

## Posudek bakalářské práce "Vlastnosti Cantorovy funkce" studenta Martina Fialy

V práci je popsáno Cantorovo diskontinuum jako průnik konečných sjednocení uzavřených intervalů a ekvivalentně pomocí trojkových rozvoji.

Dále je popsána Cantorova funkce jednak rozšířením funkce definované na styčných intervalech Cantorova diskontinua a jednak pomocí dvojkových a trojkových rozvoji.

Je ukázáno, že Cantorovo diskontinuum má mohutnost kontinua a že je to uzavřená množina, která má nulovou Lebesgueovu míru.

Je ukázáno zejména, že Cantorova funkce je hölderovsky spojitá s koeficientem  $\frac{\log 2}{\log 3}$  a že má nekonečnou derivaci ve skoro všech bodech Cantorova diskontinua vzhledem k míře definované jako "vzor" Lebesgueovy míry z  $[0, 1]$  při přirozeném zobrazení Cantorova diskontinua na interval  $[0, 1]$ .

Student se při vypracování práce seznámil s uvedenými pojmy, s větou o absolutně spojitě funkci a integrálu z její derivace, se silným zákonem velkých čísel. Navíc práce obsahuje rostoucí modifikaci Cantorovy funkce, která je sestrojena pomocí dokázané věty o součtu nekonečně mnoha monotónních funkcí.

Práce je napsána se zřejmou snahou o srozumitelnost a přesnost. Přesto se autor dopustil několika věcných nepřesností a několika přepsání. Přikládám seznam řady připomínek. Většinu nedostatků přičítám spíš pochopitelné nezkušenosti a z toho pramenící neobratnosti některých formulací, než skutečnému neporozumění. Z toho důvodu považuji práci v případě, že autor prokáže svými reakcemi na připomínky při obhajobě, eventuálně i dříve, že tématu skutečně dobře rozumí, za velmi zdařilou.

### Připomínky k práci.

1. V zadání Holderovsky namísto hölderovsky.
2. Strana 6, řádek 4 shora ... definované namísto definovanou.
3. Ve větě 2.1 má autor na mysli posloupnost prvků intervalu  $[0, 1]$  konvergující.
4. V definici 2.11 se objevuje  $\mathbb{R}^1$  namísto dříve (a vzápětí) užitého  $\mathbb{R}$  a nově  $\mathcal{B}^1$  bez definice. Pojem nabývá hodnot  $x_n$  s pravděpodobnostmi  $p_n$  nebyl definován. Jaký význam má dovětek "s pravděpodobnostmi  $p_n$ "? Lze ho vypustit?
5. V definici  $K_0$  chybí složené závorky (srovnej s definicí  $\mathcal{K}_n$  pro  $n = 0$ ).
6. Strana 9, řádky 8, 3 zdola, strana 10, řádek 5 shora ... odebereme všechna čísla, která mají V NĚJAKÉM svém trojkovém zápisu na první pozici ...; v nějakém ... na druhé pozici; zjistíme, že ... sestává z čísel, která lze .... vyjádřit POUZE užitím cifry 0 nebo 2. Nemá být V NĚJAKÉM nahrazeno V KAŽDÉM a POUZE vypuštěno či upřesněno např. "bez použití cifry 1"? Tak se to také správně formuluje na začátku důkazu věty 3.1.
7. Strana 10, řádek 12 zdola ... Existuje tedy bijekce ... Z čeho to plyne? Sestrojené zobrazení takovou bijekcí není.
8. Strana 10, řádek 8 zdola ... argument se sjednocením uzavřených intervalů není úplný.

9. Užití značení  $K_n$  pro jiné množiny intervalů v kapitole 4 než v kapitole 3 není ideální.

10. Strana 12, řádek 2 shora ... funkce měla být asi již definována v 0 a v 1, které ovšem nejsou krajní pro žádný z uvedených intervalů?

11. Strana 12, řádek 7 shora ... "zcela jistě" lze vynechat a platí to, pokud je funkce opravdu již definována i v 0 a v 1.

12. Strana 12, řádek 17 shora ... "společnou limitu  $f(t_n)$ , resp.  $f(t'_n)$ " je trochu nejasná formulace, i když vím, co se tím myslí.

13. Strana 12, řádek 5, 4 zdola ... "Funkce  $f$  definovaná na množinách intervalů ..., je zde rostoucí" - co se tím myslí?

14. Strana 12, řádek 3 zdola ... neklesající nebo nerostoucí?

15. Strana 15, řádky 1,3 shora ... místo "Označme dále" má být např. píšeme  $x = (\dots)_3$ , kde ... je trojkový zápis čísla  $x$  atd.?

16. Strana 19, řádek 6 shora ... intervaly v  $K_n$  jsou uzavřené, derivace nulové jen uvnitř.

17. Strana 19, řádek 6 zdola ... zná autor důkaz tohoto známého tvrzení? Asi mohlo být uvedeno mezi těmi v kapitole 2.

18. Strana 22, řádek 5 zdola ... užívá se, že  $c(x) > 0$  pro  $x \in (0, 1]$ , což možná nebylo vysvětleno?

19. Strana 23 ... připomíná se definice hölderovskosti na intervalu a ve větě se užívá i na podmnožině intervalu.

20. Strana 24, řádek 6-9 shora ... argument, proč se předpokládá zbytečná nerovnost navíc nechápu.

21. Strana 24, řádek 9 shora ... argumentu "bez újmy na obecnosti" bych rozuměl tak, že "nová"  $x$  a  $y$  náležejí množině  $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ . Tak tomu ale zřejmě není. Nelze i ve větě nalezení onomu sjednocení vypustit? Navíc  $K_0$  nebylo ve 4.1 definováno?

22. Strana 24, řádek 2 zdola ... má být citována věta 6.1 nebo 4.1? Pokud větu 6.2 můžeme zformulovat a dokázat pro všechny blízké dvojice, není k aplikaci věty 6.1 důvod?

23. Strana 24, řádky 6-8 zdola ... Nechtě  $x, y$  splňují obě nerovnosti (a asi nic víc?), pak jsou provedené úpravy korektní? Uvedená formulace "Nechtě jsou splněny předpoklady předchozí věty, platí tedy ... pro  $x, y$  ..." jsou divné. Asi by mělo být "a" místo "pro".

24. Kapitola 7. Všude v dalším se uvažuje trojkový zápis, který neobsahuje jedničky pro prvky z Cantorova diskontinua? (Samozřejmě, že mimo množinu  $\mathcal{H}$ -míry nula je to tak v každém případě.)

25. Strana 26, řádek 8 zdola ... Proč platí (ii) z důkazu?

26. Strana 26, řádek 3 zdola ... Můžeme opravdu užít větu 2.10? Je  $T^{-1}$  zobrazení?

27. Strana 27, řádek 15 zdola a dál ... značení  $\mathcal{H}(Y_i = 1)$  by mohlo být vysvětleno. Rovnosti dávají rovnost rozložení (potřebnou pro použití silného zákona velkých čísel) by mohlo být zdůrazněno.

28. Strana 27, Poznámka ... jaký argument pro lebesgueovskou měřitelnost má autor na mysli?

29. Strana 28, řádek 16 zdola ...  $x$  je asi bod z Cantorova diskontinua takový, že  $\frac{X_n(x)}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$ ? I dál by bod  $x$  měl být do veličiny dosazován.

30. Strana 28, řádek 12 zdola ... mělo by být řečeno, o jakých cifrách se zde hovoří (byť si to čtenář asi správně domyslí).

31. Strana 28, řádek 1 zdola ... na čtenáři se nechává, aby si povšiml, že nerovnost pro  $\delta$  dává, že  $\frac{1}{2} - \delta > 0$ .

32. Strana 29, řádky 5-6 shora ... větě s formulací "a nedojdeme ke sporu" nerozumím, jejím vynecháním by se text stal jasnější.

33. Strana 29, řádek 13 zdola ... Můžeme tedy definovat index  $k$  ... ? Zopakujme tedy, čeho jsme tím dosáhli. K čemu se vztahují "tedy"? Spíš položme  $k = \dots$ . Z předchozího víme, že ... ?

34. Strana 30, řádek 11 shora ... jedno  $3^m$  navíc?

V Praze dne 3.6.2011

Doc. RNDr. Petr Holický, CSc.