Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Andrea Berková

Historie Kurzweilova integrálu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2011

Ráda bych na tomto místě poděkovala Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D., vedoucímu bakalářské práce za jeho podporu i cenné rady při vzniku této bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 5. 8. 2011 Andrea Berková

Název práce: Historie Kurzweilova integrálu

Autor: Andrea Berková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Předložená práce se zabývá historií Kurzweilova integrálu. Je zaměřena především na jeho srovnání s jinými významnými integrály, konkrétně s Newtonovým, Riemannovým, Lebesgueovým, Perronovým a McShaneovým integrálem. Každému z nich je věnována samostatná kapitola, která kromě definic a základních vlastností pojednává stručně též o jejich objevitelích. Pozornost je dále směřována k osobnosti Jaroslava Kurzweila a Ralpha Henstocka. Zároveň jsou zde přiblíženy okolnosti objevu Kurzweilova integrálu. Cílem práce je vyzdvihnout teorii integrace, která má svůj původ v Čechách, a přes svou elementární definici je velmi obecná a použitelná v mnoha aplikacích.

Klíčová slova: historie matematiky, teorie integrálu, Kurzweil-Henstockův integrál

Title: History of Kurzweil integral

Author: Andrea Berková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The presented work deals with history of Kurzweil integral. It focuses primarily on its comparison with other important integrals, namely Newton, Riemann, Lebesgue, Perron and McShane integral. Each of them is discussed in a separate chapter which acquaints with their authors and theories. Attention is also oriented to Jaroslav Kurzweil and Ralph Henstock. There are also mentioned the circumstances of the discovery of the Kurzweil integral. The aim is to highlight the theory of integration, which has its origins in Bohemia and despite its elementary definition, which is very general and usable in many applications.

Keywords: history of mathematics, theory of integral, Kurzweil-Henstock integral

Obsah

Úvod

Tématem mé bakalářské práce je historie Kurzweilova integrálu. Tato významná teorie integrace vznikla v českém prostředí a jak již název napovídá, pochází od Jaroslava Kurzweila, který ji uvedl v roce 1957 ve své práci [8]. V této publikaci se J. Kurzweil věnoval obyčejným diferenciálním rovnicím a jejich spojité závislosti na parametru. Pojem integrálu zde měl pouze pomocnou povahu.

Integrál je jedním ze základních pojmu matematické analýzy, vyvíjel se s rozvojem matematiky a prošel řadou změn a zobecnění. Proto existuje více definic integrálu. V této práci uvedeme spolu s Kurzweilovou teorií několik nejvýznamnějších přístupů k pojmu integrálu, tak jak postupem času vznikaly. Budeme se snažit poukázat na jejich přednosti či nedostatky a zejména ukázat jejich porovnání s Kurzweilovým integrálem.

Práce je rozdělena do 7 kapitol. V první kapitole se seznámíme s Kurzweilovou definicí integrálu a s jeho zajímavými vlastnostmi. Druhá až šestá kapitola je věnována jednotlivým druhům integrálu, a to jmenovitě Newtonovu, Riemannovu, Lebesgueovu, Perronovu a McShaneovu integrálu. Vždy se zaměříme nejen na definice, ale také na jejich autory - významné představitele matematiky, kteří přispěli k teorii integrace. V poslední 7. kapitole se seznámíme s okolnostmi objevu Kurzweilova integrálu, osobou J. Kurzweila a R. Henstocka, který k historii Kurzweilova integrálu také neodmyslitelně patří, jelikož nezávisle na J. Kurzweilovi objevil stejný způsob integrace o několik let později. Závěr je věnován malé rekapitulaci a nahlédnutí do historie integrálu.

Úvodem bych chtěla ještě stručně nastínit vzájemné vztahy mezi integrály. Mezi nejvýznamnejší a zcela jistě nejznámější integrály patří Newtonův a Riemannův. Newtonův pro svou jednoduchou definici umožňující snadný výpočet, Riemannův díky názorné geometrické interpretaci. Newton a později i Perron vyšli při svých úvahách z diferenciálního počtu a z primitivní funkce. Naopak Riemann pojal integrál jako limitu součtu a jeho dalším zobecněním se stal Lebesgueův a později i Kurzweilův přístup. Kurzweilův integrál je definován velmi podobně jako integrál Riemannův, zachovává si tedy názornost Riemannovy definice. Přesto dostáváme integrál, který má širší třídu integrovatelných funkcí než integrál Lebesgueův a je ekvivalentní integrálu Perronovu. Navíc lze mnohé velmi silné věty dokázat pro Kurzweilův integrál elementárními prostředky. Na druhou stranu podotkněme, že v případě integrování přes vícerozměrné intervaly se s Kurzweilovým integrálem nepracuje snadno. V této práci se ovšem zaměříme pouze na funkce jedné reálné proměnné a na jednorozměrný integrál, a tak budeme moci ukázat, že díky objevu Jaroslava Kurzweila jsme získali integrál Riemannova typu, který v sobě zahrnuje jak Riemannovu, tak také Newtonovu, Lebesgueovu i Perronovu teorii.

1 Kurzweilova teorie

1.1 Kurzweilova definice integrálu

Kurzweilův integrál je podobně jako integrál Riemannův definován pomocí integrálních součtů, ovšem je obecnější a zároveň je zobecněním i Newtonova integrálu. Má tedy schopnost integrovat každou derivaci. Kurzweilův integrál je také obecnější než Lebesgueův integrál a v případě integrování přes jednorozměrné intervaly má všechny výhody Lebesgueova integrálu.

Při konstrukci tohoto integrálu je základní myšlenkou vyjádřit hodnotu Newtonova integrálu pomocí nějakých integrálních součtů, které jsou Riemannova typu. Dříve, než přistoupíme k definici Kurzweilova integrálu, je nezbytné seznámit se s pojmy kalibr a dělení.

1.1 Definice. (Kalibr a dělení) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť je na uzavřeném intervalu $[a, b]$ dána kladná funkce $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$. Tuto funkci nazveme kalibrem. Dále nechť $D = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ je dělení s význačnými body τ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ intervalu $[a, b]$, tj. pro D platí $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ a současně $a_{i-1} \le \tau_i \le a_i$, pro $i = 1, 2, \ldots, k$.[1] Pokud D navíc splňuje podmínku

$$[a_{i-1}, a_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)),\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

nazveme jej δ-jemným dělením intervalu $[a, b]$.

1.2 Poznámka. Množinu všech dělení, která jsou δ-jemná, budeme značit $A(\delta, [a, b])$. Pro danou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $D = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ označme příslušný integrální součet $S(f, D) = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(a_i - a_{i-1})$.

Dále ukážeme, že vždy existuje dělení, které je δ-jemné, což nám umožní vyslovit definici Kurzweilova integrálu. Jelikož J. Kurzweil k definici integrálu toto tvrzení potřeboval, ve svém původním článku [8] si jej dokázal sám. Později se však ukázalo, že jej již dříve z jiných důvodů dokázal P. Cousin. Lemma je proto uváděno pod Cousinovým jménem.

[1] Pojmu dělení se podrobněji věnujeme v kapitole zabývající se Riemannovým integrálem.

1.3 Lemma. (Cousinovo) *K danému kalibru* $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ *existuje dělení intervalu* $[a, b]$*, které je* δ*-jemné, tj.* $A(\delta, [a, b]) \neq \emptyset$*.*

Důkaz. Označme $M = \{c \in (a, b];\ A(\delta, [a, c]) \neq \emptyset\}$. Čísly $a = a_0 = \tau_1 < a_1 = \min(a + \delta(a), b)$ je určeno δ-jemné dělení intervalu $[a, c]$, kde $c = \min(a + \delta(a), b)$. Pak $c \in M$ a M je neprázdná množina, shora omezená číslem b. Označíme $d = \sup M$ a ukážeme, že $d \in M$ a $d = b$.

Jelikož je $d \in [a, b]$, je $\delta(d) > 0$. Z definice supréma víme, že existuje číslo $c \in M \cap (d - \delta(d), d]$. Jestliže $c = d$ je $d \in M$. Jinak je zřejmě $c < d$ a nechť $\{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ je δ-jemné dělení intervalu $[a, c]$. Položme $\tau_{k+1} = a_{k+1} = d$ a mějme dělení $D = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k, \tau_{k+1}, a_{k+1}\}$. Jelikož $[c, d] \subset (d - \delta(d), d]$, je D zřejmě δ-jemné dělení $[a, d]$, a tedy $d \in M$.

Zbývá ukázat, že je $d = b$. Předpokládejme, že to neplatí, tedy $d < b$. Pak jelikož $d \in M$ opět víme, že existuje δ-jemné dělení $\{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_m, a_m\}$ intervalu $[a, d]$, které opět doplníme o body $\tau_{m+1} = a_m = d$ a $a_{m+1} = \min(d + \delta(d), b)$. Tím jsme získali dělení intervalu $[a, c]$, kde $c = \min(d + \delta(d), b)$. Pak $c \in M$ a přitom $c > d = \sup M$. Což je spor s definicí supréma, a tedy $d = b$. Jelikož $d \in M$ dostáváme $A(\delta, [a, b]) \neq \emptyset$. $\square$

S tímto aparátem nyní můžeme vyslovit definici Kurzweilova integrálu.

1.4 Definice. (Kurzweilův integrál) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Číslo I nazveme Kurzweilovým integrálem funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ od a do b, jestliže pro všechny $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ tak, že pro každé δ-jemné dělení D intervalu $[a, b]$ platí

$$|S(f, D) - I| < \varepsilon.$$

Kurzweilův integrál fce f od a do b značíme $(K) \int_a^b f(x)dx$. Množinu všech funkcí, které mají Kurzweilův integrál od a do b, značíme $\mathcal{K}([a, b])$.

1.5 Poznámka. Pokud $a > b$, definujeme $(K) \int_a^b f(x)dx = -(K) \int_b^a f(x)dx$. V případě, že $a = b$, definujeme $(K) \int_a^b f(x)dx = 0$.

Skutečnost, že funkce f je integrovatelná v Kurzweilově smyslu, neimplikuje existenci Kurzweilova integrálu absolutní hodnoty této funkce $|f|$. Jedná se tedy o neabsolutně konvergentní integrál.

1.2 Některé zajímavé vlastnosti Kurzweilova integrálu

Tuto podkapitolu začneme velmi užitečným lemmatem, které se v teorii Kurzweilova integrálu používá téměř v každém důkazu hlubších tvrzení o integrálu.

1.6 Lemma. (Saksovo-Henstockovo, [1; kapitola 6, Lemma 1.1]) *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť je dána funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrovatelná na $[a, b]$. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezměme kalibr $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ takový, že pro každé dělení $D \in A(\delta, [a, b])$ platí nerovnost*

$$\left| S(f, D) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Potom pro libovolný systém

$$a \le u_1 \le \lambda_1 \le v_1 \le u_2 \le \cdots \le u_m \le \lambda_m \le v_m \le b$$

splňující

$$[u_i, v_i] \subset (\lambda_i - \delta(\lambda_i), \lambda_i + \delta(\lambda_i)), i = 1, 2, \ldots, m,$$

platí

$$\left| \sum_{i=1}^{m} [f(\lambda_i)(v_i - u_i) - \int_{u_i}^{v_i} f(x)dx] \right| \le \varepsilon. \tag{1.1}$$

Vysvětleme si nyní, o čem lemma pojednává. Najdeme-li k danému $\varepsilon > 0$ kalibr δ na $[a, b]$, takový, že pro $D \in A(\delta, [a, b])$ platí $|S(f, D) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$, tj. integrální součet $S(f, D)$ aproximuje s ε-přesností integrál $\int_a^b f(x)dx$, potom po vynechání některých sčítanců v $S(f, D)$ dostaneme výraz, který také s ε-přesností aproximuje součet integrálů přes intervaly v $[a, b]$, které dostaneme vynecháním intervalů příslušných vynechaným sčítancům v $S(f, D)$.

Velký přínos Saks-Henstockova lemmatu je zejména v jeho důsledku, který je jeho zesílením. Výraz (1.1) lze totiž nahradit výrazem

$$\sum_{i=1}^{m} \left| f(\lambda_i)(v_i - u_i) - \int_{u_i}^{v_i} f(x)dx \right| \le \varepsilon.$$

Důkaz lemmatu i jeho důsledku lze nalézt například v knize [1].

Zajímavá a v případech klasických integrálů neobvyklá je následující věta.

1.7 Věta. (Hakeova, [1; kapitola 6, Věta 2.3]) *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť je dána taková funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, že pro každé $c \in [a, b)$ existuje integrál $\int_a^c f(x)dx$. Předpokládejme, že existuje vlastní limita*

$$\lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx = I.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f(x)dx$ a platí rovnost

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Obdobná věta platí pro případ levého koncového bodu intervalu $[a, b]$. Tuto přirozenou a žádoucí vlastnost nemá Riemannův, a dokonce ani Lebesgueův integrál. V případě těchto integrálů to vede k zavedení pojmu nevlastního integrálu tak, že se hodnotou limity I dodefinuje hodnota integrálu $\int_a^b f$.

Pro teorii integrálu je z hlediska použitelnosti v různých aplikacích klíčové znát tzv. konvergenční věty. Budeme se tedy dále zabývat otázkou, za jakých podmínek platí vztah

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \int_a^b f(x),$$

kdy tedy můžeme zaměnit limitu a integrál, a kdy je zároveň zaručena existence integrálu limitní funkce f, pokud $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$, jestliže víme, že funkce f_n jsou na intervalu $[a, b]$ integrovatelné pro každé $n \in \mathbb{N}$. Takové věty známe pro Lebesgueův integrál, například Leviho větu o monotonní konvergenci nebo Lebesgueovu větu o dominované konvergenci. Nyní si ukážeme podobné věty, které platí pro Kurzweilův integrál.

1.8 Věta. (O monotónní konvergenci, [1; kapitola 8, Věta 4.4]) *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, je posloupnost funkcí integrovatelných v Kurzweilově smyslu na $[a, b]$ takových, že pro každé $x \in [a, b]$ platí*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \dots,$$

nebo

$$f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots \ge f_n(x) \ge \dots$$

Dále předpokládejme, že posloupnost integrálů $\{\int_a^b f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená a že existuje vlastní limita* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *pro každé* $x \in [a,b]$*. Potom je funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrovatelná na* $[a,b]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x).$$

1.9 Věta. (O dominované konvergenci, [1; kapitola 8, Věta 4.5]) *Buď* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *a nechť* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$*,* $n = 1, 2, ...$*, je posloupnost funkcí kurzweilovsky integrovatelných na* $[a,b]$ *a nechť existují funkce* $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *kurzweilovsky integrovatelné na* $[a,b]$ *takové, že pro každé* $x \in [a,b]$ *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$g(x) \le f_n(x) \le h(x).$$

Dále předpokládejme, že existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *pro každé* $x \in [a,b]$*. Potom je funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrovatelná na* $[a,b]$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x).$$

Kurzweilův integrál je v jistém smyslu určen pomocí limitního procesu, v předešlých větách šlo tedy o záměnu dvou limitních přechodů, čehož se při jejich dokazování využívá. Podmínkou záměny limitních přechodů je v tomto případě tzv. *stejná integrovatelnost funkcí*, která je oslabením požadavku stejnoměrné konvergence. Podrobnosti o tomto pojmu je možné nalézt v [1].

Závěrem této kapitoly upozorněme na jisté přednosti a nedostatky Kurzweilova integrálu. S ohledem na definici pomocí integrálních součtů lze Kurzweilův integrál přímo přenést na funkce s hodnotami v topologickém vektorovém prostoru. Významný z hlediska potřeb dnešní matematiky je zejména případ Banachova prostoru, který rozpracoval Š. Schwabik v monografii [11]. V případě funkcí více proměnných však Kurzweilův integrál ztrácí dobré vlastnosti. Lze jej sice definovat, ale i po jednoduché transformaci se může stát, že výsledný integrál nebude existovat.

2 Newtonův integrál

2.1 Isaac Newton

Isaac Newton byl významným matematikem, ale také fyzikem a astronomem. Narodil se roku 1643 ve Woolsthropu na hrabství Loncolnshire ve východní Anglii. V deseti letech začal chodit do vesnické školy a později navštěvoval střední školu v Granthamu. V letech 1661 – 1665 studoval na univerzitě v Cambridge. Když roku 1665 uprchl před morem na rodné panství, vytvořil mimo jiné tzv. „*teorii fluxí a fluent*“,[2] o kterou se opírá při výkladu infinitezimálního počtu. Od roku 1669 působil jako profesor na Lucasově katedře v Cambridge, kde setrval bezmála 30 let. Poté se stal správcem londýnské mincovny a stál v čele Královské společnosti. Isaac Newton zemřel roku 1727.

Isaac Newton

[2]Newton tuto metodu formuloval v rukopise z roku 1666, publikována však byla daleko později.

2.2 Newtonova definice integrálu

Isaac Newton spolu s G. Wilhelmem Leibnitzem nezávisle na sobě vytvořili v druhé polovině 17. století infinitezimální, tedy diferenciální a integrální počet. Srovnáme-li přístup Newtona a Leibnitze k infinitezimálnímu počtu, Leibnitz vytvářel obecné metody, jeho postup byl geometrického rázu, integrál chápal jako nekonečný součet diferenciálů. Naopak Newton kladl větší důraz na konkrétní výsledky, řešil úlohy praktického charakteru a věnoval velkou pozornost mechanice. Přesto, že vycházeli ze dvou odlišných idejí, vybudovali ucelenou teorii a dali jí pevný řád. Došlo k vzájemnému propojení metod integrování a derivování, jak můžeme vidět v následující definici Newtonova integrálu, jenž je zaveden pomocí pojmu primitivní funkce.

2.1 Definice. (Newtonův integrál) Buď $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a nechť f je reálná funkce na intervalu (a, b). Funkci F na (a, b) nazveme primitivní funkcí k f, jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Předpokládejme, že k funkci f existuje na (a, b) primitivní fce F a existují vlastní limity $\lim_{x\to b-} F(x)$ a $\lim_{x\to a+} F(x)$. Číslo I nazveme Newtonovým integrálem funkce f od a do b, jesliže platí

$$I = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Newtonův integrál fce f od a do b značíme $(N)\int_a^b f(x)dx$. Množinu všech funkcí f, které mají Newtonův integrál od a do b, značíme $\mathcal{N}((a, b))$.

2.2 Poznámka. Pokud $a > b$, definujeme $(N)\int_a^b f(x)dx = -(N)\int_b^a f(x)dx$. V případě, že $a = b$, definujeme $(N)\int_a^b f(x)dx = 0$.

Primitivní funkci lze definovat také na uzavřeném intervalu $[a, b]$, v tomto případě pak bereme v krajních bodech příslušné jednostranné derivace funkce F.

Uvedená definice Newtonova integrálu patří do kategorie tzv. deskriptivních (popisných) definic integrálu. Jak již bylo zmíněno, je popsán pomocí pojmu primitivní funkce. Tento integrál využíváme při praktickém výpočtu integrálu.

Nezapomeňme zmínit, že Newtonův integrál patří stejně jako Kurzweilův mezi neabsolutně konvergentní integrály. Existují tedy funkce integrovatelné v Newtonově smyslu, jejichž absolutní hodnota integrovatelná není, jak ukazuje následující příklad.

2.3 Příklad. Integrál $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ je neabsolutně konvergentní integrál.

Nyní přistupme ke srovnání Kurzweilova a Newtonova integrálu.

2.4 Věta. *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má Newtonův integrál $(N) \int_a^b f(x)dx$. Potom existuje také Kurzweilův integrál $(K) \int_a^b f(x)dx$ a platí*

$$(K) \int_a^b f(x)dx = (N) \int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz. Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má Newtonův integrál $(N) \int_a^b f$ nechť F je primitivní funkce k f na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Potom

$$(N) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Pro každé $\tau \in [a, b]$ dále platí $F'(\tau) = f(\tau)$. Dle definice derivace tedy pro dané $\varepsilon > 0$ a $\tau \in [a, b]$ existuje $\delta(\tau) > 0$ tak, že $\forall x \in [a, b], 0 < |x - \tau| < \delta(\tau)$ je

$$\left| \frac{F(x) - F(\tau)}{x - \tau} - f(\tau) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Dále nechť $\tau - \delta(\tau) < y \leq \tau \leq x < \tau + \delta(\tau)$, pak bude

$$|F(x) - F(y) - f(\tau)(x - y)| \leq$$

$$\leq |F(x) - F(\tau) - f(\tau)(x - \tau)| + |F(\tau) - F(y) - f(\tau)(\tau - y)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b - a}(|x - \tau| + |\tau - y|) = \frac{\varepsilon}{b - a}(x - y).$$

Předpokládejme, že $D = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ je δ-jemné dělení intervalu $[a, b]$, pak

$$|(N) \int_a^b f(x)dx - S(f; D)| =$$

$$= |F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(a_i - a_{i-1})| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{k} [F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(\tau_i)(a_i - a_{i-1})]| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} |F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(\tau_i)(a_i - a_{i-1})| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Tímto jsme dokázali existenci Kurzweilova integrálu a rovnost $(K) \int_a^b f(x)dx = (N) \int_a^b f(x)dx$. □

3 Riemannův integrál

3.1 Georg Friedrich Bernhard Riemann

G. F. B. Riemann

G. F. B. Riemann se narodil roku 1826 ve vesnici Breselenz v Německu. V roce 1846 začal studovat filologii a teologii na univerzitě v Göttingenu. Chodil však i na matematické přednášky a o rok později mu otec povolil zahájit studium matematiky. Jeho profesorem na Göttingenské univerzitě byl například slavný C. F. Gauss. Ještě téhož roku 1847 ovšem odešel studovat do Berlína, kde setrval do roku 1849 . Poté se vrátil zpět do Göttingenu. Zde pracoval na své disertaci[3] a roku 1853 dokončil svůj habilitační spis *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*,[4] ve kterém se mimo jiné zabýval pojmem určitého integrálu a rozsahem jeho platnosti. Roku 1859 byl Riemann v Göttingenu jmenován řádným profesorem. Zemřel při cestě do Itálie roku 1866. Po Riemannově smrti roku 1876 byly vydány jeho sebrané spisy obsahující publikované i rukopisné práce.

[3] Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grosse, český název: Základy obecné teorie funkcí jedné proměnné komplexní veličiny.

[4] Český název: O reprezentovatelnosti funkce trigonometrickou řadou.

3.2 Riemannova definice integrálu

Bernhard Riemann zavedl konstruktivní součtovou definici integrálu. Využívá zde popisu obsahu rovinného útvaru pomocí Riemannových integrálních součtů. Tento postup je velmi blízký starověké exhaustivní metodě. Vlastním Riemannovým přínosem však nebyla samotná definice, ale nový přístup k otázce integrace, který spočíval v tom, že Riemann opustil předpoklad spojitosti integrandu, a tím vznikla třída riemannovsky integrovatelných funkcí.

Ve školách je častěji uváděna ekvivalentní definice Riemannova integrálu pomocí dolních a horních integrálních součtů a dolního a horního Riemannova integrálu, kterou zavedl Jean Gaston Darboux roku 1875. Zde ovšem uvedeme definici vycházející z Riemannova přístupu. Nejprve však zavedeme pojmy norma a dělení.

3.1 Definice. (Dělení a norma) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť pro body $a_0, a_1, ..., a_k$ platí

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b,$$

pak $D = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ nazýváme dělením intervalu $[a, b]$ a

$$\nu(D) = \max_{i=1...k}(a_i - a_{i-1})$$

nazýváme normou dělení D.

Jestliže máme navíc dány body splňující $a_{i-1} \leq \tau_i \leq a_i$, $i = 1, ..., k$, nazýváme systém $D = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ dělením s význačnými body.

3.2 Poznámka. Pro danou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a dělení s význačnými body $D = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ označme opět příslušný integrální součet

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(a_i - a_{i-1}).$$

3.3 Definice. (Riemannův integrál) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkce omezená na $[a, b]$. Potom číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme Riemannovým integrálem funkce f od a do b, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\gamma > 0$ tak, že pro každé dělení s význačnými body D splňující $\nu(D) < \gamma$ platí

$$|S(f, D) - I| < \varepsilon.$$

Riemannův integrál fce f od a do b značíme $(R) \int_a^b f(x)\, dx$. Množinu všech funkcí f, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a, b])$.

3.4 Poznámka. Pokud $a > b$, definujeme $(R)\int_a^b f(x)dx = -(R)\int_b^a f(x)dx$. V případě, že $a = b$, definujeme $(R)\int_a^b f(x)dx = 0$.

Připomeňme, že pojmy Newtonova a Riemannova integrálu jsou různé. Existují funkce integrovatelné podle Newtonovy definice, které však nejsou integrovatelné dle Riemannovy a naopak.

3.5 Příklad. Uvažujme Riemannovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q}, \text{ kde } p, q \text{ jsou nesoudělná} \\ \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Tato funkce má v $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Riemannův integrál, ale nemá Newtonův, jelikož k ní v $[a, b]$ neexistuje primitivní funkce.

Naopak vezměme funkci f definovanou na $[-1, 1]$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} + 2x\sin\frac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ \\ 0 \quad \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

Primitivní funkcí k této funkci je

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ \\ 0 \quad \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

Newtonův integrál tedy existuje a

$$(N)\int_{-1}^{1} f(x)dx = \lim_{x\to 1-} F(x) - \lim_{x\to -1+} F(x) = 0.$$

Funkce f ale není v $[-1, 1]$ omezená, a tedy $f \notin \mathcal{R}([a, b])$.

Poznamenejme ještě, že každá spojitá funkce $f \in \mathcal{C}([a, b])$ je prvkem $\mathcal{N}([a, b])$ a také $\mathcal{R}([a, b])$. V případě čtenářova zájmu je důkaz uveden například v [1].

Význam dělení s normou menší než dané kladné číslo γ je obdobný, jako byl v případě definice Kurzweilova integrálu pojem δ–jemné dělení pro nějaký kalibr δ. Tvrzení obdobné jako je Cousinovo lemma však v případě Riemannova integrálu není třeba dokazovat, neboť existence dělení D intervalu $[a,b]$, pro které je $\nu(D) < \gamma$, je vcelku zřejmá.

Právě díky této nenápadné změně v jemnosti dělení je množina funkcí $\mathcal{K}([a,b])$ mnohem větší než množina $\mathcal{R}([a,b])$.

3.6 Věta. *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál $(R)\int_a^b f(x)dx$. Potom existuje také Kurzweilův integrál $(K)\int_a^b f(x)dx$ a platí*

$$(K)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx. \tag{3.1}$$

Důkaz. Nechť funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má tedy Riemannův integrál $I = (R)\int_a^b f(x)dx$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\gamma > 0$ tak, že pro libovolné dělení s význačnými body $D = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ splňující $\nu(D) < \gamma$ platí

$$|S(f;D) - I| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Zvolme kalibr $\delta(x) = \frac{\gamma}{3}$ pro každé $x \in [a,b]$ a nechť D je libovolné δ-jemné dělení $[a,b]$. Pak platí

$$[a_{i-1}, a_i] \subset (\tau_i - \frac{\gamma}{3}, \tau_i + \frac{\gamma}{3}), i = 1, 2, \ldots, k$$

a norma tohoto dělení je $\nu(D) < \frac{2\gamma}{3} < \gamma$.

Našli jsme tedy kalibr $\delta : [a,b] \to (0, +\infty)$ takový, že pro libovolné δ-jemné dělení je splněna nerovnost (3.2), čímž jsme dokázali existenci Kurzweilova integrálu a rovnost (3.1). $\square$

4 Lebesgueův integrál

4.1 Henri Léon Lebesgue

Henri Léon Lebesgue byl významným francouzským matematikem 20. století. Narodil se roku 1875. Základní a střední vzdělání získal v Beauvais, poté odešel do Paříže. Studoval na École Normale Spérieure. První formulaci nového integrálu, silnějšího než integrál Riemannův, podal Lebesgue roku 1901 v práci *Sur une généralisation de l'intégrale definie.*[5] Podrobněji svou teorii rozpracoval v disertační práci *Integrále, longeur, aire*,[6] kterou předložil následujícího roku. H. L. Lebesgue působil během svého života na univerzitách v Nancy, Rennes, Poitieres a nakonec v Paříži. Roku 1921 získal místo profesora na Collége de France, kde setrval až do své smrti roku 1941. Členem Akademie byl zvolen v roce 1922.

H. L. Lebesgue

[5] Český název: O zobecnění definice integrálu.

[6] Český název: Integrál, délka, plocha.

4.2 Lebesgueova definice integrálu

Teorie Lebesgueova integrálu je od svého vzniku ústřední v matematické analýze celého minulého století. H. L. Lebesgue předložil konstruktivní definici integrálu vycházející z jiného způsobu dělení, než je tomu u Riemannova integrálu. Rozdíl mezi riemannovským a lebesgueovským dělením spočívá hlavně v tom, že u lebesgueovského dělení pracujeme s dělením oboru hodnot. V definičním oboru pak vznikají množiny, které nemusejí být intervaly. Před vyslovením definice Lebesgueova integrálu je tedy zapotřebí vybudovat teorii míry. Tento rozdíl v pohledu na dělení podstatně přispívá k bohatství třídy lebesgueovsky integrovatelných funkcí. Pro naše účely však postačí alternativní deskriptivní definice pomocí absolutně spojitých funkcí. V případě zájmu se čtenář může s konstruktivní definicí pomocí teorie míry podrobně seznámit v [7].

4.1 Definice. (Absolutně spojité funkce) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Říkáme, že funkce F je absolutně spojitá v intervalu $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý systém

$$a \leq u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq v_n \leq b$$

splňující

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i - u_i) < \delta,$$

platí

$$\sum_{i=1}^{n}|F(v_i) - F(u_i)| < \varepsilon.$$

4.2 Definice. (Lebesgueův integrál) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Číslo I nazveme Lebesgueovým integrálem funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ od a do b, jestliže existuje absolutně spojitá funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tak, že $F'(x) = f(x)$ a platí

$$I = F(b) - F(a).$$

Lebegueův integrál fce f od a do b značíme $(L)\int_a^b f(x)\,dx$. Množinu všech funkcí f, které mají Lebesqueův integrál od a do b, značíme $\mathcal{L}([a, b])$.

Jak můžeme vidět z definice, pomocí Lebesgueova integrálu nelze integrovat každou derivaci, dovede totiž integrovat pouze derivace absolutně spojitých funkcí.

4.3 Příklad. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} + 2x\sin\frac{\pi}{x^2} & \text{pro } x \in (0,1] \\ \\ 0 \quad \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

Primitivní funkcí k funkci f je

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{\pi}{x^2} & \text{pro } x \in (0,1] \\ \\ 0 \quad \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

Funkce F není v $[0,1]$ absolutně spojitá, proto f nemá v $[0,1]$ Lebesgueův integrál, má zde ovšem Newtonův integrál $(N)\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 0$, funkce f je tedy v $[0,1]$ integrovatelná v Newtonově, a tak i Kurzweilově smyslu.

Lebesgueův integrál je stejně jako integrál Riemannův absolutně konvergentní, nemůže tedy pokrýt neabsolutně konvergentní integrály. Srovnáme-li nyní Kurzweilův a Lebesgueův integrál dostaneme následující větu, kterou zde ovšem dokazovat nebudeme, její důkaz je uveden v [7].

4.4 Věta. *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má Lebesgueův integrál $(L)\int_a^b f(x)dx$. Potom také existuje Kurzweilův integrál $(K)\int_a^b f(x)dx$ a platí*

$$(K)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx.$$

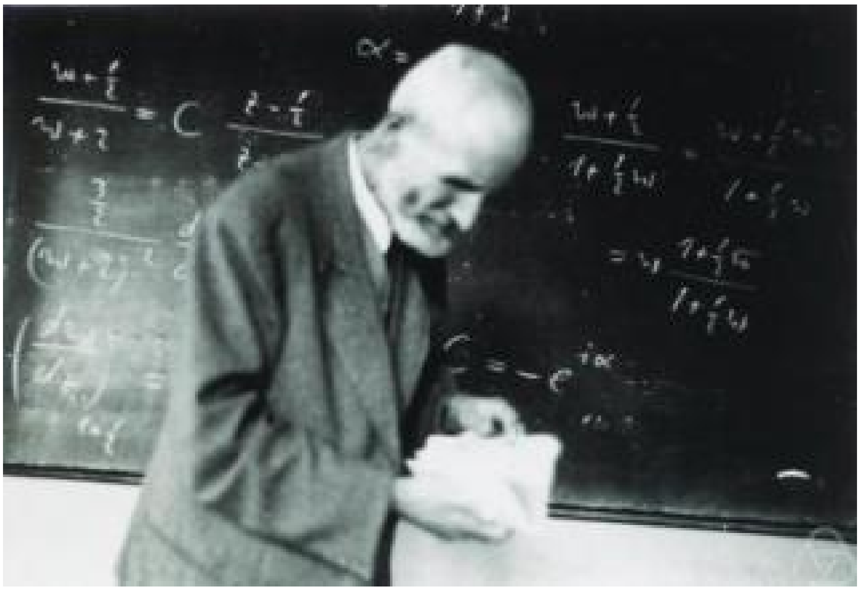
Uvedeme zde ještě další větu charakterizující vztah mezi Kurzweilovým a Lebesgueovým integrálem, která ukazuje na absolutní konvergenci Lebesgueova integrálu.

4.5 Věta. [1; kapitola 13, Věta 5.1] *Pro funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí $f \in \mathcal{L}([a,b])$, právě když $f, |f| \in \mathcal{K}([a,b])$.*

Zjištění, že Lebesgueův integrál dovede integrovat pouze derivace absolutně spojitých funkcí, vedlo k tomu, že se mnoho matematiků věnovalo budování teorie takových integrálů, které dovedou integrovat každou derivaci. Takovým integrálem se stal Perronův integrál, kterému se budeme věnovat v následující kapitole.

5 Perronův integrál

5.1 Oskar Perron



Oskar Perron

Oskar Perron se narodil 7. května 1880 v německém Frankenthalu. Jeho otec si přál, aby pokračoval v rodinném podniku, Perron ovšem ve volném čase studoval matematiku a roku 1898 vstoupil na univerzitu v Mnichově. Dále studoval na univerzitách v Berlíně, Tübingen a Göttingen. Ve své disertační práci se Perron věnoval geometrii pod vedením profesora Lindemanna. Asi nejznámější z jeho práce je Perronův integrál, nicméně věnoval se také dalším tématům, jako jsou diferenciální rovnice, teorie matic, neeuklidovská geometrie, algebra a teorie čísel. Od roku 1910 byl profesorem v Tübingenu, dále v Heidelbergu a od roku 1922 v Mnichově. Přestože odešel roku 1951 formálně do důchodu, pokračoval v přednáškách na Mnichovské univerzitě a publikoval až do roku 1973. Zemřel 22. února 1975 v Mnichově.

5.2 Perronova definice integrálu

V roce 1914 Oskar Perron vytvořil neabsolutně konvergentní integrál, který vedl k odstranění nesrovnalosti mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem. Perronův integrál totiž zahrnuje Newtonův i Lebesgueův (a tedy i Riemannův) integrál. Oskar Perron přitom vyšel podobně jako Newton z pojmu primitivní funkce. Pro funkci f vyšetřuje Perron majoranty M a minoranty m této funkce a rozdíly $M(b) - M(a)$, $m(b) - m(a)$ bere jako horní a dolní odhad hledaného integrálu.

5.1 Definice. (Horní a dolní derivace) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť je dána funkce $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $x \in [a, b]$. Dolní derivací funkce g v bodě x rozumíme

$$\underline{D}g(x) = \liminf_{h \to 0,\ x+h \in [a,b]} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

a horní derivací funkce g v bodě x rozumíme

$$\overline{D}g(x) = \limsup_{h \to 0,\ x+h \in [a,b]} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

5.2 Definice. (Majoranta a minoranta) Nechť je dána funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funkci $M : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazveme majorantou k funkci f, jestliže $\forall x \in [a, b]$ platí

$$\underline{D}M(x) \geq f(x).$$

Funkci $m : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazveme minorantou k funkci f, jestliže $\forall x \in [a, b]$ platí

$$\overline{D}m(x) \leq f(x).$$

5.3 Definice. (Perronův integrál) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Číslo I nazveme Perronovým integrálem funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ od a do b, jestliže existuje alespoň jedna majoranta i minoranta a platí

$$\inf_M (M(b) - M(a)) = \sup_m (m(b) - m(a)) = I,$$

kde infímum bereme přes všechny majoranty M a suprémum přes všechny minoranty m k funkci f.

Perronův integrál funkce f od a do b značíme $(P) \int_a^b f(x)\, dx$. Množinu všech funkcí f, které mají Perronův integrál od a do b, značíme $\mathcal{P}([a, b])$.

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi Kurzweilovým a Perronovým integrálem. Přestože jejich definice vycházejí z odlišných koncepcí, nyní dokážeme, že jsou ekvivalentní.

5.4 Věta. *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť je dána funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak existuje Perronův integrál $(P)\int_a^b f(x)dx$ právě tehdy, když existuje Kurzweilův integrál $(K)\int_a^b f(x)dx$ a platí*

$$(K)\int_a^b f(x)dx = (P)\int_a^b f(x)dx. \tag{5.1}$$

Důkaz. 1) Nejprve předpokládejme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má Perronův integrál $(P)\int_a^b f(x)dx$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje majoranta M a minoranta m k funkci f splňující

$$-\frac{\varepsilon}{2} < m(b) - m(a) - (P)\int_a^b f(x)dx \leq 0 \leq M(b) - M(a) - (P)\int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z definice majoranty víme, že pro libovolné dané $\tau \in [a, b]$ existuje $\delta(\tau) > 0$ takové, že

$$f(\tau) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{M(y) - M(\tau)}{y - \tau},$$

kde $0 < |y - \tau| < \delta(\tau)$ a $y \in [a, b]$.

Dále nechť $D = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ je δ-jemné dělení $[a, b]$. Potom

$$\sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) - (P)\int_a^b f(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \Big[f(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) - (M(a_i) - M(a_{i-1}))\Big] + (M(b) - M(a)) - (P)\int_a^b f(x)dx <$$

$$< \sum_{i=1}^{k} \Big[f(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) - (M(a_i) - M(a_{i-1}))\Big] + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \Big[f(\tau_i)(a_i - \tau_i) - (M(a_i) - M(\tau_i)) + f(\tau_i)(\tau_i - a_{i-1}) - (M(\tau_i) - M(a_{i-1}))\Big] + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_i - \tau_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(\tau_i - a_{i-1})\right] + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při užití minoranty zcela obdobně platí

$$\sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) - (P)\int_a^b f(x)dx > -\varepsilon.$$

Odtud dostaneme nerovnost

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(a_i - a_{i-1}) - (P)\int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

čímž jsme dokázali existenci Kurzweilova integrálu a rovnost (5.1).

2) Nyní předpokládejme, že funkce f má Kurzweilův integrál $(K)\int_a^b f(x)dx$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje kalibr $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ tak, že

$$\left|S(f;D) - (K)\int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.2}$$

kde D je δ-jemné dělení $[a,b]$.

Nechť $x \in [a,b]$ a nechť D_x je δ-jemné dělení intervalu $[a,x]$. Definujme

$$M_\varepsilon(a) = 0, \quad M_\varepsilon(x) = \sup_{D_x} S(f;D_x)\,,$$

$$m_\varepsilon(a) = 0, \quad m_\varepsilon(x) = \inf_{D_x} S(f;D_x)\,.$$

Ukážeme, že funkce M_ε je majoranta a funkce m_ε je minoranta k funkci f v $[a,b]$. Předpokládejme tedy, že $\tau,\ c,\ d \in [a,b]$, $c \le \tau \le d$, $|c-\tau| < \delta(\tau)$ a $|d-\tau| < \delta(\tau)$, pak podle definice funkce M je

$$f(\tau)(d-c) + M_\varepsilon(c) \le M_\varepsilon(d)$$

a pokud $c < d$, pak

$$f(\tau) \le \frac{M_\varepsilon(d) - M_\varepsilon(c)}{d-c}$$

Jestliže nyní položíme $c = \tau$ nebo $d = \tau$, dostaneme

$$f(\tau) \le \liminf_{y\to\tau} \frac{M_\varepsilon(y) - M_\varepsilon(\tau)}{y-\tau}\,,$$

funkce M_ε je tedy majorantou k funkci f. Podobně lze ukázat, že funkce m_ε je minorantou k f.

Z nerovnosti (5.2) dostaneme, že platí

$$M_\varepsilon(b) - M_\varepsilon(a) - (m_\varepsilon(b) - m_\varepsilon(a)) = M_\varepsilon(b) - m_\varepsilon(b) \le \varepsilon.$$

Pak

$$
\begin{aligned}
0 \le \inf_M (M(b) - M(a)) - \sup_m (m(b) - m(a)) \le \\
\le M_\varepsilon(b) - M_\varepsilon(a) - \sup_m (m(b) - m(a)) \le \\
\le M_\varepsilon(b) - M_\varepsilon(a) - (m_\varepsilon(b) - m_\varepsilon(a)) \le \varepsilon \,,
\end{aligned}
$$

odkud dostaneme

$$\inf_M (M(b) - M(a)) = \sup_m (m(b) - m(a)) \,,$$

čímž jsme dokázali existenci Perronova integrálu, přičemž rovnost (5.1) vyplývá už z první části důkazu. □

Poznamenejme, že tedy konstruktivně definovaný Kurzweilův integrál definovaný pomocí riemannovských integrálních součtů je ekvivalentní deskriptivně definovanému Perronovu integrálu.

6 McShaneův integrál

6.1 Edward James McShane

Edward James McShane se narodil v New Orleans 10. května 1904. Studoval na univerzitě v Tulane a dále pokračoval ve studiu na univerzitě v Chicagu. V letech 1928 – 29 musel z finančních důvodů svá studia přerušit a učit na univerzitě ve Wichitě. Během svého pobytu v Göttingenu roku 1932 – 33 přeložil do angličtiny knihy o diferenciálním a integrálním počtu. Po dvou letech na univerzitě v Princetonu přešel McShane na katedru matematiky univerzity ve Virginii, kde zůstal po zbytek své kariéry. V době druhé světové války působil v čele balistické výzkumné laboratoře v Marylandu. Během této doby napsal s dalšími autory knihu *Exterior ballistics*.[7] Roku 1983 vydal svazek *Unified integration*,[8] kde se věnuje zobecněné teorii integrace, spolu s řadou aplikací ve fyzice, diferenciálních rovnicích a pravděpodobnosti. McShane byl prezidentem Americké matematické společnosti a členem Národní akademie věd. E. J. McShane zemřel na srdeční selhání 1. června 1989 v Charlottesville ve Virginii.

E. J. McShane

[7]Český název: Pohled na balistiku.

[8]Český název: Jednotná integrace.

6.2 McShaneova definice integrálu

Definice McShaneova integrálu je velmi podobná definici Kurzweilova integrálu. Pouze pojem dělení s význačnými body vystřídal pojem L-dělení, který si nyní definujme.

6.1 Definice. (L-dělení) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Mějme dán kalibr $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ a dělení $D = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ intervalu $[a, b]$. Jestliže je navíc splněna podmínka

$$[a_{i-1}, a_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)),\ i = 1, 2, \ldots, k$$

nazýváme $D_L = \{a_0, \tau_1, a_1, ..., \tau_k, a_k\}$ δ-jemným L-dělením intervalu $[a, b]$.

6.2 Poznámka. Všimněme si, že na rozdíl od dělení s význačnými body u L-dělení nepožadujeme, aby platilo $a_{i-1} \leq \tau_i \leq a_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Pro danou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a L-dělení označme opět příslušný integrální součet $S(f, D_L) = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(a_i - a_{i-1})$.

6.3 Definice. (McShaneův integrál) Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Číslo I nazveme McShaneovým integrálem funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ od a do b, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ tak, že pro libovolné δ-jemné L-dělení D_L platí

$$|S(f, D_L) - I| < \varepsilon.$$

McShaneův integrál fce f od a do b značíme $(S) \int_a^b f(x)\ dx$. Množinu všech funkcí f, které mají McShaneův integrál od a do b, značíme $\mathcal{S}([a, b])$.

Vzhledem k inkluzi

$$A(\delta, [a, b]) \subset A_L(\delta, [a, b]),$$

kde A_L je množina všech L-dělení, která jsou δ-jemná, dostaneme následující větu.

6.4 Věta. *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má McShaneův integrál $(S) \int_a^b f(x)dx$. Potom existuje také Kurzweilův integrál $(K) \int_a^b f(x)dx$ a platí*

$$(K) \int_a^b f(x)dx = (S) \int_a^b f(x)dx.$$

Vztah Kurzweilova integrálu k integrálu McShaneovu je zřejmý. V této souvislosti platí následující věta, jejíž důkaz je možno nalézt v [1].

6.5 Věta. *Pro funkci* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *platí* f, $|f| \in \mathcal{K}([a,b])$ *právě tehdy, když* $f \in \mathcal{S}([a,b])$.

Tím nás ovšem pojem McShaneova integrálu vede ke třídě absolutně integrovatelných funkcí a k Lebesgueovu integrálu. Bezprostředním důsledkem této věty totiž je, že McShaneův integrál a Lebesgueův integrál jsou ekvivalentní. Podrobnější informace může čtenář nalézt v knize [3].

7 Kurzweil-Henstockův integrál a jeho objev

Kurzweilův integrál, kterému se v této práci věnujeme, se dnes nazývá Kurzweil-Henstockův a zabývá se jím mnoho matematiků na světě. Jméno britského matematika Ralpha Henstocka se v této souvislosti vyskytuje proto, že nezávisle na J. Kurzweilovi zavedl v roce 1960 stejným způsobem novou definici Perronova integrálu v publikaci [9]. Proto se v následující kapitole budeme věnovat těmto dvěma významným matematikům.

Ralph Henstock a Jaroslav Kurzweil

7.1 Ralph Henstock

Ralph Henstock se narodil 2. června 1923 v anglické vesnici Newstead, poblíž Nottinghamu. Podle rodinné tradice měl navštěvovat Nottinghamskou univerzitu jako jeho otec a strýc. Henstock ovšem získal stipendium, které mu umožnilo studium matematiky na St. John College v Cambridge, kde studoval od října 1941 do listopadu 1943. Chvíli pracoval v oddělení statistických metod a kontroly jakosti na ministerstvu v Londýně, tato práce ho ovšem neuspokojovala, a tak se zapsal na Londýnskou univerzitu. Zde se seznámil s profesorem Paulem Dienesem, který v něm probudil zájem o teorii integrace. Roku 1944 začal výzkum a v prosinci 1948 předložil svou doktorskou práci s názvem *Interval functions and their integrals*, jeho zkoušejícími byli tehdy J. C. Burkill a H. Kestelman. Roku 1960 zavedl stejným způsobem jako J. Kurzweil novou definici integrálu, který je dnes známý jako Kurzweil-Henstockův. V následujících desetiletích se stále věnoval teorii integrace, vydal čtyři knihy o analýze [9] a publikoval mnoho článků v odborných časopisech. V roce 1958 byl jmenován členem Královské společnosti. Ralph Henstock zemřel 17. ledna 2007 po krátké nemoci.

Ralph Henstock

[9]Theory of Integration, 1963; Linear Analysis, 1967; Lectures on the Theory of Integration, 1988; The General Theory of Integration, 1991.

7.2 Jaroslav Kurzweil

Jaroslav Kurzweil se narodil 7. května 1926 v Praze. Po ukončení střední školy se věnoval studiu matematiky a fyziky na přírodovědecké fakultě UK. Roku 1955 se stal vedoucím oddělení obyčejných diferenciálních rovnic Matematického ústavu ČSAV. Kromě jiného se věnoval otázkám závislosti řešení diferenciálních rovnic na parametrech, o čemž pojednává v již výše zmíněné práci [8]. Právě zde se setkáváme s novou teorií integrálu, která byla prostředkem k vysvětlení jistých konvergenčních jevů a k vytvoření teorie zobecněných diferenciálních rovnic. K teorii integrálu se J. Kurzweil vrátil v sedmdesátých letech. Roku 1964 mu byla udělena státní cena za matematiku a v roce 1981 mu ČSAV udělila medaili B. Bolzana. Téměř čtyřicet let přednášel na matematicko-fyzikální fakultě základní kurz diferenciálních rovnic. V letech 1990-96 byl J. Kurzweil ředitelem Matematického ústavu AV ČR, která mu v roce 1996 udělila medaili za zásluhu o vědu. Od roku 1998 do roku 2002 byl předsedou Jednoty českých matematiků a fyziků a v roce 2006 byl oceněn Národní cenou vlády Česká hlava za celoživotní dílo v oblasti teorie integrálních a diferenciálních rovnic.

Jaroslav Kurzweil

7.3 Okolnosti vzniku Kurzweilova integrálu

Kurzweilův integrál vznikl pro potřeby teorie obyčejných diferenciálních rovnic. V padesátých letech minulého století se teorie obyčejných diferenciálních rovnic, v souvislosti s výzkumem nelineárních oscilací, začala více orientovat například na závislost řešení diferenciálních rovnic na parametru a různé podoby stability řešení. Spojitá závislost na parametrech byla z hlediska aplikací ve fyzice a technických vědách zásadní, protože matematický popis jevu pomocí diferenciálních rovnic je vždy jen přibližný. Kurzweilův integrál umožnil popsat fyzikální jevy, které před jeho vznikem nebylo možno matematicky uchopit. Zúplnil prostor diferenciálních rovnic, usnadnil popis obyčejných diferenciálních rovnic s impulsy, napomohl k průzkumu integrálních rovnic v prostoru funkcí s konečnou variací, apod.

J. Kurzweil se tehdy rozvojem integrálu příliš nezaobíral, vedle prací o diferenciálních rovnicích publikoval spolu s tímto integrálem jen krátkou poznámku o integraci per partes. Specialisté v teorii integrálu tomuto nově definovanému integrálu v té době také pozornost nevěnovali. Podobný osud měly i práce R. Henstocka, i když Henstock sám v teorii integrálu pracoval. Teprve poté, co R. Henstock v roce 1963 uveřejnil knihu Theory of integration, T. H. Hildebrandt v časopise Mathematical Reviews poprvé upozornil na význam a přednosti tohoto nového integrálu. A sice, že je k dispozici integrál Riemannova typu, který je stejně dobrý jako integrál Lebesgueův a v případě integrování reálných funkcí reálné proměnné jej i předčí, protože je ekvivalentní Perronovu integrálu. Tak vznikla nová teorie integrace, která se koncem 20. století stala důležitou součástí matematické analýzy.

Závěr

Integrál je jedním z ústředních matematických pojmů. Prvotní myšlenky, které motivovaly vznik integrálního počtu je možné nalézt už v období antiky. Základem pro vznik nám známého integrálu byly výpočty obsahu a objemu. V průběhu 17. století došlo k rozpracování infinitezimálních postupů na základě dvou obecných problémů. Prvním z nich bylo právě určování obsahu ploch omezených danou křivkou a druhým bylo stanovení tečny k dané křivce v jejím daném bodě. Za zakladatele integrálního a diferenciálního počtu jsou považováni Isaac Newton a G. W. Leibnitz. Bez Newtonova integrálu se ani dnes neobejdeme, jelikož má tu výhodu, že oproti jiným integrálům umožňuje snadný výpočet. Další významnou definicí, která se po I. Newtonovi objevila, vycházela z Leibnitzova přístupu k integraci. Její formulaci dovršil B. Riemann a později ji podstatným způsobem zobecnil H. L. Lebesgue. Lebesgueův integrál se stal základním pojmem matematické analýzy 20. století. Brzy se ovšem ukázalo, že Lebesgueův integrál není schopen integrovat každou derivaci. A právě tento nedostatek se podařilo odstranit O. Perronovi a J. Kurzweilovi. V definici Kurzweilova integrálu si navíc vystačíme s elementárnějšími prostředky než u integrálu Lebesgueova nebo Perronova.

V předložené práci je rozvedena definice Kurzweilova integrálu s upozorněním na některé jeho užitečné vlastnosti. Byly zde popsány nejznámější určité integrály, se stručným objasněním historických souvislostí a poukázáno na jejich vzájemné vztahy. Podařilo se nám ukázat, že Kurzweilův integrál je zobecněním Newtonovy, Riemannovy, Lebesgueovy i McShaneovy teorie a je ekvivalentní Perronovu integrálu. Tuto práci mohou využít studenti matematiky se zájmem o matematickou analýzu a historii matematiky. V seznamu literatury jsou uvedeny tituly, které mohou čtenáři sloužit pro další podrobnější studium.

Svoji bakalářskou práci bych chtěla zakončit neobvykle, slovy Jaroslava Kurzweila, a to proto, že se málokomu v životě podaří naplnit obsah jeho slov, ale pro mě jsou velmi motivující. „Jsem v celku spokojen s tím, že se mi podařilo něco udělat a že se mi podařilo nějakým způsobem ovlivnit běh věcí kolem mě. . . “[10]

[10]KURZWEIL, J. Interwiew – televize Z1, odvysíláno 8. 6. 2010.

Literatura

[1] SCHWABIK, Š. *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* Praha: Karolinum, 1999. 326s.

[2] SCHWABIK, Š. *ŠARMANOVÁ, P. Malý průvodce historií integrálu.* Praha: Prometheus, 1996. 95 s.

[3] GORDON, R. A. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock.* Providence: American Mathematical Society, 1994. 395 s.

[4] BARTLE, R. G. *A Modern Theory of Integration.* Providence: American Mathematical Society, 2001. 458 s.

[5] JARNÍK, V. *Integrální počet I.* Praha: Academia, 1984. 243 s.

[6] JARNÍK, V. *Integrální počet II.* Praha: Academia, 1984. 763 s.

[7] LUKEŠ, J., MALÝ, J. *Míra a integrál.* Praha: Univerzita Karlova, 1993. 179 s.

[8] KURZWEIL, J. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter,* Czech. Math. Journal 7(82), 1957. s. 418–449.

[9] HENSTOCK, R. *A new descriptive definition of the Ward integral.* Journal Lond. Math. Soc. 35, 1960. s. 43–48.

[10] HENSTOCK, R. *Theory of Integration.* London: Butterworths, 1963.

[11] SCHWABIK, Š., GUOYU, Y. *Topics in Banach Space Integration.* Singapour: World Scientific Publishing, 2005.

[12] ŠIŠMA, P. *Jaroslav Kurzweil.* [online]. [cit. 2. srpna 2011]. Dostupné na <http://inserv.math.muni.cz/biografie/>.

[13] THE NATIONAL ACADEMIES PRESS. *Edward James McShane.* [online]. [cit. 2. srpna 2011]. Dostupné na <http://www.nap.edu/readingroom.php?book=biomemspage=emcshane.html>.

[14] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. *Georg Friedrich Bernhard Riemann.* [online]. [cit. 2. srpna 2011]. Dostupné na <http://www.gap-system.org/ history/Biographies/Riemann.html>.

[15] HALL, A. R. *Isaac Newton's Life.* [online]. [cit. 2. srpna 2011]. Dostupné na <http://www.newton.ac.uk/newtlife.html>.

[16] MULDOWNEY, P. *RALPH HENSTOCK.* [online]. [cit. 2. srpna 2011]. Dostupné na <http://msupress.msu.edu/journals/raex/dl/Muldowney%20v-vii.pdf>.

[17] SCHWABIK, Š. *Český příspěvek k moderním teoriím integrálu.*[online].[cit. 2. srpna 2011]. Dostupné na <http://am.vsb.cz/didaktik/schwabik/schwabik.pdf>.