Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Fiala

Vlastnosti Cantorovy funkce

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2011

Rád bych poděkoval mému vedoucímu bakalářské práce, doc. RNDr. Stanislavu Henclovi, Ph.D., za neúnavnou podporu, cenné rady a trpělivost při čtení průběžných verzí.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Teplicích dne 24. května 2011 Martin Fiala

Obsah

Název práce: Vlastnosti Cantorovy funkce
Autor: Martin Fiala
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
e-mail vedoucího bakalářské práce: hencl@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Obsahem této práce je zkoumání vlastností Cantorovy funkce (někdy též Cantorovo ďábelské schody, především v populární literatuře), pojmenované po významném německém matematikovi Georgu Cantorovi (3. března 1845 Petrohrad, 6. ledna, 1918 Halle).

Klíčová slova: Cantorovo diskontinuum, Lebesgueova míra, α-hölderovská funkce, spojitost, derivace

Title: Properties of Cantor function
Author: Martin Fiala
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Stanislav Hencl Ph.D.
Supervisor's e-mail address: hencl@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study main properties of the Cantor function (sometimes called Cantor Devil's staircase in popular literature), named after significant german mathematician Georg Cantor (3 March 1845 in St Petersburg, 6 Jan 1918 in Halle).

Keywords: Cantor discontinuum, Lebesgue measure, Hölder continuous function, Continuity, Derivation

KAPITOLA 1

Úvod

V předložené práci se čtenář blíže seznámí s Cantorovou funkcí. Začneme tím, že si připomeneme pojem Cantorova diskontinua, který s Cantorovou funkcí úzce souvisí a připomeneme jeho základní vlastnosti. Poté podrobně popíšeme konstrukci Cantorovy funkce, nabídneme dva způsoby definice a ověříme, že oba popisují ten samý objekt, tj. spojitou funkci na intervalu $[0, 1]$.

V následné páté kapitole dokážeme některá nejznámnější tvrzení, např. že Cantorova funkce má na intervalu $[0, 1]$ vzhledem k Lebesgueově míře derivaci skoro všude rovnou nule, dále že Cantorova funkce je sice spojitá, nikoliv však absolutně spojitá nebo že existuje lebesgueovsky měřitelná podmnožina intervalu $[0, 1]$, kterou Cantorova funkce zobrazí na lebesgueovsky neměřitelnou množinu.

V samostatné sekci páté kapitoly zkonstruujeme za pomoci Cantorovy funkce spojitou funkci na intervalu $[0, 1]$, která má stejně jako Cantorova funkce derivaci rovnou nule skoro všude v $[0, 1]$, ale na rozdíl od neklesající Cantorovy funkce je dokonce ryze rostoucí.

V šesté kapitole se budeme zabývat otázkou, pro které α je Cantorova funkce α-hölderovská.

Závěrečná sedmá kapitola bude věnována otázce diferencovatelnosti Cantorovy funkce. Zavedeme jistou přirozenou míru $\mathcal{H}$ na Cantorově diskontinuu a za pomoci nástrojů z teorie pravděpodobnosti ukážeme, že ve skoro všech bodech Cantorova diskontinua (vzhledem k míře $\mathcal{H}$) má Cantorova funkce nekonečnou derivaci.

KAPITOLA 2

Klíčové věty, definice a značení

Uzavřený interval od a do b budeme značit $[a, b]$.

Symbol f značí reálnou funkci reálné proměnné definované na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

(Pokud dále v textu budeme mluvit o spojitosti na intervalu $[a, b]$, budeme mít vždy na mysli spojitost na intervalu (a, b), v bodě a spojitost zprava, v bodě b spojitost zleva).

Množinu všech přirozených čísel bez nuly budeme značit symbolem $\mathbb{N}$.

Množinu všech přirozených čísel (tedy včetně nuly) budeme značit symbolem $\mathbb{N}_0$.

Symbolem λ budeme v textu značit jednorozměrnou Lebesgueovu míru.

Zápisem $(0.x_1x_2...)_p$, kde $p \in \{2, 3\}$, $x_n \in \{0, 1, ..., p-1\}$, $n \in \mathbb{N}$ rozumíme zápis čísla v p-té poziční soustavě (zkráceně budeme říkat dvojkové, příp. trojkové soustavě).

(Následující větu lze nalézt například v [**1**])

Věta 2.1. *(Heine) Funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když platí pro každou posloupnost $\{x_n\}$*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definice 2.2. Funkci $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nazveme α-hölderovskou s $\alpha \in [0, 1]$, existuje-li takové $K \geq 0$, že pro všechna $x, y \in [0, 1]$ platí nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha.$$

Definice 2.3. Reálnou funkci na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nazveme absolutně spojitou, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon,$$

kdykoliv $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq ... \leq a_n < b_n$ jsou čísla z intervalu $[a, b]$, pro která platí $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$.

(Následující dvě věty lze nalézt například v [**2**] na stranách 72 a 74).

Věta 2.4. *Nechť f je absolutně spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom platí, že $f' \in L^1([a, b])$ a navíc*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

VĚTA 2.5. *(Lebesgueova o diferencovatelnosti monotónní funkce) Každá monotónní funkce na intervalu $[a,b]$ má konečnou derivaci ve skoro všech bodech tohoto intervalu. Je-li f neklesající na $[a,b]$, je $f' \in L^1([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b f' \le f(b) - f(a).$$

(Nyní připomeneme některé základní pojmy z teorie míry a teorie pravděpodobnosti, které uplatníme v poslední kapitole této práce. Vše co uvádíme lze vyhledat například v [**3**].)

DEFINICE 2.6. Nechť X je neprázdná množina. Systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá σ-algebra, jestliže platí

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
(iii) $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

DEFINICE 2.7. Dvojice $(X, \mathcal{A})$, kde $\mathcal{A}$ je nějaká σ-algebra podmnožin množiny X, se nazývá měřitelný prostor.

DEFINICE 2.8. Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(X^*, \mathcal{A}^*)$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to X^*$ se nazývá měřitelné, jestliže

$$A^* \in \mathcal{A}^* \Rightarrow f^{-1}(A^*) \in \mathcal{A}.$$

Zapisujeme $f : (X, \mathcal{A}) \to (X^*, \mathcal{A}^*)$.

DEFINICE 2.9. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá míra, jestliže platí

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,
(ii) A_n po dvou disjunktní $\Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou. Je-li navíc $\mu(X) = 1$, pak hovoříme o pravděpodobnostním prostoru.

VĚTA 2.10. *(O obrazu míry) Nechť $(X, \mathcal{A})$, $(X^*, \mathcal{A}^*)$ jsou měřitelné prostory, T je měřitelné zobrazení z $(X, \mathcal{A})$ do $(X^*, \mathcal{A}^*)$, μ je míra na $\mathcal{A}$. Potom množinová funkce $T(\mu)$, definovaná vztahem*

$$T(\mu)(A^*) = \mu(T^{-1}(A^*)), \qquad A^* \in \mathcal{A}^*,$$

je míra na $\mathcal{A}^*$; říká se jí obraz míry μ.

DEFINICE 2.11. Měřitelná reálná funkce $F : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ se nazývá náhodná veličina. Náhodná veličina se nazývá diskrétní, pokud nabývá pouze spočetně (případně konečně) mnoha hodnot x_n s pravděpodobnostmi p_n, $n \in \mathcal{N} \subset \mathbb{N}$.

DEFINICE 2.12. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor. Pro diskrétní náhodnou veličinu F definujeme střední hodnotu EF předpisem

$$EF = \sum_{n \in \mathcal{N}} x_n p_n$$

VĚTA 2.13. *(Silný zákon velkých čísel pro stejně rozdělené náhodné veličiny) Nechť je dán pravděpodobnostní prostor* $(X, \mathcal{A}, P)$ *a nechť dále* $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Pak pro* $n \to \infty$ *platí*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to \mu$$

skoro jistě (vzhledem k pravděpodobnosti P*) pro nějaké* $\mu \in \mathbb{R}$*, právě když* $E|Y_1| < \infty$*. V tomto případě* $EY_1 = \mu$*.*

KAPITOLA 3

Cantorovo diskontinuum

Cantorova funkce je úzce svázána s pojmem Cantorova diskontinua. Začněme tedy tím, že si podrobněji popíšeme Cantorovo diskontinuum a dokážeme si jeho základní vlastnosti.

Cantorovo diskontinuum je podmnožina intervalu $[0,1]$ a definuje se rekurentním způsobem. V prvním kroku z intervalu $[0,1]$ odebereme prostřední otevřený interval $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, zůstanou nám tedy dva uzavřené intervaly

$$[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1].$$

Ve druhém kroku z těchto dvou uzavřených intervalů odebereme opět jejich prostřední třetiny, tedy intervaly $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ a $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$. Zůstanou nám čtyři intervaly

$$[0,\frac{1}{9}],[\frac{2}{9},\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},\frac{7}{9}],[\frac{8}{9},1].$$

Označme si množiny intervalů, které nám vzniknou v n-tém kroku konstrukce symbolem K_n. Z formálních důvodů $K_0=[0,1]$, a dále již $K_1=\{[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1]\}$, $K_2=\{[0,\frac{1}{9}],[\frac{2}{9},\frac{3}{9}],[\frac{6}{9},\frac{7}{9}],[\frac{8}{9},1]\}$ (úmyslně píšeme zlomky v nezkráceném tvaru pro lepší názornost).

Máme-li obecně množinu K_n podintervalů $[0,1]$, dostaneme K_{n+1} tak, že z každého intervalu z K_n odebereme prostřední otevřenou třetinu, čímž se nám každý takový interval rozpadne na dva nové uzavřené intervaly. Je zřejmé, že tímto způsobem v každém kroku zdvojnásobujeme počty intervalů, tedy platí $\#K_n=2^n$. Cantorovým diskontinuem nazveme množinu $\mathcal{K}\subset[0,1]$, definovanou jako

$$\mathcal{K}=\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{K}_n,$$

kde $\mathcal{K}_n$ je sjednocení intervalů z K_n.

Na Cantorovo diskontinuum se můžeme dívat i z jiného pohledu. Budeme-li pracovat s trojkovými rozvoji čísel ležícími v intervalu $[0,1]$,tj. tvary $(0,a_1a_2a_3...)_3$, kde $a_i\in\{0,1,2\}$, $i\in\mathbb{N}$, lze odebrání intervalu $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ chápat také tak, že odebereme všechna čísla, která mají v nějakém svém trojkovém zápisu na první pozici za desetinou čárkou cifru 1, tedy čísla $(0,1a_1a_2a_3...)_3$. Skutečně, pro $a_i\in\{0,1,2\}, i\in\mathbb{N}, i\geq 2$ platí

$$\frac{1}{3}=(0,0222...)_3=(0,1000...)_3\leq(0,1a_1a_2a_3...)_3\leq(0,1222...)_3=(0,2)_3=\frac{2}{3}.$$

Odebereme-li dále intervaly $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ a $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, je to to samé, jako odebrat čísla, která mají v nějakém svém trojkovém zápisu na druhé pozici za desetinou čárkou cifru 1 (přičemž již neuvažujeme čísla s cifrou 1 na první pozici za desetinou čárkou, ta jsme odebrali v předchozím kroku). Platí obdobné nerovnosti pro $a_i\in$

$\{0,1,2\}, i \in \mathbb{N}, i \geq 3$, totiž

$$\frac{1}{9} = (0,00222...)_3 = (0,01000...)_3 \leq (0,01a_1a_2a_3...)_3 \leq (0,01222...)_3 = (0,02)_3 = \frac{2}{9},$$

$$\frac{7}{9} = 0,21000... \leq 0,21a_1a_2a_3... \leq 0,21222... = \frac{8}{9}.$$

Postupujeme-li indukcí tímto způsobem dále, zjistíme, že Cantorovo diskontinuum sestává právě z čísel, která lze v trojkovém zápisu vyjádřit pouze užitím cifry 0 nebo 2.

Vlastnosti 3.1. *Základní vlastnosti Cantorova diskontinua (dále již $\mathcal{K}$) shrnují následující tři body.*

(i) *$\mathcal{K}$ je nespočetná množina.*
(ii) *$\mathcal{K}$ je uzavřená množina.*
(iii) *$\mathcal{K}$ má nulovou Lebesgueovu míru.*

Důkaz.

(i) Již víme, že množina $\mathcal{K}$ sestává právě z bodů, které lze zapsat v trojkové soustavě bez užití cifry 1. Uvažujme tedy libovolné takové číslo

$$x = (0, a_1a_2a_3a_4a_5...)_3,$$

$a_i \in \{0,2\}, i \in \mathbb{N}$. Sestrojme nyní zobrazení, které každému takovému x přiřadí řetězec $0, b_1b_2b_3b_4b_5...$, kde

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{pro } a_i = 0 \\ 1, & \text{pro } a_i = 2 \end{cases}$$

Zřejmě je takové zobrazení bijekcí mezi všemi prvky Cantorova diskontinua a všemi řetězci tvaru $0, b_1b_2b_3b_4b_5...$, $b_i \in \{0,1\}, i \in \mathbb{N}$. Ovšem každý takový řetězec lze chápat jako zápis nějakého čísla $x \in [0,1]$ v dvojkové soustavě. Existuje tedy bijekce mezi Cantorovým diskontinuem a intervalem $[0,1]$. Poněvadž každý nedegenerovaný interval je nespočetná množina, dostáváme tím, že i Cantorovo diskontinuum je nespočetná množina.

(ii) Uzavřenost $\mathcal{K}$ nahlédneme snadno z toho, že $\mathcal{K}$ je průnikem uzavřených množin $\mathcal{K}_n$, $n \in N$, (uzavřené množiny to jsou proto, poněvadž se jedná o sjednocení uzavřených intervalů).

(iii) Z předchozího bodu víme, že $\mathcal{K}$ je uzavřená množina, a tedy Lebesgueovsky měřitelná. Počítejme nyní míru množiny $[0,1] \setminus \mathcal{K}$. Platí,

$$\begin{aligned}\lambda([0,1] \setminus \mathcal{K}) &= \lambda([0,1] \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n) = \lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty}([0,1] \setminus \mathcal{K}_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda([0,1] \setminus \mathcal{K}_n) = \lim_{n\to\infty}\big(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n}\big) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\big(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \big(\frac{2}{3}\big)^n\big) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{(1-\frac{2}{3})} = 1\end{aligned}$$

Z toho tedy plyne, že $\lambda(\mathcal{K}) = 0$.

$\square$

KAPITOLA 4

Definice Cantorovy funkce

4.1. První způsob definice Cantorovy funkce

Cantorovu funkci budeme postupně definovat na jistých uzavřených podintervalech $[0,1]$, následně ukážeme, že existuje spojité dodefinování na celý interval $[0,1]$. Výsledkem bude spojitá, neklesající funkce na $[0,1]$ s hodnotami v celém $[0,1]$.

Pro $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ definujme $f(x) = \frac{1}{2}$. Dále si budeme v každém kroku definovat množiny intervalů, na kterých jsme již f definovali. Tedy $K_1 = \{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\}$. Na dvou intervalech, kde je f nedefinována, postupujme obdobně. Tedy vezměme prostřední uzavřené třetiny těchto intervalů a pro $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ definujme $f(x) = \frac{1}{4}$, pro $x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ definujme $f(x) = \frac{3}{4}$, $K_2 = \{[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}], [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]\}$.

Pro přehlednost zaveďme ještě speciální značení intervalů, které leží v K_i, tedy

$$[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$$

pro K_1,

$$[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}] = [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$$

$$[a_2^{(2)}, b_2^{(2)}] = [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$$

pro K_2.

Obecně, máme-li již množinu intervalů K_i, vznikne množina K_{i+1} tak, že vezmeme všechny uzavřené prostřední třetiny intervalů na kterých jsme f ještě nedefinovali. Snadno nahlédneme, že $\#K_{i+1} = 2\#K_i$, přičemž $\#K_1 = 1$. Indukcí tedy ihned dostáváme, že $\#K_i = 2^{i-1}$ a délka každého z intervalů v K_i je rovna 3^{-i}.

V obecném n-tém kroku definujme

$$f(x) = \frac{2k-1}{2^n}$$

pro $x \in [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$ a $k \in \{1, 2, ..., 2^{n-1}\}$. Provedeme-li tento proces pro všechna přirozená n, zůstane funkce f nedefinována na množině

$$\mathcal{M} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \Big) \tag{4.1}$$

Otázkou nyní je, zda-li lze nějak popsat body patřící do této množiny (případně zda-li tato množina není prázdná). Konstruujeme-li Cantorovo diskontinuum, začneme tak, že z $[0,1]$ odebereme prostřední třetinu, tj. interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Dále ze zbývajících intervalů odebereme vždy prostřední otevřené třetiny. Srovnáme-li tento postup s postupem, jakým jsme postupně definovali f, není těžké nahlédnout, že f zůstala nedefinována právě na množině vzniklé tak, že z Cantorova diskontinua odebereme body $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}...$, tedy body, které tvoří kraje intervalů z K_i, $i \in \mathbb{N}$. Poněvadž Cantorovo diskontinuum je nespočetná množina, zůstane nespočetnou množinou i po odebrání nějaké podmnožiny racionálních čísel. Funkce f tedy zůstala nedefinována na nespočetné podmnožině $[0, 1]$.

Zvolme nyní libovolný bod, ve kterém jsme f ještě nedefinovali a označme ho t^*. Tento bod leží zcela jistě v jednom z otevřených intervalů $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, 1)$. Pokud leží například v intervalu $(0, \frac{1}{3})$, definujme $t_1 = 0$ a $t_1^{'} = \frac{1}{3}$. Dále t^* leží buď v $(0, \frac{1}{9})$ nebo v $(\frac{2}{9}, \frac{1}{3})$. Nechť je to kupříkladu interval $(\frac{2}{9}, \frac{1}{3})$. Pak definujme $t_2 = \frac{2}{9}$, $t_2^{'} = \frac{1}{3}$. Obecně, leží-li t^* v intervalu (a_n, b_n), kde a_n a b_n jsou krajní body nějakého z intervalů z K_i, tj. racionální čísla z množiny $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}...$, pak obdobně t^* leží v jednom z otevřených intervalů $(a_n, a_n + \frac{b_n - a_n}{3})$ a $(b_n - \frac{b_n - a_n}{3}, b_n)$.

V prvním případě položme $t_{n+1} = t_n$, $t_{n+1}^{'} = t_n^{'} - \frac{2}{3}(b_n - a_n)$, ve druhém případě položme $t_{n+1} = t_n + \frac{2}{3}(b_n - a_n)$, $t_{n+1}^{'} = t_n^{'}$.

Protože evidentně platí $(t_{n+1}, t_{n+1}^{'}) \subset (t_n, t_n^{'})$, posloupnosti t_n, $t_n^{'}$ jsou po řadě neklesající a nerostoucí, $t_{n+1}^{'} - t_{n+1} = \frac{1}{3}(t_n^{'} - t_n)$ a $\lim_{n\to\infty}(t_n^{'} - t_n) = 0$, nabízí se možnost definovat $f(t^*)$ jako společnou limitu $f(t_n)$, resp. $f(t_n^{'})$. K tomu je zapotřebí si rozmyslet několik věcí. Předně, je-li funkce definovaná na systémech intervalů $K_1, ..., K_n$, můžeme zřejmě tyto intervaly seřadit do posloupnosti podle hodnoty jejich pravých mezí. Máme-li například f definovanou na K_1, K_2, seřadíme tyto intervaly do posloupnosti následovně:

$$[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}],$$

přičemž funkční hodnota definovaná na libovolném intervalu je vždy o $\frac{1}{4}$ větší než na předcházejícím intervalu, ve smyslu popsaného seřazení (samozřejmě kromě intervalu $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$, ten žádného předchůdce nemá). Postupujme dále indukcí. Nechť tedy máme seřazeny do posloupnosti podle hodnot pravých mezí intervaly z $K_1, ..., K_n$ a předpokládejme, že definovaná funkční hodnota $f(x)$ na libovolném intervalu, kromě prvního, je o $\frac{1}{2^n}$ větší než na intervalu předchozím. Systém intervalů K_{n+1} jsme definovali tak, že na každém intervalu, kde f nebyla dosud definovaná, vezmeme uzavřenou prostřední třetinu a na ni f definujeme postupně hodnotami

$$\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}, \frac{5}{2^{n+1}}, ..., \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Nyní je už patrné, že seřadíme-li nyní do posloupnosti intervaly z $K_1, ..., K_{n+1}$, bude f postupně nabývat funkčních hodnot

$$\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{2}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}, ..., \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}},$$

tedy funkční hodnota na libovolném intervalu z $K_1, ..., K_{n+1}$ v uvažovaném uspořádání je o $\frac{1}{2^{n+1}}$ větší než na intervalu předchozím (opět kromě prvního intervalu $[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}]$). Funkce f, definovaná na množinách intervalů $K_1, ..., K_n$, je zde rostoucí, čili posloupnost $f(t_n)$, resp. $f(t_n^{'})$ je neklesající, shora omezená, resp. neklesající, zdola omezená. Obě jsou tedy konvergentní. Skutečnost, že obě limity jsou si rovny je patrná z toho, že pro

$$t_n^{'} - t_n = \frac{1}{3^n}$$

platí

$$f(t_n') - f(t_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Dodefinovali jsme tedy f ve všech bodech intervalu $[0,1]$. Je patrné, že po tomto rozšíření definičního oboru na celý interval $[0,1]$ bude f na $[0,1]$ neklesající. Je otázkou, zda-li se jedná o spojitou funkci. Je-li $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}])$ libovolné, leží v nějakém $[a,b] \in K_m$, na kterém je f konstantní. Jedná-li se o vnitřní bod takového intervalu, je f v x jasně spojitá. Zbývá si rozmyslet případ, kdy je x krajním bodem takového intervalu. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že se jedná o levý krajní bod takového intervalu, tj. $x = a$. Spojitost zprava je i v tomto případě jasná, netriviální je pouze spojitost zleva. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$. K němu existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Definujme $l = \max\{m, n\}$. Pro toto pevné $l \in \mathbb{N}$ opět uvažme systém intervalů z $K_1, ..., K_l$. Jak již víme, na tomto systému je f neklesající, mezi sousedními intervaly jsou mezery délky $\frac{1}{3^l}$ a funkční hodnota na libovolném intervalu je o $\frac{1}{2^l}$ větší, než na předchozím intervalu. Speciálně tedy pro každé

$$y \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}])$$

takové, že $\frac{1}{3^l} > x - y \geq 0$, je

$$\varepsilon > \frac{1}{2^l} > f(x) - f(y) \geq 0,$$

z čehož již dostáváme spojitost f na $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}])$. Ve zbývajících bodech intervalu $[0,1]$, kde jsme f dodefinovali jistou limitou, ukážeme spojitost podle Heineho definice spojitosti (Věta 2.1). Buď

$$t^* \in \mathcal{M} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}])$$

a $s_n \to t^*$, $s_n \in [0,1]$ libovolná posloupnost. Chceme ukázat, že potom

$$f(s_n) \to f(t^*),$$

čímž bude spojitost funkce f v bodě t^* dokázána. Buď t_n, t_n' posloupnosti definované výše. Zvolíme-li $\varepsilon > 0$ libovolné, pak jistě existuje index n_0 takový, že pro všechna $n \geq n_0$ je $|f(t_n) - f(t^*)| < \varepsilon$ a $|f(t_n') - f(t^*)| < \varepsilon$. Poněvadž jsou ale posloupnosti t_n, t_n' po řadě neklesající a nerostoucí a rovněž funkce f je neklesající, stačí nám nalézt takový index m_0, aby pro všechna $n \geq m_0$ platilo $t_{n_0} \leq s_n \leq t_{n_0}'$. Potom bude rovněž platit $|f(s_n) - f(t^*)| < \varepsilon$, čímž je spojitost v bodě t^* dokázána.

4.2. Druhý způsob konstrukce Cantorovy funkce

Ukažme si jinou možnou definici Cantorovy funkce, a to aritmetickou. Uvažujme libovolné číslo $x \in [0,1]$ a jeho zápis v trojkové soustavě (zatím ponechme stranou nejednoznačnost zápisu).

Vezměme první cifru v našem zápisu rovnou 1 (pokud taková existuje) a všechny následující cifry nahraďme 0. Dále přepišme všechny cifry rovné 2 na hodnotu 1. Tím získáme zápis jistého čísla ve dvojkové soustavě, a to bude právě hodnota funkce f v bodě x. Například:

$$x = \frac{23}{27} = (0.212)_3.$$

Aplikujme výše uvedený postup:

Nalezneme první cifru 1 v řetězci 0.212 a všechny následující cifry za ní, v tomto případě pouze jedinou cifru, nahradíme 0. Dostaneme tedy řetězec 0.210. Nyní v tomto řetězci přepíšeme všechny cifry 2 na cifru 1. Dostáváme tedy řetězec 0.110 a ten interpretujeme jako zápis $f(x)$ ve dvojkové soustavě. Ve zkratce tedy:

$$0.212 \to 0.210 \to (0.110)_2 = f(x).$$

Pokud zápis x v trojkové soustavě neobsahuje cifru 1, postupujeme tak, že v tomto zápisu nahradíme všechny cifry 2 cifrou 1 (cifry 0 ponecháme nezměněny). Tento změněný zápis interpretujeme jako zápis jistého čísla ve dvojkové soustavě, a to bude funkční hodnota f v bodě x. Například:

$$x = \frac{20}{27} = (0.202)_3.$$

Podle výše uvedeného postupu tedy dostaneme

$$0.202 \to (0.101)_2 = f(x).$$

Jak víme, zápis čísla v jakékoliv poziční soustavě není jednoznačný. Například v desítkové soustavě platí

$$1 = 0,9999...$$

Stejně tak v trojkovém zápisu dostáváme

$$\frac{1}{3} = (0.1)_3 = (0.02222)_3.$$

Je tedy otázka, zda-li je naše definování funkčních hodnot korektní, tj. zda-li nezávisí na zvoleném zápisu $x \in [0,1]$ v trojkové soustavě. Uvažujme tedy dva různé zápisy téhož čísla $x \in [0,1]$ v trojkové soustavě. Nechť tedy platí

$$x = (0.a_1a_2...a_n1000...)_3 = (0.a_1a_2...a_n02222...)_3,$$

kde $a_i \in \{0,1,2\}$. Podle výše uvedeného postupu má platit

$$f(x) = (0.b_1b_2...b_n1000...)_2$$

a současně

$$f(x) = (0.b_1b_2...b_n01111...)_2,$$

kde $b_i \in \{0,1\}$. Je ovšem

$$(0.b_1b_2...b_n1000...)_2 = (0.b_1b_2...b_n01111...)_2,$$

tedy naše definice je opravdu korektní.

Ukažme, že se jedná o spojitou funkci. K tomu nám zřejmě stačí dokázat následující větu.

Věta 4.1. *Nechť f je funkce definovaná v předchozím odstavci. Potom pro všechna $x, y \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$|x-y| \leq \frac{1}{3^n} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2^n}$$

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $y \geq x$. Označme dále

$$x = (0.x_1x_2...x_nx_{n+1}...)_3$$
$$y = (0.y_1y_2...y_ny_{n+1}...)_3,$$

kde $x_i, y_i \in \{0, 1, 2\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Dokud neřekneme jinak, budeme v dalších úvahách pracovat s předpokladem

$$x_1 = y_1, ..., x_{n-1} = y_{n-1}.$$

Z $y \geq x$ nemůže nastat situace, kdy by bylo $x_n - y_n = 2$. Platí-li $x_n - y_n = 1$, je podle předpokladu $y \geq x$ nutně $x_i = 0, y_i = 2$, $i > n$ (v tomto případě pak dokonce platí rovnost $x = y$). Zápisy čísel x, y v trojkové soustavě tedy mají tvar

$$x = (0.x_1x_2...x_{n-1}1000...)_3$$
$$y = (0.x_1x_2...x_{n-1}0222...)_3,$$

popřípadě

$$x = (0.x_1x_2...x_{n-1}2000...)_3$$
$$y = (0.x_1x_2...x_{n-1}1222...)_3.$$

Aplikujeme-li postup výpočtu hodnot Cantorovy funkce v bodech x, y, dostáváme ihned rovnost $f(x) = f(y)$.

Platí-li $x_n = y_n$, mohou se cifry trojkových zápisů x, y lišit nejdříve na indexu $n+1$. Tím se ovšem i dvojkové zápisy $f(x), f(y)$ liší nejdříve na pozici $n+1$, i nyní tedy obdržíme nerovnost $f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^n}$.

Pokud je $y_n - x_n = 1$, mají zápisy x, y tvar

$$x = (0.x_1x_2...x_{n-1}0x_{n+1}...)_3$$
$$y = (0.x_1x_2...x_{n-1}1y_{n+1}...)_3,$$

resp.

$$x = (0.x_1x_2...x_{n-1}1x_{n+1}...)_3$$
$$y = (0.x_1x_2...x_{n-1}2y_{n+1}...)_3.$$

Je-li některé $x_1...x_n$ rovno 1, dostáváme ihned rovnost $f(x) = f(y)$. V opačném případě budou mít dvojkové zápisy $f(x), f(y)$ tvar

$$f(x) = (0.b_1b_2...b_{n-1}0b_{n+1}...)_2$$
$$f(y) = (0.b_1b_2...b_{n-1}1000...)_2,$$

resp.

$$f(x) = (0.b_1b_2...b_{n-1}1000...)_2$$
$$f(y) = (0.b_1b_2...b_{n-1}1b_{n+1}...)_2,$$

kde $b_i \in \{0, 1\}$. Nyní je už patrné, že v obou případech platí požadovaná nerovnost $f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^n}$.

Zbývá dořešit situaci, kdy existuje $i \in \{1, ..., n-1\}$, že $x_i \neq y_i$. Předpokládejme navíc, že i je nejmenší takový index. Připomeňme, stále předpokládáme, že $y \geq x$. Buď tedy

$$x = (0.x_1...x_i...x_n...)_3$$
$$y = (0.x_1...y_i...y_n...)_3.$$

Případ, platí kdy $y_i = 0, x_i = 2$ můžeme vyloučit, protože je ihned ve sporu s předpokladem $y \geq x$. I v případě

$$y_{i+1} = y_{i+2}... = 2$$

$$x_{i+1} = x_{i+2} ... = 0$$

je totiž $y < x$. Pokud $x_i - y_i = 1$, musí být nutně

$$y_{i+1} = y_{i+2} ... = 2$$
$$x_{i+1} = x_{i+2} ... = 0.$$

Potom ale $x = y$, a proto $f(x) = f(y)$.

Buď tedy $y_i > x_i$. I v tomto případě můžeme ihned vyloučit jeden případ, a to $y_i = 2, x_i = 0$. Pak totiž $y - x \geq \frac{1}{3^i} > \frac{1}{3^n}$ Až do konce důkazu tedy platí

$$y_i = x_i + 1.$$

Nutně musí rovněž platit

$$x_{i+1} = x_{i+2} = ... = x_{n-1} = 2$$
$$y_{i+1} = y_{i+2} = ... = y_{n-1} = 0.$$

Jinak buď existuje index $j \in \{i+1, ..., n-1\}$ takový, že $x_j \in \{0, 1\}$, nebo existuje index $j^{'} \in \{i+1, ..., n-1\}$, že $y_{j'} \in \{1, 2\}$, případně nastanou oba předchozí případy. V prvém případě dostáváme

$$\begin{aligned} y - x &\geq (0.x_1...y_i000y_j000y_n000...)_3 - (0.x_1...x_i222x_j222x_n222...)_3 \\ &\geq \frac{2 - x_j}{3^j} \\ &> \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Ve druhém případě dostaneme obdobným způsobem spor (tím spíše, pokud nastanou případy oba). Zápisy čísel x, y jsou tedy nutně tvaru

$$x = (0.x_1...x_{i-1}x_i222...x_nx_{n+1}...)_3$$
$$y = (0.x_1...x_{i-1}y_i000...y_ny_{n+1}...)_3.$$

Pokud $y_n = 2$, pak

$$y - x \geq \frac{2}{3^n} > \frac{1}{3^n},$$

což je tedy spor.

Pokud $y_n = 1$, pak $y - x \geq \frac{1}{3^n}$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, když x, y jsou ve tvaru

$$x = (0.x_1...x_{i-1}0_i222...2_n222...)_3$$
$$y = (0.x_1...x_{i-1}1_i000...1_n000...)_3,$$

popřípadě

$$x = (0.x_1...x_{i-1}1_i222...2_n222...)_3$$
$$y = (0.x_1...x_{i-1}2_i000...1_n000...)_3.$$

V obou případech platí

$$f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Je-li konečně $y_n = 0$ pak mohou nastat pouze situace, kdy

$$x = (0.x_1...x_{i-1}x_i222...2_nx_{n+1}...)_3$$
$$y = (0.x_1...x_{i-1}y_i000...0_ny_{n+1}...)_3,$$

$$x = (0.x_1...x_{i-1}x_i222...1_nx_{n+1}...)_3$$
$$y = (0.x_1...x_{i-1}y_i000...0_ny_{n+1}...)_3,$$

v obou případech $y_i = x_i + 1$. Zvážíme-li, že jedna z cifer x_i, y_i je rovna 1 dostáváme i zde požadovanou nerovnost

$$f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Případ, kdy $x_n = 0$, tj.

$$x = (0.x_1...x_{i-1}x_i222...0_nx_{n+1}...)_3$$

$$y = (0.x_1...x_{i-1}y_i000...0_ny_{n+1}...)_3$$

vede ke sporu, je totiž $y - x \geq \frac{2}{3^n}$.

□

4.3. Srovnání definic

Nabídli jsme dvě definice Cantorovy funkce. Na závěr této kapitoly nám zbývá ukázat, že v obou případech dostaneme vždy ten samý objekt. Nejprve ale pomocné tvrzení.

VĚTA 4.2. *Nechť f a g jsou dvě spojité funkce na intervalu $[0, 1]$, které se shodují na husté podmnožině $\mathcal{H} \subseteq [0, 1]$. Potom $f = g$ na celém $[0, 1]$.*

DŮKAZ. Nechť tomu tak není. Existuje tedy takové $x \in [0, 1]$, že

$$f(x) \neq g(x).$$

Z předpokladu hustoty množiny $\mathcal{H}$ existuje posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{H}$ taková, že

$$x_n \to x.$$

Podle Heineho věty 2.1 je ovšem současně

$$f(x_n) \to f(x)$$

$$g(x_n) \to g(x).$$

To je však evidentní spor s $f(x) \neq g(x)$, neboť $f(x_n) = g(x_n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Podle právě dokázané věty nám tedy k ověření toho, že obě definice Cantorovy funkce splývají, stačí ukázat, že funkce jimi určené se shodují na jisté husté podmnožině $[0, 1]$. V tomto případě bude takovou hustou podmnožinou

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]),$$

kde užíváme značení ze Sekce 4.1, $\mathcal{K}_n$ je sjednocení intervalů z K_n, $n \in \mathbb{N}$.

Na intervalu

$$[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$$

je funkčí hodnota podle první definice

$$f(x) = \frac{2.1 - 1}{2^1} = \frac{1}{2}.$$

Druhá definice dává na

$$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] = [(0.1)_3, (0.2)_3]$$

hodnotu
$$f(x) = (0.1)_2 = \frac{1}{2}.$$

Postupujme dále indukcí podle m. Nechť se tedy funkce určené první a druhou definicí rovnají na $\bigcup_{n=1}^{m} K_n$ a nechť navíc všechny koncové body intervalů z $\bigcup_{n=1}^{m} K_n$ mají v trojkovém zápisu všechny cifry různé od 1. Jak jsme již důkladně popsali v Sekci 4.1, budeme definovat intervaly z K_{m+1} tak, že $\forall n \in \{1, ..., m\}$ vezmeme postupně každý interval
$$[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \in \bigcup_{n=1}^{m} K_n$$
a definujeme
$$[b_k^{(n)} + \frac{1}{3^{m+1}}, b_k^{(n)} + \frac{2}{3^{m+1}}] \in K_{m+1}.$$
Víme již, že podle prvního způsobu definice Cantorovy funkce bude funkční hodnota na $[b_k^{(n)} + \frac{1}{3^{m+1}}, b_k^{(n)} + \frac{2}{3^{m+1}}]$ o $\frac{1}{2^{m+1}}$ větší než na intervalu $[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$. Podle indukčního předpokladu ale také víme, že
$$b_k^{(n)} = (0.b_1 b_2 ... b_n 000...)_3,$$
kde $b_1 ... b_n \in \{0, 2\}$. Pak ovšem
$$[b_k^{(n)} + \frac{1}{3^{m+1}}, b_k^{(n)} + \frac{2}{3^{m+1}}] = [(0.b_1 b_2 ... b_n 0001_{m+1})_3, (0.b_1 b_2 ... b_n 0002_{m+1})_3].$$
Tím jsme tedy jednak ukázali, že koncový bod intervalu $[b_k^{(n)} + \frac{1}{3^{m+1}}, b_k^{(n)} + \frac{2}{3^{m+1}}]$ má v trojkovém zápisu cifry různé od 1, ale především podle způsobu určení funkční hodnoty v druhé definici Cantorovy funkce i zde vidíme, že funkční hodnota je o $\frac{1}{2^{m+1}}$ větší než na intervalu $[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$.

KAPITOLA 5

Vlastnosti Cantorovy funkce

VĚTA 5.1. *Nechť f je Cantorova funkce. Pak f je nekonstantní funkce mající derivaci rovnou 0 skoro všude v intervalu $[0,1]$ (vzhledem k Lebesgueově míře).*

DŮKAZ. V sekci 4.1 jsme definovaly systémy intervalů K_n, na nichž je f konstantní, spec. má tedy na nich derivaci rovnou 0. Spočtěme tedy míru sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$, kde $\mathcal{K}_n$ je sjednocení intervalů z K_n. Dostáváme postupně

$$\begin{aligned}\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\mathcal{K}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n \\ &= \frac{1}{2}.\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.3 = 1 = \lambda([0,1])\end{aligned}$$

U první rovnosti jsme využili toho, že množiny $\mathcal{K}_n$ jsou po dvou disjunktní. To, že je f nekonstantní na $[0,1]$, je zřejmé. □

Cantorova funkce je příkladem funkce, která je spojitá na uzavřeném intervalu, nikoliv však absolutně spojitá.

VĚTA 5.2. *Cantorova funkce je spojitá na $[0,1]$, není zde ale absolutně spojitá.*

DŮKAZ. Skutečně, podle Věty 2.4 pro absolutně spojitou funkci f na uzavřeném intervalu $[a,b]$ platí, že

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f',$$

kde f' je derivací funkce f (více informací o absolutně spojitých funkcích můžete najít například v [**2**], na straně 73). Poněvadž má ale Cantorova funkce derivaci skoro všude rovnou 0, dostáváme ze vztahů $f(b) - f(a) = 1 - 0 = 1$ a $\int_a^b f' = 0$ spor. Proto Cantorova funkce nemůže být absolutně spojitou funkcí. □

VĚTA 5.3. *Nechť f je Cantorova funkce. Potom existuje lebesgueovsky měřitelná podmnožina $[0,1]$, jejíž obraz je lebesgueovsky neměřitelný.*

DŮKAZ. K důkazu užijeme známého tvrzení z teorie míry, že v každé množině kladné míry leží nějaká neměřitelná množina. Ze spojitosti f a z toho, že $f(0) = 0$, resp. $f(1) = 1$ dostáváme, že

$$f([0,1]) = [0,1].$$

(užili jsme toho, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu [a,b] nabývá všech mezihodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$). Funkční hodnoty na intervalech z K_i jsou racionální čísla, čili míra jejich sjednocení je, jakožto spočetná množina, nulová. Označme ji například symbolem $\mathcal{N}$. Dále platí

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) = 1.$$

Z toho ihned dostáváme, že $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ je měřitelná množina kladné míry (rovné jedné). Existuje tedy nějaká neměřitelná podmnožina

$$\mathcal{A} \subset [0,1] \setminus \mathcal{N},$$

jejíž vzor je ale podmnožinou $\mathcal{M}$(viz 4.1) ($\mathcal{M}$ má ovšem nulovou míru, poněvadž je to doplněk měřitelné množiny míry jedna v intervalu délky 1). Ovšem jakákoliv podmnožina měřitelné množiny míry nula je již měřitelná (využíváme úplnosti Lebesgueovy míry). □

5.1. Konstrukce ryze monotónní funkce

Popsali jsme spojitou funkci na intervalu $[0,1]$, s derivací skoro všude rovnou nule. Nyní ukážeme, že lze naše požadavky v jistém smyslu zesílit a najdeme funkci, která bude mít na $[0,1]$ derivaci také rovnou nule skoro všude, ale bude zde dokonce ryze monotónní. To docílíme tím, že vhodným způsobem sečteme jistou řadu funkcí, které vycházejí z Cantorovy funkce. Předtím ale formulujme a dokažme tvrzení, o které se bude naše konstrukce z podstatné části opírat.

VĚTA 5.4. *(O diferencovatelnosti řady monotónních funkcí) Nechť $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ je řada neklesajících funkcí a předpokládejme, že řada*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

konverguje pro každé $x \in [0,1]$ bodově. Potom platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

pro skoro všechna $x \in [0,1]$.

DŮKAZ. Nechť

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

je zbytek n-tého částečného součtu. Je zřejmé, že funkce f i R_n jsou neklesající, proto podle Lebesgueovy Věty 2.5 o diferencovatelnosti neklesající funkce ihned dostáváme, že existují příslušné derivace ve skoro všech bodech intervalu $[0,1]$. Označme A_k měřitelnou podmožinu intervalu $[0,1]$, $\lambda(A_k) = 1$, na které je funkce f_k diferencovatelná. Označme dále $f_0 = f$, A_0 buď měřitelná množina, $\lambda(A_0) = 1$, na které je diferencovatelná funkce f. Z vlastností Lebesgueovy míry dostáváme,

$$\lambda([0,1] \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k) = \lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty}([0,1] \setminus A_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda([0,1] \setminus A_k) = 0.$$

Můžeme tedy definovat $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ jako měřitelnou podmnožinu $[0,1]$ míry 1, na které jsou všechny funkce f_k, $k \in N_0$ diferencovatelné. Vezměme nyní libovolné $x \in A$. Potom součet $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ je diferencovatelný v bodě x, a tedy i $R_n^{'}(x) = f^{'}(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k^{'}(x)$ existuje. Protože je R_n neklesající funkce, dostáváme, že $R_n^{'}(x) \geq 0$. Proto platí

$$f^{'}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k^{'}(x) + R_n^{'}(x) \geq \sum_{k=1}^{n} f_k^{'}(x)$$

pro všechna $x \in A$. Limitní přechod pro $n \to \infty$ dává

$$f^{'}(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{'}(x) \tag{5.1}$$

ve všech bodech $x \in A$, tedy ve skoro všech bodech $[0,1]$.

Z Lebesgueovy věty o diferencovatelnosti neklesající funkce (2.5), kterou aplikujeme na funkci R_n dostáváme, že

$$0 \leq \int_0^1 R_n^{'}(x)dx \leq R_n(1) - R_n(0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (f_k(1) - f_k(0)).$$

Poněvadž konvergují obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(1)$, konverguje i řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k(1) - f_k(0)).$$

Je tedy nutně

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} (f_k(1) - f_k(0) = 0,$$

což dává

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 R_n^{'}(x)dx = 0.$$

Podle předchozích výsledků můžeme nyní psát

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^{'}(x)dx &= \int_0^1 (\sum_{k=1}^{n} f_k(x))^{'} dx + \int_0^1 R_n^{'}(x)dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} f_k^{'}(x)dx + \int_0^1 R_n^{'}(x)dx \\
&\leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{'}(x)dx + \int_0^1 R_n^{'}(x)dx
\end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme

$$\int_0^1 f^{'}(x)dx \leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{'}(x)dx. \tag{5.2}$$

Z (5.1) a (5.2) nyní pro skoro všechna $x \in [0,1]$ dostáváme

$$f^{'}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{'}(x),$$

což jsme chtěli ukázat. □

VĚTA 5.5. *Existuje ryze rostoucí funkce na intervalu* $[0,1]$, *která má derivaci rovnou nule skoro všude v* $[0,1]$.

DŮKAZ. Buď v dalším c Cantorova funkce, r_k očíslování množiny všech racionálních čísel. Rozšiřme definiční obor Cantorovy funkce na celé R, definujme tedy následujícím způsobem novou funkci

$$C(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ c(x), & \text{pro } x \in [0,1] \\ 1, & \text{pro } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Položme konečně

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} C(x - r_k),$$

$x \in [0,1]$. Řada vpravo je zřejmě konvergentní díky srovnávacímu kritériu s řadou $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ všude v $[0,1]$. Dále je f ryze monotónní na intervalu $[0,1]$. Buď

$$0 \leq x < y \leq 1.$$

Zřejmě $C(x - r_k) \leq C(y - r_k)$ pro všechna r_k, protože Cantorova funkce je neklesající. Zvolme takové racionální číslo r_n, pro které platí $x < r_n < y$. Pak je zřejmě $0 = C(x - r_n) < C(y - r_n)$. Z toho tedy plyne, že

$$f(y) - f(x) \geq \frac{1}{2^n}(C(y - r_n) - C(x - r_n)) > 0,$$

a f je tedy skutečně ryze rostoucí funkce na $[0,1]$. Podle Věty 5.4 je $f^{'}(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in [0,1]$, protože $C^{'}(x - r_k) = 0$ skoro všude v $[0,1]$ pro každé r_k. □

KAPITOLA 6

Koeficient hölderovskosti

Zabývejme se nyní otázkou, pro jaké $\alpha \in [0,1]$ je Cantorova funkce α-hölderovská. Připomeňme, že funkci f nazveme α-hölderovskou na intervalu $[0,1]$ s koeficientem $\alpha \in [0,1]$, platí-li pro vhodnou nezápornou konstantu K a všechna $x, y \in [0,1]$ nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{\alpha}.$$

Zformulujme a dokažme nejprve dvě pomocné věty.

VĚTA 6.1. *Nechť spojitá funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je α-hölderovská na husté podmnožině $\mathcal{H}$ intervalu $[0,1]$ s konstantami K, α. Potom je α-hölderovská na celém intervalu $[0,1]$, a to se stejnými konstantami K, α.*

DŮKAZ. Zvolme libovolné $x, y \in [0,1]$ a $n > 0$. Ze spojitosti f v bodech x, y existuje takové $0 < \delta < \frac{1}{n}$, že platí nerovnosti

$$|f(x) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$$

$$|f(y) - f(y_n)| < \frac{1}{n},$$

pro libovolná x_n, y_n z δ-okolí bodu x, resp. y (V případě, že $x = 0$ volme $x_n > 0$, abychom neopustili interval $[0,1]$). Vzhledem k hustotě $\mathcal{H}$ můžeme předpokládat, že x_n, y_n leží v $\mathcal{H}$, kde je f α-hölderovská. Dostáváme tedy postupně následující odhady:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(x_n) + f(x_n) - f(y) + f(y_n) - f(y_n)| \\
&\leq |f(x) - f(x_n)| + |f(y) - f(y_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| \\
&\leq \frac{2}{n} + K|x_n - y_n|^{\alpha} \\
&= \frac{2}{n} + K|x_n - x + x - y_n + y - y|^{\alpha} \\
&\leq \frac{2}{n} + K||x_n - x| + |y_n - y| + |x - y||^{\alpha} \\
&\leq \frac{2}{n} + K|\frac{2}{n} + |x - y||^{\alpha}
\end{aligned}$$

Limitní přechod pro $n \to \infty$ dává požadovanou nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{\alpha}.$$

$\square$

VĚTA 6.2. *Nechť x, y jsou libovolná čísla z $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n$, kde $\mathcal{K}_n$ je sjednocení systému intervalů K_n, který jsme definovali v Sekci 4.1. Pokud platí*

$$(\frac{1}{3})^{n+1} \leq |x-y| \leq (\frac{1}{3})^n,$$

pak platí nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \leq (\frac{1}{2})^n.$$

DůKAZ. Vzhledem k monotonii Cantorovy funkce není samozřejmě potřeba uvažovat spodní odhad $(\frac{1}{3})^{n+1} \leq |x-y|$ v předpokladech věty, nicméně v dalších úvahách budeme potřebovat i tento spodní odhad, je tedy užitečnější zahrnout ho již do znění věty. Nyní k jádru důkazu. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí dokonce

$$|x-y| = (\frac{1}{3})^n.$$

To proto, že Cantorova funkce je neklesající. Předpokládejme opět, stejně jako v paragrafu 3.1, že máme přirozeným způsobem seřazeny do posloupnosti intervaly z $K_1, ..., K_n$ a jak jsme již ukázali, funkční hodnoty na sousedních dvou intervalech v tomto uspořádání se liší o $\frac{1}{2^n}$. Velmi volně řečeno, mezi intervaly z $K_1, ..., K_n$ jsou právě mezery délky $\frac{1}{3^n}$. Poněvadž $|x-y| = (\frac{1}{3})^n$, je patrné, že x, y leží oba buď v jednom intervalu z $K_1, ..., K_n$, nebo ve dvou sousedních intervalech nebo jeden z bodů x, y leží v nějakém intervalu z $K_1, ..., K_n$ a druhý v nejbližší mezeře mezi intervaly ze systému $K_1, ..., K_n$. V prvním případě tedy platí

$$|f(x) - f(y)| = 0,$$

ve druhém

$$|f(x) - f(y)| = (\frac{1}{2})^n$$

a konečně ve třetím případě vzhledem k monotonii f na systému $K_1, ..., K_n$

$$|f(x) - f(y)| \leq (\frac{1}{2})^n.$$

□

VĚTA 6.3. *Nechť f je Cantorova funkce. Pak je f α-hölderovská s koeficientem $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$.*

DůKAZ. Nechť jsou nyní splněny předpoklady předchozí věty, platí tedy

$$(\frac{1}{3})^{n+1} \leq |x-y| \leq (\frac{1}{3})^n,$$

pro $x, y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Postupnými úpravami dostáváme:

$$|f(x) - f(y)| \leq (\frac{1}{2})^n \leq 2(\frac{1}{2})^{n+1} \leq 2(\frac{1}{3})^{(n+1)\frac{\log 2}{\log 3}} \leq 2[(\frac{1}{3})^{n+1}]^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq 2|x-y|^{\frac{\log 2}{\log 3}}.$$

Ukázali jsem tedy, že Cantorova funkce je α-hölderovská na $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ s koeficienty $K = 2, \alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. Dále víme, že $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ je hustá podmožina intervalu $[0, 1]$. Podle Věty 4.1 je Cantorova funkce α-hölderovská na celém intervalu $[0, 1]$, a to se stejnými koeficienty. □

Snadno též nahlédneme, že hodnotu α již nelze vylepšit. Platí-li totiž pro všechna $x, y \in [0,1]$ nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^{\alpha},$$

dostáváme speciální volbou $x = 0, y = \frac{1}{3^n}$

$$|x-y| = (\frac{1}{3})^n; |f(x) - f(y)| = (\frac{1}{2})^n.$$

Dostáváme tedy

$$|f(x) - f(y)| = (\frac{1}{2})^n \leq K(\frac{1}{3})^{n\alpha}$$

$$3^{n\alpha} \leq K2^n.$$

Po zlogaritmování

$$n\alpha \log 3 \leq \log K + n \log 2,$$

tedy

$$\alpha \leq \frac{\log K}{n \log 3} + \frac{n \log 2}{n \log 3} = \frac{\log K}{n \log 3} + \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Limitní přechod pro $n \to \infty$ dává nerovnost

$$\alpha \leq \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Cantorova funkce je tedy α-hölderovská s koeficientem $\frac{\log 2}{\log 3}$.

KAPITOLA 7

Diferencovatelnost Cantorovy funkce

V závěru této práce se budeme podrobněji zabývat otázkou diferencovatelnosti Cantorovy funkce. Zatím jsme ukázali, že Cantorova funkce má nulovou derivaci ve skoro všech bodech intervalu [0,1] vzhledem k Lebesgueově míře. Zbývá nám vyšetřit, jak je to s diferencovatelností na Cantorově diskontinuu (značíme $\mathcal{C}$).

Již víme, že do Cantorova diskontinua patří právě ty body intervalu $[0,1]$, které lze v trojkové soustavě napsat bez užití cifry 1, tedy pouze užitím cifer 0 a 2. Je-li

$$x = (0.200202020...)_3 \in \mathcal{C},$$

pak

$$f(x) = (0.100101010...)_2,$$

jak jsme podrobně popsali v Sekci 4.2. Uvažme funkci $T : \mathcal{C} \to [0,1]$, která je restrikcí Cantorovy funkce f na Cantorovo diskontinuum, tedy

$$T(0.x_1x_2...x_k...)_3 = (0.\frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}...\frac{x_k}{2}...)_2.$$

Je patrné, že zobrazení T zobrazí Cantorovo diskontinuum na celý interval $[0,1]$. Definujme dále na $\mathcal{C}$ systém množin $\mathcal{A}$ následujícím způsobem:

$$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow T(A) \in \mathcal{B},$$

kde $\mathcal{B}$ je σ-algebra na intervalu $[0,1]$, generovaná systémem všech otevřených množin v $[0,1]$ (se standartní topologií).

VĚTA 7.1. *Systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny $\mathcal{C}$ definovaný v předchozím odstavci tvoří σ-algebru.*

DŮKAZ. Vzhledem k tomu, že zobrazení T je na $[0,1]$, platí následující:

(i) $T(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{B}$, čili $\emptyset \in \mathcal{A}$.
(ii) Nechť $A \in \mathcal{A}$. Potom $T(A^c) = T(\mathcal{C} \setminus A) = [0,1] \setminus T(A) \in \mathcal{B}$, čili $A^c \in \mathcal{A}$.
(iii) Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$. Potom ovšem $T(A_i) \in \mathcal{B}$, čili postupně dostáváme:

$$T(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} T(A_i) \in \mathcal{B},$$

takže $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

□

Můžeme tedy uvažovat měřitelný prostor $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ a na něm definovat podle Věty 2.10 míru $\mathcal{H} = T^{-1}(\lambda)$ předpisem

$$\mathcal{H}(A) = T^{-1}(\lambda)(A) = \lambda(T(A)),$$

$A \in \mathcal{A}$.

Dá se ukázat, že $\mathcal{H}$ splývá se standartní Hausdorffovou mírou. Touto otázkou se ale nebudeme v této práci podrobněji zabývat. Definovali jsme tedy prostor s mírou $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{H})$. Protože platí

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \lambda(T(\mathcal{C})) = \lambda([0,1]) = 1,$$

jedná se dokonce o pravděpodobnostní prostor.

Definujme nyní náhodnou veličinu X_n, která popisuje, kolikrát se vyskytuje cifra 0 v zápisu čísla

$$x = (0.x_1x_2...x_n...)_3$$

na pozici 1 až n. Tedy

$$X_n = \#\{i \in \{1,...,n\}, x_i = 0\}.$$

Definujme ještě pomocnou náhodnou veličinu Y_i následujícím způsobem:

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_i \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x_i = 0. \end{cases}$$

Potom samozřejmě platí vztah

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Náhodná veličina Y_i je pro každé $i \in \mathbb{N}$ diskrétní, poněvadž nabývá pouze dvou hodnot, 0 nebo 1. Dále snadno nahlédneme, že platí

$$\mathcal{H}(Y_i = 1) = \mathcal{H}(Y_i = 0) = \frac{1}{2}\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}\lambda([0,1]) = \frac{1}{2}.$$

Rovněž pro $i \neq j$ platí

$$\mathcal{H}((Y_i = 0)\bigcap(Y_j = 0)) = \mathcal{H}(Y_i = 0)\mathcal{H}(Y_j = 0) = \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{H}((Y_i = 0)\bigcap(Y_j = 1)) = \mathcal{H}(Y_i = 0)\mathcal{H}(Y_j = 1) = \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{H}((Y_i = 1)\bigcap(Y_j = 0)) = \mathcal{H}(Y_i = 1)\mathcal{H}(Y_j = 0) = \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{H}((Y_i = 1)\bigcap(Y_j = 1)) = \mathcal{H}(Y_i = 1)\mathcal{H}(Y_j = 1) = \frac{1}{4},$$

takže náhodné veličiny Y_i jsou nezávislé.
(Poznámka: $(Y_i = 1) \in \mathcal{A}$, protože $T(Y_i = 1)$ je zřejmě lebesgueovsky měřitelná podmnožina $[0,1]$). Čili náhodné veličiny Y_i jsou stejně rozdělené, nezávislé a pro jejich střední hodnoty EY_i platí:

$$EY_i = 0.\mathcal{H}(Y_i = 0) + 1.\mathcal{H}(Y_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

Čili podle Silného zákona velkých čísel 2.13 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{2}$$

pro skoro všechna x z $\mathcal{C}$ (vhledem k míře $\mathcal{H}$).

Věta 7.2. *Nechť $x \in \mathcal{C}$. Potom platí následující tvrzení:*

(i) *Pokud je* $x_k = 0$, *tj. trojkový zápis čísla* x *má tvar*

$$x = (0.x_1x_2...x_{k-1}0x_{k+1}...)_3$$

a je-li $y > x$, $|y - x| \geq \frac{1}{3^k}$, *platí*

$$f(y) \geq f(x) + \frac{1}{2^k}.$$

(ii) *Pokud je* $x_k = 2$, *tj.*

$$x = (0.x_1x_2...x_{k-1}2x_{k+1}...)_3$$

a je-li $y < x$, $|y - x| \geq \frac{1}{3^k}$, *platí*

$$f(y) \leq f(x) - \frac{1}{2^k}.$$

Důkaz.

(i) Pokud nastává rovnost, tj. $|y-x| = \frac{1}{3^k}$, pak $y = x + \frac{1}{3^k}$. Tedy trojkový zápis čísla y má tvar

$$y = (0.x_1x_2...x_{k-1}2x_{k+1}...)_3.$$

Zřejmě tedy platí (podle kapitoly 4.2), že $f(y) = f(x) + \frac{1}{2^k}$. Vzhledem k tomu, že Cantorova funkce je neklesající, platí pro $y \geq x + \frac{1}{3^k}$ nerovnost $f(y) \geq f(x) + \frac{1}{2^k}$.

(ii) Postupuje se obdobně jako v předchozím bodu.

□

Věta 7.3. *Pro skoro všechna* $x \in \mathcal{C}$ *vzhledem k míře* $\mathcal{H}$ *platí* $f'(x) = \infty$.

Důkaz.

Zvolme $0 < \delta < \frac{\log(\frac{3}{2})}{\log(36)}$ (důvod takové volby bude jasný později). Nechť x je takový bod intervalu $[0, 1]$, že $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \frac{1}{2}$. Z definice limity potom existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ platí nerovnosti

$$\frac{1}{2} - \delta < \frac{X_n}{n} < \frac{1}{2} + \delta.$$

Klíčová je následující úvaha. Zvolíme-li si nějaké $m \geq n_0$ a budeme-li se dívat, jaké cifry budou následovat počínaje cifrou x_{m+1}, nemůže nastat situace, kdy by následoval příliš dlouhý řetězec tvořený pouze samými ciframi 0, nebo naopak samými ciframi 2. Buďme přesnější. Hledejme pokud možno co nejmenší index $k \in \mathbb{N}$ takový, abychom měli jistotu, že mezi ciframi $x_{m+1}...x_{m+k}$ se alespoň jednou vyskytne cifra 0 a alespoň jednou cifra 2.

Pokud budou všechny cifry $x_{m+1}...x_{m+k}$ rovny 2, pak samozřejmě $X_m = X_{m+k}$. Nerovnosti

$$\frac{1}{2} - \delta < \frac{X_{m+k}}{m+k} < \frac{1}{2} + \delta$$

tak tedy můžeme psát ve tvaru

$$\frac{1}{2} - \delta < \frac{X_m}{m+k} < \frac{1}{2} + \delta.$$

Úpravou levé z nich a vyjádřením k dostaneme nerovnost

$$k < \frac{X_m}{\frac{1}{2} - \delta} - m.$$

Z nerovnosti $\frac{X_m}{m} < \frac{1}{2} + \delta$ však ihned plyne, že také

$$X_m < m(\frac{1}{2} + \delta).$$

Celkem tedy musí k splňovat nerovnost

$$k < \frac{m(\frac{1}{2} + \delta)}{\frac{1}{2} - \delta} - m = m\frac{4\delta}{1 - 2\delta}.$$

V tom případě mohou být stále všechny cifry $x_{m+1}...x_{m+k}$ rovny 2 a nedojdeme ke sporu. Platí-li tedy opačná nerovnost, tj.

$$k \geq m\frac{4\delta}{1 - 2\delta},$$

máme jistotu, že alespoň jedna z cifer $x_{m+1}...x_{m+k}$ je rovna 0.

Pokud budou naopak všechny cifry $x_{m+1}...x_{m+k}$ rovny 0, bude tentokrát $X_m + k = X_{m+k}$. Nerovnosti

$$\frac{1}{2} - \delta < \frac{X_{m+k}}{m + k} < \frac{1}{2} + \delta$$

tedy můžeme v tomto případě psát ve tvaru

$$\frac{1}{2} - \delta < \frac{X_m + k}{m + k} < \frac{1}{2} + \delta.$$

Tentokrát úpravou pravé nerovnosti dostáváme

$$k < \frac{m(\frac{1}{2} + \delta)}{\frac{1}{2} - \delta} - \frac{X_m}{\frac{1}{2} - \delta}.$$

To spolu s nerovností $\frac{1}{2} - \delta < \frac{X_m}{m}$ dává ihned nerovnost

$$k < \frac{m(\frac{1}{2} + \delta)}{\frac{1}{2} - \delta} - \frac{(\frac{1}{2} - \delta)m}{\frac{1}{2} - \delta} = m\frac{4\delta}{1 - 2\delta},$$

tedy tu samou nerovnost jako v předchozím případě.

Můžeme tedy zadefinovat index k jako $\lceil m\frac{4\delta}{1-2\delta}\rceil$, kde $\lceil a\rceil$ značí horní celou část čísla a. Zopakujme tedy, čeho jsme tím dosáhli. Pro každé $m \geq n_0$ je alespoň jedna z cifer

$$x_{m+1}...x_{m+k},$$

tj.

$$x_{m+1}...x_{m+\lceil m\frac{4\delta}{1-2\delta}\rceil}$$

je rovna 0 a alespoň jedna je rovna 2.

Nechť

$$i \in \{m + 1, ..., m + \lceil m\frac{4\delta}{1 - 2\delta}\rceil\}$$

je takový index, že $x_i = 0$ a obdobně

$$j \in \{m + 1, ..., m + \lceil m\frac{4\delta}{1 - 2\delta}\rceil\}$$

je takový index, že $x_j = 2$. Je-li nyní $y > x$ libovolné takové, že

$$\frac{1}{3^m} \geq y - x \geq \frac{1}{3^{m+1}},$$

můžeme aplikovat předchozí Větu 7.2. Je-li totiž

$$|y - x| \geq \frac{1}{3^{m+1}},$$

platí tím spíše

$$|y - x| \geq \frac{1}{3^i},$$

a tedy podle první části Věty, kde $k = i$, dostáváme nerovnost

$$f(y) \geq f(x) + \frac{1}{2^i} \geq f(x) + \frac{1}{2^{m+\lceil m\frac{4\delta}{1-2\delta}\rceil}}.$$

Užijeme-li ještě horní odhad

$$\frac{1}{3^m} \geq |y - x|,$$

obdržíme postupně vztahy

$$\begin{aligned}\frac{f(y) - f(x)}{y - x} &\geq 3^m \frac{1}{2^{m+\lceil m\frac{4\delta}{1-2\delta}\rceil}} \\ &\geq 3^m . \frac{3^m}{2^{m+m\frac{4\delta}{1-2\delta}+1}} \\ &= \frac{1}{2} . (\frac{3}{2^{1+\frac{4\delta}{1-2\delta}}})^m.\end{aligned}$$

Užijeme-li nyní odhadu $0 < \delta < \frac{\log(\frac{3}{2})}{\log(36)}$ ze začátku důkazu, konverguje poslední výraz k nekonečnu pro $m \to \infty$.

Je-li $y < x$ libovolné takové, že pro něj platí

$$\frac{1}{3^m} \geq |y - x| \geq \frac{1}{3^{m+1}},$$

můžeme opět aplikovat předchozí Větu 7.2. Tentokrát podle druhé části Věty, kdy volíme $k = j$, dostáváme nerovnost

$$f(y) \leq f(x) - \frac{1}{2^j} \leq f(x) - \frac{1}{2^{m+\lceil m\frac{4\delta}{1-2\delta}\rceil}}.$$

Další postup je ovšem patrný. Získáme ty samé vztahy, jako v případě $y > x$. Z těchto odhadů již snadno plyne, že $f^{'}(x) = \infty$. Tím je tvrzení dokázáno.

$\square$

Literatura

[1] J. Veselý: *Základy matematické analýzy*, MATFYZPRESS, 2004.
[2] J. Lukeš, J. Malý: *Míra a integrál*, Karolinum, 2002.
[3] V. Dupač, M. Hušková: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Karolinum, 2005.