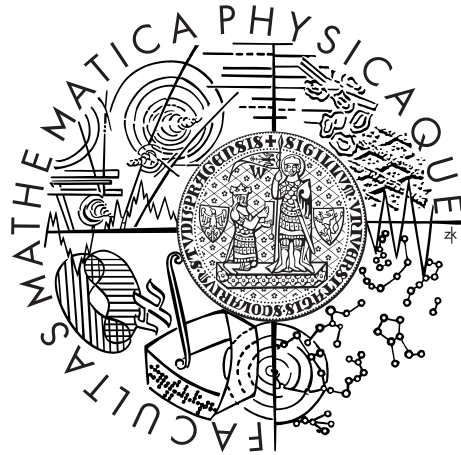


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Filip Přeučil

Principy detekce gravitačních vln

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2011

Na tomto místě bych rád poděkoval Mgr. Tomáši Ledvinkovi, Ph.D., za vedení práce, cenné rady a pohotovou pomoc.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 4. srpna 2011

Podpis autora

Název práce: Principy detekce gravitačních vln

Autor: Filip Přeučil

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.

Abstrakt: V předložené práci zkoumáme vliv slabé gravitační vlny v linearizované teorii gravitace na jednoduchý model interferometrického detektoru gravitačních vln, jehož jednotlivé části (zrcadla a elektromagnetické pole) jsou idealizovány volnými testovacími částicemi.

V nezbytném, spíše populárně pojatém, úvodu do gravitačních vln v linearizované gravitaci, pojednáváme o astrofyzikálních zdrojích gravitačních vln, možnostech jejich detekce a o principech detektorů gravitačních vln. V dalším shrnujeme matematicky potřebné partie obecné relativity a linearizované teorie gravitace a pak se již konečně věnujeme samotnému modelu. V lineárním řádu v perturbacích vyřešíme pohybové rovnice jednotlivých částí a odvodíme odezvu modelu detektoru na gravitační vlnu. Na konci výpočtu uvádíme pár poznámek, a to včetně důkazu kalibrační invariance odvozeného vzorce.

Klíčová slova: obecná relativita, linearizovaná gravitace, gravitační vlna, detekce gravitačních vln

Title: Principles of gravitational-wave detection

Author: Filip Přeučil

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.

Abstract: In the present work we investigate the impact of weak gravitational wave in the linearized theory of gravity on a simple model of an interferometric gravitational wave detector, whose individual parts (mirrors, and electromagnetic field) are idealised by free test particles.

After a necessary, fairly popularly conceived introduction to gravitational wave theory in the linearized gravity, the astrophysical sources of the gravitational waves, the possibilities of their detection and the principles of the detectors, we provide a mathematical survey of the indispensable parts of general relativity and of the linearized theory of gravity. After that, we finally deal with the model itself. In the linear approximation with respect to the perturbations, we solve the equations of motion of the individual components and derive the detector response to a gravitational wave. Finally, we present a few comments, including a proof of gauge invariance of the derived formula.

Keywords: general relativity, linearized gravity, gravitational wave, gravitational wave detection

Obsah

Úvod	2
1 Gravitační vlny	4
1.1 Základní představa a vlastnosti	4
1.2 Zdroje gravitačního záření	7
1.3 Detektory gravitačních vln	10
1.3.1 Rezonanční detektory	12
1.3.2 Interferometrické detektory	13
2 Obecná teorie relativity	19
2.1 Úvodní a historické poznámky	19
2.2 Prostorčas a metrika	19
2.3 Paralelní přenos a geodetiky	21
2.4 Křivost	23
2.5 Einsteinovy rovnice	24
2.6 Linearizovaná teorie gravitace	24
3 Model interferometrického detektoru	30
3.1 Úvodní slovo	30
3.2 Model	30
3.3 Pohybové rovnice	30
3.4 Christoffelovy symboly	34
3.5 Řešení pohybových rovnic	35
3.6 Podmínky na integrační konstanty	37
3.7 Poznámky a diskuze	39
Závěr	45
Seznam použité literatury	46

Úvod

Od okamžiku prvního vzhlednutí k noční obloze urazilo lidstvo ve vývoji techniky pro pozorování vesmíru pořádný kus cesty. Po mnohá tisíciletí sledovali lidé nebe prostýma očima bez pomoci dodatečných přístrojů. Vynález dalekohledu před zhruba čtyřmi sty lety sice situaci o něco zlepšil, nicméně mnohé, dnes již snadno pozorovatelné, kosmické jevy zůstaly člověku utajeny. Jak ale pokrok v optické astronomii pokračoval, vzniklo několik typů dalekohledů, konstrukce se zdokonalovaly a lidé viděli stále dál.

Průlom v pozorování kosmu způsobil objev elektromagnetických vln koncem 19. století. Teorie elektromagnetického pole do konečné podoby uvedena J. C. Maxwellem poskytla společně s experimentálními pracemi H. R. Hertze a mnoha jeho následovníků nástroje pro sledování vesmíru v do té doby neviditelné oblasti. Ve 20. století vznikla rádiová astronomie a později také astronomie infračervená, ultrafialová, rentgenová a gama. V dnešní době je možné přijímat a analyzovat vesmírné elektromagnetické záření mnoha vlnových délek, od velmi tvrdých gama fotonů o vlnové délce 10^{-24} m až po velmi dlouhé rádiové vlny s délkou 10^5 m.

Naslouchání z vesmíru přicházejícím elektromagnetickým vlnám je v současnosti vzhledem k obrovským vzdálenostem prakticky jediným možným způsobem, jak ho studovat. Během následujících deseti let je ale velmi pravděpodobné, že lidstvo bude schopné detekovat nový, zatím přímo nepozorovaný druh vlnění předpovězený Einsteinem přibližně před devadesáti lety. Jde o gravitační vlny. Vlnění, při kterém se vlní samotný prostor a čas.

Informace uložená v přichozím gravitačním záření je ve srovnání s tou, která je uložena v elektromagnetickém záření, do jisté míry odlišná a nová. Gravitační vlny by měly procházet oblastmi, kterými elektromagnetické vlny neprojdou. Měli by poskytnout nové poznatky o hvězdném kolapsu, černých dírách, neutronových hvězdách, explozích supernov a dalších tajemných objektech ve vesmíru. Mohou být užitečné i pro kosmology, neboť raná stádia vesmíru (před rekombinací, která nastala 380 000 let po velkém třesku) byla pro elektromagnetické záření neprůhledná. V neposlední řadě je přímé pozorování gravitačních vln dalším testem obecné relativity, protože umožňuje detailnější ozkoušení teorie.

V roce 1993 byla Hulsemu a Taylorovi udělena Nobelova cena za nepřímý důkaz existence gravitačních vln. Jejich objev binárního pulzaru v roce 1974 (nazván PSR B1913+16) a následná analýza zkracování oběžné periody ukázaly, že dvojhvězda ztrácí energii gravitačním vyzařováním přesně podle Einsteinovy kvadrupólové formule (zveřejněné 1916). Snad je jen otázkou času, kdy budou gravitační vlny pozorovány přímo na některém z pozemských či vesmírných detektorů.

V této práci uvedeme základní poznatky o gravitačních vlnách, jejich astrofyzikálních zdrojích a možnostech jejich detekce a pozorování lidmi na Zemi a ve vesmíru. To je obsahem Kapitoly 1, která byla zpracována podle [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] a [8].

Kapitola 2 shrne Einsteinovu teorii gravitace (obecnou relativitu) a linearizovanou teorii gravitace, a to včetně matematické formulace. Kapitola byla napsána především s použitím [8] a doplněna s pomocí [9]. Úvodní část byla čerpána z [10].

Obě tyto kapitoly mají rešeršní charakter. V Kapitole 3 bude studován velmi

jednoduchý model interferometrického detektoru gravitačních vln ve větší hloubce
jakožto původní práce.

1. Gravitační vlny

1.1 Základní představa a vlastnosti

V závěru roku 1915 uveřejnil Albert Einstein svoji teorii gravitace – obecnou relativitu, která měla nahradit v podmínkách naší sluneční soustavy velmi dobře ověřenou (až na pár výjimek, o kterých se zmíníme později) a použitelnou teorii Newtonovu. Podrobněji o obecné relativitě pojednáme v následující kapitole.

Podle Alberta Einsteina je gravitace důsledek zakřivení prostoru a času (prostor času). Ono zakřivení je zase způsobeno přítomností jakékoliv formy hmoty, resp. energie (přesněji i jejich toků, přispívá také tlak, jakožto tok hybnosti). Newtonovský pojem gravitační síly není v obecné relativitě vůbec potřebný – tělesa se pohybují v gravitačním poli po zakřivených drahách, jelikož prostorové (a časové) podloží samotné je pokriveno. Šikovně to vystihl J.A.Wheeler: „Hmotata říká prostoru, jak se má zakřivovat, a prostor říká hmotě, jak se v něm má pohybovat.“

Prostor času lze připodobnit (alespoň částečně) elastické membráně (například povrchu trampolíny), která se může různě prohýbat a deformovat. Těleso hozené na membránu okolo sebe vytvoří prohlubeň, do které budou mít jiná blízká tělesa tendenci spadnout.

Gravitační vlny jakožto vlnové stavy prostoročasu si pak lze představit jako vlnky, které se šíří po povrchu uvažované membrány. Mohou být vyvolané například určitými pohyby těles po membráně. Bude-li se, řekněme, těleso působením vnější síly pohybovat periodicky sem a tam, po membráně se budou určitou rychlostí šířit rozruchy tvořené „kopci“ a „jamkami“. Na membráně rozložená testovací tělesa budou na tyto vlnivé změny podložky reagovat – budou se takřikajíc „houpat na vlnách“.

U skutečných gravitačních vln je to velmi podobné. Změna zakřivení prostoročasu v daném místě (například při výbuchu supernovy) vyvolá vzruch v křivosti, který se všemi směry šíří od zdroje (z teorie mimochodem plyne, že nejvyšší možnou rychlostí – rychlostí světla).

Průchozí gravitační vlna se pak projevuje časově závislými slapovými silami, které udělují blízkým objektům (například shluku stejných částic) vzájemná relativní zrychlení. Pravidelná periodická vlna bude zřejmě způsobovat pravidelné periodické pohyby částic. Později se k tomu dostaneme podrobněji.

Jak již bylo řečeno, prostoročas se podobá elastickému kontinuu. Vazba mezi mírou jeho deformace a množstvím hmoty, které tuto deformaci způsobuje, je vystižena Einsteinovým gravitačním zákonem

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}, \quad (1.1)$$

kde nalevo stojí Einsteinův tenzor \mathbf{G} (míra deformace-zakřivení prostoročasu) a napravo tenzor energie-hybnosti \mathbf{T} nesoucí informaci o rozložení hmoty. Konstanta úměry $8\pi G/c^4$ je v jednotkách SI, jednotkách, které jsou velmi blízké každodenní zkušenosti, nesmírně malá – řádově $10^{-43} \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2$. Právě proto je v podmínkách, které nejsou nijak extrémní, Newtonova teorie gravitace dobrým přiblížením, neboť newtonovský prostoročas je nedeformovatelný (což by odpovídalo nulové konstantě úměry). V Newtonově teorii gravitační vlny neexistují,

neboť by se šířily nekonečně rychle a přenášely by nekonečnou energii. Z extrémní tuhosti prostoročasu také plyne, že gravitační vlny mají velmi malou amplitudu, i když přenášená energie může být relativně velká.

Řadu vlastností gravitačních vln lze uhodnout bez znalosti obecné relativity pouze s využitím intuice, kterou máme z Newtonovy teorie a elektrodynamiky. Newtonova teorie totiž silně připomíná elektrostatiku, jak je vidět z polních rovnic obou teorií, resp. z formální shody Coulombova a Newtonova gravitačního zákona. Je tedy na místě předpokládat, že existuje určité dynamické rozšíření statické teorie Newtonovy, ve kterém gravitační vlny (jakožto dynamický jev) existují.

Je třeba podotknout, že se budeme zabývat především nekonečně slabými gravitačními vlnami, tj. vlnami v linearizované teorii gravitace. Obecná relativita je silně nelineární polní teorií, neplatí princip superpozice, což mimo jiné znamená, že zdroje působí samy na sebe a že dochází k rozptylu vlny na vlně. Tento efekt v klasické elektrodynamice neexistuje, neboť ta je teorií lineární. Rovnice obecné relativity je ale možné linearizovat, tzn. pracovat pouze s nekonečně malými zakřiveními prostoročasu, nekonečně malými perturbacemi ploché geometrie (slabými gravitačními poli) a v rovnicích zanedbat členy vyššího řádu, tj. kvadratické a vyšší v perturbacích. Pak již je teorie lineární a velmi podobná elektrodynamice. Z praktického hlediska má toto přiblížení své opodstatnění, neboť vlny, které dorazí z vesmíru k Zemi, jsou velice slabé, jejich amplituda je okolo $h \sim 10^{-21}$.

Z analogie mezi gravitací a elektromagnetismem například vidíme, že podobně jako v elektromagnetismu neexistují sférické (monopólové) elektromagnetické vlny (v důsledku platnosti Gaussovy věty), neexistují ani sférické vlny gravitační, neboť pole sféricky symetrického zdroje nezávisí na rozložení hmoty zdroje. Závisí pouze na celkové hmotnosti, která se zachovává. Sféricky kolabující nebo vybuchující hvězda tak gravitační vlny neemituje. Toto platí i v obecné relativitě díky Birkhoffovu teorému¹. Uvažujeme samozřejmě vlny ve vakuu.

Na rozdíl od elektromagnetismu ale neexistují ani dipólové gravitační vlny. Celkový výkon vyzařovaný elektrickým dipólem je totiž úměrný druhé mocnině druhé časové derivace dipólového momentu

$$L_{\text{dip.}} \propto (\ddot{\mathbf{P}})^2. \quad (1.2)$$

Dipólový moment \mathbf{P} soustavy nábojů je

$$\mathbf{P} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i. \quad (1.3)$$

V případě gravitace je ale v důsledku principu ekvivalence náboj (gravitační náboj) totéž co setrvačná hmotnost. Pro izolovaný zdroj pak platí

$$\ddot{\mathbf{P}} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (1.4)$$

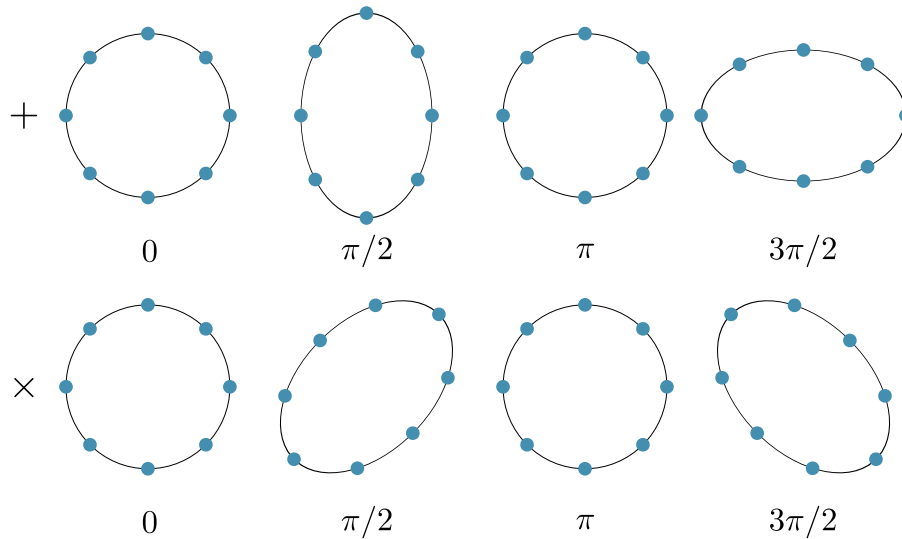
díky zachování celkové hybnosti. Čili vyzařovaný výkon je nulový. Podobně nejsou vyzařovány ani vlny analogické vlnám zářícího magnetického dipólu, neboť u izolovaného zdroje se kromě hybnosti zachovává také moment hybnosti. Nejjednodušší vyzařované gravitační vlny tak mají kvadrupólový charakter. Vyšší multipóly se pochopitelně také uplatňují, nicméně kvadrupólový příspěvek je dominantní.

¹Který říká, že každé vakuové, asymptoticky ploché, sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic musí být částí řešení Schwarzschildova, tedy statické.

Pojednejme teď o působení rovinné gravitační vlny na testovací částice. Uvažujme kruh bodových testovacích částic umístěných v rovině (viz Obrázek 1.1). Na rozdíl od elektromagnetické vlny, u které se mluví o rovině polarizace, je u gravitační vlny lepší hovořit o polarizační „dvojrovině“, resp. polarizačním „kříži“, tj. o dvou na sebe kolmých rovinách, rovnoběžných se směrem šíření, které vystihují „natočení“ vlny. Lineárně polarizovaná vlna bude způsobovat deformace tohoto kruhu částic do elips orientovaných podél polarizačního kříže. Harmonická vlna polarizovaná lineárně ve vertikálně-horizontálním směru se tedy bude projevovat střídavým smršťováním a natahováním kruhu částic do elipsy ve vertikálním a horizontálním směru. Tento typ lineární polarizace můžeme označit jako $+$. K ní existuje druhá nezávislá lineární polarizace, která je otočená o 45° stupňů (nikoliv o 90° jako je tomu u vlny elektromagnetické, což souvisí s tím, že gravitační pole má helicitu dvě a elektromagnetické jedna). Označme ji \times . Působení obou polarizací na kruh částic je zachyceno na Obrázku 1.1 v závislosti na fázi vlny.

Složením těchto dvou polarizací s různým vzájemným fázovým posunem a různými amplitudami dostaneme různé eliptické polarizace. Například pro vzájemný fázový posuv $\pm\pi/2$ a stejné amplitudy získáme složením polarizaci kruhovou (pravotočivou nebo levotočivou). Té odpovídá trvalá deformace kruhu částic na neměnnou elipsu, která se zdánlivě otáčí (doprava či doleva).

Na tuhá tělesa nebo tekutiny gravitační vlny působí stejně, neboť tuhost obyčejných látek je tak malá, že je zanedbatelná proti tuhosti prostoročasu. Uvedené



Obrázek 1.1: Znázornění působení kolmo dopadající lineárně polarizované gravitační vlny na kruh testovacích částic v závislosti na fázi vlny pro dvě různé lineární polarizace $+$ a \times .

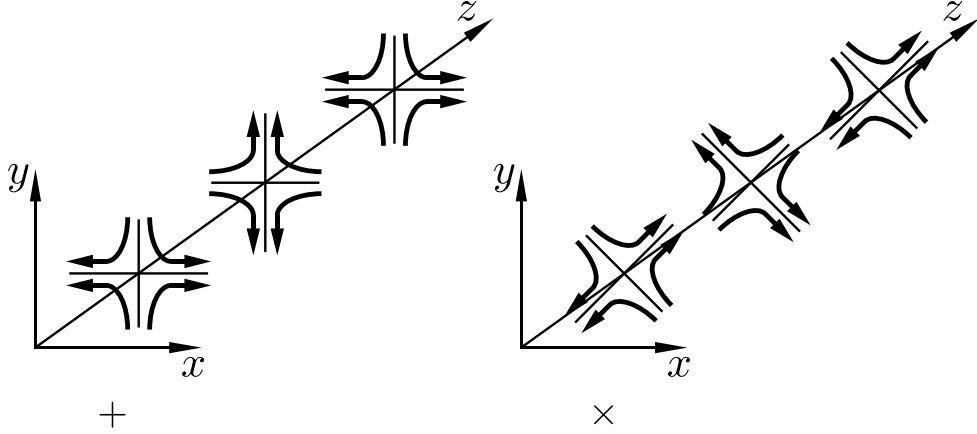
pohyby jsou velmi podobné gravitačním slapovým účinkům Měsíce na Zemi, neboť na gravitační vlnu lze pohlížet jako na vlnu časově závislých slapových sil, jak již bylo řečeno. Siločáry těchto efektivních sil jsou pro obě lineární polarizace vlny šířící se podél osy z schematicky zakresleny na Obrázku 1.2. Jejich tvar je typický pro kvadrupólové pole, čímž se naše představy o kvadrupólovém charakteru gravitačních vln utvrzují.

Amplitudu gravitační vlny (většinou se značí h) lze definovat jako relativní změnu vzdálenosti mezi testovacími objekty (resp. relativní deformaci), kterou

vlna svým průchodem vyvolává. Čili

$$h \sim \frac{\delta \ell}{\ell}, \quad (1.5)$$

kde ℓ je vzdálenost v rovnováze (bez přítomnosti vlny) a $\delta \ell$ je absolutní změna vzdálenosti. Později z řádových odhadů uvidíme, že amplituda vln zachytitelných zde na Zemi je ve skutečnosti velmi malá, okolo $h \sim 10^{-21}$.



Obrázek 1.2: Siločáry efektivních slapových sil lineárně polarizované gravitační vlny. Gravitační vlna způsobuje vzájemná časově závislá posunutí testovacích objektů, což si lze představit tak, že na objekty působí obyčejné newtonovské (slapové) síly. Na tomto obrázku vidíme (v závislosti na čase) jejich siločáry, a to pro dvě různé lineární polarizace vlny + a \times . Zdroj: [1]

1.2 Zdroje gravitačního záření

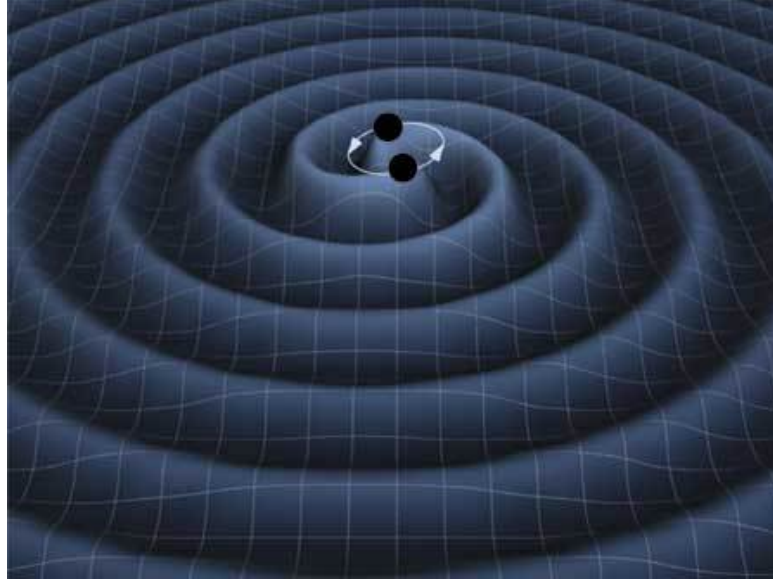
Nyní se dostáváme k problému generace vln pohybující se hmotou. Jak jsme viděli, nejjednodušší gravitační záření je v důsledku zachování celkové hmotnosti, hybnosti a momentu hybnosti kvadrupólové povahy. V určité analogii se vzorcem pro elektromagnetické dipólové záření celkový výkon vyzařovaný zdrojem (luminozita) závisí na druhé mocnině třetí (nikoliv druhé) časové derivace kvadrupólového momentu a na příslušné převodní konstantě, která může být funkcí jen fundamentálních konstant G a c . Z rozměrových důvodů musí být rovna G/c^5 . Platí tedy

$$L \sim \frac{G}{c^5} \left(\frac{d^3 D}{dt^3} \right)^2. \quad (1.6)$$

Až na numerický prefaktor je (1.6) Einsteinova kvadrupólová formule.

Odtud můžeme odvodit dva přibližné vzorce. Pro dvě tělesa o hmotě m vzdálená x je kvadrupólový moment $D \sim mx^2$. Pokud x závisí na čase harmonicky s amplitudou ℓ a úhlovou frekvencí ω , pak pro luminozitu dostaneme

$$L \sim \frac{G}{c^5} m^2 \ell^4 \omega^6. \quad (1.7)$$



Obrázek 1.3: Umělecké znázornění vln emitovaných dvojicí černých děr. Prostoročas lze připodobnit elastické membráně, která se může různě prohýbat a deformovat vlivem přítomné hmoty a také se v ní mohou šířit vlny, které jsou vyvolané asymetrickými pohyby oné hmoty, jak vidíme očima umělce zde u dvojice kolem sebe obíhajících černých děr. Zdroj: NASA

Vzhledem k přítomnosti extrémně malé konstanty G/c^5 je pro jakýkoliv terestrický zdroj (například dvě závaží spojená pružinou nebo rotující činka) celkový výkon zanedbatelný. Situace se ale mění v astrofyzikálním kontextu.

Uvažujme binární systém, tj. dvě tělesa vázaná gravitačně a taková, že jejich rychlosti se blíží rychlosti světla a jejich rozměry se blíží Schwarzschildovu poloměru. Jinými slovy například pár blízkých černých děr. Ve vztahu (1.7) nahradíme ω pomocí $v \sim \ell\omega$, kde v je rychlost, a hmotu m vyměňme za Schwarzschildův poloměr dle $r_{\text{Sch.}} \sim Gm/c^2$. Tím dostaneme

$$L \sim \frac{c^5}{G} \left(\frac{r_{\text{Sch.}}}{\ell} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6. \quad (1.8)$$

Mezi (1.7) a (1.8) je patrný propastný rozdíl, který vystihuje odlišnost mezi gravitační fyzikou obyčejné hmoty a fyzikou černých děr. Zatímco první formule je škálována drobným faktorem G/c^5 , druhá jeho enormní převrácenou hodnotou. Tento rozdíl je pochopitelně vysvětlitelný tím, že obyčejná hmota prostoročas deformuje jen málo, kdežto černé díry velice drasticky. Proto zdroje tvořené normální hmotou generují jen velmi slabé vlny, zatímco události, jako jsou například srážky (splnutí) černých děr, generují poměrně silné vlny.

V námi uvažovaném případě binárního systému černých děr můžeme předpokládat, že ve finálním stádiu jsou obě závorčky v (1.8) řádově rovny jedné a luminozita tak vychází přímo $L \sim c^5/G$. Numericky je tato konstanta (nazývaná též planckovský výkon) rovna $c^5/G = 3,62 \times 10^{52}$ W a je přibližně rovna odhadované elektromagnetické luminozitě vesmíru jako celku. Toto je současně horní odhad gravitační luminozity černoděrových systémů. Ve skutečnosti (1.8) nebere v úvahu různé efekty zakřivení prostoročasu (například gravitační rudý posuv vln), které luminozitu poněkud snižují. Nicméně alespoň řádově odtud vidíme, jak obrovská zářivost může být očekávána u silně gravitujících systémů, jako jsou

zmíněné systémy černých děr (rychlost $v \sim c$) a neutronových hvězd (rychlost $v \sim 0,1c$).

Pokusme se teď napsat nějaké odhady amplitudy vln. Uvažujme srážku dvou těles, která vede ke vzniku černé díry. V okamžiku srážky je prostoročas pokriven velmi výrazně a současně je nepravděpodobné, že by dynamická část zakřivení, která se později stane odchozí vlnou, byla větší než statická část zakřivení kolem vzniklé černé díry. Světlo v dostatečné blízkosti černé díry je nuceno obíhat dokola. Jeho dráha je tak při oběhu po polokružnici $\pi/2$ -krát delší, než by byla přímá dráha (mezi stejnými dvěma body) v nepřítomnosti černé díry. Z toho můžeme usoudit, že $\delta\ell \sim \ell$ a amplituda vlny v bezprostřední blízkosti je tedy řádově nanejvýš $\delta\ell/\ell \sim 1$. Poněvadž energetický tok vln je kvadratický v amplitudě a ubývá jako $1/r^2$ (analogicky s elektromagnetizmem), amplituda ubývá jako $1/r$. Z toho můžeme odhadnout

$$h \sim \frac{\varepsilon r_{\text{Sch.}}}{r} \sim \frac{G \varepsilon M}{c^2 r} \sim \frac{G E_{\text{kin.}}^{\text{nesym.}}}{c^4 r}, \quad (1.9)$$

kde ε je parametr ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) charakterizující to, že u realistických zdrojů bude jen určitá část $E_{\text{kin.}}^{\text{nesym.}}$ celkové energie přeměněna na gravitační záření (měří vlastně nakolik je pohyb asymetrický). Například pro $M = 10M_{\odot}$, $r = 8$ kpc (vzdálenost centra Mléčné dráhy) a $\varepsilon = 1$ dostaneme $h \sim 10^{-16}$, zatímco pro $M = 10^9 M_{\odot}$, $r = 3$ Gpc (okraj pozorovatelného vesmíru) a $\varepsilon = 1$ máme $h \sim 10^{-13}$.

Uvedme ještě výraz pro energetický tok gravitačního záření

$$S \sim \frac{c^3}{G} \omega^2 h^2. \quad (1.10)$$

Například pro kolaps jádra supernovy na černou díru o hmotě $M = 10M_{\odot}$ ve vzdálenosti $r = 15$ Mpc (vzdálenost kupy galaxií v Panně) dostaneme podle předchozí formule pro $\varepsilon = 1$ odhad amplitudy $h \sim 10^{-20}$. Ve skutečnosti je při přesnějším odhadu amplituda ještě o dva řády menší (tedy, že $\varepsilon = 0.01$). Energetický tok pak pro frekvenci $\omega \sim 1$ kHz vychází $S \sim 3$ erg cm⁻² s⁻¹, což je asi o deset řádů více, než je typický elektromagnetický energetický tok.

Nyní pohovořme přehledově o typech astrofyzikálních zdrojů. Základní odlišností gravitačních vln od elektromagnetických je, že jsou generovány urychlenými masivními objekty, kdežto většina elektromagnetického záření ve vesmíru pochází z excitovaných atomů a molekul. Astrofyzikální zdroje můžeme přirozeně rozdělit do tří kategorií.

První kategorií jsou širokopásmové zdroje (katastrofické pulzy). Patří sem hlavně finální srážky v těsných binárních systémech a formace neutronových hvězd, popřípadě černých děr, či výbuchy supernov. Těsné binární systémy mohou být tvořeny dvojicí černých děr, dvojicí neutronových hvězd nebo párem černá díra-neutronová hvězda. Signál z takovýchto událostí má charakter nepravidelného krátkého pulzu, nanejvýš několika pulzů, z čehož plyne, že jeho frekvenční rozsah je široký. Frekvenčně tato kategorie typicky spadá do audio pásma (~ 10 Hz až 1 kHz). Amplitudy se pohybují okolo $h \sim 10^{-18}$ (výbuch supernovy v naší Galaxii) až po $h \sim 10^{-21}$ (supernova v kupě galaxií v Panně). Výbuch supernovy v Mléčné dráze patří mezi nejsilnější dostupné zdroje, nicméně exploze jsou bohužel velmi vzácné – zhruba jednou za 30 let.

Druhá kategorie je opakem té první, řadíme sem zdroje úzkopásmové. Jedná se především o rotující nesférické hvězdy, konkrétně o pulzary a akreující neutronové hvězdy a o (těsné ale i netěsné) binární systémy daleko od závěrečné fáze a srážky (splnutí). Všechny tyto systémy jsou ze své podstaty kvaziperiodické, neboť ztráta energie vyzařováním gravitačních vln nutně vyvolává změnu periody. U binárních systému s postupem času perioda klesá (a amplituda roste, tvar signálu se potom označuje jako tzv. chirp), kdežto u nesférických hvězd naopak roste (rotace se zpomaluje). U binárních systému také dochází k postupnému zmenšování excentricity, až jsou i původně velmi výstředné dráhy nakonec v podstatě kruhové. Signál je také ovlivněn Dopplerovým posuvem, který je způsoben pohybem částí zdroje a také pohybem Země. Zdroje z této kategorie jsou obecně slabší než zdroje z první kategorie, ale jejich kvaziperiodičnost je činí (na rozdíl od těch širokopásmových) v principu přístupnými dlouhodobé integraci za účelem extrakce čistého signálu z šumu. Frekvence signálu se pro binární systémy pohybují okolo 10^{-4} Hz až 10^{-1} Hz v závislosti na jejich parametrech. V pozdějších fázích těsného binárního systému se pak dostává do zmiňovaného audio pásma. Pro rotující neutronové hvězdy frekvence též spadají do audio pásma (1 kHz).

Poslední kategorii tvoří stochastické pozadí, které je produkováno velkým množstvím slabých (kvazi)periodických zdrojů v Mléčné dráze a také množstvím velmi vzdálených pulzních zdrojů (první kategorie). Přispívat též bude záření kosmologického původu z počátku vesmíru (gravitační reliktní záření), které bude natažené kosmologickým rudým posuvem. Stochastické pozadí je obtížně detekovatelné jedním detektorem, protože je prakticky nerozeznatelné od šumu v aparatuře. Pro neizotropní zdroj by ho ale bylo možné detekovat pozorováním změn šumu v aparatuře, které by byly způsobeny rotací Země. Jednodušší je však samozřejmě použít více nezávislých detektorů a pozorovat jejich korelace.

Ještě můžeme uvést supermasivní (milióny slunečních hmot) černé díry, kde vyzařování vln je způsobeno pádem menšího objektu (například hvězdy) do díry. Obvykle je frekvence v milihertzovém pásmu.

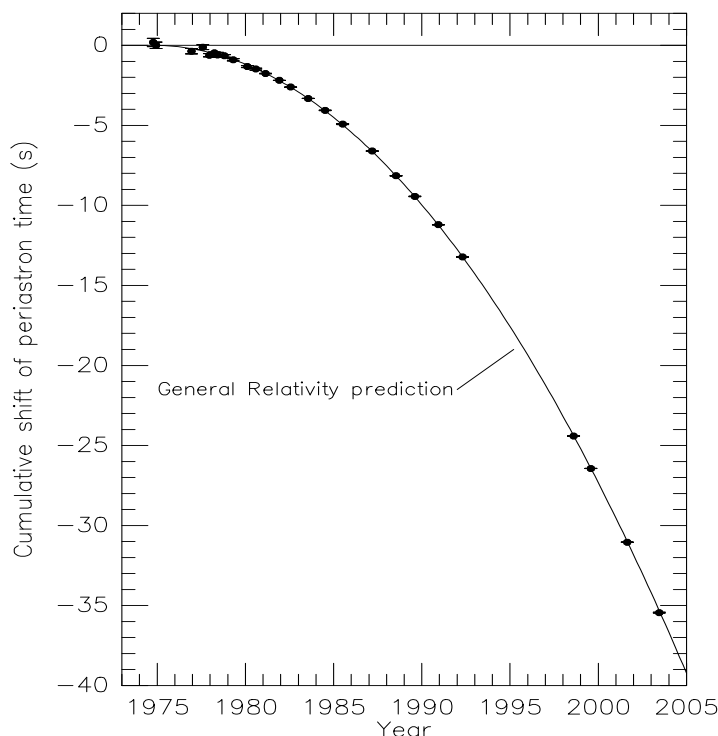
Excitované černé díry (například nově vzniklé slitím dvou menších černých děr) také mohou tlumeně vibrovat „zvonit“. Frekvence těchto oscilací klesají s rostoucí hmotou černé díry. Pro stelární (z hvězd vzniklé) černé díry je tato frekvence několik

V závěru krátce řekněme něco o Hulse-Taylorové nobelovském binárním pulzaru PSR B1913+16. Je to pulzar, který ještě s další neutronovou hvězdou tvoří binární systém. Byl objeven v roce 1974 pomocí velké talířové antény v Arecibu.

Signál pulzaru je modulován oběhem kolem druhé hvězdy. Obě hvězdy mají hmotnost přibližně jako Slunce ($M \approx 1,4M_{\odot}$) a obíhají velmi blízko sebe (řádově ve vzdálenosti 1 milion kilometrů) po excentrických drahách. Dlouhodobým měřením se zjistilo, že perioda systému se v tuto chvíli zkracuje zhruba o hodnotu 76 ms za rok, což je s přesností lepší než 1% hodnota, kterou předpovídá kvadrupólová formule (viz Obrázek 1.4). Předpokládá se, že ke srážce dojde za 300 milionů let.

1.3 Detektory gravitačních vln

Počátky detekce gravitačních vln se datují k 60. létům 20. století a pracím Josepha Webera. Weber měl v úmyslu použít k detekci soustavu masivních hliníkových

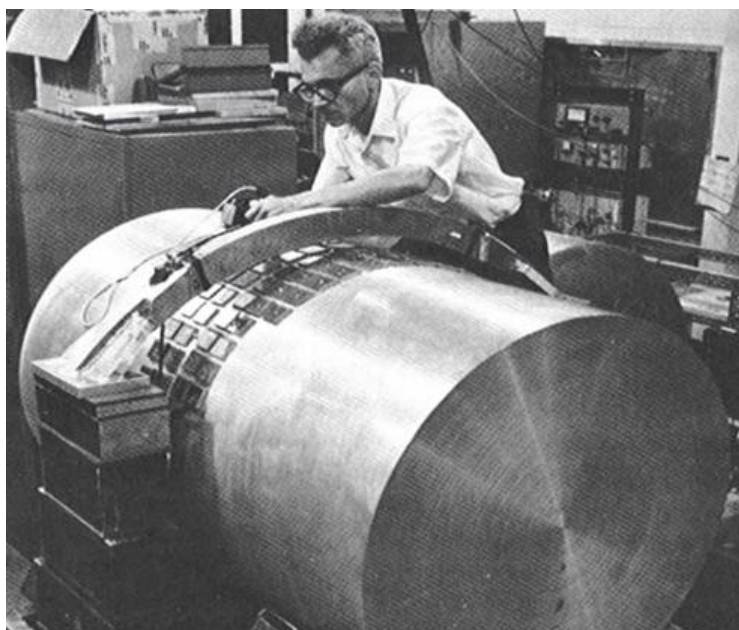


Obrázek 1.4: Zkracování oběžné periody binárního pulzaru PSR B1913+16. Binární pulzar PSR B1913+16 je tvořen dvojicí neutronových hvězd, z nichž jedna je pulzarem, který ozařuje Zemi. Vlivem vyzařování gravitačních vln systém ztrácí svoji energii, obě hvězdy se k sobě přibližují a oběžná perioda se zkracuje. Postupné zkracování periody oběhu je na grafu znázorněno vykreslením rozdílu mezi skutečnou dobou pozorování periastra pulzaru a hodnotou odpovídající neměnné periodě oběhu. Kvadratická závislost svědčí o zrychleném ději. Toto zkracování periody lze vypočítat ze změn v signálu pulzaru a současně je teoreticky předpověditelné obecnou relativitou. Pulzar byl objeven v roce 1974 Hulsem a Taylorem pomocí velké talířové antény v Arecibu. Hulse a Taylor pak za svůj objev a následnou analýzu získali v roce 1993 Nobelovu cenu. Zdroj: [11]

válců (dva metry vysokých, metrových v průměru, vážících až dvě tuny) fungujících jako rezonátory, které by byly umístěny na různých místech světa, aby byly vyloučeny lokální vlivy. Údajně se mu podařilo vlny detekovat již tehdy, nicméně mnohokrát opakované pokusy vždy končily nulovým výsledkem. Nicméně od té doby se citlivost rezonančních detektorů stále zvyšuje a vznikají nová vylepšení obohacující i jiné obory (různé kryogenní systémy, nízkošumové snímače, elektronika).

Současně je také rozvíjena myšlenka detektorů interferometrického typu. Tento typ by měl mít mnohem větší šanci na úspěch, neboť je citlivější a má širší pásmo citlivosti. Dnes již stojí řada pozemských interferometrů a také se uvažuje o stavbě vesmírného interferometru, který bude tvořen soustavou družic.

Spektrum frekvencí pozorovatelných gravitačních vln je velmi široké. Jednotlivé typy detektorů jsou vhodné jen pro určitá frekvenční pásma. Audio pásmo okolo 1 kHz (supernovy a rotující neutronové hvězdy) je doménou zmíněných kryogenních rezonančních detektorů. Začátek audio pásma, tj. 10 Hz až 1 kHz, (konečné srážky a splynutí v těsných binárních systémech), je vhodný pro pozemské interferometry. Frekvence 10^{-4} Hz až 10^{-1} Hz (binární hvězdy a supermasivní černé díry) jsou vhodné pro vesmírný interferometr. Ještě menší frekvence, rádo-



Obrázek 1.5: J. Weber s jedním ze svých detektorů. Weberův detektor gravitačních vln byl tvořen hliníkovým válcem, který měl být na své rezonanční frekvenci rozechvíván průchozí gravitační vlnou. Na válci byly připevněny piezoelektrické snímače, které měly vzniklé vibrace detekovat. Na začátku 70. let Weber ohlásil, že gravitační vlny detekoval, nicméně mnohokrát opakované pokusy vždy končily nulovým výsledkem. Pokud by ale vlny skutečně detekoval, musely by mít (vzhledem k citlivosti Weberova detektoru) amplitudu $h \sim 10^{-16}$, tedy amplitudu stokrát větší, než je amplituda vln pocházejících z předpokládaných nejsilnějších zdrojů – z výbuchů supernov v Mléčné dráze. Zdroj: MIT

vě 10^{-9} Hz (což odpovídá vlnové délce 10 pc), primordiálního a jiného (kosmické struny) původu nelze detekovat detektory. Uvažuje se ale o přesném sledování period milisekundových pulzarů, na kterých by se měly průchozí vlny projevit. Úplně nejmenší frekvence kosmologického původu (vlny vyvolané velkým třeskem) by se měly projevit anizotropií mikrovlnného reliktního záření.

1.3.1 Rezonanční detektory

Idea rezonančního detektoru je založena na rozkmitávání částí detektoru vlnou. Jak jsme viděli na začátku kapitoly, prochází-li vlna testovacími objekty, způsobuje jejich vzájemný posuv. Změříme-li nějak tento posuv, změříme tak vlastně vlnu samotnou. Problém ale je, že relativní velikost toho posuvu je neuvěřitelně malá – odpovídá amplitudě vlny, která je typicky okolo $h \sim 10^{-20}$. To odpovídá zvětšení vzdálenosti Země od Slunce o rozměr jediného atomu. Takto malé vzdálenosti si žádají použití kvantové mechaniky, přinejmenším relací neurčitosti, a to i přesto, že zde pracujeme s klasickou teorií.

Detektor může být zkonstruován například ze dvou závaží, která jsou zavěšená jako kyvadla. Vůči kmitavým pohybům s řádově větší frekvencí (které jsou způsobené vlnou), než je rezonanční frekvence kyvadel, se budou závaží chovat jako volná, tj. budou podrobena pouze účinkům vlny (tj. jejich pohyb se bude řídit rovnicí geodetiky).

Vylepšením je propojení závaží pružinou. Vzniklý mechanický oscilátor bude rozkmitáván vlnou, pokud bude na vlnu správně naladěn, tj. ve spektru vlny bude

obsažena jeho rezonanční frekvence. Pokud bude tento oscilátor vysoce jakostní, tedy že bude docházet k malému útlumu, může kmitat dlouho potom, co jím vlna prošla. To znamená, že zde existuje jakýsi paměťový efekt. Změřením těchto jeho oscilací získáme alespoň částečnou informaci o prošlé vlně.

Rezonátorem nemusí být nutně závaží spojená pružinou, může jím být například kus kovu, nejčastěji ve tvaru válce. Výhodou je, že válec má oproti pružině bohatěji zastoupeny vyšší rezonanční módy.

Jednou nevýhodou rezonančních detektorů je jejich poměrně úzké detekční pásmo, což je dáno jejich podstatou - jsou to buzené oscilátory a jejich odezva je dána rezonanční křivkou. Interferometrické detektory tímto neduhem netrpí.

Hlavním faktorem, který ovlivňuje citlivost rezonančního detektoru, je tepelný šum (Brownův pohyb) v kovovém válci samotném. Aby detektor vlny vůbec detekoval, měla by být energie, kterou vlny odevzdají detektoru za jednotku času, větší než charakteristická energie tepelných fluktuací kT . Z tohoto požadavku lze odvodit [2] hrubý odhad nejmenší možné detekovatelné amplitudy vln

$$h_{\min.} \sim \frac{1}{\omega_0 Q L} \sqrt{\frac{15kT}{M}}, \quad (1.11)$$

kde ω_0 je rezonanční frekvence, Q je činitel jakosti, L je rozměr detektoru a M jeho hmotnost. Pro Weberův detektor dostaneme odhad $h_{\min.} \sim 10^{-20}$. Současný detektor je proto tvořen vysokojakostním válcem ochlazeným na několik kelvinů (případně dokonce až milikelvinů), který je zavěšen ve vakuu. Například italský detektor NAUTILUS ve Frascati (pravděpodobně nejlepší existující) je ochlazen na 0,1 K a jeho parametry jsou $L = 3$ m, $Q \approx 4 \times 10^7$, $\omega_0 = 908$ Hz a $M = 2260$ kg.

Přes všechnu úžasnou technologii jsou ale rezonanční detektory zatím citlivé jen na ty nejsilnější signály vůbec – vzácné výbuchy supernov v Mléčné dráze.

1.3.2 Interferometrické detektory

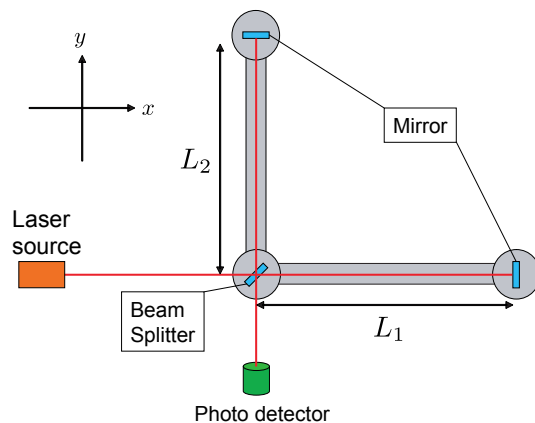
Základní princip interferometrického detektoru je prostý. Popíšeme interferometr Michelsonova typu, jehož schéma vidíme na Obrázku 1.6. Detektor sestává ze dvou ramen (o délkách L_1 a L_2) zakončených zrcadly a děliče svazků (beam splitteru). Zrcadla i dělič jsou zavěšeny pomocí kyvadlových závěsů, které zajišťují jejich volný pohyb. Svazek z laseru je rozdělen děličem na dva. Každý ze svazků je poslán do samostatného ramena, kde se odráží od koncového zrcadla a vrací ramenem zpět. Dělič svazku oba svazky zase složí dohromady a pomocí fotodetektoru se pozoruje, jak spolu svazky interferují.

Procházející gravitační vlna s lineární polarizací + (tj. podél os x a y) a amplitudou h dopadající kolmo na rovinu detektoru způsobí změnu délky jednoho ramena (pro jednoduchost uvažujme stejně dlouhá ramena) o

$$\delta L \sim \frac{hL}{2} \quad (1.12)$$

a opačnou změnu délky u druhého ramena ($1/2$ pochází z přesnějšího výpočtu). Jinými slovy, jedno rameno se prodlouží, druhé zkrátí. Celkový relativní rozdíl délek obou ramen pak bude

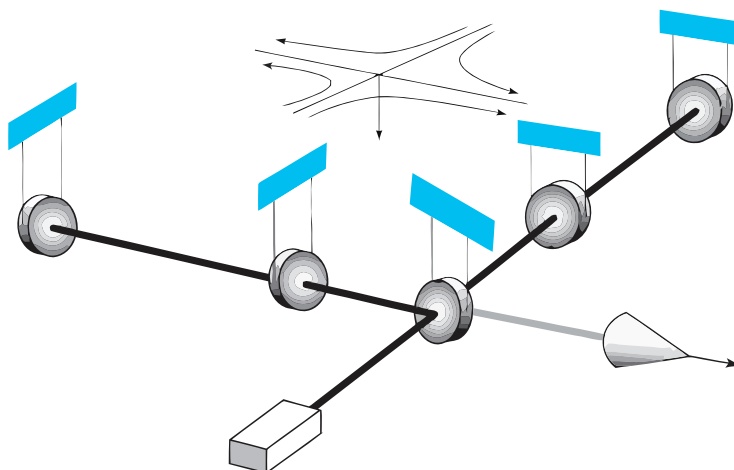
$$\frac{\delta L}{L} \sim h. \quad (1.13)$$



Obrázek 1.6: Schéma interferometru Michelsonova typu. Viz začátek podkapitoly 1.3.2, Zdroj: [6]

Tento rozdíl se projeví jako změna fázového rozdílu mezi svazky, tj. posunem případných interferenčních proužků. Fázový posun bude největší pro efektivní délku ramena rovnou $\lambda/4$, kde λ je frekvence gravitační vlny. U skutečných detektorů je detektor v rovnováze nastaven „na tmou“, tedy svazky interferují destruktivně. Měří se pak intenzita světla, které vzniká, když je aparatura vlivem gravitační vlny z tohoto naladění vychýlena, nebo ještě lépe měří zpětnovazební signál, který aparaturu trvale udržuje vyladěnou.

Amplitudě gravitační vlny $h \sim 10^{-21}$ a délce ramen $L = 4$ km (délka ramen detektoru LIGO) odpovídá změna délky $\delta L \sim 10^{-18}$ m. Pokud se do konfigurace přidají další zrcadla a světlo se nechá odrážet vícekrát (vytvoří se Fabry-Perotova rezonanční dutina), efektivní délku ramena detektoru lze významně zvětšit a i příslušné měřené změny délky ramen budou patřičně zvětšeny. Tak je tomu u dnešních detektorů, např. u detektoru LIGO (Obrázek 1.7)



Obrázek 1.7: Hrubé schéma interferometru LIGO. Jedná se o Fabry-Perotův interferometr, který má oproti interferometru Michelsonova typu na předchozím Obrázku 1.6 v každém rameni o zrcadlo navíc. Mezi zrcadly se světlo mnohonásobně odráží, což výrazně zvětšuje efektivní délku ramena. Závěšená zrcadla se v gravitačním poli pohybují pod vlivem efektivní síly, jejíž siločáry jsou znázorněné v horní části ilustrace. Zdroj: LIGO

O různých typech šumu v aparatuře a o křivce citlivosti aparatury jsme u rezonančních detektorů příliš nemluvili. U interferometrických to učiníme. Předtím ale něco obecně o teorii šumu.

Signál z detektorů si můžeme představit jako funkci času $h(t)$. V signálu je jednak obsažen čistý signál, který nás zajímá, a pak také celá řada šumových signálů. O některých jejich typech se zmíníme. Šum $x(t)$ je náhodný (stochastický) proces. K jeho popisu se používá autokorelační funkce (korelační funkce procesu samotného ze sebou)

$$R_x(\tau) \equiv \langle x(t)x(t+\tau) \rangle. \quad (1.14)$$

Její Fourierova transformace se nazývá výkonová spektrální hustota

$$S_x(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \quad (1.15)$$

Říká nám, jak je šum „silný“ na které frekvenci. Z její definice je vidět, že má jednotky $[S_x(f)] = [x(t)]^2 \text{ Hz}^{-1}$, kde $[x(t)]$ je jednotka šumu (ať je jakákoliv), například V pro šumové napětí. Ačkoliv to není vždy pravda, v mnoha případech je střední hodnota druhé mocniny signálu úměrná „fyzikálnímu“ výkonu v signálu. Tak je tomu například u napětí. Proto tedy slovo „výkonová“ v názvu.

Často se také pracuje s její odmocninou, tzv. amplitudovou spektrální hustotou, která charakterizuje amplitudu šumu na dané frekvenci. Její jednotky jsou $[x(t)] \text{ Hz}^{-1/2}$.

Velmi obvyklým typem šumu je bílý šum. Pro jeho autokorelační funkci platí $R_x(\tau) = \delta(\tau)$ z čehož plyne konstantní výkonová spektrální hustota, tzn. šum je stejně intenzivní na každé frekvenci.

V pozemských interferometrickém detektorech jsou dva hlavní typy šumu. Prvním typem je seismický šum (seismic noise), který na frekvencích menších než 60 Hz šum dominuje. Vzniká tím, že vibrace ze země se přenášejí skrz závěsy na komponenty detektoru. Pro frekvence pod 10 Hz je typická hladina šumu $x(f) \sim 10^{-9} \text{ m Hz}^{-1/2}$, zatímco pro frekvence nad 10 Hz platí klesající závislost

$$x(f) \sim \frac{10^{-7}}{f^2} \text{ m Hz}^{-1/2}. \quad (1.16)$$

Seismický šum se dá ve vyšších frekvencích snadno odstínit kyvadlovými závěsy, případně vyspělejšími aktivními systémy. Potlačení šumu v pásmu okolo několika hertzů je však problém.

Druhým hlavním typem šumu je výstřelový šum (shot noise). Je vyvolán fluktuacemi počtu fotonů, které jsou přijímány fotodetektorem. Na rozdíl od předchozího typu má výstřelový šum větší význam naopak ve vyšších frekvencích (nad 200 Hz). Pro frekvence 100 Hz až 200 Hz je amplitudová spektrální hustota šumu okolo $10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$.

Pro minimální detekovatelnou amplitudu lze odvodit [2]

$$h_{\min.} \sim \frac{1}{bL} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{2\pi \tau I}}, \quad (1.17)$$

kde I je výkon (intenzita) laseru, b je počet odrazů, λ je vlnová délka laseru a τ je doba měření. Zde si všimneme, že k úspěšnému potlačení výstřelového šumu je dobré mít výkonný laser. Výkon používaných laserů je ve skutečnosti

velmi malý (5 až 10 W), protože v aparaturách se používá výkonová recyklace, která umožňuje do optické soustavy postupně napumpovat až kilowattové optické výkony.

S velkými výkony souvisí šum způsobený tlakem laserového záření na zrcadla interferometru. Opět lze odvodit [2]

$$h_{\min.} \sim \frac{\tau}{m} \frac{b}{L} \sqrt{\frac{\tau \hbar I \lambda}{c \lambda}}, \quad (1.18)$$

kde m je hmotnost zrcadel. Vidíme, že intenzita laseru je nyní v čitateli. Snaha o potlačení jednoho typu šumu vede ke zvýšení druhého. Pokusíme-li se najít „zlatou střední cestu“ minimalizací obou vztahů vzhledem k výkonu laseru, dostaneme nakonec jednoduchý vztah

$$h_{\min.} \sim \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\tau \hbar}{m}}, \quad (1.19)$$

což pro LIGO ($m \approx 100$ kg, $L = 4$ km) a observační čas $\tau = 1$ ms dává $h_{\min.} \sim 10^{-23}$.

S touto elegantní formulí souvisí tzv. kvantová mez, která plyne z Heisenbergova principu neurčitosti. Pro pozorování, které trvá τ , je nejmenší změřitelné posunutí zrcadla $\delta L \equiv \Delta x$. Předpokládáme-li neurčitost hybnosti jako $\Delta p \approx m \delta L / \tau$, dostaneme z principu neurčitosti $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ vztah

$$h_{\min.} \sim \frac{\delta L}{L} \sim \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\tau \hbar}{m}}, \quad (1.20)$$

což je překvapivě totéž co (1.19). Kvantová mez je fundamentální poznatek.

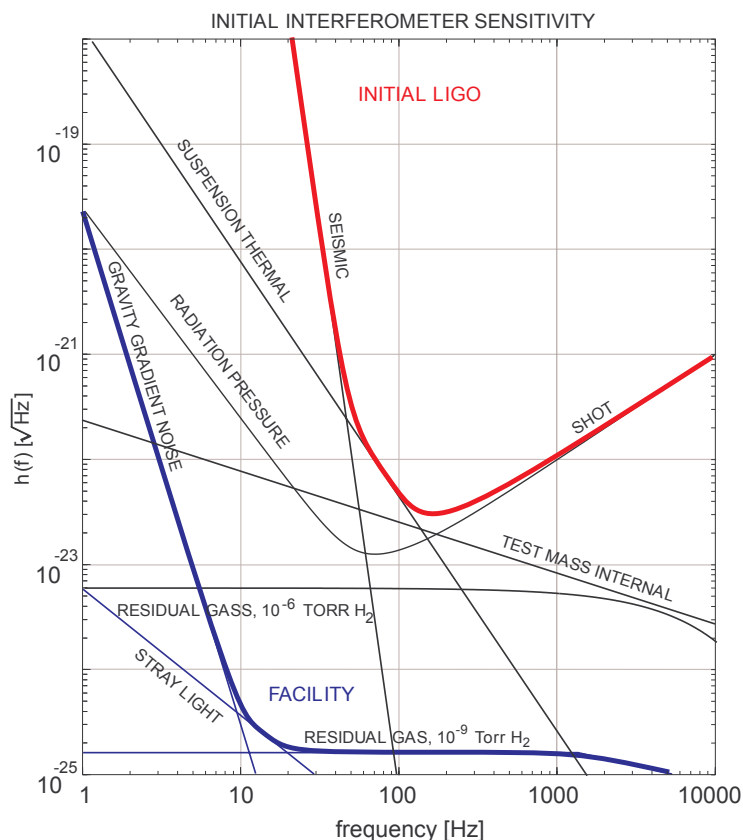
Kromě seismického a výstřelového šumu se na celkovém šumu také významně podílí termální šum (Brownův pohyb) v závěsech. Dále existuje ještě celá řada slabších, ne tolik významných rušení. Například šum způsobený fluktuacemi hustoty (a tedy fluktuacemi indexu lomu) zbytkového plynu v evakuovaných ramenech. Či šum v samotném laseru (fluktuace frekvence a intenzity).

Nemůžeme opomenout zmínit rušení způsobené proměnlivými gravitačními gradienty nevlňové povahy (například slapovými silami Měsíce). Tyto gradienty se používají k testům a kalibračním detektoru.

Na Obrázku 1.8 zobrazujeme amplitudové spektrální hustoty různých šumů v interferometru Initial LIGO (v dnešní době je tento přebudován na vylepšený Advanced LIGO). Z nich vzatý součet je pak křivka citlivosti detektoru. Signály rozeznatelné v šumu jsou jen ty, které se nacházejí nad touto křivkou.

Nakonec se zmiňme o konceptu kosmického interferometru. Ačkoliv kvalita pozemských interferometrů stále roste, zvětšovat délku ramen detektoru nelze donekonečna, například kvůli cenám vakuové techniky (a zakřivení povrchu Země). Současně všudypřítomný seismický šum naprosto znemožňuje detekci vln frekvencí menších než 1 Hz. V kosmu obě tyto komplikace nenastávají. Právě proto ve spolupráci ESA a NASA vzniká projekt LISA (Laser Interferometer Space Antenna). V současné době je ale realizace projektu LISA nejasná a je otázka, jak se celá situace vyvine.

V projektu [7] se uvažuje o vytvoření detektoru ve tvaru rovnostranného trojúhelníku o stranách zhruba 5 milionů kilometrů (tj. asi 17 světelných sekund),



Obrázek 1.8: Citlivost interferometru Initial LIGO. Na grafu jsou vyneseny amplitudové spektrální hustoty různých typů šumu v detektoru Initial LIGO (v dnešní době je tento přebudován na vylepšený Advanced LIGO). O typech šumu více v textu v souvislosti s formullemi (1.16) až (1.20). Z obrázku vidíme, že hlavními šumovými příspěvky, které ovlivňují křivku citlivosti, je seismický šum, který je dominantní v oblasti malých frekvencí, a šum výstřelový, který dominuje oblastem s frekvencí vyšší. Zdroj: [3]

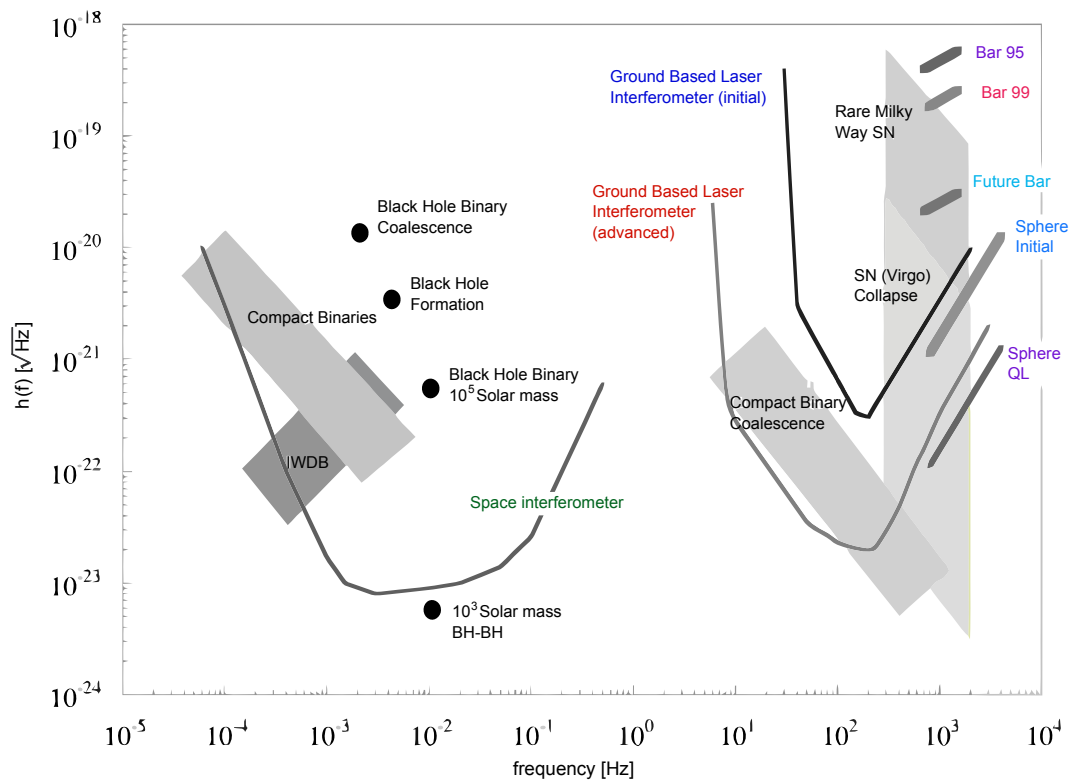
který bude tvořen třemi družicemi v jeho vrcholech. Celý trojúhelník by udržoval svůj tvar a jeho rovina by svírala úhel 60° s rovinou ekliptiky. Soustava detektorů by sledovala dráhu Země zhruba s opožděním 20° .

Uvnitř každé družice by byla umístěna naprosto volně kovová krychle. Družice by pak pomocí speciálních nízkospotřebních motorků synchronizovala svůj pohyb s krychlí. Tato geodetická krychle by současně realizovala zrcadlo interferometru. Ve skutečnosti by celý detektor fungoval jako tři interferometry (za každý vrchol jeden).

Předností kosmického interferometru by byla obrovská délka ramen a absence seismického šumu. Navíc v režimu, ve kterém by detektor pracoval, by signál od zdrojů, které nejlépe vidíme na Obrázku 1.9, řádově převyšoval šum. Interferometr by pracoval v úplně jiném a zajímavějším frekvenčním pásmu (10^{-4} až 10^{-1} Hz), než na které jsme zvyklí z pozemských detektorů.

Shrnující Obrázek 1.9 zobrazuje schematicky křivky citlivosti různých typů detektorů a také parametry očekávaných astrofyzikálních zdrojů.

V tomto odstavci shrnujeme použitou literaturu v této kapitole. První podkapitola byla zpracována především podle [1] s doplněním dle [2] a [8]. Druhá podkapitola taktéž. Začátek třetí podkapitoly je založen na [1], část o interfe-



Obrázek 1.9: Srovnání potenciálních astrofyzikálních zdrojů gravitačního záření a křivek citlivostí různých typů detektorů. Levá část je doménou zatím neexistujících vesmírných interferometrů. Očekávanými zdroji v této oblasti jsou, jak vidíme, černé díry (splnutí, binární systémy a formace). Dále také těsné binární systémy daleko od koncového stádia (myslíme tím neutronové dvojhvězdy) a IWDB (slabě interagující dvojhvězdy sestávající z bílých trpaslíků). Pravá část pak patří pozemským interferometrům (původním a vylepšeným). Zdroji v tomto pásmu jsou vzácné výbuchy supernov v Mléčné dráze, výbuchy supernov v hnízdě galaxií v Panně a samozřejmě také finální srážky v těsných binárních systémech. Úplně vpravo ještě vidíme úzké křivky citlivostí různých rezonančních detektorů, a to včetně nově navrhovaných sférických antén. Zdroj: [1]

renčních detektorech a šumech v nich je podle [2] s přihlédnutím k [3], [6] a [12]. Současně bylo použito [7], [4] a [5].

2. Obecná teorie relativity

2.1 Úvodní a historické poznámky

Obecná teorie relativity je geometrickou teorií gravitace. Jejím autorem je Albert Einstein, který na ní pracoval v letech 1907 – 1915 za občasně pomoci matematika a svého spolužáka Marcela Grossmanna. Obecná relativita zobecňuje Newtonovu teorii gravitace a myšlenky speciální relativity a přináší jednotný popis gravitace jakožto geometrické vlastnosti prostoru a času, resp. prostoročasu. Jednou z hlavních myšlenek je, že zakřivení prostoročasu je v přímé relaci s energií a hybností přítomné látky a záření (a toky této energie a hybnosti). Tento vztah je obsahem Einsteinových polních rovnic, kteréžto jsou soustavou deseti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic.

Obecná relativita do fyziky zavádí mnoho nových nápadů, myšlenek a pojmů. Mnoho jejích předpovědí se liší významně od předpovědí klasické fyziky. Uvedme odlišný náhled na čas a jeho plynutí, prostorovou geometrii, volný pád těles a šíření světla. Příklady efektů, kde jsou tyto odlišné předpovědi pozorované jsou například gravitační dilatace času, gravitační čočkování, gravitační rudý posuv nebo Shapirův efekt (zpoždování signálu, který prochází silným gravitačním polem).

Řada těchto předpovědí byla ověřena experimenty. Zmíňme vysvětlení precese perihélia Merkuru o oněch (newtonovskou teorií nevysvětlených) 43 úhlových vteřin za století. Nebo také dnes již dávnou Eddingtonovu expedici na pobřeží Afriky za úplným slunečním zatměním, která ověřila (díky tehdejší technice sice ne příliš věrohodně), že ohyb hvězdných světelných paprsků, které procházejí blízko slunečního kotouče, je podle předpovědi obecné relativity dvojnásobný oproti předpovědi Newtonovy teorie. Či pozdější Pound-Rebkovy experimenty s „pádem“ světla, které demonstrovaly gravitační rudý posuv. Nebo nedávný projekt Gravity Probe B – test efektu vlečení vztažných soustav a de Sitterovy precese.

Obecná relativita má rovněž mnoho astrofyzikálních důsledků. Plyne z ní existence černých děr, které jsou pravděpodobně zodpovědné za extrémní luminozitu jistých vesmírných objektů – zejména jádra galaxií a kvazary. Jejím důsledkem je také gravitační čočkování. Světlo z nějakého objektu (například kvazaru) může být ohnuto v gravitačním poli jiného objektu (například galaxie), který je z pohledu Země před zdrojem. Bližší objekt se pak chová podobně jako čočka, což bude mít za následek, že na obloze může být okolo čočky viditelných více kopií vzdálenějšího objektu. Z hlediska kosmologie je obecná relativita základem pro různé modely dynamického vesmíru. A v neposlední řadě obecná relativita předpovídá existenci gravitačních vln a jejich vlastnosti.

Obecná relativita je velmi rozsáhlá a složitá část fyziky. Proto nyní shrneme opravdu jen to nejnútnejší, přičemž hlavním zdrojem nám je [8], kde lze nalézt všechny patřičné důkazy a odvození. Doplňujícím zdrojem je [9].

2.2 Prostoročas a metrika

Z matematického hlediska je prostoročas čtyřrozměrná pseudo-Riemannova varietta, což je souvislý metrický prostor, který je lokálně podobný obyčejnému čtyřroz-

měrnému euklidovskému prostoru a je vybaven nějakou metrikou s lorentzovskou signaturou. Na rozdíl od euklidovského prostoru může být zakřiven a jeho topologické vlastnosti mohou být značně odlišné. Můžeme si ho představit například jako plochu, která je vnořena do nějakého mnohorozměrného euklidovského prostoru. V prostoročase je dále přirozené zavést souřadnice, což vlastně znamená konzistentně a spojitě pojmenovat jeho jednotlivé body čtveřicemi čísel.

Metrika je fundamentálním pojmem obecné relativity, protože právě ona nese informaci o vnitřní geometrii prostoročasu – o gravitačním poli. Je jistým zobecněním skalárního součinu a ve zkratce by se dalo říct, že dává do souvislosti prostoročasové souřadnice a vzdálenosti. Pro porozumění konceptu si uvědomme pár věcí z formalizmu speciální relativity, kde se používá plochá metrika.

Ve speciální relativitě se pracuje s prostoročasným intervalem (vzdáleností) s , který je invariantem vůči Lorentzovým transformacím. V kartézských souřadnicích t, x, y, z je vyjádřen

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.1)$$

což lze také zapsat (používáme Einsteinovu sumační konvenci a nadále $c = 1$)

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu, \quad (2.2)$$

kde Minkowskiho metrika je

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

přičemž $dx^\mu = (dt, dx, dy, dz)$ a $dx_\mu = (-dt, dx, dy, dz)$ jsou složky lorentzovsky kovariantních objektů – vektoru a kovektoru (v tomto případě infinitezimálních). Metrika také realizuje zmíněný kartézský součin, například pro vektory \mathbf{A} a \mathbf{B} je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \quad (2.4)$$

a zvedání a spouštění indexů (vektor-kovektorovou korespondenci)

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu, \quad (2.5)$$

kde $\eta^{\mu\nu}$ je takové, že

$$\eta^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (2.6)$$

V případě Minkowskiho metriky vychází přímo $\eta^{(\mu)(\nu)} = \eta_{(\mu)(\nu)}$.

V obecné relativitě, kde je prostoročas zakřiven a souřadnice již nemusí být kartézské (pojem kartézských souřadnic nemusí mít ani smysl), metrika nemusí být v každém bodě prostoročasu stejná. Rovnost (2.1) je pak nahrazena

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.7)$$

kde dx^μ jsou diferenciály nějakých obecných souřadnic. Například „délku“ konečně dlouhé křivky parametrizované parametrem λ mezi body (1) a (2) bychom spočetli odmocněním a následnou integrací

$$\ell = \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (2.8)$$

Vektor v daném bodě křivého prostoročasu již neleží uvnitř, ale ční z něho ven, tj. leží v tečném prostoru, který je v tomto bodě přilepen. Vzorec (2.4), kde provedeme záměnu $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$, zůstává v platnosti, je ale třeba pamatovat, že je nutné brát vektory vycházející ze stejného bodu a metriku vyčíslovat v tom samém bodě. Totéž platí i v případě vektorových polí. Podobně i zvedání a spouštění indexu pracuje po záměně stejně. Také platí

$$\begin{aligned} g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} &= \delta^\mu_\nu \\ g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Metrika by měla být navíc nesingulární, tj.

$$g_{\mu\nu} \neq \infty, \quad g = \det(g_{\mu\nu}) \neq \{0, \infty\}. \quad (2.10)$$

Singularita metriky značí buď singulárně zvolené souřadnice, anebo v horším případě singularitu samotného prostoročasu.

Rozlišení intervalů a vektorů, případně vektorových polí pomocí metriky na časupodobné, nulové (světelné) a prostorupodobné je opět analogické jako ve speciální relativitě.

2.3 Paralelní přenos a geodetiky

V plochém prostoru je velice přirozené srovnávat (sčítat, skalárně násobit) dva vektory, které vycházejí z různých bodů. K porovnání stačí jeden z vektorů přesunout ke druhému. Při přesunu stačí držet jeho kartézské složky konstantní a vektor se díky plochosti prostoru nijak nezmění.

V zakřiveném prostoročase je ale situace jiná, neboť vektory v různých bodech leží v různých tečných prostorech a není jasné, jakým způsobem je přesouvat k sobě a porovnávat. Koncept přesunu vektoru z bodu do bodu podél nějaké křivky tak, aby se vektor v jistém smyslu při přesunu nezměnil (pokud celý proces přesunu rozdělíme na infinitezimálně malé kroky, je třeba aby původní vektor a již maličko posunutý vektor byly paralelní a stejně dlouhé až do prvního řádu malosti), je znám jako paralelní přenos.

Matematicky vyjadřujeme paralelní přenos diferenciální rovnicí (rovnice pro paralelní přenos)

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} V^\beta, \quad (2.11)$$

kde $V^\mu(\lambda)$ jsou složky vektoru \mathbf{V} , který je paralelně přenášen podél křivky $x^\mu(\lambda)$.

Veličiny (funkce) $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ se nazývají Christoffelovy symboly a tvoří tenzor. Dají se vyjádřit pomocí derivací metriky jako

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}), \quad (2.12)$$

parciální derivaci značíme čárkou, tj. $_{,\alpha} \equiv \partial/\partial x^\alpha$. Odtud vidíme, že Christoffelovy symboly jsou ve spodních dvou indexech symetrické. Paralelní přenos má jednu užitečnou vlastnost – při přenosu dvou vektorů, které začínaly ve stejném bodě, se jejich skalární součin zachovává, což souvisí s právě uvedeným vztahem mezi Christoffelovými symboly a metrikou.

S pojmem paralelního přenosu je spojen pojem kovariantní derivace. Krátce řečeno, parciální derivace složek vektorového pole již nemusí být složky nějakého tenzoru (druhého řádu), jako tomu je ve speciální relativitě, protože definice derivace vyžaduje odčítání dvou vektorů v různých bodech zakřiveného prostoročasu. Přesuneme-li ale jeden z vektorů k tomu druhému pomocí paralelního přenosu, dospějeme nakonec k pojmu této „vylepšené“ derivace ∇ definované takto

$$V^\mu{}_{;\lambda} \equiv \nabla_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} V^\nu. \quad (2.13)$$

Kovariantní derivace je lineární podobně jako derivace parciální a splňuje vzorec pro derivaci součinu. Navíc už splňuje požadovanou vlastnost – derivace složek vektoru již tvoří složky tenzoru druhého řádu. Všimněme si, že pro plochou metriku $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ jsou Christoffelovy symboly identicky nulové a kovariantní derivace splývá s derivací parciální.

Geodetikou nazveme křivku $x^\mu(\lambda)$, která splňuje rovnici (rovnici geodetiky)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.14)$$

Porovnáme-li tuto rovnici s (2.11), vidíme, že to je vlastně rovnice pro paralelní přenos tečného vektoru $dx^\mu/d\lambda$ geodetiky podél geodetiky samotné. V tomto smyslu je geodetika vždy nejprímější křivkou, jakýmsi zobecněním přímky. Jak je ostatně vidět, v plochém prostoročase ($\Gamma = 0$) rovnice geodetiky přejde přímo na rovnici přímky.

Jak již bylo řečeno, paralelní přenos zachovává skalární součin vektorů, speciálně zachovává normu (velikost) vektoru. Z toho plyne, že tečný vektor nikde nemění svůj charakter (například z časupodobného na prostorupodobný). Geodetiky tak můžeme rozlišit podobně jako vektory na časupodobné, nulové a prostorupodobné.

Prostorupodobné geodetiky je nejvýhodnější parametrizovat pomocí jejich vlastní délky. Časupodobné geodetiky parametrizujeme pomocí vlastního času pozorovatelů, které se po nich pohybují. Nulové geodetiky nelze parametrizovat ani vlastní délkou ani vlastním časem, neboť příspěvek obojího je podél nich nulový. Za účelem parametrizace se tedy volí nějaký obecný parametr.

Geodetiky jsou navíc řešením variační úlohy

$$0 = \delta \int d\lambda, \quad (2.15)$$

kde λ je parametr geodetiky. Prakticky to znamená, že prostorupodobné geodetiky jsou nejkratší spojnici dvou bodů (mají nejmenší vlastní délku). Naopak podél časupodobné geodetiky uběhne pozorovateli na hodinkách nejvíce času ze všech možných spojníc.

Fyzikálně jsou časupodobnými geodetikami například světočáry volných testovacích částic. Světlo se šíří po nulových (světelných) geodetikách, což lze ukázat z Maxwellových rovnic v rámci eikonálové aproximace [9]. Uvažujeme-li elektromagnetickou (světelnou) vlnu, jejíž vlnová délka je podstatně menší, než je poloměr prostoročasové křivosti (definovaný jako typická složka Riemannova tenzoru umocněná na $-1/2$) a také menší než charakteristický rozměr, na kterém se mění polarizace, amplituda a vlnová délka, pak jsou světelné paprsky (definované jako integrální křivky vlnového čtyřvektoru této vlny) v rámci aproximace nulovými geodetikami.

2.4 Křivost

Z Christoffelových symbolů a jejich parciálních derivací můžeme zkonstruovat tenzor zvaný Riemannův tenzor křivosti (ač Christoffelovy symboly samy tenzor netvoří). Jedno z možných vyjádření Riemannova tenzoru křivosti je

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}. \quad (2.16)$$

Z tohoto vyjádření lze odvodit (s využitím symetrií metriky a Christoffelových symbolů) řadu symetrií a antisymetrií Riemannova tenzoru. Tyto symetrie a antisymetrie nejsou všechny nezávislé. Platí

$$R^{\mu}_{\nu\kappa\lambda} = -R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} \quad (2.17a)$$

$$R^{\mu}_{\nu\kappa\lambda} + R^{\mu}_{\kappa\lambda\nu} + R^{\mu}_{\lambda\nu\kappa} = 0 \quad (2.17b)$$

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = -R_{\nu\mu\kappa\lambda} \quad (2.17c)$$

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = R_{\kappa\lambda\mu\nu} \quad (2.17d)$$

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda;\rho} + R_{\mu\nu\lambda\rho;\kappa} + R_{\mu\nu\rho\kappa;\lambda} = 0. \quad (2.17e)$$

Poslední identita je diferenciální a je jednou z Bianchiho identit.

Riemannův tenzor nese úplnou informaci o prostoročasové křivosti. Je-li identicky nulový, pak je prostoročas plochý a naopak. Nulovost Riemannova tenzoru je též ekvivalentní s integrabilitou paralelního přenosu. Paralelní přenos je integrabilní, pokud při přenosu vektoru mezi dvěma body nezávisí na cestě, kterou si mezi těmito dvěma body vybereme (pro dvě různé cesty nejsou výsledkem přenosu dva různé vektory). Toto je též ekvivalentní tomu, že při přenosu po uzavřené křivce (z jednoho bodu do téhož bodu) se přenášený vektor nezmění.

Riemannův tenzor také úzce souvisí s takzvanou deviací, resp. fokusací geodetik. Uvažujme hladký svazek geodetik (geodetickou kongruenci) $x^{\mu}(\lambda, \nu)$ tak, že jednotlivé geodetiky jsou rozlišené (očíslované) pomocí parametru ν a jsou parametrizované pomocí λ . Dále zavedme separační vektor, který spojuje dvě blízké geodetiky

$$\zeta^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\nu}. \quad (2.18)$$

Pak se dá dokázat, že platí rovnice geodetické deviace

$$\frac{D^2\zeta^{\mu}}{d\lambda^2} = -R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \zeta^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda}, \quad (2.19)$$

kde

$$\frac{D^2\zeta^{\mu}}{d\lambda^2} \equiv \frac{d^2\zeta^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \quad (2.20)$$

je druhá absolutní derivace ve směru podél geodetik (kovariantní zobecnění zrychlení do křivého prostoru). Separační vektor dvou blízkých geodetik se tedy vyvíjí podle (2.19). Může se prodlužovat, což odpovídá vzájemnému vzdalování geodetik (deviaci), nebo zkracovat, což odpovídá vzájemnému přibližování geodetik (fokusaci). Jak vidíme, za deviaci nebo fokusaci geodetik je zodpovědná křivost. V plochem prostoru tedy k deviaci nebo fokusaci nedochází.

Z Riemannova tenzoru můžeme zúžením zkonstruovat Ricciho tenzor

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}, \quad (2.21)$$

který je díky (2.17d) symetrický, a dalším zúžením skalární křivost

$$R = R^{\mu}_{\mu}. \quad (2.22)$$

2.5 Einsteinovy rovnice

Einsteinovy rovnice mají v geometrizovaných jednotkách ($G = c = 1$) tvar

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

přičemž v negeometrizovaných jednotkách je 8π nahrazeno $8\pi G/c^4$. Nalevo stojí Einsteinův tenzor $G_{\mu\nu}$ zkonstruovaný z Ricciho tenzoru, skalární křivosti a metricky

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

a člen s kosmologickou konstantou Λ , který se v nekosmologických aplikacích obvykle vynechává. Napravo stojí tenzor energie-hybnosti. Oba tenzory $G_{\mu\nu}$ a $T_{\mu\nu}$ jsou symetrické ($g_{\mu\nu}$ samozřejmě také), takže celkem z šestnácti rovnic jich je jen deset nezávislých.

Tenzor energie-hybnosti na pravé straně nese úplnou informaci o zdrojích gravitačního pole, které je reprezentováno ryze geometrickou levou stranou. Význam jeho složek je následující:

- T^{00} je hustota energie
- T^{i0} je hustota i -té složky hybnosti
- T^{0j} je j -tá složka hustoty toku energie
- T^{ij} je j -tá složka hustoty toku i -té složky hybnosti.

Poněvadž levá strana identicky splňuje (díky Bianchiho identitě)

$$\nabla_\nu(G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.25)$$

z Einsteinových rovnic plyne automaticky obecně relativistický zákon zachování energie a hybnosti zdrojů v podobě rovnice kontinuity

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.26)$$

Přítomnost kovariantní derivace místo parciální znemožňuje použití Gaussovy věty, což má za následek to, že ze zdroje mohou být energie a hybnost odnášeny gravitačními vlnami.

Einsteinovy rovnice jsou nelineární soustavou PDR a je velmi těžké je řešit. Jejich nelinearita se projevuje tak, že zdroje působí samy na sebe a gravitační pole taktéž. Mají tedy v sobě obsaženou i dynamiku zdrojů, čímž jsou zajímavé. V příští podkapitole se podíváme na jejich linearizovanou aproximaci, kde se tento efekt nevyskytuje, a proto je jednodušší je řešit.

2.6 Linearizovaná teorie gravitace

Toto téma rozebereme trochu podrobněji, neboť se úzce týká slabých gravitačních vln. Hlavním východiskem linearizované teorie je předpoklad téměř plochého prostoročasu. Chceme, aby existoval souřadný systém x^μ takový, že v něm má metrika tvar

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

kde $h_{\mu\nu}$ je malé i se svými derivacemi

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1, |h_{\mu\nu,\alpha}| \ll 1, \dots, \quad (2.28)$$

neboli, že metrika je „blízká“ Minkowskiho ploché metrice. O $h_{\mu\nu}$ a jeho derivacích předpokládáme, že to jsou veličiny prvního řádu a proto budeme jejich druhé a vyšší mocniny zanedbávat.

Pro inverzní metriku tak odtud plyne (do prvního řádu po zanedbání) vztah

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

což je konzistentní se vztahy

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (2.30)$$

Indexy se tedy zvedají a spouštějí pomocí Minkowskiho metriky. V přesnosti do prvního řádu se tak k $h_{\mu\nu}$ můžeme stavět jako k tenzorovému poli v plochem prostoročase.

Dále můžeme z (2.12) určit Christoffelovy symboly (opět do prvního řádu)

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} (h_{\alpha\lambda,\beta} + h_{\beta\lambda,\alpha} - h_{\alpha\beta,\lambda}), \quad (2.31)$$

z (2.16) Riemannův tenzor

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (h_{\mu\beta,\nu\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu\beta} - h_{\mu\alpha,\nu\beta} - h_{\nu\beta,\mu\alpha}), \quad (2.32)$$

kontrakcemi pak Ricciho tenzor a skalární křivost

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - h_{,\mu\nu} - \square h_{\mu\nu}), \quad R = h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - \square h \quad (2.33)$$

a nakonec dle (2.24) Einsteinův tenzor

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - h_{,\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - \square h)], \quad (2.34)$$

kde jsme označili

$$\square \equiv \partial^\alpha \partial_\alpha, \quad h \equiv h^\alpha_\alpha. \quad (2.35)$$

Einsteinovy rovnice (2.23) pak mají tvar (kosmologickou konstantu neuvažujeme)

$$h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - h_{,\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - \square h) = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Rovnice lze částečně zjednodušit, pokud zavedeme nové veličiny

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h. \quad (2.37)$$

Z jejich definice ještě plyne

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}, \quad \bar{h} \equiv \bar{h}^\alpha_\alpha, \quad \bar{h} = -h. \quad (2.38)$$

Díky nim Einsteinovy rovnice nakonec dostanou tvar

$$-\square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} + h^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Zatím jsme pracovali v jednom daném souřadném systému, v němž je metrika (2.27) „blízká“ Minkovského metrice. Takový souřadný systém nazveme skoro lorentzovský. Ukazuje se, že existují dva typy transformací, které převádějí jeden skoro lorentzovský souřadný systém x^μ na jiný, též skoro lorentzovský x'^μ . V něm bude mít metrika podobný tvar, tedy

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

kde ale $h'_{\mu\nu}$ bude obecně odlišné od $h_{\mu\nu}$.

Jedním typem transformací jsou ze speciální relativity dobře známe nehomogenní Lorentzovy transformace

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu + b^\mu. \quad (2.41)$$

Dá se odvodit, že pak platí (v prvním řádu)

$$h'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta h_{\alpha\beta}. \quad (2.42)$$

Perturbace $h_{\mu\nu}$ ploché metriky se tedy transformuje jako tenzor ve speciální relativitě a je zřejmé, že jako speciálně relativistický tenzor se transformují i linearizované Christoffelovy symboly (2.31), popřípadě linearizovaný Riemannův tenzor (2.32). Potvrzuje se tedy to, že linearizovanou teorii lze chápat jako teorii tenzorového pole $h_{\mu\nu}$ druhého řádu (gravitačního pole) v plochem prostoročase. Veličiny $h_{\mu\nu}$ si lze analogicky s elektromagnetickým čtyřpotenciálem A_μ v elektrodynamice představovat jako potenciály gravitačního pole.

Zajímavější je druhý typ transformací – takzvané kalibrační transformace. Mají tvar

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (2.43)$$

kde ξ^μ je vektorové pole, které je malé i se svými derivacemi, stejného řádu jako $h_{\mu\nu}$. Pracovně ho můžeme nazývat generátorem kalibrační transformace. Opět se dá odvodit, že (v prvním řádu)

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (2.44a)$$

$$h' = h - 2\xi^\alpha_{,\alpha} \quad (2.44b)$$

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^\alpha_{,\alpha} \quad (2.44c)$$

$$\bar{h}' = \bar{h} + 2\xi^\alpha_{,\alpha} \quad (2.44d)$$

a také po dosazení do (2.31) a (2.32)

$$\Gamma'^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \xi^\alpha_{\mu,\nu}, \quad R'_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.45)$$

Vidíme, že Riemannův tenzor a tedy i Ricciho tenzor, skalární křivost a Einsteinův tenzor jsou kalibračně invariantní, což velmi připomíná situaci v elektrodynamice, kde kalibrační transformace čtyřpotenciálu $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ nechává tenzor elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$ nezměněn.

Vraťme se teď k Einsteinovým rovnicím (2.39). Je snadno vidět, že pokud bude platit

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.46)$$

Einsteinovy rovnice se velmi zjednoduší. Přejdou na nehomogenní vlnové rovnice

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.47)$$

Podmínky (2.46) se v analogii s podobnými podmínkami $\partial^\mu A_\mu = 0$ v elektrodynamice nazývají Lorentzovy nebo také harmonické.

Pro dané $\bar{h}_{\mu\nu}$ můžeme provést kalibrační transformaci takovou, že nové $\bar{h}'_{\mu\nu}$ bude splňovat zmíněné Lorentzovy podmínky. Z (2.44c) lze snadno nahlédnout, že generátor této kalibrační transformace musí splňovat nehomogenní vlnovou rovnici

$$\square \xi_\mu = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

O aproximativním řešení nevakuových Einsteinových rovnic (2.47) (kvadrupólovém přiblížení) se zmíníme velice stručně později. Nyní se ale věnujme vakuovému případu, kterému odpovídá homogenní vlnová rovnice

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.49)$$

Nejjednodušším řešením je řešení ve tvaru rovinné harmonické vlny

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{H}_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (2.50)$$

kde $\bar{H}_{\mu\nu}$ jsou obecně komplexní konstanty (tvořící tenzor amplitudy) a k_α je vlnový čtyřvektor vlny. U (2.50) a podobných výrazů budeme vynechávat zápis reálné části, protože budou představovat lineární výrazy. Dosazením do (2.49) dostaneme

$$k^\alpha k_\alpha = 0. \quad (2.51)$$

Vlna se tedy pohybuje rychlostí světla, přičemž Lorentzovy podmínky (2.46) implikují její tranzverzalitu

$$\bar{H}_{\mu\nu} k^\nu = 0. \quad (2.52)$$

Fixování kalibrace Lorentzovými podmínkami nevyčerpává kalibrační volnost úplně. Stále je ještě možné provádět kalibrační transformace, jejichž generátory splňují dle (2.48)

$$\square \xi_\mu = 0, \quad (2.53)$$

aniž by byly podmínky narušeny. Očekáváme tedy, že kalibraci půjde omezit ještě více. Zvolme řešení (2.53) také jako rovinnou harmonickou vlnu (se stejným vlnovým čtyřvektorem)

$$\xi_\mu = -i\Xi_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (2.54)$$

kde Ξ_μ jsou konstanty, které charakterizují tuto Lorentzovy podmínky zachovávající kalibrační transformaci. Z rovnice (2.44c) dostaneme transformační vztah mezi amplitudami

$$\bar{H}'_{\mu\nu} = \bar{H}_{\mu\nu} - \Xi_\mu k_\nu - \Xi_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu} \Xi_\alpha k^\alpha. \quad (2.55)$$

Tato rovnice umožňuje zvolit čtyři konstanty Ξ_μ kalibrační transformace tak, že po překalibrování bude platit

$$\bar{H}_{0\mu} = 0 \quad (2.56a)$$

$$\bar{H}^\alpha_\alpha = 0. \quad (2.56b)$$

Podmínky (2.56a) nejsou všechny vzájemně nezávislé, jak by se mohlo zdát. Nezávislé jsou pouze tři. Z předpokladu $\bar{H}_{0m} = 0$ a podmínky transversality (2.52), která stále platí, totiž plyne $\bar{H}_{00} = 0$. Celkem tedy máme (2.52), (2.56a) a (2.56b), což je dohromady osm podmínek, které redukují původně deset složek tenzoru amplitudy $\bar{H}_{\mu\nu}$ na dvě nezávislé, kterým odpovídají dvě nezávislé polarizace vlny (například lineární + a \times).

Lorentzovská kalibrace, která splňuje (2.56) se nazývá transversální a bezestopá (transverse-traceless, TT). Bezestopá podle (2.56b) a transversální podle (2.52) a (2.56a). Rovnici (2.56a) totiž lze zapsat kovariantně jako

$$\bar{H}_{\mu\nu}U^\nu = 0, \quad (2.57)$$

kde U^ν je libovolný časupodobný vektor (v našem vztažném systému jsou jeho složky $U^\nu = (U^0, 0, 0, 0)$). Je tedy transversální ke směru šíření k^ν a směru vektoru U^ν .

Ještě si všimněme, že díky (2.56b) a jejího důsledku $\bar{h}^\alpha_\alpha \equiv \bar{h} = 0$ je v TT kalibraci podle (2.38) přímo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \quad \bar{H}_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}, \quad (2.58)$$

takže pro rovinou harmonickou vlnu v TT kalibraci šířící se například podél osy z v kladném směru můžeme psát díky všem podmínkám

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega(z-t)}, \quad (2.59)$$

kde h_+ a h_\times jsou konstanty. Pro $h_\times = 0$ dostaneme lineárně polarizovanou vlnu s polarizací $+$, kdežto pro $h_+ = 0$ s polarizací \times . V obecném případě je polarizace eliptická.

Nyní už jen ve stručnosti o kvadrupólovém přiblížení. Partikulární řešení nehomogenní vlnové rovnice (2.47) lze pro ostrovní systém (analogicky s elektrodynamikou) psát jako retardovaný integrál

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (2.60)$$

V případě, že zdroj (v bodě \mathbf{r}') je podstatně menší, než je vlnová délka vysílaných vln, bychom dostali po zdlouhavém a pracném výpočtu přiblížení (v TT kalibraci)

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{r}) = \frac{2}{r} \ddot{D}_{ij}^{\text{TT}}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (2.61)$$

kde $^{\text{TT}}$ značí TT projekci, kterou obstarává TT projektor $P_{jk|mn}$

$$P_{jk|mn} \equiv P_{jm}P_{kn} - \frac{1}{2}P_{jk}P_{mn}, \quad P_{jk} = \delta_{jk} - n_j n_k, \quad n_k = \frac{r_k - r'_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.62)$$

a D_{ij} je tenzor kvadrupólového momentu

$$D_{ij}(t) = \int \varrho(t, \mathbf{r}) \left(r_i r_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.63)$$

Konečně integrací energetického toku přes sféru pomocí výrazu pro efektivní tenzor energie-hybnosti gravitačních vln

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi} \langle (\partial_\mu h_{jk})(\partial_\nu h_{jk}) \rangle \quad (2.64)$$

a nakonec dostaneme luminozitu

$$L = \frac{1}{5} \langle \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ij} \rangle, \quad (2.65)$$

kde $\langle \cdot \rangle$ značí časovou střední hodnotu.

3. Model interferometrického detektoru

3.1 Úvodní slovo

V Kapitole 1 jsme viděli, že interferometrický detektor gravitačních vln je velmi složité zařízení. Zjistit, jak bude reagovat na průchod gravitační vlny, není úplně jednoduché. Často bývá kladena vcelku jednoduchá otázka (i autor této práce si ji kdysi položil): Proč je detektor vůbec schopen něco detekovat, když jak zrcadla tak i světlo, které se mezi nimi šíří, jsou ovlivňovány tou samou vlnou? Na otázku zkusíme odpovědět pomocí podrobnější analýzy.

V této kapitole prezentujeme jednoduchý model detektoru, ve kterém je světlo (elektromagnetické pole) odrážející se mezi zrcadly zastoupeno bodovými nehmotnými částicemi pohybujícími se rychlostí světla (říkejme jim fotony). Pozorování interference světelných vln z obou ramen detektoru je pak nahrazeno pozorováním rozdílu časů, se kterými částice vystřelené do obou ramen z děliče svazků a odražené od koncových zrcadel dorazí zpět k děliči.

Náš náhled nicméně zanedbává gravitační rudý posuv světelných vln, který je způsoben procházející gravitační vlnou. Jinými slovy, gravitační vlna původně sfázované světelné vlny stejné délky nejen vzájemně posouvá, ale i natahuje a zkracuje. Tento efekt náš model vůbec neuvažuje. V realističtějším modelu by bylo potřeba přímo řešit Maxwellovy rovnice na pozadí gravitační vlny.

3.2 Model

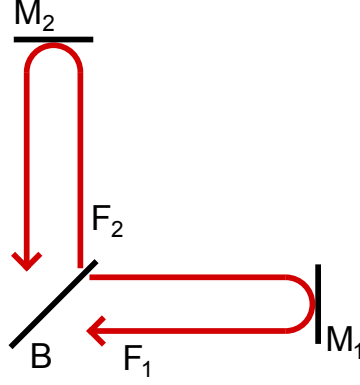
V našem modelu předpokládáme, že z děliče svazků **B** společně startují dvě částice F_1 a F_2 (fotony). Každá se vydá do jednoho ramena detektoru, odrazí se od koncového zrcadla M_1 nebo M_2 a vrátí se zpět k děliči. Schematicky je to znázorněno na Obrázku 3.1. O zrcadlech a o děliči předpokládáme, že jsou zavěšeny na kyvadlových závěsech, které zajišťují jejich volný pohyb.

Pokud neuvažujeme vliv gravitační vlny, vrátí se fotony přesně ve stejný okamžik, protože délka obou ramen je L . Gravitační vlna jakožto perturbace ploché geometrie ovlivní pohyb všech objektů, tj. fotonů, zrcadel i děliče, což způsobí to, že fotony dorazí zpět v různých časech, jak vidíme na prostoročase Obrázku 3.2. Cílem bude zjistit rozdíl těchto časů. Nejprve si připravíme pohybové rovnice jednotlivých prvků, které potom zintegrujeme a dopočteme integrační konstanty.

3.3 Pohybové rovnice

Fotony se samozřejmě jako nehmotné volné částice budou pohybovat po nulových geodetikách, kdežto hmotná volná zrcadla a dělič po časupodobných geodetikách. Pro výpočet si nejprve připravme rovnici geodetiky (2.14)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1: Schéma modelu. Model detektoru sestává z děliče svazků B a dvou zrcadel M_1 a M_2 . Dva fotony F_1 a F_2 opouštějí současně B a po odrazu od zrcadel M_1 a M_2 se v různých časech vrací zpět k B . Náš model měří rozdíl doby letu obou fotonů F_1 a F_2 pod vlivem gravitační vlny.

vylouením parametrizace. Rovnici rozepišme zvlášť na časovou složku a prostoro-
rové složky

$$\frac{d^2x^0}{d\lambda^2} + \Gamma^0_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (3.2a)$$

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (3.2b)$$

V druhé rovnici převedme derivace podle

$$\frac{d}{d\lambda} \rightarrow \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{d\lambda^2} \rightarrow \frac{dt^2}{d\lambda^2} \frac{d}{dt} + \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2}, \quad (3.3)$$

kde $t \equiv x^0$ je souřadnicový čas. Tím dostaneme

$$\frac{dt^2}{d\lambda^2} \frac{dx^i}{dt} + \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right) = 0. \quad (3.4)$$

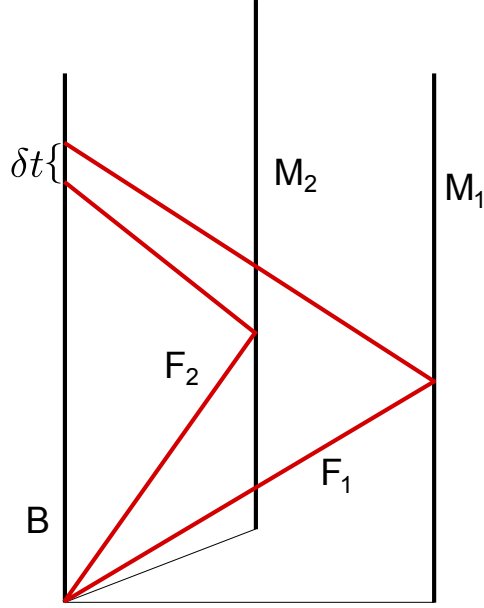
Z první rovnice (3.2a) teď můžeme vyjádřit $d^2t/d\lambda^2$, dosadit do druhé rovnice, a tak získat

$$\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \left[\frac{d^2x^i}{dt^2} + \left(\Gamma^i_{\alpha\beta} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{\alpha\beta} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right] = 0. \quad (3.5)$$

Jelikož souřadnicový čas roste podél světelných i časupodobných geodetik, se kterými pracujeme, je $dt/d\lambda > 0$, takže můžeme rovnici tímto vykrátit, a tak obdržet rovnici

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \left(\Gamma^i_{\alpha\beta} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{\alpha\beta} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0. \quad (3.6)$$

Pro účel výpočtu zavedme jednotkové vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} , které míří ve směru ramen a jsou orientované od děliče k zrcadlům. Probíhající výpočet bude pro obě ramena stejný, proto ho provedme například pro první rameno určené vektorem \mathbf{a} . Pro druhé stačí učinit ve výsledku záměnu $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$.



Obrázek 3.2: Schématické prostoročasové znázornění světočar fotonů, zrcadel a děliče. Tatáž situace jako na Obrázku 3.1, jen je jinak nakreslena. Světočary F_1 , F_2 , M_1 , M_2 a B jsou geodetikami v poli gravitační vlny.

Provedme několik formálních úprav. V rovnici (3.6) rozviňme sčítání přes α a β

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left(\Gamma^i_{00} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{00} \right) + 2 \left(\Gamma^i_{0j} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{0j} \right) \frac{dx^j}{dt} + \\ + \left(\Gamma^i_{jk} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{jk} \right) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dále zavedme projektor do roviny kolmé na směr ramena \mathbf{a}

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij} - a_i a_j. \quad (3.8)$$

S jeho pomocí dále rozepišme (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left(\Gamma^i_{00} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{00} \right) + 2 \left(\Gamma^i_{0a} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{0a} \right) \frac{da}{dt} + \\ + \left(\Gamma^i_{aa} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{aa} \right) \frac{da}{dt} \frac{da}{dt} + \\ + 2 \left(\Gamma^i_{0j} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{0j} \right) \Pi^j_k \frac{dx^k}{dt} + 2 \left(\Gamma^i_{aj} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{aj} \right) \frac{da}{dt} \Pi^j_k \frac{dx^k}{dt} + \\ + \left(\Gamma^i_{jk} - \frac{dx^i}{dt} \Gamma^0_{jk} \right) \Pi^j_l \Pi^k_m \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^m}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde jsme zavedli projekci polohy x^i do směru ramena a projekce Christoffelových symbolů

$$a \equiv x^i a_i, \quad \Gamma^i_{0a} \equiv \Gamma^i_{0j} a^j, \quad \text{atd.} \quad (3.10)$$

Rovnici ještě zprojektujeme do směru ramena (násobme a_i)

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 a}{dt^2} + \left(\Gamma^a_{00} - \frac{da}{dt} \Gamma^0_{00} \right) + 2 \left(\Gamma^a_{0a} - \frac{da}{dt} \Gamma^0_{0a} \right) \frac{da}{dt} + \\
& + \left(\Gamma^a_{aa} - \frac{da}{dt} \Gamma^0_{aa} \right) \frac{da}{dt} \frac{da}{dt} + \\
& + 2 \left(\Gamma^a_{0j} - \frac{da}{dt} \Gamma^0_{0j} \right) \Pi^j_k \frac{dx^k}{dt} + 2 \left(\Gamma^a_{aj} - \frac{da}{dt} \Gamma^0_{aj} \right) \frac{da}{dt} \Pi^j_k \frac{dx^k}{dt} + \\
& + \left(\Gamma^a_{jk} - \frac{da}{dt} \Gamma^0_{jk} \right) \Pi^j_l \Pi^k_m \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^m}{dt} = 0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

čímž dostáváme evoluční rovnici pro podélné složky pohybů (ve směru ramena).

Rovnici bychom také mohli celou projektovat do roviny kolmé na směr ramena a získat tak rovnici pro příčné pohyby, které se objevují i v rovnici pro pohyby podélné. Později bude zřejmé, proč jsme tak neučinili. Jeden z důvodů uvedeme ihned. Když si představíme zrcadla a dělič jako rozlehlé roviny kolmé na směr ramena, fotony nerozpoznají jejich posun ve směru kolmém na rameno. Navíc v prvním řádu poruchového počtu se v rovnicích pro podélné projekce ty příčné neuplatní, jak za chvíli uvidíme.

Ve výpočtu nyní začneme uplatňovat poruchový počet v prvním řádu. O Christoffelových symbolech předpokládáme, že to jsou veličiny malého prvního řádu a považujeme je za poruchy. O trajektorii $x^i(t)$ (fotonů i součástek) obecně předpokládáme, že je tvaru

$$x^i(t) = (X_0 + Vt)a^i + \delta x^i(t), \tag{3.12}$$

kde první člen odpovídá neperturovanému případu (rovnoměrnému přímočarému pohybu podél ramena) a druhý člen je gravitační vlnou způsobená porucha (též malá prvního řádu i včetně svých derivací), která již nemusí být ve směru ramena (tj. $\Pi_{ij}\delta x^j \neq 0$). Speciálně pro dělič bereme $X_0 = V = 0$ a pro zrcadlo $X_0 = L, V = 0$. Pro foton letící od děliče k zrcadlu bereme $X_0 = 0, V = 1$ a pro vracející se odražený foton $X_0 = 2L, V = -1$. První řád poruchového počtu znamená, že budeme zanedbávat členy kvadratické a vyšší ve veličinách prvního řádu a také to, že Christoffelovy symboly budeme vyčíslovat podél neporušené trajektorie (tedy to, že do poruchy se již porucha nedosazuje).

Z (3.12) plyne pro projekci

$$a(t) = a_i x^i(t) = X_0 + Vt + \delta a(t), \quad \delta a(t) \equiv a_i \delta x^i(t). \tag{3.13}$$

Dosadíme-li nyní (3.12) a (3.13) do (3.11) a provedeme-li popsání zanedbání, zjistíme, že koncové členy obsahující projektory díky identitě $\Pi_{ij}a^j = 0$ úplně vypadnou a zbude následující rovnice (Christoffelovy symboly jsou vyčíslené podél neporušené trajektorie)

$$\frac{d^2 \delta a}{dt^2} = V \Gamma^0_{00} - \Gamma^a_{00} + 2V^2 \Gamma^0_{a0} - 2V \Gamma^a_{a0} + V^3 \Gamma^0_{aa} - V^2 \Gamma^a_{aa}, \tag{3.14}$$

která tvoří základ pro výpočet. Tak vidíme (a ještě uvidíme u podmínky světelnosti fotonových geodetik), že příčnými pohyby se nemusíme zabývat, neboť se v prvním řádu podélné projekce rovnice geodetiky neuplatní.

Rovnici (3.14) ještě můžeme napsat pro jednotlivé prvky, kterým přiřadíme rozlišovací indexy

$$\frac{d^2\delta a^{(B)}}{dt^2} = -\Gamma^a_{00} \quad (3.15a)$$

$$\frac{d^2\delta a^{(M)}}{dt^2} = -\Gamma^a_{00} \quad (3.15b)$$

$$\frac{d^2\delta a^{(F_+)}}{dt^2} = \Gamma^0_{00} - \Gamma^a_{00} + 2\Gamma^0_{a0} - 2\Gamma^a_{a0} + \Gamma^0_{aa} - \Gamma^a_{aa} \quad (3.15c)$$

$$\frac{d^2\delta a^{(F_-)}}{dt^2} = -\Gamma^0_{00} - \Gamma^a_{00} + 2\Gamma^0_{a0} + 2\Gamma^a_{a0} - \Gamma^0_{aa} - \Gamma^a_{aa}. \quad (3.15d)$$

Dělič je označen (B), zrcadlo (M), foton letící k zrcadlu (F₊) a foton letící zpět (F₋).

3.4 Christoffelovy symboly

Perturbaci Minkowskiho metriky budeme předpokládat ve tvaru rovinné harmonické vlny

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.16)$$

kde $H_{\mu\nu}$ jsou libovolné konstanty, které ale kvůli podmínce transverzality (2.52) a díky (2.37) splňují (což v tuto chvíli není podstatné)

$$H_{\mu\nu}k^\nu - \frac{1}{2}Hk_\mu = 0, \quad H \equiv H^\alpha_\alpha \quad (3.17)$$

a

$$k_\alpha = \omega(-1, \mathbf{n}), \quad |\mathbf{n}| = 1 \quad (3.18)$$

je vlnový čtyřvektor. Christoffelovy symboly dle (2.31) tím pádem jsou

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \bar{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.19)$$

přičemž

$$\bar{\Gamma}_{\mu\alpha\beta} = \frac{i}{2}(H_{\mu\alpha}k_\beta + H_{\mu\beta}k_\alpha - H_{\alpha\beta}k_\mu). \quad (3.20)$$

Potřebné konstanty, které pak figuruji v pohybových rovnicích jsou

$$\bar{\Gamma}^0_{00} = -\bar{\Gamma}_{000} = \frac{i\omega}{2}H_{00} \quad (3.21a)$$

$$\bar{\Gamma}^0_{a0} = -\bar{\Gamma}_{0a0} = -\frac{i\omega}{2}H_{00}n_a \quad (3.21b)$$

$$\bar{\Gamma}^0_{aa} = -\bar{\Gamma}_{0aa} = -\frac{i\omega}{2}(2H_{0a}n_a + H_{aa}) \quad (3.21c)$$

$$\bar{\Gamma}^a_{00} = \bar{\Gamma}_{a00} = -\frac{i\omega}{2}(2H_{a0} + H_{00}n_a) \quad (3.21d)$$

$$\bar{\Gamma}^a_{a0} = \bar{\Gamma}_{aa0} = -\frac{i\omega}{2}H_{aa} \quad (3.21e)$$

$$\bar{\Gamma}^a_{aa} = \bar{\Gamma}_{aaa} = \frac{i\omega}{2}H_{aa}n_a, \quad (3.21f)$$

kde

$$n_a \equiv n_i a^i, \quad H_{a0} \equiv H_{i0} a^i, \quad \text{atd.} \quad (3.22)$$

3.5 Řešení pohybových rovnic

Nejprve vyřešíme pohyb zrcadla a děliče. Poloha zrcadla je dána (3.13)

$$a^{(M)}(t) = L + \delta a^{(M)}(t) \quad (3.23)$$

a rovnice pro perturbaci je dle (3.15b), (3.19) a (3.21d)

$$\frac{d^2 \delta a^{(M)}}{dt^2} = \frac{i\omega}{2} (2H_{a0} + H_{00}n_a) e^{i\omega(n_a L - t)}. \quad (3.24)$$

Integrací odtud plyne

$$\delta a^{(M)}(t) = \frac{\Psi_a e^{i\omega(n_a L - t)}}{\omega} + A^{(M)}t + B^{(M)}, \quad (3.25)$$

kde $A^{(M)}$, $B^{(M)}$ jsou integrační konstanty a

$$\Psi_a \equiv \frac{\bar{\Gamma}_{00}^a}{\omega} = -\frac{i}{2} (2H_{a0} + H_{00}n_a). \quad (3.26)$$

Je zřejmé, že periodická (harmonická) síla by těžko vyvolávala lineární pohyb typu $A^{(M)}t + B^{(M)}$. Pohyb zrcadla a děliče je omezen závěsy, takže pro časovou střední hodnotu platí

$$\langle \delta a^{(M)} \rangle \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} \delta a^{(M)}(t') dt' = 0, \quad (3.27)$$

z čehož plyne, že obě integrační konstanty jsou nulové. Je tedy nakonec

$$a^{(M)}(t) = L + \frac{\Psi_a e^{i\omega(n_a L - t)}}{\omega}. \quad (3.28)$$

Naprostu analogicky pro dělič platí

$$a^{(B)}(t) = \delta a^{(B)}(t) \quad (3.29)$$

a rovnice pro perturbaci po dosazení je

$$\frac{d^2 \delta a^{(B)}}{dt^2} = -\Psi_a \omega e^{-i\omega t}, \quad (3.30)$$

takže nakonec je

$$a^{(B)}(t) = \frac{\Psi_a e^{-i\omega t}}{\omega}. \quad (3.31)$$

Nyní se soustředíme na pohyb fotonů. Poloha k zrcadlu letícího fotonu je

$$a^{(F+)}(t) = t + \delta a^{(F+)}(t) \quad (3.32)$$

a rovnice pro perturbaci (3.15c) je

$$\frac{d^2 \delta a^{(F+)}}{dt^2} = (\bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{00}^a + 2\bar{\Gamma}_{a0}^0 - 2\bar{\Gamma}_{a0}^a + \bar{\Gamma}_{aa}^0 - \bar{\Gamma}_{aa}^a) e^{i\omega(n_a - 1)t}, \quad (3.33)$$

s použitím (3.21) tedy

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta a^{(F+)}}{dt^2} &= \frac{i\omega}{2}(H_{00} + 2H_{a0} + H_{00}n_a - 2H_{00}n_a + \\ &\quad + 2H_{aa} - 2H_{0a}n_a - H_{aa} - H_{aa}n_a)e^{i\omega(n_a-1)t} \\ &= -\omega(n_a - 1)\Phi_a^+ e^{i\omega(n_a-1)t},\end{aligned}\quad (3.34)$$

kde

$$\Phi_a^+ \equiv \frac{i}{2}(H_{00} + 2H_{a0} + H_{aa}). \quad (3.35)$$

Po integraci můžeme obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\delta a^{(F+)}(t) = \frac{\Phi_a^+ [e^{i\omega(n_a-1)t} - 1]}{\omega(n_a - 1)} + A^{(F+)}t + B^{(F+)}, \quad (3.36)$$

kde $A^{(F+)}$, $B^{(F+)}$ jsou integrační konstanty. Z takto zapsaného tvaru je na první pohled vidět výsledek pro limitní případ $n_a \rightarrow 1$, který odpovídá vlně šířící se podél ramena směrem k zrcadlu.

Podobně pro vracející se foton je

$$a^{(F-)}(t) = 2L - t + \delta a^{(F-)}(t) \quad (3.37)$$

a perturbace splňuje (3.15d)

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta a^{(F-)}}{dt^2} &= \frac{i\omega}{2}(-H_{00} + 2H_{a0} + H_{00}n_a - 2H_{00}n_a - \\ &\quad - 2H_{aa} + 2H_{0a}n_a + H_{aa} - H_{aa}n_a)e^{i\omega[2n_aL-(n_a+1)t]} \\ &= -\omega(n_a + 1)\Phi_a^- e^{i\omega[2n_aL-(n_a+1)t]},\end{aligned}\quad (3.38)$$

kde

$$\Phi_a^- \equiv \frac{i}{2}(H_{00} - 2H_{a0} + H_{aa}). \quad (3.39)$$

Obecné řešení pak je

$$\delta a^{(F-)}(t) = \frac{\Phi_a^- [e^{-i\omega(n_a+1)t} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)} + A^{(F-)}t + B^{(F-)}. \quad (3.40)$$

Integrační konstanty $A^{(F+)}$ a $A^{(F-)}$ jsou určeny podmínkou světelnosti fotonových geodetik. Obecně je čtyřhybnost fotonu

$$p^\mu = \left(\frac{dt}{d\lambda}, \frac{dx^i}{d\lambda} \right) = \frac{dt}{d\lambda} \left(1, \frac{dx^i}{dt} \right) \quad (3.41)$$

a podmínka světelnosti zní

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})p^\mu p^\nu = 0, \quad (3.42)$$

čili po dosazení a vykrácení výrazem $(dt/d\lambda)^2$ dostáváme

$$-1 + h_{00} + 2h_{i0} \frac{dx^i}{dt} + (\delta_{ij} + h_{ij}) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (3.43)$$

Tímto vylučováním parametru λ se vyhýbáme počítání rudých posuvů, neboť právě $dt/d\lambda$ s rudým posuvem souvisí. Rovnici rozepíšme podobně jako u rovnice geodetiky s využitím projektoru Π_{ij} do roviny kolmé na směr ramena

$$\begin{aligned} -1 + h_{00} + 2h_{a0} \frac{da}{dt} + (1 + h_{aa}) \frac{da}{dt} \frac{da}{dt} + \\ + 2h_{i0} \Pi^i_j \frac{dx^j}{dt} + 2(a_i + h_{ai}) \frac{da}{dt} \Pi^i_j \frac{dx^j}{dt} + \\ + (\delta_{ij} + h_{ij}) \Pi^i_k \Pi^j_l \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

kde index a jako vždy značí příslušnou projekci. Dosadíme-li sem nyní z (3.12) a (3.13) a provedeme-li opět zanedbání členů druhého a vyššího řádu jako u rovnice geodetiky, vyjde nakonec

$$-1 + h_{00} + 2Vh_{a0} + V^2 + 2V \frac{d\delta a}{dt} + V^2 h_{aa} = 0. \quad (3.45)$$

Podle očekávání členy s projektory opět vypadnou, takže se skutečně uplatňují jen podélné složky pohybů.

Pro foton letící k zrcadlu ($V = 1$) z předchozího vztahu a z (3.16) plyne (perturbace metriky se opět vyčíslují podél neporušené trajektorie)

$$\frac{d\delta a^{(F+)}}{dt} = -\frac{1}{2}(H_{00} + 2H_{a0} + H_{aa})e^{i\omega(n_a-1)t} = i\Phi_a^+ e^{i\omega(n_a-1)t}. \quad (3.46)$$

Porovnáním s (3.36) vidíme, že $A^{(F+)} = 0$. Takže, že k vyřešení pohybu fotonu jsme rovnici geodetiky vlastně vůbec nepotřebovali – stačila by nám podmínka světelnosti.

Analogicky pro vracející se foton ($V = -1$) je

$$\frac{d\delta a^{(F-)}}{dt} = \frac{1}{2}(H_{00} - 2H_{a0} + H_{aa})e^{i\omega[2n_a L - (n_a+1)t]} = -i\Phi_a^- e^{i\omega[2n_a L - (n_a+1)t]} \quad (3.47)$$

a porovnáním s (3.40) opět vyjde $A^{(F-)} = 0$.

3.6 Podmínky na integrační konstanty

Výsledná řešení pohybových rovnic jsou

$$a^{(B)}(t) = \frac{\Psi_a e^{-i\omega t}}{\omega} \quad (3.48a)$$

$$a^{(M)}(t) = L + \frac{\Psi_a e^{i\omega(n_a L - t)}}{\omega} \quad (3.48b)$$

$$a^{(F+)}(t) = t + \frac{\Phi_a^+ [e^{i\omega(n_a-1)t} - 1]}{\omega(n_a - 1)} + B^{(F+)} \quad (3.48c)$$

$$a^{(F-)}(t) = 2L - t + \frac{\Phi_a^- [e^{-i\omega(n_a+1)t} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)} + B^{(F-)}. \quad (3.48d)$$

Hodnoty integračních konstant plynou z „potkávacích“ podmínek.

V čase $t = 0$ musí být k zrcadlu letící foton ve stejném místě, jako je dělič, tj. $a^{(B)}(t) = a^{(F+)}(t)$. Odtud máme

$$B^{(F+)} = \frac{\Psi_a}{\omega}. \quad (3.49)$$

K zrcadlu letící foton se se zrcadlem setká v čase $t = L + \tilde{\delta t}$, kde $\tilde{\delta t}$ je časová perturbace způsobená gravitační vlnou. Čili pro $t = L + \tilde{\delta t}$ je $a^{(M)}(t) = a^{(F+)}(t)$, tj.

$$L + \frac{\Psi_a e^{i\omega(n_a-1)L}}{\omega} = L + \tilde{\delta t} + \frac{\Phi_a^+ [e^{i\omega(n_a-1)L} - 1]}{\omega(n_a - 1)} + \frac{\Psi_a}{\omega}, \quad (3.50)$$

kde do perturbací za t dosazujeme pouze L . Podobné jako u Christoffelových symbolů se tím dopouštíme chyby – ta je ale až druhého řádu. Dostáváme tak

$$\tilde{\delta t} = \frac{\Psi_a [e^{i\omega(n_a-1)L} - 1]}{\omega} - \frac{\Phi_a^+ [e^{i\omega(n_a-1)L} - 1]}{\omega(n_a - 1)}. \quad (3.51)$$

Z tohoto místa pak v čase $t = L + \tilde{\delta t}$ startuje vracející se foton, tzn. pro $t = L + \tilde{\delta t}$ je $a^{(M)}(t) = a^{(F-)}(t)$, tedy

$$L + \frac{\Psi_a e^{i\omega(n_a-1)L}}{\omega} = L - \tilde{\delta t} + \frac{\Phi_a^- [e^{-i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)} + B^{(F-)}. \quad (3.52)$$

To určuje konstantu $B^{(F-)}$

$$B^{(F-)} = \tilde{\delta t} + \frac{\Psi_a e^{i\omega(n_a-1)L}}{\omega} - \frac{\Phi_a^- [e^{-i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)}, \quad (3.53)$$

resp. po dosazení z (3.51)

$$B^{(F-)} = -\frac{\Phi_a^+ [e^{i\omega(n_a-1)L} - 1]}{\omega(n_a - 1)} - \frac{\Phi_a^- [e^{-i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)} + \frac{\Psi_a [2e^{i\omega(n_a-1)L} - 1]}{\omega}. \quad (3.54)$$

Nakonec se vracející foton setká v čase $2L + \delta t$ (kde δt je opět časová perturbace) s děličem. Tzn. pro $t = 2L + \delta t$ je $a^{(B)}(t) = a^{(F-)}(t)$, čili

$$\frac{\Psi_a e^{-2i\omega L}}{\omega} = -\delta t + \frac{\Phi_a^- [e^{-2i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)} + B^{(F-)}, \quad (3.55)$$

tedy

$$\delta t = \frac{\Phi_a^- [e^{-2i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)} - \frac{\Psi_a e^{-2i\omega L}}{\omega} + B^{(F-)} \quad (3.56)$$

a po dosazení ze (3.54)

$$\delta t = \frac{\Phi_a^- [e^{-2i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)} - \frac{\Psi_a e^{-2i\omega L}}{\omega} - \frac{\Phi_a^+ [e^{i\omega(n_a-1)L} - 1]}{\omega(n_a - 1)} - \frac{\Phi_a^- [e^{-i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{2i\omega n_a L}}{\omega(n_a + 1)} + \frac{\Psi_a [2e^{i\omega(n_a-1)L} - 1]}{\omega}, \quad (3.57)$$

což lze upravit na

$$\delta t = -\frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\Phi_a^+ [e^{i\omega(n_a-1)L} - 1]}{n_a - 1} + \frac{\Phi_a^- [e^{i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{-2i\omega L}}{n_a + 1} + \Psi_a [e^{-2i\omega L} - 2e^{i\omega(n_a-1)L} + 1] \right\}. \quad (3.58)$$

Tím je výpočet u konce, neboť odvozený vzorec pro δt určuje, o kolik se foton opozdí (nebo předběhne) vůči neperturovanému případu, kdy není gravitační vlna přítomna.

Označíme-li výsledek (3.58) jako $\delta t(\mathbf{a})$, tj. že příslušné projekce se dělají do směru vektoru \mathbf{a} , který určuje směr prvního ramena, můžeme pro rozdíl času, se kterým se fotony vrátí zpět k děličce, psát

$$\Delta t = \delta t(\mathbf{a}) - \delta t(\mathbf{b}), \quad (3.59)$$

kde \mathbf{b} je směrový vektor druhého ramena.

3.7 Poznámky a diskuze

Nejprve dokažme, že je odvozený vzorec (3.59) kalibračně invariantní vůči kalibračním transformacím zachovávajícím Lorentzovu kalibraci, která je realizována podmínkou transverzality (2.52). Generátory transformace budeme uvažovat ve tvaru (2.54), což nám dá společně s (2.44a) vzorec pro transformaci amplitud

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \Xi_\mu k_\nu - \Xi_\nu k_\mu = H_{\mu\nu} - \omega(\Xi_\mu n_\nu + \Xi_\nu n_\mu), \quad (3.60)$$

kde $n_\mu = k_\mu/\omega = (-1, \mathbf{n})$. Z něho získáme

$$\begin{aligned} \Phi_a'^+ &\equiv \frac{i}{2}(H'_{00} + 2H'_{a0} + H'_{aa}) = \Phi_a^+ + \frac{i\omega}{2}(2\Xi_0 + 2\Xi_a - 2\Xi_0 n_a - 2\Xi_a n_a) \\ &= \Phi_a^+ - i\omega(n_a - 1)(\Xi_a + \Xi_0) \end{aligned} \quad (3.61a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_a'^- &\equiv \frac{i}{2}(H'_{00} - 2H'_{a0} + H'_{aa}) = \Phi_a^- + \frac{i\omega}{2}(2\Xi_0 - 2\Xi_a + 2\Xi_0 n_a - 2\Xi_a n_a) \\ &= \Phi_a^- - i\omega(n_a + 1)(\Xi_a - \Xi_0) \end{aligned} \quad (3.61b)$$

$$\begin{aligned} \Psi_a' &\equiv -\frac{i}{2}(2H'_{a0} + H'_{00} n_a) = \Psi_a + \frac{i\omega}{2}(-2\Xi_a + 2\Xi_0 n_a - 2\Xi_0 n_a) \\ &= \Psi_a - i\omega\Xi_a. \end{aligned} \quad (3.61c)$$

kde bylo použito $n_0 = -1$. Pro překalibrovanou časovou odchylku $\delta t(\mathbf{a})$ tak plyne

$$\begin{aligned} \delta t(\mathbf{a})' &= \delta t(\mathbf{a}) + i \left\{ (\Xi_a + \Xi_0) [e^{i\omega(n_a-1)L} - 1] + \right. \\ &\quad \left. + (\Xi_a - \Xi_0) [e^{i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{-2i\omega L} + \Xi_a [e^{-2i\omega L} - 2e^{i\omega(n_a-1)L} + 1] \right\} \\ &= \delta t(\mathbf{a}) + i \left\{ \Xi_a [-e^{-2i\omega L} + 2e^{i\omega(n_a-1)L} - 1 + e^{-2i\omega L} - 2e^{i\omega(n_a-1)L} + 1] + \right. \\ &\quad \left. + \Xi_0 [e^{i\omega(n_a-1)L} - 1 + e^{-2i\omega L} - e^{i\omega(n_a-1)L}] \right\} \\ &= \delta t(\mathbf{a}) - i\Xi_0 (1 - e^{-2i\omega L}). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Dodatečný člen od kalibrační transformace vůbec nezávisí na směru ramena – závisí pouze na Ξ_0 , ω a L . Pro druhé rameno tedy hned můžeme psát

$$\delta t(\mathbf{b})' = \delta t(\mathbf{b}) - i\Xi_0 (1 - e^{-2i\omega L}) \quad (3.63)$$

a tedy

$$\Delta t' = \Delta t, \quad (3.64)$$

což jsme měli dokázat.

Kalibrační člen v (3.62) lze také snadno odvodit i jinak. Vzpomeňme si, že kalibrační transformace byla původně definovaná vztahem (2.43), a my o jejích generátorech předpokládáme (2.54), takže

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - i\Xi^{\mu} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}, \quad (3.65)$$

speciálně pro souřadnicový čas

$$t' = t - i\Xi^0 e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}. \quad (3.66)$$

Dále platí

$$\delta t(\mathbf{a})' - \delta t(\mathbf{a}) = (t'_{\text{přílet}} - t'_{\text{odlet}}) - (t_{\text{přílet}} - t_{\text{odlet}}), \quad (3.67)$$

kde všechny časy jsou perturbované. Použijeme-li (3.66), kde do exponenciál dosadíme (jako vždy) neperturované souřadnice děliče, které měl při odletu fotonu (na začátku) a při příletu (na konci), tedy

$$x^{\mu}_{\text{odlet}} = (0, \mathbf{0}), \quad x^{\mu}_{\text{přílet}} = (2L, \mathbf{0}), \quad (3.68)$$

obdržíme

$$\delta t(\mathbf{a})' - \delta t(\mathbf{a}) = -i\Xi^0 (e^{-2i\omega L} - 1), \quad (3.69)$$

což je přesně (3.62), neboť $\Xi^0 = -\Xi_0$.

Poněvadž jsme dokázali, že měřený rozdíl (3.59) je kalibračně invariantní, můžeme si kalibraci nějak vhodně zafixovat. Speciálně v TT kalibraci (2.56) a z (2.58) dostaneme

$$\Phi_a^+ = \Phi_a^- = \frac{iH_{aa}}{2}, \quad \Psi_a = 0, \quad (3.70)$$

a (3.58) přejde do tvaru

$$\delta t(\mathbf{a}) = -\frac{iH_{aa}}{2\omega} \left\{ \frac{e^{i\omega(n_a-1)L} - 1}{n_a - 1} + \frac{[e^{i\omega(n_a+1)L} - 1] e^{-2i\omega L}}{n_a + 1} \right\}. \quad (3.71)$$

Dále můžeme uvažovat dlouhovlnnou limitu odezvy detektoru (3.59). Dlouhovlnná limita odpovídá tomu, že detektor je velmi malý ve srovnání s vlnovou délkou vlny, tj. $L \ll 1/\omega$. Provedeme-li v (3.58) rozvoj exponenciál v malém parametru $\omega L \ll 1$, obdržíme

$$\begin{aligned} \delta t(\mathbf{a}) &= -iL (\Phi_a^+ + \Phi_a^- - 2\Psi_a n_a) \\ &= L [H_{00} (1 + n_a^2) + H_{aa} + 2H_{a0} n_a]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

V TT kalibraci (3.70) má dlouhovlnná limita (3.58) ještě jednodušší tvar

$$\delta t(\mathbf{a}) = LH_{aa}. \quad (3.73)$$

Pro odezvu detektoru (3.59) tak platí

$$\Delta t = \delta t(\mathbf{a}) - \delta t(\mathbf{b}) = L(H_{aa} - H_{bb}). \quad (3.74)$$

Všimněme si, že v limitě dlouhých vln vlastně měříme projekce Riemannova tenzoru. Použijeme k tomu rovnici geodetické deviace (2.19). Na trajektorie děliče a zrcadla se budeme dívat jako na dvě blízké deviuující geodetiky a na rameno detektoru jako na jejich separační vektor.

V rovnici

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = -R^\mu_{\nu\alpha\beta} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \zeta^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \quad (3.75)$$

budeme předpokládat, že Christoffelovy symboly a Riemannův tenzor jsou veličiny malé prvního řádu a dále, že

$$\zeta^\mu = (\delta\zeta^0, La^i + \delta\zeta^i), \quad x^\mu = (t + \delta x^0, \delta x^i), \quad \lambda = t + \delta t, \quad (3.76)$$

kde cokoliv, co začíná δ je veličina malá prvního řádu. Zbytek jsou neporušené proměnné. Dosadíme-li vše do rovnice a zanedbáme-li druhý a vyšší řád, dostaneme rovnici pro perturbaci

$$\frac{d^2\delta\zeta^\mu}{dt^2} = -LR^\mu_{0a0}, \quad (3.77)$$

kde Riemannův tenzor je vyčíslován podél neporušené trajektorie děliče. Pro jednoduchost budeme uvažovat TT kalibraci, v níž lze snadno ukázat dosazením do (2.16), že jediné nenulové složky Riemannova tenzoru (který je však kalibračně invariantní) jsou

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2}h_{ij,00} = \frac{1}{2}\omega^2 H_{ij} e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (3.78)$$

Řešení (3.77) je pak snadné a pro projekci separačního vektoru do směru ramena dostáváme

$$Z(t) \equiv a^i \zeta_i(t) = L + \frac{L}{2} H_{aa} e^{-i\omega t}. \quad (3.79)$$

Z toho vidíme, že náš model dává v dlouhovlnné limitě stejné výsledky jako rovnice geodetické deviace. Gravitační vlna mění vzdálenost mezi děličem a zrcadlem dle (3.79) a foton slouží k změření této vzdálenosti. Protože foton proletí rameno dvakrát (tam a zase nazpět), je třeba faktor $LH_{aa}/2$ násobit dvěma. Odečtením druhého ramena dostaneme přesně (3.74).

Směrovou závislost odezvy detektoru (3.59) graficky ilustrujeme na následujícím příkladu. Uvažujme detektor umístěný na povrchu Země, jehož ramena v daném bodě (ϑ, φ) zemského povrchu míří podél rovnoběžky a poledníku, které tímto bodem procházejí. Pro vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} , které určují ramena tedy platí

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \\ \mathbf{b} &= (-\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Gravitační vlnu uvažujme přicházející ze severního nebeského pólu, čili $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. S výhodou použijme kalibrační invarianci odezvy a zafixujme TT kalibraci. Pro polarizaci $+$ a jednotkovou amplitudu je

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Příslušné projekce pak jsou

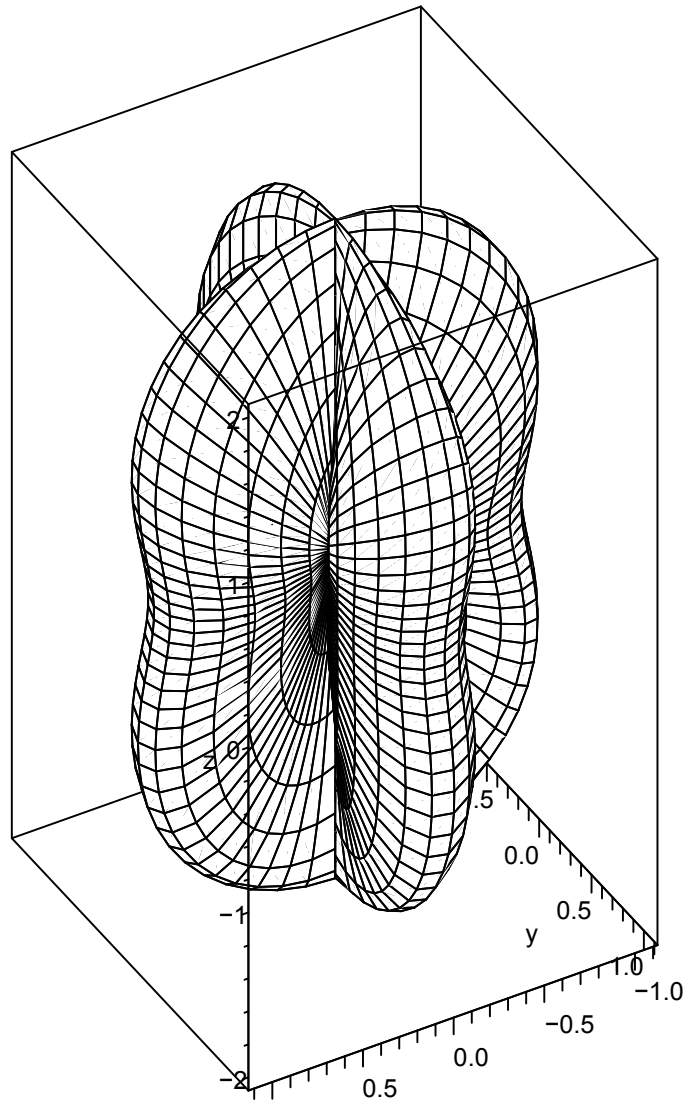
$$\begin{aligned}n_a &= 0 \\n_b &= \sin \vartheta \\H_{aa} &= \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \\H_{bb} &= \cos^2 \vartheta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).\end{aligned}\tag{3.82}$$

Dosazením projekcí do (3.59) při použití (3.71) dostaneme závislost $\Delta t(\vartheta, \varphi)$, jejímž vykreslením je pro $L = 1$ a $\omega = 0,0001$ (uvažujeme dlouhé vlny) Obrázek 3.3.

Podotkněme ještě, že pro rameno detektoru stejně dlouhé, jako je vlnová délka vlny (tj. $\omega L = 2\pi$), dostaneme z (3.71)

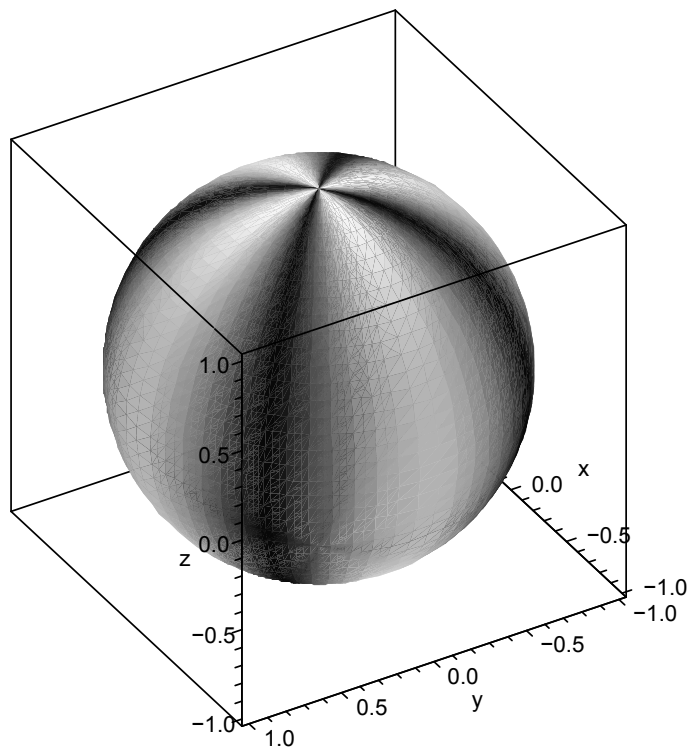
$$\delta t(\mathbf{a}) = 0,\tag{3.83}$$

pokud vlna dopadá kolmo na rameno ($n_a = 0$).



Obrázek 3.3: Příklad směrové závislosti odezvy detektoru. Uvažujme detektor umístěný na povrchu Země, jehož ramena v daném bodě (ϑ, φ) zemského povrchu míří podél rovnoběžky a poledníku, které tímto bodem procházejí. Lineárně polarizovaná gravitační vlna s polarizací $+$ přichází ze severního nebeského pólu. Délka průvodiče na tomto sférickém grafu představuje absolutní hodnotu detekovaného rozdílu dob letu světla rameny detektoru v závislosti na umístění detektoru, které je určeno sférickými úhly ϑ a φ .

Všimněme si „křížovitých“ konců závislosti. Ty přesně odpovídají tomu, že detektor, který je umístěn na pólu a dopadá na něj uvažovaná vlna, naměří nulový rozdíl, pokud jsou jeho ramena pootočena o 45° vůči polarizačnímu „kříži“ vlny. V tu chvíli je totiž detektor natočen tak, že je naladěn na \times polarizaci vlny. Na obě jeho ramena působí gravitační vlna v každý moment stejně, takže rozdíl vychází nulový. Také můžeme říci, že celá situace je symetrická vzhledem k rovině symetrie detektoru. Tato rovina symetrie je kolmá na rovinu detektoru a půlí úhel mezi rameny.



Obrázek 3.4: Totéž co Obrázek 3.3, až na to, že zde je rozdíl dob letu reprezentován stupni šedi.

Závěr

Detekce gravitačních vln je zatím stále hudbou budoucnosti. Její objevení byla předpovídána „v další dekádě“ již po čtyři desetiletí, nicméně na tuto událost se stále čeká. Citlivost detektorů byla v průběhu času neuvěřitelně zlepšena a problému se věnuje stále větší a větší množství fyziků, inženýrů a pracovníků v dalších příbuzných profesích. Během vývoje byly objeveny a prozkoumány nové fyzikální problémy a vynalezeny nové technologie. Detektory gravitačních vln patří k těm nejcitlivějším zařízením, které kdy byly zkonstruovány.

Současná potřeba co největší znalosti vlastností přichozích gravitačních vln z astrofyzikálních zdrojů podněcuje práci na počítačových výpočtech – numerické relativitě, prudce se rozvíjejícím oboru obecné relativity.

Náš jednoduchý model a výpočty měly (pomocí základních principů obecné relativity) ukázat, proč interferenční detektor gravitačních vln vlastně funguje a jaké výsledky lze přibližně očekávat na reálném detektoru. Nesnažili jsme se tedy o v praxi nasaditelnou vědu, ale pouze o určitou obhajobu skutečných detektorů. Výpočty současně měly ukázat, jak lze základní zákony a rovnice obecné relativity aplikovat na daný problém.

Možným rozšířením výpočtu odezvy detektoru by bylo řešení dynamiky skutečného elektromagnetického pole pomocí Maxwellových rovnic na pozadí gravitační vlny. Nikoliv pouze dynamiky zástupných idealizovaných fotonů.

Seznam použité literatury

- [1] Ju, L., Blair, D. G., Zhao, O.: *Detection of gravitational waves*, Rep. Prog. Phys. **63** (2000) 1317–1427.
<http://www.mpifr-bonn.mpg.de/staff/sbritzen/gravwaves.pdf>
- [2] Kokkotas, K.: *Gravitational Waves: Theory, Sources and Detection*, studijní materiály, Univerzita Tuebingen.
http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kokkotas/Teaching/NS.BH.GW_files/GTR_course5.pdf
- [3] Sigg, D.: *Gravitational Waves*, in *Neutrinos in physics and astrophysics*, Paul Langacker, ed. (World Scientific, Singapore, 2000), 592–625.
<http://www.ligo.caltech.edu/docs/P/P980007-00.pdf>
- [4] Heslo z wikipedie, *Gravitational wave*.
http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_wave
- [5] Heslo z wikipedie, *Gravitational wave detector*.
http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_wave_detector
- [6] Agatsuma, K.: *Study of pendulum thermal noise in gravitational wave detectors*, studentská práce, University of Tokyo.
http://gwic.ligo.org/thesisprize/2010/agatsuma_thesis.pdf
- [7] Podolský, J.: *Pátrání po gravitačních vlnách*, populární materiál, Univerzita Karlova.
<http://utf.mff.cuni.cz/~podolsky/gravlny2/gravitvln.htm>
- [8] Bičák, J., Rudenko, V. N.: *Teorie relativity a gravitační vlny*, Univerzita Karlova, Praha, 1986.
- [9] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: *Gravitation*, W. H. Freeman, 1973.
- [10] Heslo z wikipedie, *General relativity*.
http://en.wikipedia.org/wiki/General_relativity
- [11] Weisberg, J. M., Taylor, J. H., ASP Conf. Ser. **328** (2005) 25.
<http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0407149v1>
- [12] Cusumano, J. P.: *The Power Spectral Density and the Autocorrelation*, studijní materiály, University of Rhode Island
<http://mcise.uri.edu/chelidze/courses/mce567/handouts/psdtheory.pdf>