UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

Historie čísla π

Bakalářská práce

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Ladislav Kvasz Dr.

Autor: Eliška Bernátová

Akademický rok 2010/2011

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V…………… dne……………   podpis

PODĚKOVÁNÍ

Chtěla bych poděkovat všem, kteří mi přispěli cennou radou nebo kritikou, vedoucí ke konečnému výsledku zpracování této bakalářské práce, zvláště pak prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi Dr. za jeho metodickou pomoc a připomínky a Mgr. Dereku Pilousovi za jeho ochotu, čas a trpělivost.

HISTORIE ČÍSLA π

HISTORY OF π

ABSTRAKT:

Má bakalářská práce „Historie čísla **π**“ má za cíl informovat o vývoji této konstanty. Snažila jsem se postupovat chronologicky od počátků v Egyptě přes starověké Řecko, Čínu, Indii, středověk až po novověk a počítačový svět.

V kapitole „Dálný východ“ a „Novověká matematika v Evropě“ se zaměřuji hlavně na nejvýznamnější osobnosti té doby. Samozřejmě se problematikou tohoto čísla zabýval nespočet matematiků, ale zmínit se o každém z nich by zabralo spoustu času a tato práce by mohla mít i stovky stran. Podle svého uvážení jsem vybrala ty nejzajímavější osobnosti, které se o vývoj čísla π zasloužili nejvíce.

V následující kapitole „Iracionalita a transcendence“ se především zaměřuji na teorémy příslušných matematiků a jejich důkazy. Tato kapitola by měla být podle mého názoru nejdůležitější. Vyřeší se v ní spousta okolností ve vztahu k číslu π.

V závěrečné kapitole, kterou jsem nazvala „π ve světě počítačů“ jsem se snažila vybrat ty nejzajímavější rekordy až do roku 2009.

ABSTRACT:

My bachelor thesis „History of π“ aims to inform about the development of this constant. I tried to proceed chronologically from the beginnings in ancient Egypt through ancient Greece, China, India, the Middle Ages to the Modern Era and the computer´s world.

In the chapters "The Far East" and "The Modern Mathematics in Europe” are focused mainly on the most important personalities of the time. Of course, the problem of π was dealt with a countless number of mathematicians, but to mention each any of them would take a lot of time and the thesis would have hundreds of pages. After due consideration I selected the most interesting personalities, those whose contribution to the development of π deserved it most.

In the next chapter, "Irrationality and Transcendence" I primarily focused on mathematical theorems and their proofs. This chapter is the most important in my opinion. Many circumstances related to the number π are resolved there in.

In the final chapter, which I called "π in the Computer World" I tried to pick the most interesting records until 2009.

OBSAH

ÚVOD

Již v době kamenné se člověk naučil poznávat tvary a směry, používat pojmu velikosti a čísla, měřit a uvědomovat si, že existují vztahy mezi určitými veličinami. Dávno před vynálezem kola si člověk uvědomil zvláštnosti velmi pravidelného tvaru kruhu. Viděl ho v zorničkách člověka i zvířat a viděl ho jako okraje Měsíce a Slunce. Potom si člověk osvojil pojem velikosti. Byly velké a malé kruhy, těžké a těžší kameny, dlouhé a krátké kmeny. Přechod od těchto kvalitativních zjištění ke kvantitativnímu měření byl úsvitem matematiky.

Dalším stupněm bylo objevení vztahů mezi různými veličinami. Museli si všimnout, že větší kamen je těžší. Mezi těmito vztahy nemohli přehlédnout jeden, a sice čím větší kruh napříč, tím delší je kolem. A následovalo další zjištění, zdvojnásobí-li se průměr kruhu, zdvojnásobí se jeho obvod. Tento poměr byl vyjádřen spíše geometricky, protože geometrie byla první matematickou disciplínou. Rozhodující velký krok na cestě k $\boldsymbol{\pi}$ bylo zjištění, že úměrné veličiny mají stálý poměr. Jestliže bylo zjištěno, že obvod a průměr jsou úměrné veličiny, pak z toho vyplývá poměr

$$\frac{obvod}{průměr} = konstanta\ pro\ všechny\ kružnice.$$

Tento konstantní poměr je označován písmenem $\boldsymbol{\pi}$ teprve od 18. století n. l.

Historie čísla $\boldsymbol{\pi}$, také označováno jako Ludolfovo číslo, je zvláštním malým zrcadlem historie člověka. Od roku 1761 matematikové vědí, že $\boldsymbol{\pi}$ nelze nikdy vystihnout podílem dvou celých čísel. Číslo $\boldsymbol{\pi}$ není ani řešením jakékoli algebraické rovnice. V polovině 20. století se podařilo prokázat, že počet desetinných míst čísla $\boldsymbol{\pi}$ je nekonečný. Je proto možné jej určovat se stále větší přesností.

Vzhledem k tomu, že číslo $\boldsymbol{\pi}$ patří mezi jednu z nejdůležitějších konstant matematiky, považuji za velmi zajímavé zkoumat jeho prvopočátky a vývoj během celých staletí. Proto bych ráda veškeré poznatky o této veličině shrnula ve své bakalářské práci, která nese název „Historie čísla $\boldsymbol{\pi}$“.

1 PRVNÍ ZMÍNKY O Π

1.1 Egypt

Egyptská civilizace [4] je jedna z nejstarších a právě i zde se objevují důležité poznatky matematiky. Písmo se v Egyptě objevuje na konci čtvrtého tisíciletí př. n. l. Nejstarším uceleným typem egyptského písma je písmo hieroglyfické. Hieroglyfy mají převážně obrázkovou povahu a nejoblíbenější materiál, na který se nejčastěji psalo, byl papyrový svitek, který vznikl kolem třetího tisíciletí př. n. l.. Díky papyru, se nám dochovaly důležité texty egyptské matematiky. Nejznámější a nejdůležitější text je Rhindův papyrus (též Ahmosův). Rhindův papyrus byl nalezen spolu s dalšími texty v egyptských Thébách v polovině 19. století, roku 1858 ho koupil právník a egyptolog Alexander Henry Rhind (1833-1863). Dnes je Rhindův Papyrus uložen v Britském muzeu v Londýně. Tento papyrus byl při výrobě slepen ze čtrnácti listů. Po nalezení byl rozříznut na dvě části. Jde o sbírku 87 úloh označených R1 až R87 s návody a řešeními, je to nejrozsáhlejší a nejvýznamnější matematický text starého Egypta. Mezi další významné texty patří Moskevský papyrus, obsahuje 25 příkladů označených M1 až M25, Káhúnské papyry a Berlínský papyrus [2][4].

Z dochovaných textů můžeme usoudit, že Egypťané uměli sčítat a odčítat, násobit a dělit, uměli používat zlomky, měli svoje vlastní jednotky, zabývali se základy aritmetické i geometrické posloupnosti, nalezneme zde i úlohy z algebry a geometrie. A právě geometrie hrála ve Starém Egyptě velmi důležitou roli. V dochovaných egyptských matematických textech nalézáme úlohy následujícího typu.

- úlohy na výpočet obsahu obdélníka, trojúhelníka, lichoběžníka a kruhu
- úlohy, ve kterých jsou z daného obsahu trojúhelníka, resp. obdélníka a z daného poměru jejich rozměrů tyto rozměry vypočteny
- úlohy na výpočet objemů kvádru, válce a komolého jehlanu
- úlohy, ve kterých je z daného objemu a známé podstavy kvádru počítána jeho výška
- úlohy na výpočet velikosti úhlů, který svírá základna a stěna jehlanu

- úlohy, ve kterých je ze znalosti tohoto úhlu a velikosti základny počítána výška jehlanu

Geometrii jsou v Rhindově papyru věnovány úlohy R41 až R60, v Moskevském papyru úlohy M4, M6, M7, M10, M14, M17 a M 18. Ukázka zápisu příkladu R48 viz obr. 3.

Z hlediska této práce se budeme věnovat pouze úlohám věnovaným kruhu. Egyptský výpočet obsahu S kruhu o průměru d odpovídá v naší symbolice vzorci

$$S = \left(d - \frac{1}{9} \times d\right)^2 = \left(\frac{8}{9} \times d\right)^2 = \frac{64}{81} \times d^2.$$

Tento vzorec vyplývá z příkladu R50. Egypťané počítali obsah kruhu o průměru 9 jednotek (chet) tak, že odečetli $\frac{1}{9}$ z toho, to je 1, zbytek je 8. Poté počítali s 8 8-krát, vyšlo 64 jednotek (secat-johet) a to je obsah. Srovnáme-li náš vzorec pro výpočet obsahu kruhu o průměru d se vzorcem odpovídajícím egyptskému výpočtu, dojdeme k rovnosti

$$\frac{1}{4}\pi \times d^2 = \frac{64}{81} \times d^2. \qquad (1)$$

A tím získáváme egyptskou hodnotu čísla $\boldsymbol{\pi}$:

$$\frac{256}{81} \cong 3{,}1605.$$

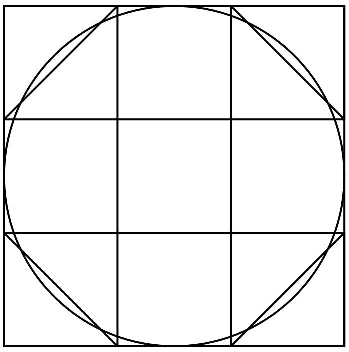
Jak ale Egypťané došli k uvedené metodě výpočtu?

Podle Bečvář [4] byla jedna z metod tato: K danému kruhu uvažujeme opsaný čtverec, který rozdělíme na 9 stejných menších čtverců (viz Obr. 1.1 a 1.3); ty, které leží v rozích původního čtverce, rozdělíme ještě úhlopříčkami a odřízneme tak 4 rohové trojúhelníky. Obsah uvažovaného kruhu nyní aproximujeme obsahem pravidelného osmiúhelníka, který vznikl. Tato aproximace nahrazuje obsah kruhu obsahem sedmi devítin opsaného čtverce. Protože je $\frac{7}{9} = \frac{63}{81}$, byl by obsah kruhu o průměru *d* vyjádřen vztahem

$$S = \frac{63}{81} \times d^2,$$

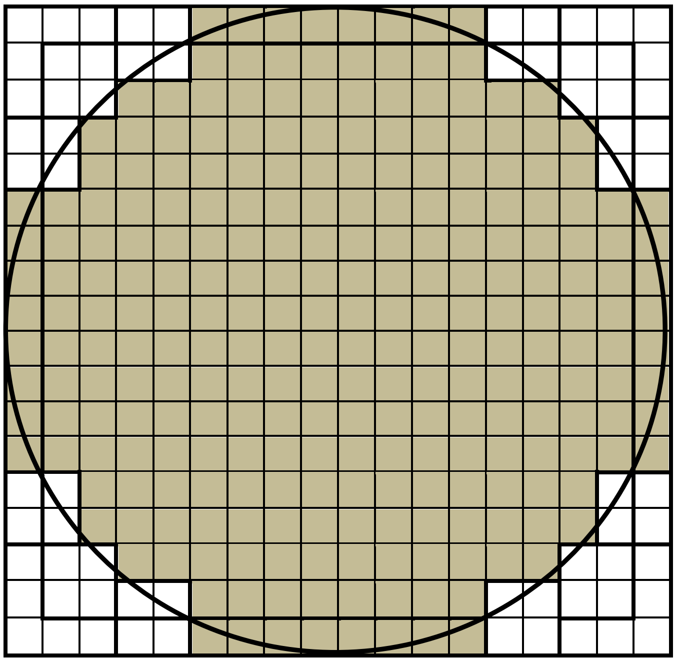
což se od uvedeného vzorce (1) příliš neliší.

Není vyloučeno, že byla hodnota $\frac{7}{9} = \frac{63}{81}$ zaměněna za hodnotu $\frac{64}{81}$, kterou lze snadno odmocnit.



Obr. 1.1.1.

Podle jiné teorie došli Egypťané k výše uvedené metodě výpočtu obsahu kruhu takto: Opět uvažujme k danému kruhu o průměru *d* opsaný čtverec. Rozdělme ho tentokrát na 18×18 stejných čtverců. V každém rohu opsaného čtverce odeberme čtverec obsahující 3×3 čtverečky a dva sousední čtverce obsahující 2×2 čtverečky. Obsah kruhu nyní aproximujeme obsahem útvaru, který vznikl (viz obr. 1.2).



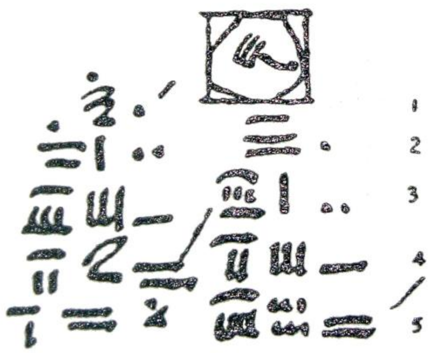
Obr. 1.1.2

Odebrali jsme tedy 4×(9+2×4) = 68 čtverečků a obsah kruhu jsme odhadli $18^2 - 68 = 256 = 16^2$ čtverečky, tj. čtvercem o straně

$$\frac{16}{18} \times d = \frac{8}{9} \times d = \left(d - \frac{1}{9} \times d\right).$$

Poznamenávám, že není třeba čtverečky přepočítávat; ty, které „v rozích" čtverce 16 x 16 „chybí", po jeho stranách „přebývají".

Vzhledem k tomu, že Egypťané s oblibou užívali čtvercovou síť při projektování různých staveb, soch, reliéfů, malířské výzdoby apod., není vyloučené, že ji užívali i při hledání obsahu kruhu.



Obr. 1.1.3.

Egyptská matematika a především geometrie musela být na značně vysoké úrovni již v době staveb prvních pyramid, tj. v polovině třetího tisíciletí př. n. l. Také každoroční záplavy vedly k výrazným změnám, Egypťané se proto museli naučit dobře vyměřovat, počítat výměry ploch, měřit objemy, převádět měrné jednotky atd.

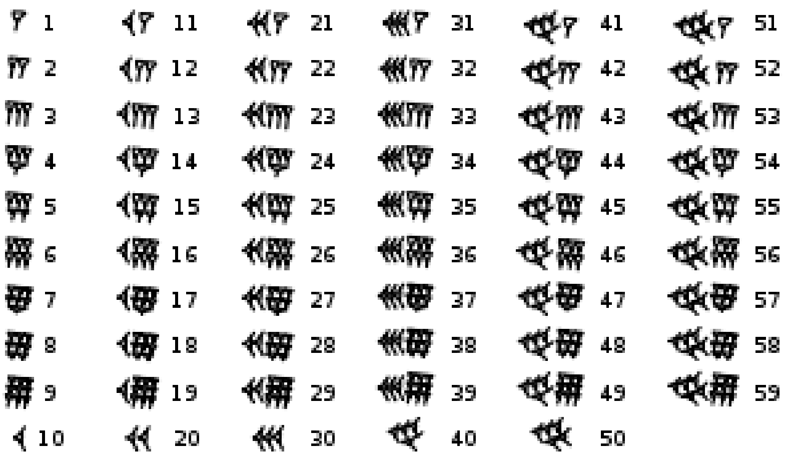
1.2 Mezopotámie

Dějiny Mezopotámie, území mezi řekami Eufrat a Tigris, jsou z hlediska matematiky a historie čísla π velmi složité.

Na přelomu 4. a 3. tisíciletí př. n. l. se v Mezopotámii zrodilo jedno z nejstarších písem světa, tzv. piktogramy (jednoduché obrázkové písmo). Během 3. tisíciletí se postupně měnil způsob psaní a písma. Začalo se rozvíjet písmo klínové. Došlo i ke změně zapisování. Původní zápis shora dolů a zprava doleva byl nahrazen vodorovným zleva doprava. Základním a snadno dostupným materiálem, na který se nejčastěji psalo, byla hlína. Hliněné tabulky se postupem času zvětšovaly, největší mají rozměry až 30 × 46 cm [2][4][9].

Z velkého množství tabulek je jen malá část prostudována. Tabulek s matematickými úlohami bylo pročteno a rozluštěno jen asi 400. Asyrolog E. Hincks si jako první povšiml matematických textů, které obsahovaly astronomické tabulky. Ukázal, že jejich pochopení je možné, když zapsaná čísla budeme číst v šedesátkové soustavě. H. C. Rawlinson roku 1875 toto tvrzení potvrdil.

Šedesátková soustava, také hexagesimální nebo sexagesimální je nejstarší známá poziční číselná soustava (s místními hodnotami) o základu 60. Tato soustava vyjadřuje čísla jako součty mocnin základu 60 a potřebuje tedy 60 různých číslic od nuly do 59. To je jedna z jejích zřejmých nevýhod, stejně jako rozsáhlé tabulky sčítání a zejména násobení: šedesátková násobilka je tabulka se 60 x 60 tj. 3600 čísly. Na druhé straně je ovšem zápis i velikých čísel poměrně krátký (viz následující obrázek).



Obr. 1.2.1.

Dodnes se používá při měření času (minuty, sekundy) a úhlů. Proč bylo jako základ zvoleno právě číslo 60, není zcela jasné. Podle jedné hypotézy to mohlo být proto, že číslo 60 má mnoho dělitelů, mezi nimi i čísla 12 a 30, která hrála roli při stanovování kalendáře. Velký počet dělitelů také usnadňuje krácení zlomků. O jednoduchém počítání do 12 a do 60 svědčí i starší české jednotky „tucet" a „kopa".

Až do roku 1916 nejevili asyrologové velký zájem o tabulky s matematickým obsahem. V tomto roce však němečtí badatelé E. F. Weidner, H. Zimmern a A. Ungnad částečně dešifrovali geometrické tabulky. Tehdy byla poprvé oceněna úroveň mezopotámské matematiky.

Mezopotámské geometrické úlohy, které se nám dochovaly, pocházejí ve většině případů ze Starobabylónské říše a z období vlády Seleukovců, tj. z 3. až 1. století př. n. l. Tyto úlohy byly patrně sestaveny pro pedagogické účely. Číselné hodnoty jsou voleny tak, aby byla úloha snadno numericky řešitelná.

Jedna z nejstarších babylonských tabulek (viz Obr. 2.2) [4], vztahujících se ke geometrii kruhu, je tabulka YBC 7302. Jde o kruhovou tabulku, jejíž průměr je necelých 8 cm. Není na ní žádný text, pouze dokonalý obrázek kružnice a tři čísla. Nad kružnicí je napsáno číslo 3 (obvod), vpravo číslo 9 (druhá mocnina obvodu) a uvnitř číslo 45 (obsah kruhu).

Obr. 1.2.2.

Pravděpodobná interpretace čísel z tabulky, jak uvádí Bečvář, je takováto:

(45) je obsah kruhu, (3) je obvod a (9) druhá mocnina obvodu. Babylónský matematik totiž užíval k výpočtu obsahu kruhu algoritmus, který lze v naší symbolice zapsat vzorcem

$$S = \frac{1}{12} o^2,$$

kde *o* je obvod kruhu. Po dosazení dostáváme

$$S = \frac{1}{12} 3^2 = 5 \times 9 = 45.$$

Je tedy patrné, že řády uvedených čísel 3, 9, 45 nejsou stejné; počtář si patrně s nimi nelámal hlavu. Není obtížné zjistit, že „mezopotámská hodnota čísla π“ je při tomto výpočtu rovna 3. Obtížnější je vysvětlit, jaký význam tabulka YBC 7302 měla, co bylo dáno a co mělo být vypočítáno.

Mezopotámská matematika obyčejně pracovala s hodnotou $\pi = 3$; máme však doklad (tabulka z konce starobabylónského období objevené roku 1936 v Suse), že užívala i aproximaci

$$\pi = 3\frac{1}{8}.$$

Tato tabulka je věnována různým geometrickým tvarům a stanovuje, že poměr obvodu pravidelného šestiúhelníku k obvodu opsané kružnice je $\frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$. Babylóňané ovšem věděli, že obvod šestiúhelníku je přesně roven šestinásobku poloměru opsané kružnice. Tabulka tedy udává poměr $\frac{6r}{C}$, kde r je poloměr a C obvod opsané kružnice. Užijeme-li definici

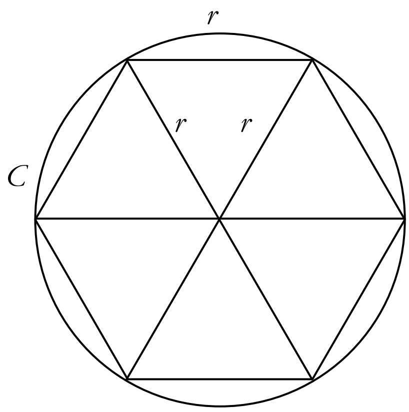
$$\pi = \frac{C}{2r},$$

dostaneme

$$\frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$$

což dává

$$\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125.$$



Obr. 1.2.3.

Z Mezopotámie pocházejí 1. písemné památky lidstva a to z období 2200 – 1800 př. n. l.. V tomto období se dochovalo velké množství matematických tabulek, které ukazují pokročilý stupeň rozvoje mezopotámské algebry i geometrie. V té době byly objeveny důležité algoritmy pro řešení rozmanitých úloh. Matematika byla schopna odpovědět na všechny požadavky tehdejší civilizace. Z dalšího období se takřka nezachovaly žádné matematické tabulky, a tudíž nelze posuzovat pozdější rozvoj matematiky.

2 STAROVĚKÉ ŘECKO

[9] Sotva se řecká matematika zrodila, snažila se každé matematické pravidlo objasnit a dokázat, že je skutečně pravdivé. Proto se řečtí učenci vzájemně přeli, posuzovali a pokoušeli se najít chyby na svých úsudcích. Začali jako první matematiku budovat systematicky na principu úsudek (věta) - důkaz. Poznatky se už nezískávají jen experimentálně, ale i na základě úsudku. Matematika se mění na vědu deduktivní.

Co se týče historie čísla π, měli v tomto období určitý vztah k tomuto problému čtyři muži: Anaxagoras, Anfiton, Hippokrates a Hippias. Všichni čtyři se snažili o „kvadraturu kruhu“, problém těsně spojený s číslem π, který vyžaduje konstrukci čtverce s plochou stejnou jako plocha daného kruhu.

Velkou zásluhu v matematice geometrie má Eukleides z Alexandrie, muž, jehož místo a datum narození není známo, je autorem největšího bestselleru ze všech napsaných učebnic (co se týká matematiky): ELEMENTY (Základy). Velká část obsahu Elementů byla patrně známa již před Eukleidem, ale význam Eukleidův nespočíval v tom, co teorémy jako takové říkají. Velký význam byl v jeho metodě. Elementy jsou prvním grandiózním dílem architektury matematiky. Z Eukleidových Elementů vycházel i jeden z nejvýznamnějších vědců klasického starověku, největší matematik své epochy a jeden z největších matematiků vůbec, Archimédes.

2.1 Archimédes

Když v roce 75 př. n. l. známý římský politik a řečník Cicero navštívil město Syrakusy na Sicílii, vyhledal tam hrob řeckého matematika, fyzika a vynálezce Archiméda. Hrob byl už v zanedbaném stavu, ale Cicero na něm ještě rozeznal vytesaný válec a kouli. Cicero dal Archimédův hrob znovu upravit a vyjádřil tak úctu, kterou Římané chovali k velkému řeckému učenci. Zdá se však, že tato úcta pramenila spíše z obdivu k Archimédovu technickému a vojenskému umění, díky němuž za druhé punské války římská vojska nedokázala po dlouhé dva roky Syrakusy dobýt, než se nakonec města zmocnila lstí. Syrakusy stály ve válce na straně Kartága a tak v roce 214 př. n. l. římský vojevůdce Marcellus město oblehl. Na Syrakusy zaútočila flotila římských lodí a na pobřeží římská pěchota. Na vojsko, blížící se po pevnině, dopadali kameny obrovských rozměrů a váhy, s rachotem a neuvěřitelnou rychlostí. Současně se z pevnosti řítily na lodi těžké trámce. Oslnivé záblesky z městských hradeb oslepovaly římské vojáky a na prosmolených lodích zažehovaly plameny. Římané nakonec Syrakusy dobyli a při nastalém vraždění zahynul i Archimédes [3][7].

O životě Archiméda víme málo. Narodil se kolem r. 287 před n. l. v Syrakusách. Studoval na univerzitě v Alexandrii buď u přímých nástupců Eukleida, nebo i u Eukleida samého. Archimédes byl také prvním vědeckým inženýrem, mužem, který hledal obecné principy a aplikoval je na speciální inženýrské problémy. Použití principu páky ve válečných strojích hájících Syrakusy je již známo, ale on použil téhož principu i k určení objemu segmentu koule v neobyčejně hezké metodě využívající rovnováhu. Užíval této metody i k určování objemů jiných rotačních těles a pro určení těžiště polokruhu a polokoule. Mezi jeho nejvýznamnější díla, která se dochovala a která nejsou srovnatelná s ničím jiným, co bylo vytvořeno ve starověku, patří: *Metoda, O spirálách, O měření kruhu, Kvadratura paraboly, O konoidech a sferoidech, O kouli a válci,…* [2][3][7]

Archimedes provedl krok od „rovný k něčemu“ k „libovolně blízký k něčemu“ nebo „tak blízký, jak chceme“. Dosáhl tak prahu diferenciálního počtu, právě tak jako jeho metoda kvadratury paraboly dosáhla prahu integrálního počtu.

Jeho příspěvek do matematiky byla metoda pro aproximaci hodnoty čísla $\boldsymbol{\pi}$. Metodu aproximace používali, jak je uvedeno výše, již Egypťané, Babylóňané a dokonce i Číňané. V každém případě metoda užívaná Archimedem se liší od předchozích aproximací zásadním způsobem. Byl prvním, kdo poskytl metodu výpočtu $\boldsymbol{\pi}$ s libovolnou přesností. Ta je založená na faktu, že obvod pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kruhu je menší než obvod kruhu, zatímco obvod mnohoúhelníku kružnici opsaného je větší. Zavedeme-li k dosti velké, budou se oba obvody mnohoúhelníků blížit obvodu kruhu s libovolnou přesností, jeden shora, druhý zdola. Archimedes[1] začal od šestiúhelníku a pokračoval tak, že zdvojoval počet stran, až dospěl k mnohoúhelníku s 96 stranami a tím k výsledku

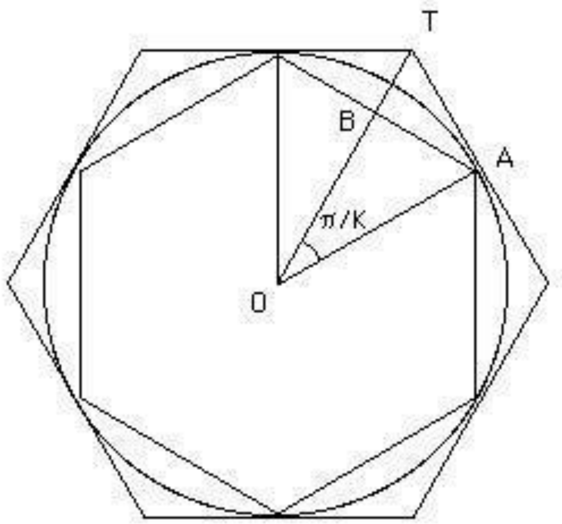
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

[1] celý postup výpočtu lze nalézt v Archimédově díle „Measurement of a Circle“ „O měření kruhu“ na http://www.math.ubc.ca/~cass/archimedes/circle.html

což v desetinném záznamu

$$3{,}14084 < \pi < 3{,}14285.$$

Neuvádím zde citaci přímo z díla Archiméda, ale uvádím zde postup pomocí goniometrických funkcí, které Archimédes v té době ještě neznal. A to z toho důvodu, že postup v díle „O měření kruhu“ je poměrně rozsáhlý. Pro čtenáře, které zajímá postup Archiméda, uvádím na předchozí straně odkaz na internetový portál.



Obr. 2.1.1.

[3] Jestliže

$$\theta = \frac{\pi}{k}$$

je poloviční úhel, který přísluší jedné straně ve středu pravidelného mnohoúhelníku, pak délka této strany je

$$i = 2r\ sin\theta$$

a délka strany opsaného mnohoúhelníka

$$c = 2r\ tg\theta.$$

Pro obvod C tedy máme

$$ki < C < kc,$$

což po vydělení $2r$ dává

$$k\ sin\theta < \pi < k\ tg\theta$$

Jestliže původní počet stran k zdvojíme n-krát, dostaneme

$$2^n k \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) < \pi < 2^n k \; tg\left(\frac{\theta}{2^n}\right),$$

a zvolíme-li n dosti velké, dolní i horní limita se bude blížit hodnotě π libovolně blízko.

Archimedes ovšem neužíval trigonometrických funkcí. Ale již pro $k = 6$ bylo $\sin\theta = \frac{1}{2},\ tg\theta = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)}$ podle Pythagorovy věty. Ostatní naše použité funkce lze dostat postupným používáním pravidla pro půlení úhlu.

Takový tedy byl přínos největšího starověkého genia k historii čísla π a ke kvadratuře kruhu. Ačkoliv pozdější matematici našli přesnější numerické aproximace, Archimedova metoda mnohoúhelníků zůstala nepřekonána až do doby, kdy byl v Anglii objeven nekonečný součin a nekonečné zlomky, těsně před tím, než objevení diferenciálního počtu umožnilo úplně jiný přístup k tomuto problému.

3 DÁLNÝ VÝCHOD

3.1 Čína

Babylónská a Egyptská matematika se rozvíjela na pobřeží velkých řek Eufratu, Tigrisu a Nilu. I na pobřeží velkých řek Jang – c - tiang žily vyspělé národy s bohatými matematickými znalostmi – Čína.

Čínská tradiční matematika [6][13] se až do 16. století vyvíjela odděleně od západní matematiky. Srovnatelnou úlohu, jakou měly v evropské matematice Euklidovy „Základy“, plnila v Číně sbírka výpočetních algoritmů z přelomu letopočtu „Matematika v devíti knihách“, „Jin Zhang Suan Shu“. Tato kniha a komentář k ní od Liu Huie z roku 263 byly v Číně po více než tisíc let vzorem matematického textu.

Rozvoj Čínské matematiky je spojen s rozvojem řemesla a silného centralizovaného státu, který potřeboval spravovat daně. Přestože jedna ze staročínských filozofických škol, mohisté, vytvořila náznak logicky ucelené geometrické teorie, celkově neměla matematika nic společného s filozofií. Přísnou logickou argumentaci si ošklivily oba hlavní proudy pozdějšího čínského myšlení, konfuciáni i taoisti.

Přibližná hodnota $\pi = 3$ se používala k měření kruhu v běžné práci zeměměřičů i v učebnicích matematiky ještě řadu století po vydání „Matematiky v devíti knihách“. Tato hodnota byla pravděpodobně původně získána zvlášť pro délku kružnice a zvlášť pro obsah kruhu, aniž by byla známa souvislost mezi oběma veličinami. Autoři „Matematiky v devíti knihách“ už závislost mezi délkou kružnice a obsahem kruhu znali.

V 1. až 3. století čínští astronomové a matematici provedli řadu výzkumů, věnovaných přesnějšímu výpočtu čísla $\boldsymbol{\pi}$. Možná, že zde působil řecký vliv pronikající do Číny přes Indii. Nevíme například, jak došel ke svým výsledkům astronom a filosof Čang Cchang (78 - 139), který soudil, že poměr druhé mocniny délky kružnice a čtverce obvodu jí opsaného je 5:8, což odpovídá hodnotě

$$\frac{(\pi d)^2}{(4d)^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow \pi^2 = \frac{5 \times 16}{8} \qquad \pi = \sqrt{10} = 3{,}162277$$

Tato aproximace se vyskytuje i v jiných zemích. V 7. století v Indii u Brahmagupty a v 9. století u Muhammada ibn Músá al-Chwárizmího.

Vzdělaný vojevůdce Wang Fan [6] získal v r. 250 n. l. na základě nám neznámého postupu poněkud lepší aproximaci

$$\pi = \frac{142}{45}, \qquad tj. 3{,}15555$$

Naproti tomu známe metodu, jakou postupoval Liou Huie v r. 263 n. l.. [6][15] Ve svém komentáři k první knize „Matematika v devíti knihách" použil totiž způsob, s nímž se poprvé setkáváme u Archimeda, a který je založen na postupné aproximaci obsahu kruhu posloupností obsahů vepsaných pravidelných *k* 2^n- úhelníků. Při tomto postupu se vypočítávají nejprve strany mnohoúhelníků, počínaje šestiúhelníkem. Dalším krokem je výpočet obsahů těchto mnohoúhelníků, který je pouze přibližný: strany se násobí poloměrem. Tímto způsobem se celý postup redukuje na použití Pythagorovy věty a výpočet druhých mocnin. Při odhadu přesnosti výsledku vycházel Liou Huie z toho, že obsah kruhu (S) je menší než obsah útvaru vytvořeného pravidelným vepsaným mnohoúhelníkem (S_n) a obdélníky sestrojenými z jeho stran a opsanými zbývajícím kruhovým úsečím $(2(S_{2n} - S_n))$. Odtud mu vyplynula nerovnost

$$S_{2n} < S < S_n + 2(S_{2n} - S_n),$$

kde n a $2n$ je počet stran vepsaných mnohoúhelníků. Tyto odhady se liší od odhadu Archiméda, který se opírá o výpočet obvodů opsaného a vepsaného 96-úhelníka, viz dále.

Liou Huie tak získal při průměru $d = 100$ jednotek

$$S_{96} = 313\frac{584}{625}, \;\; S_{192} = 314\frac{64}{652}$$

takže

$$314\frac{64}{625} < S < 314\frac{169}{625}$$

Jako aproximaci bere celočíselnou část výsledku 314, což odpovídá hodnotě $\pi = 3{,}14$. Později rozšířil své výpočty na 3072 - úhelník a získal tak lepší přiblížení, které udává $\pi = 3{,}14159$.

Liou Huie tedy dodává: „Čím jemněji budeme dělit, tím menší bude chyba. Až dělení bude nemožné, mnohoúhelník se ztotožní s kružnicí." Tato slova lze chápat v tom smysl, že podle Huie kruh splývá v mnohoúhelník v limitě, při neomezeném počtu stran.

Ještě přesněji spočetl hodnotu π vynikající astronom, matematik a inženýr Tsu Chung-Chih (430 - 501), který v nedochované práci ukáza, že platí nerovnost.

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

To je přesnost, která nebyla dosažena v Evropě až do 16. století.

Tsu Chung-Chih je také autorem originálního vyjádření π ve formě zlomku $\frac{355}{113}$, správné na šest desetinných míst.

Vysoký stupeň přesnosti dosažený Číňany svědčí o tom, že byli daleko lépe vybaveni pro numerické výpočty než jejich evropští současníci. Důvodem nebylo to, že užívali desítkovou soustavu. Ale Číňané objevili ekvivalent čísla nula. Stejně jako Babylóňané, i oni psali čísla pomocí číslic s užitím násobků mocnin základu (10 v Číně, 60 v Mezopotámii), právě tak jako to děláme dnes.

3.2 Indie

O indické matematice je mnoho nepřímých důkazů. Jako ostatní země té doby znali Pythagorovu větu dlouho předtím, než se Pythagoras narodil. Matematika byla většinou spojována s astronomií, která byla podle dochovaných důkazů na velmi vysoké úrovni [6].

Nejstarší poznatky o indické matematice se vztahují k období, v němž vznikaly posvátné nábožensko-filosofické knihy. Cenným pramenem jsou v tomto ohledu „Pravidla provazce" („Šalvasútra"), obsahují geometrické konstrukce a výsledky některých výpočtů. Při určování vzniku „Šalvasútry" se názory vědců rozcházejí. Většina se však přiklání k období 7. - 5. století př. n. l.

Nepočítáme-li „Pravidla provazce", pak nejdůležitější nám známá indická matematická díla byla napsána mezi 2. nebo 5. stoletím a 16. stoletím. Většinou jsou to matematické části astronomických spisů.

Prameny, podle nichž soudíme geometrické znalosti indických matematiků, jsou velmi stručné ve srovnání s jinými odvětvími matematiky a mají daleko menší význam. Zvláštní geometrická díla neexistovala, vše bylo zahrnuto do obecné vědy o výpočtech.

3.2.1 Áryabhatta (476 - 550)

Áryabhatta [6][19] patří mezi nejvýznamnější matematiky Indie a však o jeho životě toho víme jen velmi málo. Áryabhatta je autorem několika pojednání o matematice a astronomii. Jeho hlavní dílo, Áryabhattíjá, vzniklo roku 499 n. l., když bylo Áryabhattovi pouhých 23 let. Jedná se o veršovaný astronomický a matematický traktát. Zde přináší řešení mnohých problémů, ale většinou bez pokynů, jak k nim dospěl. Vedle velmi dobré aproximace pro výpočet délky kružnice a obsahu kruhu, při nichž je hodnota π dána zlomkem

$$\frac{62832}{20000} = 3{,}1416,$$

obsahuje spis velmi hrubý vzorec pro objem koule, podle kterého je π nahrazeno hodnotou

$$\frac{16}{9} \approx 1{,}78.$$

Áryabhatta pro vyčíslení π postupoval asi takto:

Sečteme 4 a 100, vynásobíme to 8 a přidáme 62 000. Výsledek je přibližně obvodem kruhu, jehož průměr je 20 000.

Jak Áryabhatta k tomuto řešení přišel, literatura neudává.

3.2.2 Brahmagupta (598 - 668)

Indický matematik a astronom, který napsal také řadu významných prací o matematice a astronomii. Jeho stěžejní dílo, sepsané kolem roku 628, nese název „Zdokonalení nauky Brahmovy" („Brahmasphutasiddánta")[6][19]. Stejně jako dílo Áryabhattíjá, je tato kniha sepsána ve verších. Hlavní rozdíl je v obsahu obou prací. Dílo Brahmagupty je obsahově mnohem bohatší, je zaměřeno převážně na matematiku z fyzikálního pohledu.

Co se týče π, užívá hodnotu

$$\pi \approx \sqrt{10} = 3{,}16227\ \ldots,$$

která je pravděpodobně zaměřena na Archimédových mnohoúhelnících a nalezena v r. 640 n. l..

Byla navržena myšlenka, že jelikož obvody mnohoúhelníků s 12, 24, 48 a 96 stranami vepsané do kruhu průměrem 10 jsou dány řadou

$$\sqrt{965}, \sqrt{981}, \sqrt{986}, \sqrt{987},$$

Indové možná (nesprávně) usoudili, že se bude obvod stále více blížit 1000, takže

$$\pi = \frac{\sqrt{1000}}{10} = \sqrt{10}.$$

3.2.3 Bhaskara II. (1114 - 1185)

Bhaskara II. [6][19] byl vedoucím astronomické observatoře a vedoucí matematického centra středověké Indie. Jeho práce byly významným přínosem k rozvoji matematiky a astronomie v Indii. Bhaskara II. je nazýván největším matematikem středověké Indie.

„Koruna vědy“ („Siddhánta“), tato práce sepsána roku 1150 je nejen historicky, ale též svou obsahovou hodnotou skutečnou korunou indické matematiky. Je napsána z velké části prózou a obsahuje čtyři části. Tato práce metodicky velmi úzce souvisí s předcházejícími díly.

Pro výpočet π je velmi pravděpodobné, že Bhaskara II. také použil Archimédovu metodu mnohoúhelníků. Jestliže délka strany pravidelného mnohoúhelníku s *n* stranami vepsaného do kruhu je *s (n), pak* odpovídající délka pro 2n stran je

$$s(2n) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2(n)}}.$$

Vyjdeme-li přirozeně z šestiúhelníku, vede postupné zdvojování k mnohoúhelníkům s 12, 24, 48, 96, 192 a 384 stranami. Položíme-li průměr kruhu rovný 100, obvodu mnohoúhelníku s 384 stranami se bude rovnat odmocnině z čísla 98694, takže

$$\pi \approx \frac{\sqrt{98694}}{100} = 3{,}14156\ldots,$$

což je hodnota Bhaskary II.

3.2.4 Madhava ze Sangamagramy (1350 - 1425)

Madhava [6][19] byl první kdo nalezl nekonečnou řadu pro řady goniometrických funkcí. Je považován za matematika, který otevřel dveře k matematické analýze.

V období mezi 6. a 12. stoletím znali matematici v nejlepším případě hodnotu π na desítitisíciny. V roce 1400 nastal převrat, kdy Madhava nalezl výpočet π nekonečnou řadou pro arkustangens. Jak k tomu došel, popisuje Juškevič []:

Účelem rozložení oblouku kružnice podle mocnin tangenty nebo kotangenty byl přesnější výpočet π. Vezmeme takový oblouk kružnice, že jeho sinus je menší než kosinus. To dá první veličinu. Vynásobíme tuto veličinu čtvercem sinu a vydělíme čtvercem kosinu, dostaneme druhou veličinu. Opakujeme to, opět násobíme čtvercem sinu a dělíme čtvercem kosinu. Tím získáváme veličiny, které se dělí po pořádku lichými celými čísly 1, 3, 5,… Jestliže získané veličiny začneme střídavě odečítat a přičítat k první, pak dostaneme oblouk kružnice.

Tento popis odpovídá vzorci

$$r \times \varphi = \frac{r \sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{r(\sin\varphi)^3}{3(\cos\varphi)^3} + \frac{r(\sin\varphi)^5}{5(\cos\varphi)^5} - \cdots, \tag{1}$$

kde $\sin\varphi \leq \cos\varphi$.

Madhava zřejmě uvažoval konvergenci řady (1) pro $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ a její divergenci pro $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. V posledním případě se doporučuje řada, která dává doplňkový oblouk k čtvrtině kružnice

$$r\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) = \frac{r\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)} - \frac{r\left(\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)\right)^3}{3\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)\right)^3} + \frac{r\left(\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)\right)^5}{5\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)\right)^5} - \cdots. \tag{2}$$

V našem označení se při $r = 1$ řady (1) a (2) změní tvar

$$\varphi = \tan\varphi - \frac{(\tan\varphi)^3}{3} + \frac{(\tan\varphi)^5}{5} - \cdots \tag{1´}$$

$$\frac{1}{2}\pi - \varphi = \cotan\varphi - \frac{(\cotan\varphi)^3}{3} + \frac{(\cotan\varphi)^5}{5} - \cdots \tag{2´}$$

Pro výpočet π se uvádí jako nejvhodnější řada, která vznikne z (1) pro $\varphi = 45°$.

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^5 - 5} + \frac{1}{7^7 - 7} - \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1^5 + 4 \times 1} - \frac{1}{3^5 + 4 \times 3} + \frac{1}{5^5 + 4 \times 5} - \cdots\right).$$

Hodnot π určil Madhava na 11 desetinných míst přesně. Což byl v té době rekord.

$$\pi = 3{,}14159265358$$

Řadu pro arkustangens znovu objevil James Gregory v r. 1671, jehož jménem je dodnes označována.

4 ÚPADEK VE STŘEDOVĚKÉ EVROPĚ

Slovo středověk označovalo „temné mezidobí“ mezi skutečnými věky, řeckořímským starověkem a novověkem. Za počátek středověku je obecně považována událost pádu Říma v r. 476 n. l. a konec je stanoven nejčastěji datem 1492, tedy objevením Ameriky, nebo rokem 1789, kdy začala Velká francouzská revoluce. Termín středověk vymysleli renesanční myslitelé na konci patnáctého století. Právě oni chápali středověk jako dobu temna a barbarství [6].

Tyto názory v podstatě přijali a rozvinuli osvícenští myslitelé a klasicistní vzdělanci sedmnáctého a osmnáctého století. Právě osvícenství neboli věk rozumu a osvěty identifikuje středověk s dobou temné vlády římské církve, která je nepřátelská vědě, a charakterizuje ho jako období výrazného kulturního úpadku.

Zejména církví byly poslány veškeré vědecké práce a celé knihovny na hranice a každá vědecká teorie byla odsouzena jako dílo ďáblovo [10][12].

Není tedy divu, že matematika jen málo pokročila. Až do renesance dosáhla evropská matematika úrovně, které zhruba dosáhli Babylóňané před 2000 lety. I historie čísla π nebyla výjimkou, nebyl učiněn žádný pokrok až na Fibonacciho.

4.1 Leonardo z Pisy – FIBONACCI

Leonarda Pisánského [5] (asi 1170 - 1250) můžeme považovat za nejvýznamnějšího matematika středověké Evropy. Jeho dílo bylo překonáno až na přelomu středověku a novověku. Fibonacci studoval v Bougii, jedné z obchodních kolonií Pisy (dnešní Alžírsko), své znalosti si později rozšiřoval na cestách za obchodem ve Středomoří a v Orientu.

Fibonacci je autorem následujících matematických spisů:

1. *Liber abaci* (Kniha o abaku) z roku 1202 – tato kniha uvádí velké množství početních metod aritmetiky, algebry, teorie čísel a řadu demonstrujících příkladů.

2. *Practica geometriae* (Praxe geometrie) z roku 1220 – tato kniha je nejen příručkou aplikací geometrie v zeměměřictví, ale zejména teoretickým dílem o geometrii a trigonometrii. Obsahuje věty i důkazy, ukazuje souvislosti aritmetiky, planimetrie a stereometrie, některé geometrické úlohy řeší algebraicky.
3. *Flos* (Květ) z roku 1225 – hlavní téma je diskuse o kořenu jedné kubické rovnice s celočíselnými koeficienty.
4. *Liber quadratorum* (Kniha čtverců) z roku 1225 – kniha obsahuje úlohy na neurčité kvadratické rovnice a jejich soustavy, které jsou řešeny v oboru racionálních čísel.

Geometrickým záležitostem se Leonardo věnuje zejména ve spise *Practica geometriae.*

Tento spis je rozdělen na osm částí, my se budeme zabývat částí třetí, která pojednává o „měření obrazců“, jako je trojúhelník, čtverec, obdélník, mnohoúhelník a kruh. Najdeme zde i obecný návod na výpočet obvodu a obsahu kruhu a konkrétní výpočet pro kruh s průměrem 14, kde je jako $\boldsymbol{\pi}$ použita hodnota $\frac{22}{7}$. Tato část obsahuje i velmi zajímavou pasáž pro výpočet konstanty $\boldsymbol{\pi}$.

Fibonacci reprodukuje Archimedův výpočet, počítá poměr obvodu pravidelného vepsaného, resp. opsaného 96 - úhelníka k průměru. Leonardo měl ale tu výhodu, že mohl počítat příslušné odmocniny pomocí decimální aritmetiky. Jeho výsledek můžeme v dnešní symbolice vyjádřit nerovnostmi

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}.$$

Protože aritmetický průměr čísel $\frac{4}{9}$ a $\frac{1}{5}$ je $\frac{29}{90} \cong \frac{1}{3}$, dochází Fibonacci k přibližné hodnotě

$$\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275},$$

$\pi = 3{,}141818$ a to je správné na tři desetinná místa.

5 NOVOVĚKÁ MATEMATIKA V EVROPĚ

Období renesance začíná v druhé polovině 15. století. Byl to největší pokrokový převrat, který lidstvo dosud zažilo, dochází k objevování a zdokonalování matematických metod. Rozšíření matematiky a urychlení jejího rozvoje i rozvoje jiných věd ovlivnil vynález knihtisku připisován Johannesu Gutenbergovi z Mohuče roku 1456 [10][12].

Historie čísla π byla během renesance spojena hlavně s určením přesnější numerické hodnoty této konstanty. Teorie byla v podstatě pořád založena na Archimédových mnohoúhelnících. Kromě indicko-arabských číslic a desetinných zlomků, které pronikly díky Arabům do Evropy během středověku, byly k dispozici ještě další dva prostředky pro numerické výpočty a to trigonometrické funkce a logaritmy.

A právě k rozvoji trigonometrie významně přispěl kromě Mikuláše Koperníka i francouzský matematik Francois Viète.

5.1 Francois Viète (1540 - 1603)

Francois Viète [14][15] byl francouzský matematik, který se významně podílel na formování moderní algebry. V roce 1588 studoval právo v Poitiers. O rok později začal svou kariéru jako advokát ve svém rodném městě ve Fontenay – le – Comte, Vendeé. Sloužil také jako rádce u Jindřicha III. a Jindřicha IV. Rozluštil tajný španělský kódovací klíč, který obsahoval 500 různých znaků. Zavedl do matematické terminologie řadu nových slov, z nichž některá, jako *negativní* nebo *koeficient*, se udržely dodnes.

R. 1593 spočetl Viète pomocí Archimédovy metody π pomocí pravidelného 392216 - úhelníku s přesností na devět desetinných míst. π pak vyjádřil jako nekonečný součin [2][14][15]. Jeho postup spočíval v tom, že vztáhl plochu mnohoúhelníka s n stranami k ploše mnohoúhelníka s $2n$ stranami.

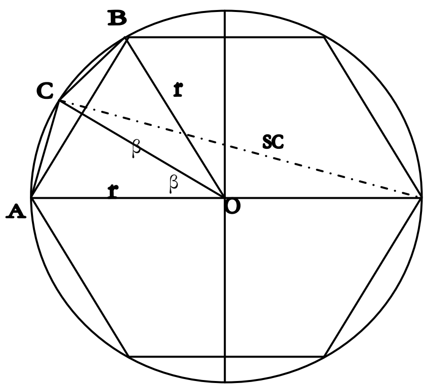
Plocha n-úhelníku je:

$$A(n) = n - kr\acute{a}t \text{ plocha trojúhelníku OAB,}$$

$$= \frac{1}{2} nr^2 \sin 2\beta,$$

$$= nr^2 \cos\beta \sin\beta$$

$$A(2n) = nr^2 \sin\beta,$$



Obr. 5.1.1.

podíl $A(n)$ a $A(2n)$

$$\frac{A(n)}{A(2n)} = cos\beta$$

Jestliže budeme postupně zdvojovat počet stran mnohoúhelníka, dostaneme

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \times \frac{A(2n)}{A(4n)} \times \ldots \times \frac{A(2^{k-1}n)}{A(2^k n)}$$

Když se k blíží k nekonečnu, plocha mnohoúhelníka s 2^k stranami je nerozlišitelná od plochy kruhu, takže

$$\lim_{k \to \infty} A(2^k n) = \pi r^2.$$

Nakonec po zpětném dosazení dostáváme

$$\pi = \frac{{}^{1}\!/_{2}\, n \sin 2\beta}{\cos\beta \ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^3}\right) \ldots}$$

Viète zvolil za počátek čtverec, takže $n = 4, \beta = 45°, \cos\beta = \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pomocí vzorce pro poloviční úhel nakonec dostaneme

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$

a to je Viètův výraz publikovaný 1593 v jeho díle *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII* (Různé matematické problémy 8).

Viètův výsledek znamená milník v historii $\boldsymbol{\pi}$ a je též vrcholem renesanční matematiky spojené s $\boldsymbol{\pi}$. Byl první v historii, který vyjádřil $\boldsymbol{\pi}$ pomocí analytického výrazu nekonečné řady algebraických operací. Svobodně spolu mísil metody klasické řecké geometrie s arabským tvarem algebry a trigonometrie. Idea substituce je algebraická a odmocniny v jeho výrazech pocházejí z geometrického vzorce pro kosinus polovičního úhlu, ale jinak je jeho přístup zcela řecký, založený na úvahách o poměrech obsahů ploch a používá pomocnou tětivu (sc).

Sám Viète ovšem nepoužil svou nekonečnou řadu pro numerický výpočet $\boldsymbol{\pi}$. Užil Archimédovy metody bez podstatných modifikací, a to mnohoúhelník s 393216 -ti stranami. To mu umožnilo zredukovat Archimédovu hranici.

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537.$$

Jak již bylo řečeno, nalezení desetinných zlomků a logaritmů podstatně ulehčilo numerické výpočty na konci 16. a na počátku 17. století. To se odrazilo i na historii čísla $\boldsymbol{\pi}$. Právě v této době začali lidé počítat toto číslo se stále větší přesností, postupně se odhalovalo další a další desetinné číslo, což znamenalo zvětšení přesnosti předchozí aproximace alespoň desetkrát.

Archimedes vypočítal $\boldsymbol{\pi}$ na ekvivalent dvou desetinných míst a původní snaha o zvýšení přesnosti byla diktována praktickými hledisky. Později, zejména po vzniku diferenciálního počtu a nekonečných řad, bylo rozšíření počtu desetinných míst užito k demonstraci kvality výpočetní metody.

5.2 Ludolf van Ceulen (1540 - 1610)

Ludolf van Ceulen [10][16] byl holandský matematik, který se narodil 28. 1. 1540 v Hildesheimu v Německu, ale jako mnoho dalších Němců v té době emigroval před útlakem církve do Nizozemska.

Kvůli chudým podmínkám v rodině se mu nedostalo univerzitního vzdělání. Byl však velmi talentovaný a vytrvalý, a tak se matematiku nejen naučil, ale také k ní přispěl několika pracemi, z nichž nejznámější se jmenuje *O kruhu (Van den Circkel)*. Živil se počítáním účtů a vyučováním. V roce 1600 byl jmenován prvním profesorem matematiky na Leidenské univerzitě. 31. 12. 1610 v Leidenu zemřel.

Ludolf van Ceulen strávil značnou část svého života počítáním číselné hodnoty matematické konstanty π. Zvolil stejnou metodu jako Archimedes a počítal „svoje“ číslo pomocí mnohoúhelníku, kterým kruh napodobil. Na rozdíl od svých předchůdců místo pravidelného mnohoúhelníku s několika sty stranami zvolil obrazec s 2^{62} vrcholy. Což bylo neuvěřitelných

$$4\,611\,686\,018\,427\,387\,904$$

vrcholů.

V roce 1596 publikoval ve svém článku *Van den Circkel* hodnotu π s přesností na 20 desetinných míst. Článek končí: „Kdokoliv chce, může jít ještě dále.“ Ale jak se ukázalo, nechtěl nikdo kromě Ludolfa samotného. Jeho práce *De Aritmetische en Geometrische fondamenten*, která byla uveřejněna až po jeho smrti v roce 1615 jeho ženou, udává hodnotu čísla π na 35 desetinných míst přesně.

Ludolfova honba za čísly učinila takový dojem na Němce, že začali nazývat π jako „Ludolfovo číslo“. [10][16] Po jeho smrti bylo všech 35 desetinných míst vytesáno na jeho náhrobní kámen v Leidenu. Náhrobní kámen se později ztratil, ale v roce 2000 byl opět obnoven.

$$3{,}14159265358979323846264338327950288$$

Na číslu π je zajímavá jedna věc. Vzniklo pro potřeby geometrie a na první pohled má význam jenom pro ni. Přitom ale, tak jak matematika po van Ceulenovi pokračovala, vznikal infinitezimální (nekonečně malý) počet, hledaly se součty nekonečných řad a počítaly se zajímavé body funkcí, bylo pozoruhodné, jak často matematici naráželi na hodnotu π v úplně nových a nečekaných souvislostech. A díky tomu, byl větší důvod se tímto číslem dále zabývat, právě z hlediska nekonečných řad nebo funkcí. Přitom se naráželo na kvalitativně nové postupy pro jeho výpočet.

Ludolf van Ceulen byl poslední, kdo šel na výpočet dalších míst čísla π přes jeho geometrický výklad.

V roce 1706 zavedl William Jones (1675 - 1749), velšský matematik, jako první symbol π pro poměr obvodu kruhu k jeho průměru.

Když začali matematici blíž studovat funkce, přišli na to, že mnohé z nich je možné lokálně aproximovat pomocí polynomů (je možné je nahradit mnohočlenem, který na malém okolí nějakého bodu nabývá přibližně stejných hodnot. Je k tomu třeba, aby aproximované funkce měly spojité derivace až do stupně $(n+1)$, pokud je chceme nahradit polynomem stupně n). Takovému přiblížení se říká rozvoj funkce v mocninnou řadu a je spojováno se jménem anglického matematika Brooka Taylora (1685 - 1731), i když jako první už potřebnou větu dokázal jeho krajan James Gregory.

5.3 James Gregory (1638 - 1675)

James Gregory [14][17] byl skotský matematik zabývající se příležitostně astronomií. Studoval matematiku v Aberdeenu a později v Itálii. Zabýval se problémy, které značně předbíhaly jeho dobu. Napsal dílo *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (správná kvadratura kruhu a hyperboly), která obsahovala základní myšlenku o rozdílu mezi algebraickými a transcendentními funkcemi, a dokonce se pokusil dokázat transcendenci π. Gregory byl již seznámen s rozvojem funkcí $tg\ x, \sec x, arctg\ x$ do řad. Vrátil se do Skotska, kde se stal profesorem na St. Andews University, a v roce 1674 byl jmenován na první katedru matematiky na univerzitě v Edinburgu. Rok na to, ale náhle zemřel ve věku pouhých 36 let.

Pro historii π je velmi důležitý znovu objevení řady pro $arctg$, která dosud nese jeho jméno. Zjistil, že plocha pod křivkou $\frac{1}{1+x^2}$ v intervalu $(0, x)$ je $arctg\ x$. V moderní symbolice zapsáno

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x.$$

Jednoduchým procesem dlouhého dělení našel Gregory řadu

$$arctg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Odsud byl už jednoduchý krok dosadit x = 1. Protože $arctg\ (1) = \frac{\pi}{4}$, to nám dává

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right),$$

což je vůbec první nekonečná řada nalezená pro vyjádření $\boldsymbol{\pi}$.

Tato řada bývá někdy označována jako Leibnizova – Gregoryho. Tato řada je sice velmi působivá, ale z praktického hlediska absolutně nevhodná. Hlavním důvodem je velmi pomalá konvergence.

5.4 Isaac Newton (1642 - 1727)

Isaac Newton [1][2] byl anglický fyzik, matematik, astronom, přírodní filosof, alchymista a teolog. Jeho publikace Philosophiae Naturalis Principia Mathematika (matematické principy přírodní filosofie), vydaná v roce 1687, položila základy klasické mechaniky a dnes patří mezi nejdůležitější knihy v historii vědy. V matematice patří mezi první objevitele diferenciálního a integrálního počtu a také přispěl k objevení diferenciálních rovnic. Newton nalezl metodu pro numerické řešení transcendentních rovnic. Poté zobecnil binomickou větu v binomickou řadu.

Issac Newton patří mezi největší vědce všech dob.

Co se týče čísla $\boldsymbol{\pi}$, Newton navazoval na Gregoryho a Leibnize, bylo pouze na něm, aby našel rychleji konvergující řadu pro $\boldsymbol{\pi}$.

Newton našel metodu, jak počítat derivace proměnné a naopak, jak nalézt integrál dané funkce. Zjistil také, že to znamená plochu pod křivkou. A tak určil, že (opět vyjádřeno v moderní symbolice)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \arcsin x$$

neboli, při užití jeho objevu binomické věty

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^4 + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}x^6 + \cdots\right) dx$$

takže při integraci člen po členu dostáváme

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{x^5}{5} + \cdots$$

Dosazením $x = \frac{1}{2}$, což znamená $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, dostáváme řadu

$$\pi = 6\times\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 3\times 2^2} + \frac{1\times 3}{2\times 4\times 5\times 2^5} + \cdots\right),$$

což konverguje mnohem rychleji než Leibnizova - Gregoryho řada.

5.5 John Machin (1680 - 1752)

John Machin [2][10][18] se narodil v Anglii v roce 1680. Byl profesorem astronomie na Greshamské vysoké škole v Londýně. Machin je nejvíce známý rozvojem rychle konvergující řady pro $\boldsymbol{\pi}$. On sám použil pro svůj výzkum Gregoryho řadu a dokázal číslo $\boldsymbol{\pi}$ spočítat na 100 desetinných míst.

Pro $tg\ \beta = \frac{1}{5}$ dostáváme

$$tg2\beta = \frac{2tg\beta}{1 - tg^2\beta} = \frac{5}{12}$$

a

$$tg4\beta = \frac{2tg2\beta}{1 - tg^2 2\beta} = \frac{120}{119}$$

To se liší pouze o 1/119 od 1, jejíž $arctg\ x = \frac{\pi}{4}$. Když tento rozdíl vyjádříme v úhlech, dostaneme

$$tg\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg4\beta - 1}{1 + tg4\beta} = \frac{1}{239},$$

a tudíž

$$arctg\left(\frac{1}{239}\right) = 4\beta - \frac{\pi}{4} = 4arctg\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

Dosazením do Gregoryho řad pro 2 arctg dostal Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^3} + \frac{1}{5 \times 239^5} - \cdots\right)$$

To byl takový hezký malý trik, protože druhá řada konverguje velice rychle a první je vhodná pro výpočty. Díky této řadě Machin vypočítal v roce 1706 $\boldsymbol{\pi}$ na 100 desetinných míst.

5.6 Leonard Euler (1707 - 1783)

Leonard Euler [2][12] se narodil ve Švýcarsku a patří mezi nejvýznamnější matematiky 18. století a mezi nejlepší matematiky vůbec. Euler provedl mnoho objevů na poli diferenciálního počtu a teorie grafů. Zavedl také mnoho nových moderních matematických pojmů a symbolů, obzvlášť v matematické analýze.

Také Euler se zabýval výpočtem $\boldsymbol{\pi}$. Snažil se zrychlit konvergenci Gregoryho řady. Vycházel ze vzorce pro tangens součtu úhlů (podobně jako Machin)

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - (tg\ \alpha \times tg\ \beta)},$$

kterému odpovídá součtový vzorec pro arkustangens

$$arctg(u) + arctg(v) = arctg\left(\frac{u + v}{1 - u \times v}\right).$$

Tento vzorec použijeme proto, abychom pomalou konvergenci Gregoryho řady pro $x = 1$ nahradili rychlejšími řadami s $x = u$ a $x = v$. Abychom dostali hodnotu $arctg(1)$, potřebujeme najít u a v tak, aby bylo $\left(\frac{u+v}{1-u\times v}\right) = 1$. Potom bude

$$arctg(u) + arctg(v) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Euler zvolil $u = \frac{1}{2}$ a $v = \frac{1}{3}$, čímž dostal

$$\frac{\pi}{4} = arctg\left(\frac{1}{2}\right) + arctg\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \frac{1}{896} + \frac{1}{4608} - \frac{1}{22528}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} - \frac{1}{15309}\right)$$

Prvních deset členů této řady udává přibližnou hodnotu

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}785\,385,$$

která se se skutečnou hodnotou π shoduje na čtyři desetinná místa. Euler pomocí této řady vypočítal π na 20 desetinných míst, na což potřeboval zhruba 60 členů řady. Porovnáním první a druhé řady vidíme, že první konverguje o něco pomaleji než druhá. Když najdeme u a v tak, aby bylo $\left(\frac{u+v}{1-u\times v}\right) = \frac{1}{2}$, tak můžeme konvergenci první řady zrychlit. Pro $u = \frac{1}{3}$ a $v = \frac{1}{7}$, dostáváme

$$\frac{\pi}{4} = 2arctg\left(\frac{1}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{81} + \frac{2}{1215} - \frac{2}{15309} + \frac{2}{177147} - \frac{2}{1948619}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{1029} + \frac{1}{84035} - \frac{1}{5764801}\right)$$

Deset vypsaných členů nám udává hodnotu $\pi = 3{,}141592288$, což je lepší výsledek než prvních 10 členů u předchozí řady. Tento poslední postup také použil jeden z předních matematiků Georg von Vega.

5.7 Georg von Vega (1754 - 1802)

Vega [2] se narodil v chudé rodině 23. 3. 1754 v Lublani ve Slovinsku. V roce 1780 vstoupil do vojenské služby jako profesor matematiky na dělostřelecké škole ve Vídni. Georg von Vega se především zasloužil o správnost tabulek logaritmických a goniometrických funkcí. Jeho první kniha logaritmů byla vydána v roce 1783.

Vega je hlavně znám svou trpělivostí pro spočítání hodnoty $\boldsymbol{\pi}$. Toto číslo dokázal spočítat na 140 správných desetinných míst pomocí Eulerovy řady.

Zemřel nebo byl zavražděn 26. 9. 1802 ve Vídni, jeho tělo bylo nalezeno v Dunaji.

Vědci udávají, že za následujících 50 let se nenašel nikdo, kdo by Georga von Vegu překonal.

6 IRACIONALITA A TRANSCENDENCE

Díky objevování dalších a dalších desetinných čísel naší konstanty se matematici začínali dohadovat, co je vlastně π za číslo. Jakého je druhu? Racionální nebo iracionální, algebraické nebo transcendentní? Tato otázka trápila vědce stovku let.

Již Řekové znali existenci iracionálních čísel, neboli čísel, která nemohou být vyjádřena jako podíl dvou celých čísel. Řekové je nazývali například nesouměřitelná. I Aristoteles si byl vědom důkazu, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. Jeho důkaz vypadal následovně: Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ lze vyjádřit podílem dvou celých čísel $\frac{p}{q}$. Pak pouze jedno z nich může být sudé (jinak by šlo toto číslo krátit 2).

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$
$$2q^2 = p^2,$$

z toho plyne, že $p^2,$ a tudíž i p musí být sudé ($p = 2r$), takže q musí být liché. Ale podle $2q^2 = 4r^2$ dostáváme, že q je sudé. Z toho plyne, že předpoklad nebyl správný (důkaz sporem).

Toto zjištění nám však nepotvrzuje, proč by iracionální číslo nemohlo být kořenem algebraické rovnice. Zrovna $\sqrt{2}$ je právě kořenem rovnice $x^2 - 2 = 0$.

6.1 Iracionalita

Větu, že $\boldsymbol{\pi}$ je iracionální číslo, jako první dokázal v roce 1768 J. Heinrich Lambert [19] (1728 - 1777), švýcarský matematik, fyzik a astronom.

$$\mathrm{tang}\left(\frac{\Phi}{\omega}\right) = \cfrac{\Phi}{\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{3\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{5\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{7\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{9\omega - \&c.}}}}}$$

Kopie originálního řetězce z důkazu iracionality π od Lamberta.

Ve své práci, z důvodu dostupnosti, uvádím důkaz anglické matematičky Mary Cartwright [13] [22] (1900 - 1998) z roku 1945.

6.1.1 Důkaz iracionality π

Nechť $I_n(x) = \int_{-1}^{1}(1-\alpha^2)^n \cos(\alpha x)\, d\alpha$, integrací po částech dostáváme

$$x^2\, I_n(x) = 2n(2n-1)I_{n-1}(x) - 4n(n-1)I_{n-2}(x), \qquad pro\; n \geq 2.$$

Jestliže

$$J_n(x) = x^{2n+1} I_n(x)$$

pak nastává

$$J_n(x) = 2n(2n-1)J_{n-1}(x) - 4n(n-1)x^2 J_{n-2}(x).$$

pro $n = 0$ $\quad J_0 = 2\sin x$

pro $n = 1$ $\quad J_1 = -4x\cos x + 4\sin x$

pro $n = 2$ $\quad J_2 = 2 \times 2 \times 3(-4x\cos x + 4\sin x) - 4 \times 2 \times 1 \times x^2 2\sin x$

$$= (-16x^2 + 48)\sin x - 48x\cos x$$

platí pro $\forall n \in Z^+$.

Z toho plyne

$$J_n(x) = x^{2n+1}\, I_n(x) = n!\,(P_n \sin(x) + Q_n \cos(x)),$$

kde P_n , Q_n jsou polynomy stupně $\leq 2n+1$ s celočíselnými koeficienty.

Tvrzení: $\quad max\{stP_n, st\, Q_n\} = n$

Důkaz: matematickou indukcí

$$n = 0 \quad st\, P_n = 0 \quad st\, Q_n = 0$$

$$n = 1 \quad st\, P_n = 0 \quad st\, Q_n = 1$$

$n \to n+1$ $\quad J_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)\underbrace{J_n}_{\max st\, n} - 4(n+1)n\underbrace{x^2 \underbrace{J_{n-1}}_{\max st\, (n-1)}}_{\max st\, (n+1)}$

$=> \max st\, n+1$

Dejme $x = \frac{\pi}{2}$ a předpokládejme, že $\boldsymbol{\pi}$ je racionální číslo, což znamená $\frac{\pi}{2} = \frac{b}{a}$, kde $a, b\ \in \mathbf{Z}$.

Po dosazení do této rovnice

$$x^{2n+1}\, I_n(x) = n!\,(P_n \sin(x) + Q_n \cos(x))$$

a jednoduchými úpravami, dostáváme

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = n!\left(P_n\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)\right) \qquad /\times\frac{a^{2n+1}}{n!}$$

$$\frac{b^{2n+1} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!} = a^{2n+1} P_n\left(\frac{b}{a}\right), \tag{1}$$

označme $a^{2n+1} P_n\left(\frac{b}{a}\right)$ jako polynom R_n

$$R_n = \frac{b^{2n+1} I_n(x)}{n!}.$$

Na pravé straně rovnice (1) je celé číslo. P_n je polynom nejvýše n-tého stupně a z toho plyne

$$P_n\left(\frac{b}{a}\right) = a_n\left(\frac{b}{a}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \cdots + a_0$$

Na druhé straně $R_n \to 0$ pro $n \to \infty$ protože b je pevně dané a I_n je ohraničeno hodnotou integrálu

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) d\alpha.$$

R_n je celé číslo a zároveň $\to 0$. Proto $R_n = 0$ jen pro některá n. Tento integrál je však integrálem funkce, která je spojitá a kladná na většině intervalu $(-1, +1)$. Z toho plyne, že $R_n \neq 0$. Důkaz sporem.

Po důkazu iracionality došli vědci k podezření, že existují ještě jiná čísla než iracionální, čísla, která jsou nejen iracionální, ale nejsou zároveň ani kořenem žádné algebraické rovnice. Právě tyto čísla byla nazvána transcendentní. Nikdo však neměl důkaz, že taková čísla existují, až do roku 1840.

6.2 Joseph Liouville (1809 - 1882)

Joseph Liouville byl francouzský matematik. V roce 1838 byl jmenován profesorem matematiky na École Polytechnique v Paříži. A v roce 1850 získal profesuru matematiky na College de France. Liouville pracoval v mnoha různých oblastech matematiky, včetně teorie čísel, komplexní analýzy, diferenciální geometrie a topologie.

Právě Liouville [8] jako první dokázal v roce 1840 existenci transcendentních čísel.

6.2.1 <u>Liouvilleův teorém (1840)</u>:

Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$ je algebraické číslo se stupněm $n \geq 2$ (iracionální číslo), pak existuje konstanta $c = c(\alpha) > 0$ závisející na α taková, že platí

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}$$

pro všechny $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$.

<u>Důkaz</u>:

Označme $\mathrm{Þ}_\alpha$ množinu všech posloupností n-tého stupně, jejichž kořenem je α. Nyní zvolme $P \in \mathrm{Þ}_\alpha$.

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je nenulový celočíselný polynom s kořenem α a s nejnižším stupněm.

Stanovili jsme

$$I = [\alpha - 1, \alpha + 1]$$

$$c_p = \min(1, \left(\max_{x \in I} |P'(x)|)^{-1}\right).$$

A) Jestliže $\frac{p}{q}$ nenáleží I, potom nerovnost má triviální řešení

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq 1 \geq \frac{1}{q^n} \geq \frac{c_p}{q^n}.$$

To musí platit, jelikož z definice c_p volíme za tuto konstantu 1, tehdy platí rovnost

$$\frac{1}{q^n} = \frac{c_p}{q^n}$$

nebo $(\max_{x \in I} |P'(x)|)^{-1})$, pak určitě platí

$$\frac{1}{q^n} > \frac{c_p}{q^n}.$$

B) Jestliže $\frac{p}{q}$ náleží I, potom Lagrangeova věta o střední hodnotě tvrdí, že

$$\frac{P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)}{\alpha - \frac{p}{q}} = P'(z)$$

pro některá reálná čísla z ležící mezi α a $\frac{p}{q}$ a z tohoto důvodu náleží i I. Vzhledem $P(\alpha) = 0$ (α je kořenem polynomické rovnice) dostaneme upravený výraz z Lagrangeovy věty

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{|P'(z)|}.$$

Podle definice c_p musí platit $\frac{1}{|P'(z)|} \geq c_p$, jelikož $z \in I$. Také $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ musí splňovat podmínky, jinak by $\frac{P(x)}{x-\frac{p}{q}}$ byl racionální polynom s kořenem α stupně $n-1$ a to by odporovalo minimálnímu n. Ale potom platí

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^1 + a_0\left(\frac{p}{q}\right)^0\right| \geq \frac{1}{q^n},$$

po převedení na společného jmenovatele dostáváme

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_n p^n + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n},$$

to platí, protože víme, že $\frac{p}{q}$ není kořenem rovnice a tudíž musí být v čitateli nenulové celé číslo.

Pak $\forall\, P \in \mathcal{P}_\alpha : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c_p}{q^n} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{\sup c_p}{q^n} = \frac{c}{q^n}$

a tudíž

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}.$$

Liouvillův teorém nám poskytuje metodu pro výpočet transcendentních čísel.

<u>Důsledek</u>:

Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$ je iracionální číslo s vlastností, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí zlomek $\frac{p}{q}$, $q \geq 2$ a zároveň

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Potom α je transcendentní číslo.

<u>Důkaz</u>:

Předpokládám spor, že α je algebraické číslo, které má stupeň $m \geq 2$. Nechť $c = c(\alpha)$ je konstanta z Liouvillova teorému. Vybíráme $n \in \mathbf{N}$ dostatečně velké, aby

$n > m$ a $2^{m-n} < c$. Vlastností α je, že zde existuje zlomek $\frac{p}{q}$, pro který $q \geq 2$ a je blíže k α než $\frac{1}{q^n}$. Potom

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n} \leq \frac{1}{q^m} \times \frac{1}{2^{n-m}} < \frac{c}{q^m},$$

což je v rozporu s Liouvillovým teorémem.

Definice Liouvilleova čísla: Číslo α nazveme Liouvilleovým, právě když vyhovuje předpokladům důsledku.

Důsledek říká, že každé Liouvilleovo číslo je číslo transcendentní.

Liouvillova čísla mohou být postavena jako sumy rychle konvergující nekonečné řady. Tímto způsobem snadno vyplyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0.110001000000000000000001 \ldots$$

je Liouvillovo číslo a proto je transcendentní.

Dokažme si, že tato řada je opravdu Liouvillovým číslem.

Vezměme si částečné součty této řady a odečtěme je od původní, pak musí platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}} < \frac{1}{(10^{n!})^n}$$

Jaký je ale součet?

Musíme tedy původní řadu omezit shora geometrickou řadou.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{(n+1)!}10^k} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9 \times 10^{(n+1)!}}$$

$$\frac{1}{10^{(n+2)!}} < \frac{1}{10^{(n+1)!} \times 10} = \frac{1}{10^{(n+1)!+1}}$$

Pak máme danou nerovnost

$$\frac{10}{9 \times 10^{(n+1)!}} < \frac{1}{(10^{n!})^n} = \frac{1}{10^{n \times n!}}$$

platí tato nerovnost?

$$10^{1-n!} < 9 \qquad \text{Ano platí.}$$

Jakmile byla existence transcendentních čísel prokázána, nastala další otázka. Čím jsou tyto čísla zajímavá? Například naše číslo π, jestli bude transcendentní, nám dá okamžitou odpověď na prastarý problém o možnosti kvadratury kruhu.

A právě kvadratura kruhu je jedna ze tří nejslavnějších antických konstrukčních problémů (zbylé dva jsou duplikace krychle a trisekce úhlu). Přesné znění tohoto úkolu bylo: K danému kruhu zkonstruujte čtverec o stejném obsahu pouze za užití pravítka a kružítka.

Řekové se pokoušeli provést kvadraturu kruhu pouze konečným počtem konstrukčních kroků. Jako další možnost se objevila, ověřit proveditelnost takové konstrukce analyticky. Pokud máme k dispozici pouze pravítko a kružítko, můžeme rýsovat jen rovné čáry a kružnice, jejichž rovnice vyjádřené polynomy nejsou vyššího než druhého řádu. Body získané konstrukcí jsou proto vždy průsečíky křivek nejvýše druhého řádu. Máme kružnici s jednotkovým průměrem, jejíž rovnice je druhého řádu a konečným výsledkem konstrukce by měla být vzdálenost rovná π.

Jestliže kvadratura je možná v konečném počtu kvadratických stupňů, pak jedním z kořenů této algebraické rovnice je π (nebo $\sqrt{\pi}$). Ale jestliže π není kořenem žádné algebraické rovnice, pak je kvadratura podle řeckých pravidel nemožná. Z toho plyne, že pokud je π transcendentní číslo, pak kvadratura neexistuje.

6.3 Charles Hermite (1822 - 1901)

Charles Hermite byl francouzský matematik. Zabýval se zejména teorií čísel a algebrou. Jako první dokázal, že Eulerovo číslo e je transcendentní. Jeho metodu později zjednodušil Ferdinand von Lindemann a dokázal jejím užitím transcendentnost čísla π.

Jelikož byla jako první zjištěna transcendence čísla e, chtěla bych ji ve své práci zveřejnit, jako mezikrok k transcendenci π (hlavně z historického hlediska a odvození důkazu pro transcendenci π), proto zde uvádím i matematika Charlese Hermita [11].

6.3.1 Hermiteův teorém (1873):

e je transcendentní číslo.

Důkaz:

Předpokládejme polynomickou rovnici, jejíž kořen je právě e

$$a_m e^m + \cdots + a_1 e + a_0 = 0$$

$$a_i \in \mathbf{Z}, \qquad a_0 \neq 0 \text{ b. ú. n. o.}$$

Definujme

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \dots (x-m)^p}{(p-1)!},$$

kde pro tuto chvíli je p libovolné prvočíslo.

Definujme

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(mp+p-1)}(x). \qquad (1)$$

Jestliže $0 < x < m$,

$$|f(x)| \leq \frac{m^{p-1} m^{mp}}{(p-1)!}$$

$$= \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}.$$

Rovněž platí

$$\begin{aligned}
\left(e^{-x}F(x)\right)' &= -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x) \\
&= e^{-x}\left(F'(x) - F(x)\right) \\
&= e^{-x}\left[\left(f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(mp+p-2)}(x)\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(mp+p-1)}(x)\right)\right] \\
&= -e^{-x}f(x)
\end{aligned}$$

pozn. $f^{(mp+p-2)}(x) = 0,$ jelikož derivujeme konstantu z předpisu (1).

takže dostáváme

$$a_j \int_0^j e^{-x} f(x)\, dx = a_j [-e^{-x} F(x)]_0^j$$

$$= a_j F(0) - a_j e^{-j} F(j).$$

Vynásobíme-li e^j a sečteme přes $j = 0, 1, \dots, m$, dostaneme

$$\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x) dx = \sum_{j=0}^{m} a_j e^j \left(F(0) - e^{-j} F(j)\right) \tag{2}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} a_j e^j\, F(0) - \sum_{j=0}^{m} a_j\, F(j)$$

$$= F(0) \sum_{j=0}^{m} a_j e^j - \sum_{j=0}^{m} a_j\, F(j)$$

pozn. $\sum_{j=0}^{m} a_j e^j = 0$ z původního předpokladu, že e je kořenem polynomické rovnice

$$= F(0) \times 0 - \sum_{j=0}^{m} a_j F(j)$$

$$= -\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{mp+p-1} a_j f^{(i)}(j).$$

Tvrdíme, že každá $f^{(i)}(j)$ je číslo dělitelné p s výjimkou, kdy $j = 0$ a zároveň $i = p - 1$. Pouze pro nenulové výrazy to vyplývá z podmínek, kdy faktor $(x - j)^p$ byl diferencovaný p krát a potom $p!$ zruší $(p - 1)!$ vyloučí p, mimo jediné výjimky viz výše.

Ukážeme, že pro $j = 0$ a zároveň $i = p - 1$ není výraz dělitelný p. Jasné je, že

$$f^{(p-1)}(0) = (-1)^p \dots (-m)^p = 0\,.$$

Vybereme $p > m$, tento výsledek nemůže mít faktor p. Proto na pravé straně (2) je celé číslo různé od nuly. Ale vzhledem k tomu, že $p \to \infty$ na levé straně konverguje k 0, podle výše uvedeného odhadu pro $|f(x)|$. A to je spor.

6.4 Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939)

Lindemann se narodil v Hannoveru v Německu roku 1852. Vystudoval matematiku v Göttingenu, Erlangenu, a Mnichově. V Erlangenu, pod vedením Felixe Kleina, obdržel doktorát za neeuklidovskou geometrii.

V roce 1882, publikoval výsledek, pro který je nejvíce znám, důkaz transcendence čísla $\boldsymbol{\pi}$. Jeho postup byl podobný metodě, kterou použil o devět let dříve Charles Hermite, který dokázal, že e, základ přirozených logaritmů, je transcendentní [11].

6.4.1 <u>Lindemannův teorém (1882)</u>:

π je transcendentní číslo.

<u>Důkaz</u>:

Pokud $\boldsymbol{\pi}$ splňuje algebraickou rovnici s koeficienty nad $\mathbf{Q}$, tak podobnou rovnici splňuje také číslo $i\pi$ $(i = \sqrt{-1})$.

$(f(x) \in Z[x]\ a\ f(\pi) = 0,$ potom $g(x) = f(ix) \times f(-ix)\ a\ g(ix) = 0)$

Nechť máme polynom $\theta_1(x) = 0,$ s kořenem $i\pi = \alpha_1$ a ostatními kořeny $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$.

Protože platí $e^{i\pi} + 1 = 0$, je tedy

$$(e^{\alpha_1} + 1) \dots (e^{\alpha_n} + 1) = 0. \tag{1}$$

Dále vytvoříme algebraickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejíž kořeny jsou exponenty e v rozvoji z výše uvedeného výrazu. Například, exponenty v párech jsou $\alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n$. Protože α splňují polynomickou rovnici nad $\mathbf{Q}$, jejich elementární symetrické funkce jsou racionální. Proto základní symetrické funkce součtu párů jsou symetrické funkce α a jsou také racionální. Pak tyto páry jsou kořeny racionální rovnice $\theta_2(x) = 0$ (polynom s 2 kořeny)s racionálními koeficienty.

Podobně součty 3 α jsou kořeny $\theta_3(x) = 0$ (polynom se 3 kořeny), atd. Když všechny rovnice vynásobíme, dostáváme rovnici

$$\theta_1(x)\theta_2(x) \dots \theta_n(x) = 0$$

je polynomická rovnice nad $\mathbf{Q}$ jejíž kořeny jsou součty všech α. Odstraněním nulových kořenů (vydělíme všemi x) z této rovnice, pokud existují, dostaneme

$$\theta(x) = 0$$

$$\theta(x) = cx^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_r \quad (2)$$

$c_r \neq 0$, protože jsme odstranili nulové kořeny a r je stupeň polynomu. Kořeny této rovnice jsou nenulová čísla. Označme je $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ všechny nenulové exponenty e, vzniklých roznásobením výrazu (1). Z původní rovnice (1) dostáváme

$$e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_r} + e^0 + \dots + e^0 = 0$$

neboli

$$\sum e^{\beta_i} + k = 0$$

kde k je celočíselné a kladné (součet všech e^0 neboli všech 1, které výraz obsahuje)

Nyní definujeme

$$f(x) = c^s x^{p-1} \frac{[\theta(x)]^p}{(p-1)!}, \quad (3)$$

kde $s = rp - 1$, c^sje vedoucí koeficient polynomu $\theta(x)$, $r \times p$ je stupeň tohoto polynomu na p, p bude určeno později.

Vynásobíme-li $x^{p-1} \times [\theta(x)]^p$ dostáváme stupeň polynomu $f(x)$, který je $r \times p + (p-1) = rp - 1 + p = s + p$

Definujme

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(s+p)}(x).$$

$$[e^{-x}F(x)]' = -e^{-x}f(x),$$

stejná úprava jako u transcendence e (viz kap. 6.3.1). Proto získáváme

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x e^{-y} f(y)\, dy$$

použitím substituce $y = \lambda x$ (proměnné jsou λ a y) v integrálu a vynásobením celé rovnice e^x dostáváme

$$F(x) - e^x F(0) = -x \int_0^1 e^{(1-\lambda)x} f(\lambda x)\, d\lambda.$$

x je konstanta, kterou jsme vyhodili před integrál a vypočítali jsme nové meze.

Nechť x jde přes βi (nenulové kořeny) a sečteme všechny rovnice. Protože $\sum e^{\beta i} + k = 0$, pak $\sum e^{\beta i} = -k$, to dosadíme rovnice a získáváme

$$\sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) + kF(0) = -\sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda \beta_j)\, d\lambda. \tag{4}$$

<u>Důsledek</u>:

Rozdíl oproti důsledku z kap. 6.3.1, který je velmi podobný, je, že β_j nejsou celá čísla, zatímco tam jsme pracovali s celými kořeny a celočíselnými koeficienty.

Pro dostatečně velké p je levá strana rovnice (4) nenulové celé číslo.

$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) = 0 \quad (0 < t < p)$ (tento polynom se dá vyjádřit elementárními symetrickými polynomy[2]), vyplývá z definice f (3). Každá derivace řádu p, která je vyšší než p (neboli $t \geq p$), je určitě dělitelná p, proto musíme derivovat $[\theta(x)]^p$ dostatečný počet krát, abychom získali nenulovou hodnotu. Nikdy to nula být nemůže, je to celé číslo, opět rozklad na elementární symetrické polynomy. Ale $f^{(t)}(\beta_j)$ je polynom v β_j stupně nejvýše s. Součet je symetrický a také celočíselný, pokud každý koeficient je dělitelný c^s, a to je. (Symetrické funkce jsou polynomy v koeficientech rovných polynomům v $\frac{c_i}{c}$ stupně $\leq s$). Takto získáváme

[2] definici a použití elementárních symetrických polynomů čtenář najde na portálu http://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_symmetric_polynomial

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) = pk_t, \quad t = p, \dots, p+s.$$

Díky tomu se levá strana rovnice (4) rovná $(\text{celému čislu dělitelnému } p) + kF(0)$

Ale co je $F(0)$?

$$f^t(0) = 0, \quad t = 0, \dots, p-2$$

- po dosazení 0 se vše vynuluje a zbude zde alespoň x^1.

$$f^{p-1}(0) = c^s c_r^p, \quad (c_r \neq 0)$$

- z rovnice (3) a (2) vyplývá, že zbude $(p-1)!\ \theta^p(0) = c^s c_r^p$.

$$f^t(0) = p \times (\text{celé číslo}), \qquad t = p, p+1, \dots$$

Takže levá strana rovnice (3) je celočíselným násobkem $p + c^s c_r^p k$. A to není dělitelné p, jestliže $p > k, c, c_r$. Z toho plyne, že to je nenulové celé číslo. Ale pravá strana rovnice konverguje k 0, takže $p \to \infty$. A tím dostáváme spor.

Díky Lambertovi a Lindemannovi máme iracionalitu a transcendenci π dokázanou. A tím pádem jednu ze tří nejslavnějších antických konstrukčních metod vyřešenou. Kvadratura kruhu je neřešitelná.

7 Π VE SVĚTĚ POČÍTAČŮ

S nástupem technické revoluce se naše číslo dostalo do jiných rozměrů. Začal se vyvíjet svět, ve kterém jsme pro výpočet již nepotřebovali pouze tužku a papír.

Jako poslední, kdo spočítal číslo **π** na papír pouze za pomoci stolního kalkulátoru, byl Ferguson.[10] Ten publikuje v roce 1946 toto číslo na 620 desetinných míst. A v roce 1947 se vyšplhala jeho hodnota až na 808 správných desetinných míst.

Číslo **π** v počítačové době připomíná hon stále přesnějšími číslicemi v 17. a 18. století. Na rozdíl od matematiků v minulosti, kteří hledali číslo **π** řádově na maximálně stovky desetinných míst, nyní programátoři a jejich počítače zpracovávají záznamy s tisíci a stovkami tisíc desetinných míst.

Ve své práci zmíním pouze ty nejznámější počítače do roku 1967, jelikož tato kapitola by byla velmi rozsáhlá z důvodu velmi rychlého vývoje technologií a v dobách internetu a moderních internetových vyhledávačů se každý kdo chce, může o toto číslo zajímat.

První výpočet **π** pomocí počítače byl pravděpodobně proveden v září roku 1949 na ENIACu (Electronic Numerical Integrator and Computer). Spočítal číslo **π** na 2 037 desetinných míst za 70 hodin. Tento výpočet byl programován na základě Machinova vzorce (viz 4.2.3). [2][19]

V září 1954 a lednu 1955 byl počítač NORC (Naval Ordnance Research Calculator) naprogramován pro výpočet **π** na 3 089 platných desetinných míst, výpočet mu zabral pouhých 13 minut. [2][19]

Tento rekord byl překonán v Londýně v březnu roku 1957, když počítač Pegasus spočítal 10 021 desetinných míst za 33 hodin. Následující test prokázal, že v počítači došlo k chybě a výsledek byl přesný na pouze 7 480 míst.

V červenci 1958 byl naprogramován IBM 704 v Paříži na základě kombinace Machinova a Gregoryho řady (viz 4.2.1 a 4.2.3). Poskytl 10 000 desetinných míst za hodinu a 40 minut.

O rok později, v červenci 1959, byl tentýž program užit na IBM 704 a výpočet byl na 16 167 desetinných míst správný.

Machinův vzorec byl též základem programu aplikovaného na IBM 7090 v Londýně v červenci 1961, což vedlo k získání 20 000 míst a zabralo mu to pouhých 39 minut.

V červenci 1961 Shank a Wrench zvýšili rychlost výpočtu. Bylo toho částečně dosaženo použitím rychlejšího počítače (IBM 7090 v IBM Data Processing Center v New Yorku), ale kromě toho užitím některých triků v programování. Výpočet poskytl 100 265 desetinných míst. Celková potřebná doba tedy byla 8 hodin 43 minut. Výpočet tohoto druhu zahrnuje miliardy jednotlivých aritmetických úkonů, a jestliže jediný z nich je chybný, celý další výpočet vede k nesprávným hodnotám.

V únoru 1967 na počítači CDC 6600 programovaném J. Gilloudem a M. Dichamptem bylo poskytnuto 500 000 desetinných míst. Potřebná doba pro výpočet byla 28 hodin 10 minut a dalších 16 hodin 35 minut zabralo prověřování výsledku. [2][19]

Od roku 1981 se rekordu, v množství nalezených číslic pomocí počítačových programů, ujímají Japonci. Přesněji japonský matematik **Yasumasa Kanada** [21][19], profesor informatiky na univerzitě v Tokiu, který patří mezi nejznámější lovce desetinných čísel konstanty π. Držitel 11 rekordů z posledních 21.

- r. 1981, rekord 2 000 036 desetinných míst s počítačem FACOM M – 200
- r. 1982, rekord 8 388576 desetinných míst s počítačem HITAC M – 280h
- r. 1983, rekord 16 777 206 desetinných míst se stejným typem počítače
- září 1986, rekord 33 554 414 desetinných míst s počítačem HITAC S - 810/20 a následně říjen, rekord 67 108 839 desetinných míst.
- r. 1988, rekord 201 326 551 desetinných míst díky počítači HITAC S – 810/80
- 19. listopad 1989, rekord 1 073740 799 desetinných míst s počítačem HITAC S – 820/80
- 11. října 1995, rekord 6 442 450 000 desetinných míst s počítačem HITAC S – 3800/480
- 6. červenec 1997, rekord 51 539 600 000 desetinných míst s počítačem HITACHI SR2201
- 5. duben 1999, rekord 68 719 470 000 desetinných míst s počítačem HITACHI SR8000
- 20. září 1999, rekord 206 158 430 000 desetinných míst s počítačem HITACHI SR8000/MPP

- 24. listopadu 2002, rekord 1 241 100 000 000 desetinných míst s počítačem HITACHI SR8000/MPP a 9–ti člennou skupinou vědců, výpočet trval přes 600 hodin

HITAC (HItachi Transistor Automatic Computer) je první tranzistorový počítačový model.

Yasumasa Kanada s jeho 11-ti rekordy patří mezi špičku vědců, kteří se zasloužili o vývoj čísla π. Mezi jeho největší konkurenty patří kanadský matematik a profesor na Simon Fraser Univerzitě Peter Borwein a američtí matematici Gregory V. Chudnovský a David V. Chudnovský.

29. dubna 2009 japonský profesor Daisuke Takahashi [19] vypočítal číslo π na 2 576 980 377 524 desetinných míst přesně pomocí počítače T2K Open Supercomputer, paměť tohoto superpočítače sahala až k 13,5 terabajtům.

Od prosince 2009 jsou hodnoty čísla π vypočteny na domácích počítačích a všechny záznamy jsou komerčně dostupné na internetových stránkách.

Jeden z posledních záznamů nekonečného čísla π z roku 2010 patří japonci Shigeru Kondo [19], který se za použití počítače Y-Cruncher dostal na 5 biliónů desetinných míst. Celkový čas je odhadován na 90 dní.

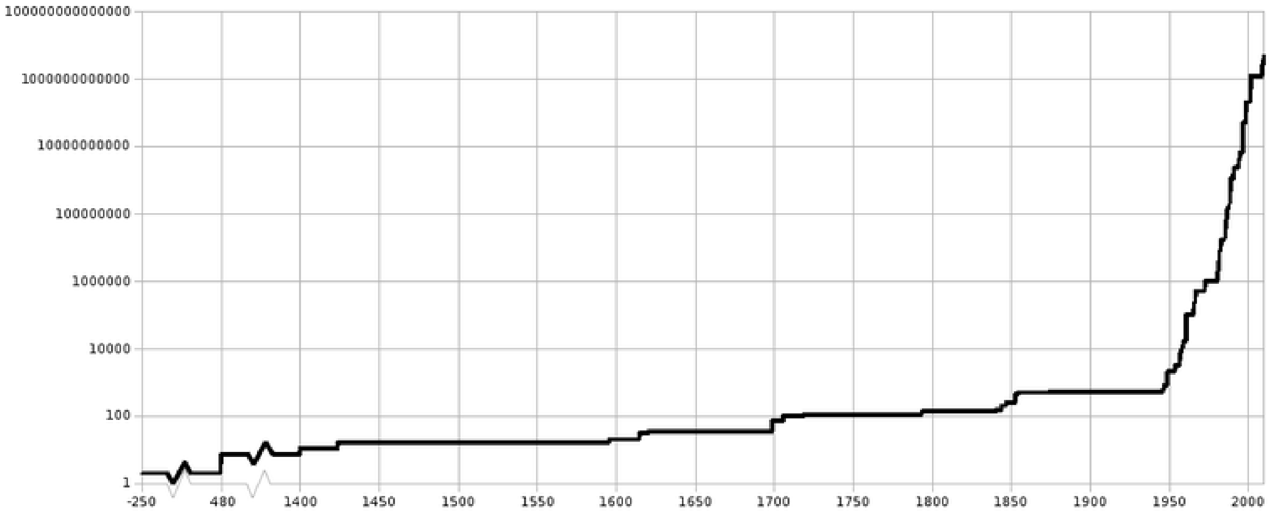
8 SHRNUTÍ

OBDOBÍ	UDÁLOST
cca 2000 před n. l.	Egypťané $\pi = 3{,}1605$
cca 2000 před n. l.	Babylóňané $\pi = 3{,}125$
130 n.l.	Čang Cchang $\pi = 3{,}162277$
250 n. l.	Wang Fang $\pi = 3{,}15555$
263 n. l.	Liou Huie $\pi = 3{,}14159$
3. století	Archimedes $\pi = 3{,}14163$
480 n. l.	Tsu Chung-Chih $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$
499 n. l.	Áryabhatta $\pi = 3{,}1416$
640 n. l.	Brahmagupta $\pi = 3{,}16227$
1150 n. l.	Bhaskara II $\pi = 3{,}14156$
1220	Fibonacci $\pi = 3{,}141818$
1400	Madhava ze Sangamagramy $\pi = 3{,}14159265358$
1593	Francois Viète vyjadřuje π jako nekonečný iracionální součin
1615	Ludolph van Ceulen počítá π na 35 desetinných míst
1671	Gregory objevuje řadu pro arkustangens
1687	Newton objevuje rychleji konvergující řadu, navazuje na Gregoryho
1706	Machin počítá π na 100 desetinných míst
1755	Euler velmi rychle konvergující řada, $\pi = 3{,}141592288$
1794	Vega počítá π na 140 desetinných míst
1768	Lambert dokazuje iracionalitu π
1840	Liouville dokazuje existenci transcendentních čísel
1873	Hermite dokazuje transcendenci e
1882	Lindemann dokazuje transcendenci π
1946	Ferguson publikuje 620 desetinných míst čísla π
1947	Ferguson počítá 808 desetinných míst pomocí stolního kalkulátoru
1949	ENIAC 2 037 desetinných míst/70 hodin
1955	NORC 3 089/13 minut
1957	Pegasus 10 021/33hodin
1958	IBN „704“ 10 000 desetinných míst/40 minut
1961	IBN „7090“ 20 000 desetinných míst/39 minut
1961	IBN „7090“ v IBN DPC 100 265míst/8 hodin 43 minut
1967	CDC „6600“ 500 000 desetinných míst/28 hodin 10 minut
1981 - 2002	Yasumasa Kanada, držitel 11-ti rekordů

29. dubna 2009	Daisuke Takahashi spočetl π na 2 576 980 377 524 desetinných míst
2010	Shigeru Kondo 5 biliónů desetinných míst

Rychlost vývoje hodnoty čísla π

Desetinná místa



Období

ZÁVĚR

Číslo π patří mezi nejdůležitější konstanty matematiky, už jen z toho důvodu, kolik velkých matematiků mu věnovalo během svého života pozornost.

Bylo velmi zajímavé sledovat vývoj tohoto čísla, někteří konstantě π věnovali celý svůj život.

Na počátku si všichni mysleli, že číslo π je spojeno pouze s geometrií, opak je však pravdou. V dnešní době není matematický obor, který by tuto konstantu nepoužíval. Objevuje se jak v geometrii, tak v algebře i analýze. A díky tomu se číslo π stává ještě důležitějším.

S nástupem moderních technologií se ukázalo, že číslo π se již neobjevuje pouze v matematickém světě. Lidé si často pokládají myšlenku, proč právě číslo π se počítá na tolik desetinných míst. V historii např. v 17. a 18. století to bylo spíše soupeřením a předháněním mezi matematiky. V dnešní době je jeden z důvodů testování. U nových počítačů se testuje, jestli počítají spolehlivě. Počítač je podroben testu, kdy spočítá několik desítek tisíc desetinných míst a výsledek se porovná se známými hodnotami. Pokud tyto hodnoty odpovídají, pak tento počítač vykonal miliony aritmetických operací bez chyby. Existují samozřejmě i jiné funkce, které bývají testovány.

Má práce obsahuje značně komplikované teorémy a důkazy, kterým jsem se snažila porozumět. Díky jejich složitosti jsem usilovala o jejich zjednodušení, aby byly lépe pochopitelné pro studenty bakalářského studia.

Není mnoho lidí, kteří si v dnešní době pamatují vzorce pro obvod a obsah různých geometrických útvarů, či hodnotu Eulerova čísla, ale 3,14 zná snad každý.

Byť se jedná o jednu z mnoha stálých veličin matematiky, je jasné, že číslo π vstoupilo do života každého z nás.

ZDROJE

[1] ACKROYD, Peter. *Newton*. Praha: Academia, 2010

[2] BECKMANN, Petr. *Historie čísla π*. Praha: Academia, 1998.

[3] BEČVÁŘ, Jindřich, ŠTOLL, Ivan. *Archimedes*. Praha: Prometheus, 2005.

[4] BEČVÁŘ, Jindřich, BEČVÁŘOVÁ, Martina, VYMAZALOVÁ Hana, *Dějiny matematiky: Matematika ve starověku, Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003.

[5] BEČVÁŘ, J., a kol. *Dějiny matematiky: Matematika ve středověké Evropě*. Praha: Prometheus, 2001.

[6] JUŠKEVIČ, P. Adolf. *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1977.

[7] KAGAN, V.F.. *Archimedes*. Praha: Orbis, 1955.

[8] KLAZAR, Martin. *Introduction to number theory*. Přednášky do Úvodu do teorie čísel. Praha: MFF UK, 1996. Dostupné na WWW: <http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/ln_utc.pdf>

[9] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968.

[10] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008.

[11] MAYER, Steve. *The transcendence of π*. University of Warwick, 2006. Dostupný na WWW: <http://sixthform.info/maths/files/pitrans.pdf>

[12] STRUIK, J. Dirk. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963.

[13] 27. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE. *Historie matematiky*. Velké Meziříčí, 25. 8. – 29. 8. 2006. Dostupný z WWW: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/sborniky/sbornik-27.pdf>

[14] Internetový portál Gap. *Francois Viete* [cit. 2011-2-11]. Dostupný na WWW: <http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Viete.html >

[15] Internetový portál Pi 314. *Francois Viete* [cit. 2011-2-11]. Dostupný na WWW: <http://www.pi314.net/eng/viete.php>

[16] Internetový portál Turnbull WWW server. *Ludolph van Ceulen* [2011-2-14]. Dostupný na WWW: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Van_Ceulen.html>

[17] Internetový portál Wikipedia of free encyclopedia. *James Gregory* [2011-2-18]. Dostupný na WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/James_Gregory_(mathematician)>

[18] Internetový portál Milan Milanovic. *Machin´s Formula* [2011-2-18]. Dostupný na WWW: <http://milan.milanovic.org/math/english/pi/machin.html>

[19] Internetový portál Wikipedia of free encyclopedia. *Chronology of computation of π* [2011-6-9]. Dostupný na WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_%CF%80>

[20] Internetový portál Wikipedia of free encyclopedia. *Proof that π is irrational* [2011-6-12]. Dostupný na WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational>

[21] Internetový portál Wikipedia of free encyclopedia. *Yasumasa Kanada* [2011-6-11] Dostupný na WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Yasumasa_Kanada>