aplikována.

Lemma 9.2 (Diferenciální verze Gronwallovy nerovnosti, [Eva10])**.** *Nechť η je nezáporná absolutně spojitá funkce na $[0, T]$, která pro skoro všechna t splňuje diferenciální nerovnost*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \eta(t) \leq C \eta(t) + \psi(t),$$

kde ψ je nezáporná integrovatelná funkce na $[0, T]$ a $C > 0$. Potom

$$\eta(t) \leq e^{Ct} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) \, \mathrm{d}s \right)$$

pro všechna $t \in [0, T]$.

Lemma 9.3 (Integrální verze Gronwallovy nerovnosti, [Eva10])**.** *Nechť ξ je nezáporná integrovatelná funkce na $[0,T]$, která pro skoro všechna t splňuje nerovnost*

$$\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s + C_2,$$

pro konstanty C_1, $C_2 > 0$. Potom

$$\xi(t) \le C_2 \left(1 + C_1 t\, e^{C_1 t}\right)$$

pro skoro všechna $t \in [0,T]$.

Lemma 9.4 (Disipativní verze Gronwallovy nerovnosti)**.** *Nechť η je spojitá funkce na intervalu $[0,T)$ pro $T > 0$ a buď C nezáporná reálná konstanta. Nechť existuje $\zeta > 0$ takové, že pro všechna t_1, $t_2 \in [0,T)$, $t_1 < t_2$ platí*

$$\eta(t_2) - \eta(t_1) + \zeta \int_{t_1}^{t_2} \eta(s)\,\mathrm{d}s \le (t_2 - t_1)C. \tag{9.1}$$

Potom pro všechna $t \in [0,T)$ platí

$$\eta(t) \le e^{-\zeta t} \left| \eta(0) - \frac{C}{\zeta} \right| + \frac{C}{\zeta}. \tag{9.2}$$

Důkaz. Nerovnost (9.2) stačí ukázat pro $C = 0$. V obecném případě totiž můžeme využít pomocnou funkci.

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(t) - \frac{C}{\zeta}.$$

Uvažujme dva případy.

Jestliže $\eta(0) \ge 0$, definujme funkci ϑ předpisem

$$\vartheta(t) = \eta(0)e^{-\zeta t}.$$

Stačí ukázat, že $\eta(t) \le \vartheta(t)$ pro $t \in [0,T)$. Kdyby tomu tak nebylo, můžeme nalézt $\tau \in (0,T)$, které je infimem množiny

$$\{t \in [0,T)\colon \eta(t) > \vartheta(t)\}.$$

Vzhledem ke spojitosti obou funkcí $\eta(\tau) = \vartheta(\tau)$ a existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro libovolné $\tilde{\varepsilon} \in (0,\varepsilon)$ platí $\eta(\tau + \tilde{\varepsilon}) > \vartheta(\tau + \tilde{\varepsilon})$. Potom ovšem dle (9.1)

$$\vartheta(\tau + \varepsilon) - \vartheta(\tau) + \zeta \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \vartheta(s)\,\mathrm{d}s < 0,$$

což je spor s definicí ϑ.[1]

Jestliže $\eta(0) < 0$, potom z nerovnosti (9.1) plyne $\eta(t) \le 0$ pro všechna t z intervalu $[0,T)$. Kdyby tomu tak nebylo, existuje $\tau \in (0,T)$, jenž je infimem množiny

$$\{t \in [0,T)\colon \eta(t) > 0\}.$$

Potom ovšem obdobnou argumentací jako výše získáme existenci $\varepsilon > 0$, pro které platí

$$\eta(\tau + \varepsilon) - \eta(\tau) + \zeta \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \eta(s)\,\mathrm{d}s > 0,$$

čímž jsme dosáhli sporu s (9.1). □

[1] Pro ϑ totiž místo předchozí ostré nerovnosti dle definice platí rovnost.

Následující snadné (leč techničtější) lemma určuje postačující podmínky k lokální lipschitzovskosti jednoho důležitého typu nelineárního funkcionálního operátoru.

Lemma 9.5. *Nechť Ω je omezená podmnožina $\mathbb{R}^d$. Uvažujme funkci $\varrho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ splňující růstový předpoklad $|\varrho'(x)| \le C(1+|x|^{p-1})$, kde $p \in (1,\infty)$. Buďte $r \in [1,\infty)$, $q \in [pr,\infty)$. Potom operátor $\Psi\colon L^q(\Omega) \to L^r(\Omega)$, $\Psi\colon u \mapsto \varrho(u)$ je lokálně lipschitzovský.*[2] *Pokud je navíc funkce ρ globálně lipschitzovská (tj. $p = 1$), je i operátor Ψ globálně lipschitzovský z $L^r(\Omega)$ do $L^r(\Omega)$.*

Důkaz. Volme $R > 0$ a u, $v \in L^q(\Omega)$ splňující $\|u\|_{L^q} \le R$, $\|v\|_{L^q} \le R$. Počítejme

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L^r} = \|\varrho(u) - \varrho(v)\|_{L^r} = \left\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \varrho(su + (1-s)v)\,\mathrm{d}s \right\|_{L^r} \tag{9.3}$$
$$= \left\| \int_0^1 \varrho'(su + (1-s)v)(u-v)\,\mathrm{d}s \right\|_{L^r} \le \int_0^1 \|\varrho'(su + (1-s)v)(u-v)\|_{L^r}\,\mathrm{d}s.$$

Poslední výraz odhadneme Hölderovou nerovnost aplikovanou na „hölderovskou trojici“ $\left(\frac{qr}{q-r}, q, r\right)$. Dále aplikujeme hrubý odhad

$$|a+b|^m \le 2^m \max\{|a|^m, |b|^m\} \text{ pro } a,\, b \in \mathbb{R},\, m > 0$$

ze kterého obdržíme

$$\begin{aligned}\|\varrho'(su + (1-s)v)\|_{L^{qr/(q-r)}} &\le C_1 \left(1 + \left\||u|^{p-1}\right\|_{L^{qr/(q-r)}} + \left\||v|^{p-1}\right\|_{L^{qr/(q-r)}}\right) \\ &= C_1 \left(1 + \|u\|^{p-1}_{L^{(p-1)qr/(q-r)}} + \|v\|^{p-1}_{L^{(p-1)qr/(q-r)}}\right).\end{aligned}$$

Z předpokladu $q \ge pr$ plyne $c = \frac{(p-1)qr}{q-r} \le q$. Může se stát, že $c < 1$. V tomto případě $\|\cdot\|_{L^c}$ není normou, ale pouze funkcionálem

$$u \mapsto \left(\int_\Omega |u|^c\right)^{1/c}.$$

V každém případě ale

$$\|u\|^{p-1}_{L^c} \le C_2(|\Omega|, p, q, r)\left(1 + \|u\|^{p-1}_{L^q}\right).$$

pro vhodnou nezápornou konstantu C_1 závisející na p, q, r a míře množiny Ω. Jde o složení odhadů pro případ

- $c \ge 1$, kde využíváme základních vnoření mezi Lebesgueovými prostory ($L^n \hookrightarrow L^m$ pro $m < n$) na množinách s konečnou mírou a
- $c < 1$, pro nějž využijeme jednoduchého odhadu $|x|^\alpha \le 1 + |x|$ (platícího pro reálná x a $\alpha \in (0,1)$) a následně opět základního vnoření.

[2] Připomeňme si, že $f \circ g$ je měřitelná funkce, jestliže g je měřitelná a f spojitá.

Konečně

$$\|\varrho'(su+(1-s)v)\|_{L^{qr/(q-r)}} \leq C_3(|\Omega|, p, q, r, C)\left(1+R^{p-1}\right).$$

Předchozí nerovnosti tedy můžeme shrnout do odhadu

$$\int_0^1 \|\varrho'(su+(1-s)v)(u-v)\|_{L^r}\ \mathrm{d}s \leq C_3(|\Omega|, p, q, r, C)(1+R^{p-1})\|u-v\|_q.$$

Je-li $p=1$ plyne přímo z (9.3) nerovnost

$$\|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{L^r} \leq \mathrm{Lip}(\rho')\|u-v\|_{L^r}.$$

□

10. Motivace k dalšímu studiu

Nabízí se otázka, zda lze závěry Kapitoly 6 odvodit také v případě obecnějšího členu tlumení. Pro analogickou rovnici na omezené oblasti je možné ukázat existenci absorbující množiny a globálního atraktoru i v případě superlineárního tlumení bez dolního odhadu na velikost derivace g. Autorovi jsou známy přístupy k této problematice na omezené oblasti z článku [Fei95] a monografie [CL08]. V prvně citovaném článku je důležitou součástí důkazu existence absorbující množiny omezenost trajektorií řešení, jež plyne ze základní energetické nerovnosti. V případě neomezené oblasti jsou techniky odvozování existence absorbující množiny v Φ_b založeny výhradně na odhadech v prostorech $\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$ nezávislých na $\bar{x}$. Omezenost trajektorií kvůli členu, jenž vznikne derivací váhové funkce, není možné odvodit tak přímočaře. V monografii [CL08] jsou použity techniky blízce související s větami o vnoření v Sobolevových prostorech. Jak bylo ukázáno v Příkladu 2.5, pro prostory s váhovou funkcí jsou tyto techniky značně omezené, tudíž opět není možná přímá aplikace.

Další cestou, kterou se studium zmíněné vlnové rovnice může ubírat, je odhadování Kolmogorovovy ε–entropie[1] lokálně kompaktního atraktoru. Kvůli neomezenosti $\mathbb{R}^d$ má smysl ε–entropii odhadovat „lokálně“ - tím je myšleno odhadovat ji nikoliv vzhledem k metrickému prostoru Φ_b, ale vzhledem k pseudometrickému prostoru $\Phi_b(B(x_0, R))$, jež vznikne restrikcí normy Φ_b na funkce definované na kouli $B(x_0, R) \subseteq \mathbb{R}^d$. Pro případ lineárního tlumení v [Zel01] byl odvozen odhad

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, \Phi_b(B(x_0, R))) \leq C \left(R + K \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^d \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$$

pro konstanty C a K nezávisející na ε a R. Poznamenejme, že tento výsledek je typický pro disipativní rovnice na neomezené oblasti (viz také [GPS10], [MZ08] a [Zel03]). Autor věří, že i v případě nelineárního tlumení (s dodatečnými předpoklady na omezení derivace g) zůstane tento odhad platný.

[1] tu charakterizuje číslo $\mathbb{H}_\varepsilon(K, X)$ – nejmenší počet ε–koulí v metrickém (či pseudometrickém) prostoru X, které postačují k pokrytí prekompaktní množiny K

Přehled značení

$\mathbb{N}_0$	přirozená čísla s nulou
$B(x,r)$	koule se středem $x \in X$ a poloměrem r, kde X je příslušný metrický prostor
λ_n	Lebesgueova n–dimenzionální míra
$\mathcal{H}_k$	Hausdorffova k–dimenzionální míra
χ_E	charakteristická funkce množiny E
$\mathcal{D}(\Omega)$	prostor hladkých funkcí třídy $\mathcal{C}^\infty$ s kompaktním nosičem v Ω
$L^p(\Omega)$	Lebesgueovy prostory na množině Ω
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Sobolevovy prostory na množině Ω s nulovou stopou
$W^{k,p}(\Omega)$	Sobolevovy prostory na množině Ω
$\phi_{\varepsilon,\bar{x}}$	váhová funkce
$L^p_{\varepsilon,\bar{x}}$	prostory s váhovou funkcí
$W^{k,p}_{\varepsilon,\bar{x}}$	„sobolevovské verze“ prostorů s váhovou funkcí
L^p_b	uniformně lokální prostory funkcí
$W^{k,p}_b$	„sobolevovské verze“ verze uniformně lokálních prostorů
$\widehat{L}^p_b$	uniformně lokální prostory funkcí spojité vzhledem k translaci
$\widehat{W}^{k,p}_b$	„sobolevovské verze“ verze uniformně lokálních prostorů funkcí spojitých vzhledem k translaci
$\mathcal{C}^\infty_b$	prostor omezených hladkých funkcí s omezenými derivacemi
Φ_{loc}	kartézský součin $W^{1,2}_{\mathrm{loc}} \times L^2_{\mathrm{loc}}$
$\Phi_{\varepsilon,\bar{x}}$	kartézský součin $W^{1,2}_{\varepsilon,\bar{x}} \times L^2_{\varepsilon,\bar{x}}$
Φ_b	kartézský součin $W^{1,2}_b \times L^2_b$
$\widehat{\Phi}_b$	kartézský součin $\widehat{W}^{1,2}_b \times \widehat{L}^2_b$
$\mathcal{C}(I;X)$	prostor spojitých vektorových funkcí z I do X
$\mathcal{C}^k(I;X)$	prostor vektorových funkcí z I do X diferencovatelných do řádu k (včetně)
$L^p(I;X)$	Bochnerův prostor vektorových funkcí na intervalu I s oborem hodnot v Banachově prostoru X

$W^{k,p}(I;X)$	prostor vektorových funkcí z $L^p(I;X)$ se slabými derivacemi do řádu k (včetně) náležícími též do $L^p(I;X)$
$L^p_{\mathrm{loc}}(I;X)$	prostor vektorových funkcí z I do X, které pro libovolný kompaktní interval $K \subset I$ náleží do $L^p(K;X)$
$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(I;X)$	prostor vektorových funkcí z I do X, které pro libovolný kompaktní interval $K \subset I$ náleží do $W^{k,p}(K;X)$
$(\cdot,\cdot)_H$	skalární součin na Hilbertově prostoru H
$(\cdot,\cdot)$	skalární součin na prostoru $L^2(\Omega)$
$(\cdot,\cdot)_{\varepsilon,\bar{x}}$	skalární součin na prostoru $L^2_{\varepsilon,\bar{x}}$
$\hookrightarrow$	relace spojitého vnoření mezi Banachovými prostory
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	relace kompaktního vnoření Banachovými prostory

Literatura

[AF03] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, second edition, 2003.

[BV92] A. V. Babin and M. I. Vishik. *Attractors of Evolution Equations*. Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier Science, 1992.

[CD04] J. W. Cholewa and T. Dlotko. Cauchy problems in weighted Lebesgue spaces. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54(4):991–1013, 2004.

[CL08] I. Chueshov and I. Lasiecka. *Long-time Behaviour of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, volume 195 of *Memoirs of AMS*. AMS, Providence, RI, 2008.

[EG92] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 1992.

[Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, second edition, 2010.

[Fei95] Eduard Feireisl. Global Attractors for Semilinear Damped Wave Equations with Supercritical Exponent. *Journal of Dif. Eq.*, 116:431–447, 1995.

[Fei96] Eduard Feireisl. Bounded locally compact global attractors for semilinear damped wave equations on $\mathbb{R}^n$. *Differential and Integral Equations*, 9(5):1147–1156, 1996.

[GGZ74] H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, first edition, 1974.

[GPS10] M. Grasselli, D. Pražák, and G. Schimperna. Attractors for nonlinear reaction-diffusion systems in unbounded domains via the method of short trajectories. *Journal of Dif. Eq.*, 249:2287–2315, 2010.

[KL02] H. Koch and I. Lasiecka. Hadamard Well-posedness of Weak Solutions in Nonlinear Dynamic Elasticity-full von Karman Systems. In *Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, volume 50, pages 197–216. Birkhäuser Basel, 2002.

[KO83] A. Kufner and B. Opic. The Dirichlet problem and weighted spaces. i. *Časopis pro pěstování matematiky*, 108(4):381–408, 1983.

[KS02] N. I. Karachalios and N. M. Stavrakakis. Estimates on the dimension of a global attractor for semilinear dissipative wave equations on $\mathbb{R}^n$. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 108(8):939–951, 2002.

[Lio69] Jacques-Louis Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*. Dunod/Gautier–Villars, 1969.

[LM95] J. Lukeš and J. Malý. *Measure and Integral.* Matfyzpress, first edition, 1995.

[MM79] M. Marcus and V. J. Mizel. Journal of functional analysis. *Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous*, 33:217–229, 1979.

[MS95] A. Mielke and G. Schneider. Attractors for modulation equations on unbounded domains existence and comparison. *Nonlinearity*, 8:743–768, 1995.

[MZ08] A. Miranville and S. Zelik. Attractors for Dissipative Partial Differential Equations in Bounded and Unbounded Domains. In *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations*, volume IV, pages 103–200. Elsevier/North-Holland, 2008.

[Zel01] Sergey V. Zelik. The attractor for a nonlinear hyperbolic equation in an unbounded domain. *Disc. Cont. Dyn. Sys.*, 7(3):593–641, 2001.

[Zel03] Sergey V. Zelik. Attractors of reaction-diffusion systems in unbounded domains and their spatial complexity. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56:584–637, 2003.