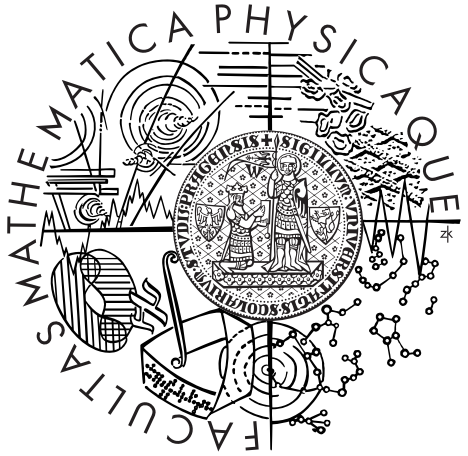
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petra Mináriková

Výpočet vztlaku tělesa metodou potenciálního proudového pole

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Jaroslav Hron Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2011

Panu doktorovi Jaroslavu Hronovi, svému vedoucímu práce, děkuji za trpělivost, pomoc a dobré rady, a panu profesorovi Františku Maršíkovi za zajímavé téma, a za čas, který mi věnoval. Ráda bych poděkovala i své matce, která mi k napsání práce na dlouhou dobu zapůjčila svůj notebook, a Pavlu Bakičovi za technickou a jinou podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Výpočet vztlaku tělesa metodou potenciálního proudového pole

Autor: Petra Mináriková

Katedra: Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Jaroslav Hron Ph.D., Matematický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Práce se zabývá výpočtem vztlakové síly působící na obtékaný válec. V první části definuje základní pojmy týkající se proudění a formuluje zákony bilance. Nabízí alternativní formulaci bilance hybnosti pro stacionární proudění – Croccovu větu – jež vysloví bilanci hybnosti pomocí celkové entalpie a dává do souvislosti změnu entropie a vířivost. Dále je odvozen Biotův – Savartův zákon pro vírové vlákno v tekutině. Pomocí potenciálního proudění a komplexního potenciálu popíše obtékání válce a spočte se vztlaková síla jako součin náběžné rychlosti, hustoty tekutiny a cirkulace. Za využití Croccovy věty uvažujeme uvolnění kondenzačního tepla, změnu entropie, a následnou generaci vířivosti, jež povede ke vzniku cirkulace, a tudíž i vztlakové síly. Práce může sloužit jako podklad pro návrh fyzikálního experimentu.

Klíčová slova: Croccova věta, Biotův – Savartův zákon, potenciální obtékání válce, vztlak, cikulace generovaná změnou entropie.

Title: Calculation of Lift Force of a Body Using Potential Flow

Author: Petra Mináriková

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Ing. Jaroslav Hron Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: The thesis is concerned with computation of a lift force generated by the flow past a cylinder. It provides definition of fundamental terms regarding flow and recounts the laws of balance. It offers an alternative formulation of balance of momentum for the particular case of steady flow – Crocco's theorem – which formulates balance of momentum using total enthalpy and links the change of entropy with vorticity. Next, Biot-Savart's law for vortex filament in a fluid is derived. Potential flow and complex potential are then used to describe flow past a cylinder; lift force is calculated as a product of velocity at infinity, the fluid's density and circulation. Using Crocco's theorem, the thesis considers release of the heat of condensation, the change in enthropy and the following emergence of vorticity resulting in circulation and, consequently, lift force. The thesis can be used to provide basis for an experiment.

Keywords: Crocco's theorem, Biot-Savart's law, potential flow past a cylinder, lift force, circulation as a result of change of entropy

Obsah

Úvod **2**

1 Definice základních pojmů a vztahů **3**
1.1 Materiálový bod, rychlost, vířivost 3
1.2 Zákony bilance 6
1.2.1 Obecný zákon bilance 6
1.2.2 Bilance hmotnosti 8
1.2.3 Bilance hybnosti a momentu hybnosti 9
1.2.4 Bilance energie 12
1.2.5 Bilance entropie 13
1.2.6 Konstitutivní vztahy pro termoviskoelastickou tekutinu . . 14
1.3 Alternativní formulace bilance hybnosti a energie 14
1.3.1 Bilance energie pomocí stagnační entalpie 14
1.3.2 Bilance hybnosti–Croccova věta 15
1.4 Clebschova reprezentace rychlostního pole 16

2 Biotův–Savartův zákon **19**

3 Generace sil na obtékaném tělese **21**
3.1 Nevířivé proudění 21
3.2 Proudění v rovině 23
3.3 Obtékání válce 27

4 Obtékání válce s termodynamicky generovanou vířivostí **33**

Závěr **36**

Seznam použité literatury **37**

Použité věty **38**

Úvod

Zkoumání vztlakové síly rozhodně nepatří k nejnovějším problémům fyziky, ba právě naopak, jde o úlohu tradiční a prozkoumána je už ze všech možných úhlů. Důvod je jednoduchý – již po tisíciletí si člověk představoval, jak vzlétne, ať už pomocí nadpřirozených sil, nebo snil o křídlech, jaká mají ptáci. Později, v době technického pokroku, byla historie svědkem mnoha pokusů sestavit stroj, který by se dokázal vznést, ovšem skutečně se jednalo o experimenty, často vedoucí ke katastrofám. Když se to roku 1903 konečně podařilo a bratři Orville a Wilbur Wrightovi zkostruovali první létající stroj, který skutečně fungoval a na palubě nesl člověka, stály za tím hodiny práce, výpočtů, nákresů, a dokonce i využití aerodynamického tunelu, ve kterém testovali různé tvary křídel a získali spoustu cenných a využitelných dat. Od té doby už uplynulo mnoho vody, metody výpočtů vztlakové síly jsou sofistikovanější, nehledě na výpočetní techniku, kterou disponujeme, spočtené výsledky se však nadále musí testovat, neboť ač se stále zpřesňujeme, vždy skončíme jako bratři Wrightové – v aerodynamickém tunelu.

Jak vůbec vzniká vztlaková síla? Tradiční pojetí zkoumá vliv vazkosti v tekutině obtékající pevné těleso: Tekutina ulpívá na jeho stěně, dochází ke vzniku víru a generuje se cirkulace. V této práci (ve třetí kapitole) se budeme samozřejmě zabývat i touto situací, ovšem použijeme nevazký model a cirkulaci získáme jen jako důsledek toho, že zkusíme najít funkci splňující diferenciální rovnici a nějakou okrajovou podmínku.

Spočtěné výsledky ještě použijeme: Pustíme-li se mimo vyšlapané cesty, zkusíme cirkulaci potřebnou pro vznik vztlakové síly generovat jiným způsobem, totiž změnou uvolněné tepelné energie na pohybovou, o tom však až úplně nakonec.

1. Definice základních pojmů a vztahů

Než se pustíme do odvozování a počítání, ujasněme si nejprve pár základních pojmů, které používáme pro matematický popis skutečnosti, pro popis pohybu, a toho, co se pohybuje, též definujeme základní veličiny, vyslovíme zákony bilance, ze kterých budeme vycházet v dalších výpočtech, zvláště se zaměříme na pojmy a tvary rovnic spjaté s tekutinami. Je na místě uvést, že při popisování skutečnosti a vytváření modelové situace zanedbáváme a zjednodušujeme jisté skutečnosti, což nutně vede k nepřesnosti ve výsledku.

1.1 Materiálový bod, rychlost, vířivost

Pro jednoduchost uvažujme třídimenzionální vektorový prostor obsahující hmotu, která ve skutečnosti sestává z atomů, molekul atd., my ji však budeme považovat za kontinuum, spojitě vyplněné hmotností. Na tomto prostoru definujeme funkce – fyzikální veličiny – které budou záviset i na čase t. Tělesem rozumíme oblast $V \subset \mathbb{R}^3$, která v čase t_0, v referenční konfiguraci zaujímá oblast V_0.

Pohyb v tomto prostoru popíšeme dvěma různými způsoby: Lagrangeovým popisem (materiálovým) a Eulerovým popisem (prostorovým).

Definice. ***Materiálový bod*** *je bod kontinua, který má v počátečním čase t_0, neboli v referenční konfiguraci, polohu $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$. V čase t se nachází v bodě prostoru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$, tedy v prostoru opisuje křivku, jíž se říká* ***trajektorie****.*

Jacobiho matici zobrazení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ nazveme **deformačním gradientem** a označíme ho $\mathbf{F}$. O tomto zobrazení budeme předpokládat, že jeho jakobián (tj. determinant Jacobiho matice) je nenulový v každém bodě $(\mathbf{X}, t) \in V_0$. Tedy

$$j = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \right| \neq 0. \tag{1.1}$$

A dále, aby bylo prosté a C^1 (tj. aby měla spojité derivace prvního řádu). To jsou požadavky pro to, aby k zobrazení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ existovalo jednoznačné inverzní zobrazení

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \tag{1.2}$$

Tyto podmínky znamenají i to, že každé dva materiálové body se v žádném čase neocitnou ve stejném místě, a každý materiálový bod se nalézá právě na jednom místě.

V Lagrangeově popisu mají všechny funkce, veličiny závisející na prostoru za proměnné $\mathbf{X}$, proto se nazývá též materiálový. V Eulerově popisu bereme za proměnné body v prostoru $\mathbf{x}$, které jsou ovšem zároveň funkcemi $\mathbf{X}$ a t. To je důvod, proč je materiálová derivace v tomto popisu složitější. Počítá se podle věty o složeném zobrazení viz Věta 4.

Definice. ***Rychlost*** *materiálového bodu definujeme jako derivaci*

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)=\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t},$$

nebo pro i-tou složku, i=1,2,3

$$\tilde{v}_i(\boldsymbol{X},t)=\frac{\partial x_i(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}.$$

Rychlost v prostorovém popisu vyjádříme

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)=\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),t)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),$$

kde $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ *je zmiňované inverzní zobrazení.*

Pro úplnost ještě uveďme zrychlení v obou různých popisech.
Materiálový popis:

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t^2}.$$

Prostorový popis:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{x},t)&=\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{dt}=\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}{dt}=\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(\mathbf{X},t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}v_i(\mathbf{x},t)\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Tento typ derivace se nazývá materiálová derivace. V dalším textu už nebudeme rozlišovat $\tilde{\mathbf{v}}$ a $\mathbf{v}$.

Definice. ***Proudnicí (proudovou čárou)*** *nazveme křivku ve V, takovou, že jsou k ní vektory rychlosti v každém okamžiku ve všech (prostorových) bodech tečné.*

Z definice proudnice vyplývá, když dx_1, dx_2, dx_3 jsou složky elementárního oblouku v daném bodě, a v_1, v_2, v_3 složky rychlosti tamtéž, že $dx_1 : dx_2 : dx_3 = v_1(\mathbf{x},t) : v_2(\mathbf{x},t) : v_3(\mathbf{x},t)$, neboli

$$\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\frac{dx_3}{v_3}.$$

Pokud $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\neq\mathbf{0}$ a $\mathbf{v}$ má spojité první derivace podle souřadnic, potom každým bodem vede právě jedna proudnice. Body, ve kterých $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0}$, se nazývají kritické a dochází v nich k nejednoznačnosti proudnic.

V případě stacionárního, tj. časově neměnného proudění splývají proudnice s výše zmíněnými trajektoriemi.

Definice. *Je-li* $\underline{s}$ *uzavřená křivka v prostoru, jejímž každým jedním bodem prochází právě jedna proudnice, a nesplývá s žádnou proudnicí, pak množinu všech proudnic procházejících křivkou* $\underline{s}$ *nazveme* ***proudovou trubicí****. Vnitřek proudové trubice je tzv.* ***proudové vlákno****.*

Tekutina proudící proudovou trubicí se chová tak, jako by stěna proudové trubice byla neprostupná, neboť vektor rychlosti ve stěně trubice je tečný k proudnicím, tedy nemá složku kolmou ke stěně.

Definice. ***Gradient*** *skalární funkce* $\varphi : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *je*

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)(\boldsymbol{a}).$$

Definice. ***Divergenci*** *vektorového pole* $\boldsymbol{v} : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definujme jako*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{tr} \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \tag{1.3}$$

kde tr *značí stopu matice.*

Definice. *Mějme bod P v prostoru, jím proložíme rovinu r, a* $\boldsymbol{o}$ *bude normála k rovině v bodě P. Kolem bodu P mysleme uzavřenou křivku s, která bude obíhat bod P v kladném smyslu, tedy proti směru hodinových ručiček.* ***Cirkulaci vektoru*** $\boldsymbol{v}$ *po uzavřené křivce s definujeme jako*

$$\Gamma = \oint_s \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_s v_s ds.$$

Rotace vektoru $\boldsymbol{v}$ *vzhledem k ose* $\boldsymbol{o}$ *je*

$$\operatorname{rot}_{\boldsymbol{o}} \boldsymbol{v} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_s \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Z definice rotace vektoru plyne její vyjádření v kartézských souřadnicích (viz [1]), i-tou složku zapíšeme (úlohu osy z definice hraje osa x_i)

$$\operatorname{rot}_i \mathbf{v} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j},$$

kde ϵ_{ijk} je tzv. Leviho-Civitův symbol, nabývající hodnot

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (i,j,k) \text{ je sudá permutace,} \\ -1 & \text{pokud } (i,j,k) \text{ je lichá permutace,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tedy plný zápis všech složek rotace vektoru $\mathbf{u}$ v kartézských souřadnicích je

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right).$$

Definice. ***Vířivost*** $\boldsymbol{w}$ *definujeme jako* $\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$*, kde* $\boldsymbol{v}$ *je rychlost. Křivky, definované analogicky jako proudnice, totiž takové, že vektor vířivosti je k nim v každém pevném čase v každém bodě tečný, nazveme* ***vírovými čarami****. Tedy*

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = w_1(\boldsymbol{x}, t) : w_2(\boldsymbol{x}, t) : w_3(\boldsymbol{x}, t),$$

kde dx_i *pro i=1,2,3 jsou elementární složky oblouku vírové čáry, a* w_i *jsou složky vířivosti* $\boldsymbol{w}$*.*

Vírová trubice *je množina vírových čar procházejících uzavřenou křivkou, jejíž body leží každý na jiné vírové čáře. Uvnitř vírové trubice se nachází* ***vírové vlákno****. Uvažujeme-li řez vírovou trubicí o ploše S, pak intenzitou vírové trubice nazveme*

$$\mu = \int_S \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \int_S \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\nu}} dS,$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ *je jednotková normála k řezu vírovou trubicí. Výraz výše vyjadřuje tok vektoru vířivosti řezem vírové trubice.*

Pokud alespoň v nějakém bodě tekutiny $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, je pohyb tekutiny vířivý, v opačném případě je nevířivý a potom k vektoru rychlosti existuje tzv. potenciál rychlosti φ, což je skalární funkce proměnných $(\mathbf{x}, t)$ a je $C^2(V)$, jež splňuje

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) = \mathbf{v}, \forall(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in V, t \geq t_0. \tag{1.4}$$

(Důkaz je proveden např. v [2].)

Platí to i obráceně, existuje-li k rychlostnímu poli potenciál, pak je $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, jak snadno dostaneme ze záměnností smíšených parciálních derivací druhého řádu funkce φ.

Intenzita vírové trubice nezávisí na volbě řezu trubice. (Důkaz [1].)

Definice. *Mějme vektor* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$*, potom Laplaceův operátor na* $\boldsymbol{v}$ *definujeme jako*

$$\Delta\, \boldsymbol{v} = \operatorname{div}(\nabla \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}.$$

1.2 Zákony bilance

V následující podkapitole vyslovíme zákon zachování pro nějakou obecnou veličinu, a toto obecné schéma využijeme při formulaci zákonů bilance pro konkrétní veličiny, hmotnost, hybnost, moment hybnosti, energii, entropii. Předpokládejme, že v našem systému nejsou žádné plochy nespojitosti. (Zákony bilance v systému s plochami nespojitosti lze nalézt v [3].)

1.2.1 Obecný zákon bilance

Mějme nějakou obecnou fyzikální veličinu $\Pi(t)$, skalární, vektorovou nebo tenzorovou, popisující stav systému v objemu V, v počátením čase t_0 se systém nachází v objemu V_0. Definujeme objemovou hustotu v materiálovém popisu

$$\pi_0(\mathbf{X}, t) = \lim_{\Delta V_0 \to 0} \frac{\Delta\Pi(t)}{\Delta V_0},$$

a v prostorovém popisu

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\Pi(t)}{\Delta V}.$$

Tedy celková hodnota veličiny je

$$\Pi(t) = \int_{V_0} \pi_0(\mathbf{X}, t) dV = \int_V \pi(\mathbf{x}, t) dv.$$

A platí $\pi_0 = j\pi$, kde j je výše uvedený jakobián (viz (1.1)).

Obecný zákon bilance zní: Časová změna veličiny Π je rovna přítoku veličiny do systému jeho hranicí plus produkce veličiny v systému. Neboli

$$\frac{d}{dt}\Pi(t) = H(\Pi) + P(\Pi),$$

kde $H(\Pi)$ je celkový tok veličiny povrchem systému a $P(\Pi)$ je produkce veličiny v systému za jednotku času.

Celkový tok vyjádříme v materiálovém, a potom v prostorovém popisu

$$H(\Pi) = \int_{\partial V_0} \sum_{K=1}^{3} H_K(\Pi) dS_K = \int_{\partial V} \sum_{k=1}^{3} h_k(\Pi) ds_k, \tag{1.5}$$

kde $\boldsymbol{H}(\Pi)$ a $\boldsymbol{h}(\Pi)$ jsou tokové hustoty veličiny Π a vztah mezi nimi je následující:

$$H_K = j \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial X_K}{\partial x_k} h_k,$$

$$h_k = j^{-1} \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial X_K} H_K.$$

Produkci veličiny Π popíšeme objemovým integrálem, opět první je v materiálovém, druhý v prostorovém vyjádření:

$$P(\Pi) = \int_{V_0} \boldsymbol{\Sigma}(\Pi) dV = \int_V \boldsymbol{\sigma}(\Pi) dv,$$

kde $\boldsymbol{\Sigma}(\Pi)$ a $\boldsymbol{\sigma}(\Pi)$ jsou hustoty produkce v materiálovém a prostorovém popisu a platí $\boldsymbol{\Sigma}(\Pi) = j\boldsymbol{\sigma}(\Pi)$.

Tedy můžeme zapsat obecný zákon bilance v tzv. integrálním tvaru (materiálový a prostorový popis):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \pi_0(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\partial V_0} \sum_{K=1}^{3} H_K(\Pi) dS_K + \int_{V_0} \boldsymbol{\Sigma}(\Pi) dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \pi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\partial V} \sum_{k=1}^{3} h_k(\Pi) ds_k + \int_V \boldsymbol{\sigma}(\Pi) dv.$$

Nyní zaměníme derivaci a integrál, můžeme to udělat podle věty o derivování podle parametru. V materiálovém popisu levou stranu spočteme snadno:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \pi_0(\mathbf{X}, t) dV = \int_{V_0} \frac{\partial \pi_0(\mathbf{X}, t)}{\partial t} dV.$$

Levá strana v prostorovém popisu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \pi(\mathbf{x}, t) dv &= \int_V \left[\frac{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\pi(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t))}{\partial x_i} \right] dv \\ &= \int_V \left[\frac{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} (\pi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right] dv. \end{aligned}$$

A dále užitím Gaussovy věty (viz Věta 5) získáme z (1.5), že se tok veličiny povrchem do systému dá vyjádřit objemovým integrálem:

$$H(\Pi) = \int_{V_0} \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial H_K(\Pi)}{\partial X_K} dV = \int_V \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial h_k(\Pi)}{\partial x_k} dv.$$

Takže nyní už můžeme rovnice zapsat ve tvaru:

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \pi_0(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} - \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial H_K(\Pi)}{\partial X_K} - \boldsymbol{\Sigma}(\Pi) \right] dV = 0$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\pi(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial h_k(\Pi)}{\partial x_k} - \boldsymbol{\sigma}(\Pi) \right] dv = 0.$$

A zmenšováním objemu dostaneme lokální tvar obecného zákona bilance

$$\frac{\partial \pi_0(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} - \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial H_K(\Pi)}{\partial X_K} - \boldsymbol{\Sigma}(\Pi) = 0$$

$$\frac{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\pi(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial h_k(\Pi)}{\partial x_k} - \boldsymbol{\sigma}(\Pi) = 0.$$

1.2.2 Bilance hmotnosti

Nyní už máme skoro hotovo, a za obecnou veličinu dosadíme hmotnost, tedy $\Pi(t) = m(t)$, $\pi_0 = \rho_0$, $\pi = \rho$. A vyjádříme-li matematicky, že hmotnost systému se časem nemění, dostaneme

$$\frac{d}{dt} m(t) = \int_{V_0} \frac{\partial \rho_0(\mathbf{X}, t)}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t))}{\partial x_i} dv = 0.$$

Tedy, finální tvar bilance hmotnosti v prostorovém popisu je

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t))}{\partial x_i} = 0$$

nebo též

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0. \tag{1.6}$$

Této rovnici se říká **rovnice kontinuity**.

Pro nestlačitelnou tekutinu se rovnice kontinuity značně zjednoduší, neboť uvažujeme $\rho = \rho_0 \equiv c, c \in \mathbb{R}^+$. A můžeme psát

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

V dalším důležitém případě stacionárního proudění stlačitelné tekutiny nabývá rovnice kontinuity tvaru

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t))}{\partial x_i} = \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0.$$

1.2.3 Bilance hybnosti a momentu hybnosti

Časová změna hybnosti systému se rovná součtu povrchových a objemových sil působících na systém. Hybnost definujme (a označme M z anglického momentum) jako

$$\mathbf{M}(t) = \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, t)\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)dV = \int_V \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)dv.$$

Připomeňme, že hybnost je vektor, a tedy z bilance hybnosti dostaneme tři rovnice.

Odpovězme nyní na otázku, jaké síly na systém působí. Objemové síly jsou takové, které působí na každý hmotný (materiálový) bod, jejich velikost se vzdáleností zmenšuje pomalu. Mohou to být např. gravitační síly, elektromagnetické (ty ovšem nebudeme uvažovat) a tzv. fiktivní síly, setrvačné síly v neinerciální vztažné soustavě (my vše ale budeme počítat v inerciální vztažné soustavě). Objemové síly vyjádříme jako

$$\mathbf{F}_{obj}(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)dv,$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je hustota vnějších objemových sil.

Povrchové říkáme takovým silám, které působí kontaktně. Vyjádříme je ve tvaru

$$\mathbf{F}_{pov}(t) = \int_{\partial V} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))ds,$$

kde $\mathbf{T}$ je vektor napětí, a $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ je jednotková vnější normála k povrchu ∂V.

Proveďme nyní úkrok k **bilanci momentu hybnosti**.

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{r} \times (\rho\mathbf{v})dv = \int_V \mathbf{r} \times (\rho\mathbf{f}) + \rho\mathbf{A}dv + \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \nu(\mathbf{x}))ds,$$

kde $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ je polohový vektor a $\rho\mathbf{A}$ je hustota vnitřní produkce momentu hybnosti (tento člen je nenulový pro tzv. polární materiály, v nichž si v rámci molekuly některé atomy přitáhnou sdílené elektrony blíž k sobě). Slovně bilance momentu hybnosti říká, že časová změna momentu hybnosti systému je rovna momentu sil působících na systém. Je patrné, že velikost momentu hybnosti závisí na volbě bodu $\mathbf{x}_0$, tedy moment hybnosti není objektivní veličinou a při změně souřadné soustavy je třeba přidat případné fiktivní síly.

Věta 1. *Cauchyho o existenci tenzoru napětí*

Nechť na pohybující se systém složený jen z nepolárních materiálů působí povrchové a objemové síly jako výše. Potom bilace hybnosti a momentu hybnosti platí právě tehdy, když existuje tenzor $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^3$*, nazývaný Cauchyho tenzor napětí, takový, že:*

(1) $\forall \boldsymbol{\nu}\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}$*;*

(2) $\boldsymbol{\tau}$ *je symetrický, neboli* $\tau_{ij} = \tau_{ji}, \forall i, j = 1, 2, 3$*;*

(3) $\boldsymbol{\tau}$ *splňuje pohybové rovnice, tedy*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{f} = \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} v_i\right).$$

Důkaz věty je proveden v [2].

Z této věty můžeme odvodit vztah mezi vektorem a tenzorem napětí, stačí, když za $\boldsymbol{\nu}$ vezmeme postupně $e_i, i = 1, 2, 3$, a dosadíme do (1), takže

$$\boldsymbol{\tau} \cdot e_i = \sum_{j=1}^{3} \tau_{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, e_i),$$

tedy $\tau_{ij} = T_j(\mathbf{x}, t, e_i)$. A pro $\boldsymbol{\nu}$

$$\sum_{i=1}^{3} \nu_i(\mathbf{x})\tau_{ij}(\mathbf{x}, t) = T_j(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})).$$

(K nalezení v [1].)

Tedy pohybové rovnice lze psát, opět využíváme Gaussovu větu,

$$\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_j \mathbf{v}) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.7}$$

Prvky na diagonále tenzoru $\boldsymbol{\tau}$, tedy $\tau_{ii}, i = 1, 2, 3$, se nazývají normálová napětí, prvky mimo diagonálu jsou napětí smyková.

V našem případě, kdy chceme vyšetřovat obtékání tělesa nějakou vazkou (vazkost neboli viskozita je odpor tekutiny proti změně tvaru) tekutinou, vyjádříme tenzor napětí pomocí tzv. tenzoru rychlosti deformace. Označme gradient rychlosti $\mathbf{L} = \nabla\mathbf{v}$. Uvažujme konstituční rovnici ve tvaru

$$\boldsymbol{\tau} = -p_0\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{L}),$$

kde p_0 je tlak tekutiny v klidu. V případě, že je $\mathbf{C}$ lineární funkcí, nazýváme tekutinu **newtonovskou**. Uvažujme tedy nějakou newtonovskou tekutinu, a navíc předpokládejme, že proudění je nestlačitelné, tj. $\operatorname{tr}\mathbf{L} = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Z toho, že $\mathbf{C}$ je lineární, plyne, že pokud je tekutina v rovnováze, pak $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ a tedy $\mathbf{C}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pro tenzor napětí pak platí $\boldsymbol{\tau} = -p_0\mathbf{I}$ a tekutina se chová jako dokonalá, nevazká.

Nyní si zvolme skalární funkci od $\mathbf{L}$ jako

$$\alpha(\mathbf{L}) = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{C}(\mathbf{L}),$$

a tenzor napětí napíšeme jako

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} =& -(p_0 + \alpha(\mathbf{L}))\mathbf{I} + (\mathbf{C}(\mathbf{L}) + \alpha(\mathbf{L})\mathbf{I}) \\ =&(-p_0 + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{C}(\mathbf{L}))\mathbf{I} + (\mathbf{C}(\mathbf{L}) - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{C}(\mathbf{L})\mathbf{I}).\end{aligned}$$

Označme

$$p = p_0 - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{C}(\mathbf{L}) = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{L}) = \mathbf{C}(\mathbf{L}) - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{C}(\mathbf{L})\mathbf{I}.$$

Takže $\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{L})$.

Věta 2. *Odezva newtonovské nestlačitelné tekutiny je nezávislá na pozorovateli, tj. splňuje princip objektivity, právě tehdy, když je odezvová funkce* $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{L})$ *ve tvaru*

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{L}) = 2\mu\boldsymbol{D}, \forall \boldsymbol{L} : \operatorname{tr} \boldsymbol{L} = 0$$

kde $\mu \in \mathbb{R}_0^+$ *je tzv. dynamická viskozita tekutiny,*

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\right),$$
$$\text{tedy } (d_{ij})_{i,j=1}^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

$\boldsymbol{D}$ *je už výše zmíněný tenzor rychlosti deformace.*

Důkaz je proveden v [2].

Nyní, když už pro newtonovskou nestlačitelnou tekutinu můžeme vyjádřit tenzor napětí $\boldsymbol{\tau}$ ve speciálním tvaru, využijeme toho, a dosadíme do pohybových rovnic (viz (1.7)).

$$\rho\frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho\operatorname{div}(v_j\mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \rho f_j, \quad j = 1,2,3.$$

Je zřejmé, že člen

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Když ještě využijeme Laplaceův operátor, dostaneme

$$\rho\frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho\operatorname{div}(v_j\mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu\,\Delta\, v_j + \rho f_j, \quad j = 1,2,3.$$

Označme

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

nazveme ji kinematickou viskozitou. Když budeme z objemových sil uvažovat pouze gravitační sílu, tak $\rho\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. A konečně dostáváme **Navierovy-Stokesovy rovnice**

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\,\Delta\,\mathbf{v} + \mathbf{g}. \tag{1.8}$$

Pro nevazkou tekutinu máme

$$F_{i,pov}(t) + F_{i,obj}(t) = -\int_V \frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}dv + \int_V \rho(\mathbf{x},t)f_i(\mathbf{x},t)dv.$$

Takže už můžeme napsat tzv. **Eulerovy pohybové rovnice** pro nevazkou tekutinu

$$\frac{\partial(\rho(\mathbf{x},t)v_i(\mathbf{x},t))}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial(\rho(\mathbf{x},t)v_i(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t))}{\partial x_k} = -\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial x_i} + \rho(\mathbf{x},t)f_i(\mathbf{x},t),$$

kde $\mathbf{x} \in V$, $t \geq t_0$, $i = 1,2,3$, nebo v úspornějším zápisu

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v^i\mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad i = 1,2,3.$$

Tento tvar můžeme ještě dále upravit:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) + (\rho\mathbf{v})\cdot\nabla v_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i,$$

a nyní si povšimněme, že na členy $v_i(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}))$ můžeme aplikovat rovnici kontinuity (1.6), tím pádem tyto členy vymizí. Tedy

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\sum_{k=1}^{3} v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad i = 1,2,3.$$

Pro nestlačitelnou tekutinu ($\rho \equiv c, c \in \mathbb{R}^+$) dostaneme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad i = 1,2,3.$$

1.2.4 Bilance energie

Změna celkové energie systému, která sestává z vnitřní energie a z kinetické energie, se rovná dodanému teplu plus práci vykonané na systému.

$$E = \int_V \left(\rho u + \frac{\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right) dv$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\rho u + \frac{\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right) dv = \int_{\partial V}\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\tau_{ki}v_i + q_k\right) ds_k + \int_V \left(\sum_{i=1}^{3}\rho f_i v_i + \tilde{q}\right) dv,$$

kde ρu je hustota vnitřní energie, $\frac{\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}$ je hustota kinetické energie, člen s $\tau_{ki}v_i$ zastupuje práci povrchových sil, $\rho f_i v_i$ práci objemových sil, a $\tilde{q}$ hustota vnějších energetických vlivů (např. záření). Ještě ho upravme do řádného tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u + \frac{\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right) + \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho u + \frac{\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right)v_k - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{3}\tau_{ki}v_i + q_k\right)\right] \\ - \left(\sum_{i=1}^{3}\rho f_i v_i + \tilde{q}\right) = 0.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Uveďme ještě bilanci vnitřní energie, která je ekvivalentní s I. zákonem termodynamiky: změna vnitřní energie se rovná dodanému elementárnímu teplu minus elementární práce vykonaná systémem, neboli $dU = dQ - dW$, U je vnitřní energie, Q teplo, W práce. Vyjádřeme ještě dQ pomocí termodynamické teploty T: $dQ = cdT$, kde c je měrné teplo příslušné zkoumanému materiálu. Tedy bilance vnitřní energie zní:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left((\rho v_k u) + q_k + \sum_{i=1}^{3}\tau_{ki}v_i\right) + \tilde{q} = 0. \tag{1.10}$$

Některé veličiny figurující v bilanci celkové energie nejsou objektivní, to je třeba vzít do úvahy při změně souřadného systému na nějaký pohybující se.

1.2.5 Bilance entropie

Veličinu S nazvanou entropie zavedeme neobvyklým způsobem, pomocí následující, tzv. Clausiovy, nerovnosti

$$\frac{dQ}{T} \leq dS.$$

Pomocí entropie můžeme vyslovit II. zákon termodynamiky: Entropie tepelně izolovaného systému neklesá. Využijeme-li I. zákon termodynamiky ($dU = dQ - dW$), dostaneme základní termodynamickou nerovnost

$$TdS - dW - dU \geq 0.$$

$$S = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) s(\mathbf{x}, t) dv,$$

kde ρs je hustota entropie. Clausiovu nerovnost můžeme zapsat

$$\frac{dS}{dt} = H(S) + P(S) \geq \frac{dQ}{Tdt} = -\int_{\partial V} \sum_{k=1}^{3} \frac{q_k}{T} ds_k + \int_V \frac{\tilde{q}}{T} dv.$$

Z obecného zákona bilance plyne

$$P(S) = \frac{dS}{dt} - H(S).$$

Z Clausiovy nerovnosti:

$$P(S) \geq -\int_{\partial V} \sum_{k=1}^{3} \frac{q_k}{T} ds_k + \int_V \frac{\tilde{q}}{T} dv - H(S).$$

Tok entropie definujeme:

$$H(S) = -\int_{\partial V} \frac{q_k}{T} ds_k + \int_V \frac{\tilde{q}}{T} dv.$$

Tedy produkce entropie splňuje

$$P(S) = \int_V \boldsymbol{\sigma}(S) dv = \int_V \left[\rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial s}{\partial x_k} v_k \right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q_k}{T} \right) - \frac{\tilde{q}}{T} \right] dv \geq 0.$$

V systému jsme neuvažovali plochy nespojitosti, tedy platí

$$\boldsymbol{\sigma}(S) = \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial s}{\partial x_k} v_k \right) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q_k}{T} \right) - \frac{\tilde{q}}{T} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in V,$$

neboť Clausiova nerovnost a bilance entropie platí pro každý systém, který uvažujeme, a všechny funkce jsou spojité, důkaz se provede jednoduše sporem.

Z bilance vnitřní energie (viz (1.10)) máme

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q_k}{T} \right) - \frac{\tilde{q}}{T} = \sum_{k=1}^{3} \left(q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{3} \tau_{ki} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\rho}{T} \frac{du}{dt}.$$

Takže hustotu produkce entropie vyjádříme jako

$$\rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \sum_{k=1}^{3} \left[\rho \left(\frac{\partial s}{\partial x_k} + \frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) v_k + q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{3} \tau_{ki} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] \geq 0.$$

1.2.6 Konstitutivní vztahy pro termoviskoelastickou tekutinu

Pro práci s termoviskoelastickou tekutinou do rovnic můžeme dosadit následující konstitutivní vztahy

$$q_k = -\lambda(\rho, T)\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

kde λ je tepelná vodivost. A dále pro tenzor napětí

$$\tau_{ki} = -p(\rho, T)\delta_{ki} + \tau_{ki}^{dis}, \quad k, i = 1, 2, 3, \tag{1.11}$$

kde

$$\tau_{ki}^{dis} = \mu_V(\rho, T)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\delta_{ki} + 2\mu(\rho, T)\left(d_{ki} - \frac{1}{3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\delta_{ki}\right),$$

μ_V je objemová viskozita, μ je smyková viskozita, $\mathbf{D}$ je tenzor rychlosti deformace, δ_{ki} je Kroneckerovo delta. Tedy

$$\boldsymbol{\tau} = \left(-p + \mathrm{div}\,\mathbf{v}\left(\mu_V - \frac{2\mu}{3}\right)\right)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}.$$

Připomeňme, že $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \mathrm{tr}\,\mathbf{D}$. Odvození těchto vztahů lze najít v [3].

1.3 Alternativní formulace bilance hybnosti a energie

1.3.1 Bilance energie pomocí stagnační entalpie

V předchozí podkapitole jsme se zabývali bilancemi v obvyklém pořadí, tj. hmotnost, hybnost, moment hybnosti, energie, entropie. Nyní k formulaci bilance hybnosti použijeme nově definovanou veličinu vyskytující se v bilanci energie (1.9). Předpokládejme, že proudění je nestlačitelné, dále že existuje potenciál $-\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}$, a $\tilde{q}$ neuvažujeme. Rovnici celkové energie lze formulovat ve tvaru a upravujme ho

$$\frac{d}{dt}\left(\rho u + \rho\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right) - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{3}\tau_{ki}v_i - q_k\right) - \rho\frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(u + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2} + \Phi\right) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(pv_k - \mu\sum_{i=1}^{3}d_{ki}v_i + q_k\right) = 0,$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(u + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\mu\sum_{i=1}^{3}d_{ki}v_i + q_k\right) = 0,$$

kde jsme využili rovnice kontinuity (1.6) a nestlačitelnosti.

$$\rho\frac{d}{dt}\left(u + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\sum_{i=1}^{3}d_{ki}v_i - q_k\right)$$

Pro další úvahy ji budeme formulovat ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(u+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}+\Phi+\frac{p}{\rho}\right)=\frac{\partial h_c}{\partial t}+\sum_{l=1}^{3}v_l\frac{\partial h_c}{\partial x_l}=$$
$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\left(-\frac{\partial q_k}{\partial x_k}+\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{3}v_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right)\right], \tag{1.12}$$

který je vhodný pro analýzu vlastností rychlostních polí, především pro nalezení souvislosti mezi vznikem vířívosti a změnou entropie. Pro tento účel jsme zavedli veličinu

$$h_c=u+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}+\Phi+\frac{p}{\rho}, \tag{1.13}$$

jež nazýváme **celkovou entalpií**, neboť kromě celkové energie, zahrnující vnitřní a kinetickou energii, je zahrnuta i energie tlaková generovaná povrchovými silami. Navíc obsahuje celková entalpie i potenciální energii odpovídajících objemových sil. Pro nestlačitelné, nevazké, tepelně nevodivé proudění platí, že veličina h_c je konstantní podél trajektorií (viz [5]). Při stacionárním proudění splývají trajektorie s proudnicemi a h_c je konstantní podél proudnic. Tento výsledek lze shrnout do následujícího tvrzení: *Ve stacionárním proudění se při zanedbání vedení tepla a viskozity celková entalpie* (1.13) *zachovává.*

1.3.2 Bilance hybnosti–Croccova věta

Za použití I. zákona termodynamiky ve tvaru platném pro materiálový bod

$$T\frac{dS}{dt}=\frac{du}{dt}+p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=T\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla S\right)\ =$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla u+p\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \tag{1.14}$$

lze použít celkovou entalpii k alternativnímu vyjádření bilance hybnosti. Pro stacionární případ z I. zákona termodynamiky (1.14) plyne

$$\mathbf{v}\cdot\left[\nabla u+p\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)-T\nabla S\right]=\mathbf{v}\cdot\left[\nabla\left(u+\frac{p}{\rho}\right)-T\nabla S-\frac{1}{\rho}\cdot\nabla p\right]=0, \tag{1.15}$$

pro $\mathbf{v}\neq 0$. Z této rovnice můžeme vypočítat gradient tlaku ∇p a použitím vektorové identity

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=\nabla\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right)-\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} \tag{1.16}$$

můžeme upravit konvektivní člen. Vztahy (1.15) a (1.16) dosadíme do rovnice bilance hybnosti pro stacionární proudění nestlačitelné vazké newtonovské tekutiny

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\nu\,\Delta\,\mathbf{v}-\nabla\Phi. \tag{1.17}$$

Po formálních úpravách dostáváme **Croccovu větu**:

$$\nabla h_c-\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}=T\nabla S+\nu\,\Delta\,\mathbf{v}, \tag{1.18}$$

která je alternativním vyjádřením stacionární bilance hybnosti (1.8), popř. (1.17). Odtud již zřetelně vidíme, že v případě konstantní celkové entalpie (1.13), tedy pro případ nevazké, tepelně nevodivé tekutiny platí

$$-\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = T \nabla S, \tag{1.19}$$

a tudíž, vířivost $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ může být generována jen změnou entropie, např. kondenzačním teplem. V případě, že i entropie je konstantní, pak je proudění potenciální.

Croccova věta (1.18) platí jen pro stacionární procesy. Základním důvodem je využití I. zákona termodynamiky (1.14). Tento zákon platí jen pro materiálový systém (materiálový bod). Tento bod se při proudění pohybuje a pro nestacionární případ nelze z rovnice (1.14) vyloučit jednoduchým způsobem gradient tlaku, který vystupuje v bilanci hybnosti (1.17).

1.4 Clebschova reprezentace rychlostního pole

V následující části se vybavíme další užitečnou dovedností. Rozdělíme rychlostní pole na nevířivou a na nezřídlovou část, ukážeme, že za jistých podmínek na rychlostní pole existuje jednoznačný rozklad.

Věta 3. *O rozkladu rychlostního pole*

Pro každé spojité vektorové pole $\boldsymbol{v}$*, definované v celém prostoru, a jehož limita i limita prvních derivací v nekonečnu je nulová, existuje až na vektorovou konstantu jednoznačný rozklad na nevířivou a na nezřídlovou část.*

Předpokládejme, že známe rozložení vírů ($\boldsymbol{\Omega}$) a zdrojů (Θ) a chceme najít rychlostní pole

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}'', \tag{1.20}$$

kde $\mathbf{v}'$ je nevířivá část obsahující všechny zdroje, tj.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}' = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}' = \Theta,$$

a $\mathbf{v}''$ je nezřídlová část obsahující všechny víry, tj.

$$\operatorname{div} \mathbf{v}'' = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}'' = \boldsymbol{\Omega}.$$

Z těchto předpokladů plyne, že

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}' = \Theta, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v}'' = \boldsymbol{\Omega}.$$

K nevířivé části rychlostního pole $\mathbf{v}'$ existuje potenciál φ, $\nabla \varphi = \mathbf{v}'$. Z toho plyne, že

$$\operatorname{rot} \nabla \varphi \equiv \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = \Theta.$$

K nezřídlové části existuje vektorový potenciál $\mathbf{A}$, $\mathbf{v}'' = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Tedy platí

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0.$$

Vektorový potenciál je určen jednoznačně až na gradient nějaké skalární funkce, neboť

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} + \nabla f) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \nabla f = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

takže můžeme po $\mathbf{A}$ navíc požadovat, aby $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

Potom dosadíme do rovnice

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}^{''} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\,\mathbf{A} = -\Delta\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}.$$

Tedy, máme-li dány víry a zdroje, jsou potenciál φ a vektorový potenciál $\mathbf{A}$ určeny jako řešení Poissonovy rovnice. Jeho tvar dostaneme následujícím způsobem pomocí Greenovy věty, která tvrdí

$$\int_S \left(\Phi\frac{\partial\Phi^{'}}{\partial\boldsymbol{\nu}} - \Phi^{'}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)dS = \int_V \left(\Phi\,\Delta\,\Phi^{'} - \Phi^{'}\,\Delta\,\Phi\right)dv,$$

pokud Φ a $\Phi^{'}$ jsou $C^2(V)$ a pokud oba integrály konvergují. Položíme $\Phi = \varphi$ a $\Phi^{'} = \frac{1}{r}$, kde $r = \sqrt{(x_1-a)^2+(x_2-b)^2+(x_3-c)^2}$, a za objem V vezmeme prostor mezi dvěma sférami se středem (x_1, x_2, x_3) a poloměrem ρ, resp. R, S je povrch V, $\boldsymbol{\nu}$ je jednotková vnější normála k S. Na tomto objemu je $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ a $\Delta\,\varphi = \Theta$. Máme tedy

$$\int_{S_\rho}\left(\frac{\varphi}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)\rho^2 d\chi + \int_{S_R}\left(-\frac{\varphi}{R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)R^2 d\chi = -\int_V \frac{\Theta}{r}dv,$$

kde χ je prostorový úhel s vrcholem v bodě (x_1, x_2, x_3), $\rho^2 d\chi$, $R^2 d\chi$ jsou plošné elementy na S_ρ, resp. S_R. Nyní provedeme limitní přechod $\rho \to 0$, $R \to \infty$. Ke konvergenci integrálů na levé straně je potřeba, aby

$$\lim_{R\to\infty}\varphi = 0$$

a aby $\frac{\partial\varphi}{\partial R}$ konvergovala k nule rychleji než $\frac{1}{R}$. To první máme z toho, že rychlost jde v nekonečnu k nule, tím pádem φ ke konstantě a můžeme vzít jiný potenciál, jehož limita v nekonečnu bude 0, a z předpokladů věty dostaneme i to druhé. Pro konvergenci integrálu napravo je nutné, aby

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\to 0}}\int_V \frac{\Theta}{r}dv = K,$$

K je konečné číslo, u bodu (x_1, x_2, x_3) je v integrálu singularita.

Integrál typu

$$\int_{B_0}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\beta}d\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, B_0 je jednotková koule se středem v počátku v $\mathbb{R}^n$, konverguje právě tehdy, když $\beta < n$. Θ je spojité, takže integrál se na kouli se středem (x_1, x_2, x_3) chová jako pro $\beta = 1, n = 3$, takže tam konverguje. A pro $R \to \infty$ dostáváme podmínku, aby Θ konvergovalo k 0 jako $\frac{1}{R^\beta}, \beta > 2$, to ale máme z předpokladů, uvědomíme-li si, že $\Theta = \operatorname{div}\mathbf{v} = \Delta\,\varphi$. Limitním přechodem tedy dostáváme

$$4\pi\varphi = -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\Theta\,dv}{r},$$

tedy pro φ platí

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\Theta(a,b,c)\,dv}{\sqrt{(x_1-a)^2+(x_2-b)^2+(x_3-c)^2}}, \tag{1.21}$$

a analogicky dostáváme pro vektorový potenciál, za stejných podmínek pro Ω_i jako pro Θ:

$$A_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Omega_i(a, b, c)\, dv}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Snadno se ověří, převedením objemového integrálu na plošný pomocí Gaussovy věty, že platí $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Rychlostní pole tedy můžeme psát

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Ještě dokažme jednoznačnost takového rozkladu. Nechť $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1^{'} + \mathbf{v}_1^{''} = \mathbf{v}_2^{'} + \mathbf{v}_2^{''}$ jsou dva rozklady vektorového pole a platí $\mathbf{v}_1^{'}$ a $\mathbf{v}_2^{'}$ jsou nevířivé a $\mathbf{v}_1^{''}$ a $\mathbf{v}_2^{''}$ nezřídlové části $\mathbf{v}$. Pak platí, že $\mathbf{v}_1^{'} - \mathbf{v}_2^{'}$ a $\mathbf{v}_1^{''} - \mathbf{v}_2^{''}$ jsou nevířivé a nezřídlové zároveň. Tedy z nevířivosti k oběma těmto vektorům existují potenciály, a z nezřídlovosti je Laplaceův operátor těchto potenciálů roven nule, tzn. že jsou harmonické, a vzhledem k tomu, že i jejich parciální derivace jsou harmonické, nabývají svých extrémů na hranici oblasti, naše oblast je $\mathbb{R}^3$, a musí platit $\mathbf{v}_1^{'} - \mathbf{v}_2^{'} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{v}_1^{''} - \mathbf{v}_2^{''} = \mathbf{0}$. Takže se rozklady rovnají.

Pokud φ vyjádříme pomocí nějakého vektorového pole $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$\varphi = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{X},$$

kde $\mathbf{X}$ je inverzní zobrazení viz (1.2), a dále

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = -(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

Rozklad v tomto tvaru se nazývá **Clebschova reprezentace rychlostního pole**.

2. Biotův–Savartův zákon

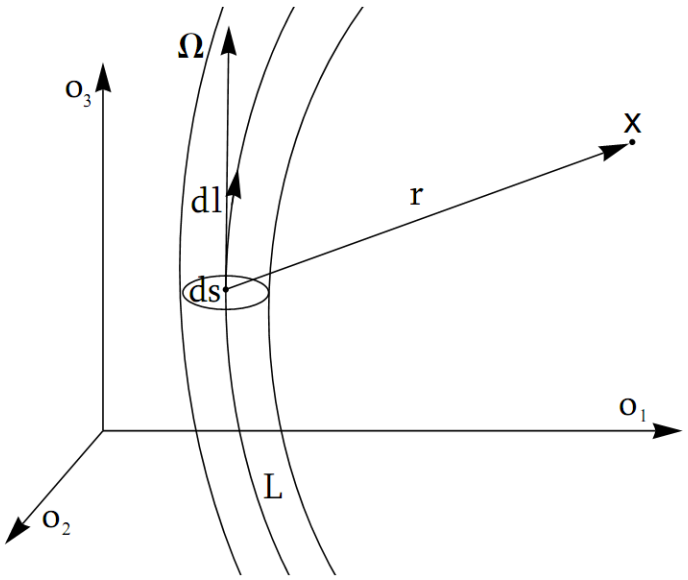
Naším dalším cílem bude popsat rychlost proudění v nestlačitelné tekutině indukované jedním vírovým vláknem, a jak se ukáže, tento vzorec v hydrodynamice bude analogický k Biotovu–Savartovu zákonu, který určuje magnetické pole vyvolané elektrickým proudem procházejícím nějakým tenkým vodičem. Mějme tedy vírové vlákno, označme ho L. Jak víme z definice, vektor vířivosti $\mathbf{\Omega}$ je k němu tečný (mimo vlákno je vířivost nulová), a vzhledem k tomu, že vírové vlákno je v tekutině jediné, nebude se pohybovat, a proudění bude stacionární. Intenzita vírového vlákna je ve všech řezech konstantní, označme ji μ. Z toho, že je tekutina nestlačitelná, plyne pro rychlostní pole, že sestává pouze z nezřídlové části, tj.

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

kde $\mathbf{A}$ je vektorový potenciál (viz část 1.4). Pro element objemu dv platí

$$\mathbf{\Omega}\, dv = \mathbf{\Omega}\, ds\, dl = \Omega\, ds\, d\mathbf{l} = \mu\, d\mathbf{l},$$

kde ds je element plochy řezu vírovým vláknem, $d\mathbf{l}$ je element vírového vlákna, stejného směru jako vektor vířivosti.



Obrázek 2.1: Vírové vlákno.

Pro rychlost $\mathbf{v}$ máme vyjádření

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{\Omega}(a,b,c)\, dv}{\sqrt{(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 + (x_3-c)^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_L \frac{\mu\, d\mathbf{l}}{\sqrt{(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 + (x_3-c)^2}} \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int_L \operatorname{rot} \left(\frac{d\mathbf{l}}{\sqrt{(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 + (x_3-c)^2}} \right) = (*)
\end{aligned}$$

Použijeme-li vzorec

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \nabla\varphi \times \mathbf{A},$$

a víme-li, že $\operatorname{rot} d\mathbf{l} = 0$, dostáváme

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_L \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 + (x_3-c)^2}} \right) \times d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times (x_1-a, x_2-b, x_3-c)}{((x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 + (x_3-c)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},\end{aligned}$$

kde $\mathbf{r} = (x_1 - a, x_2 - b, x_3 - c)$. Vzorec pro rychlostní pole indukované vírovým vláknem zní

$$\mathbf{v} = \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

A **Biotův–Savartův vzorec** má tvar

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

kde $\mathbf{r}$ je jako výše, $\mathbf{B}$ je magnetická indukce, μ_0 je permeabilita vakua, I je intenzita elektrického proudu, L je tenký vodič, je tedy patrná analogie našeho hydrodynamického a Biotova–Savartova vzorce.

Pro nekonečné přímé vírové vlákno splývající s osou x_3 dostáváme pro rychlost v rovině x_1x_2

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(x_1, x_2) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{(0,0,dc) \times (x_1, x_2, -c)}{(x_1^2 + x_2^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x_2, x_1, 0)\, dc}{(x_1^2 + x_2^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu\,(-x_2, x_1, 0)}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, d\alpha}{(x_1^2 + x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}} \cos^2\alpha} \\ &= \frac{\mu\,(-x_2, x_1, 0)}{4\pi\,(x_1^2 + x_2^2)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}} \cos^2\alpha} \\ &= \frac{\mu\,(-x_2, x_1, 0)}{4\pi\,(x_1^2 + x_2^2)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha \\ &= \frac{\mu\,(-x_2, x_1, 0)}{2\pi\,(x_1^2 + x_2^2)}.\end{aligned}$$

Výsledné rychlostní pole je

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = \frac{\mu\,(-x_2, x_1, 0)}{2\pi\,(x_1^2 + x_2^2)}. \tag{2.1}$$

3. Generace sil na obtékaném tělese

Zamysleme se nejprve, jakým způsobem přistoupit k tomuto složitému problému. K vyčerpávajícímu popisu reálného obtékání tělesa zatím naše možnosti nestačí, musíme se proto uchýlit ke značnému zjednodušování, jako je například předpoklad nestlačitelnosti nebo nevířivosti. Naším úkolem bude spočíst síly generované na tělese, konkrétně vztlakovou sílu. Motivace je zřejmá: Chceme-li, aby například letadlo letělo stále stejně rychle a vysoko, musí být výslednice sil na něho působící nulová. Kromě již zmíněných sil působí na letadlo ještě mj. gravitační síla. Nejprve popíšeme nevířivé proudění pomocí potenciálu rychlosti, ukážeme jakého tvaru nabývá potenciál v klíčových situacích, dále problém ještě zjednodušíme a budeme uvažovat pouze rovinné proudění, a to nám umožní zavést tzv. komplexní potenciál a použít netriviální poznatky z komplexní analýzy, a nakonec se podíváme na rovinné obtékání nejjednoduššího tělesa, totiž válce.

3.1 Nevířivé proudění

Jak jsme si již připravili v první kapitole, nevířivé proudění má potenciál rychlosti, a naopak, ke skalární funkcí existuje nevířivé proudění, jehož rychlost je gradientem této skalární funkce.

Předpokládejme, že proudění je nevířivé, tedy $\mathbf{w} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a dále, že proudění je nestlačitelné, tj. $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, tedy pro potenciál rychlosti φ musí platit

$$\operatorname{div}\nabla\varphi = \Delta\varphi = 0.$$

Hledáme-li v tomto případě φ, není to nic jiného, než řešit Laplaceovu rovnici. K této rovnici doplňujeme ještě takzvané okrajové a počáteční (pouze pro nestacionární proudění) podmínky, ale o tom později. Pusťme se do některých důležitých příkladů.

Pro **rovnoměrné přímočaré proudění**, kdy je pole rychlosti konstantní, $\mathbf{v} = (a, b, c),\ a, b, c \in \mathbb{R}$, jsou parciální diferenciální rovnice pro potenciál rychlosti

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = a,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = b,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = c.$$

Snadno je spočteme a dostaneme vyjádření potenciálu

$$\varphi = ax_1 + bx_2 + cx_3.$$

Zdroj v počátku s vydatností Q, kde vydatností myslíme takové číslo Q, aby platila podmínka stálosti průtoku, tj.

$$|\mathbf{v}| = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

generuje rychlostní pole následovně

$$v_i = \frac{Qx_i}{4\pi(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}},\ \ i = 1, 2, 3.$$

V počátku rychlost není definována, ani potenciál tam neexistuje. Potenciál proudění zdroje je

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Pokud $Q < 0$ hovoříme o propadu.

Důležitý poznatek je, že pokud máme více potenciálních proudění, tak součet proudění (máme na mysli součet rychlostních polí) je též potenciální a potenciál součtu je součet potenciálů, jak plyne z linearity derivace.

Tedy, když budeme uvažovat proudění zdroje a propadu s vydatnostmi Q a $-Q$, umístěné na myšlené přímce p v prostoru. Označme

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2} \\ r' &= \sqrt{(x_1 - d)^2 + (x_2 - e)^2 + (x_3 - f)^2}, \end{aligned}$$

kde (a, b, c) jsou souřadnice zdroje a (d, e, f) souřadnice propadu. Pak potenciál bude tvaru

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{Q}{4\pi r} + \frac{Q}{4\pi r'}.$$

Přisouvejme nyní propad ke zdroji, a zároveň zvětšujme vydatnost Q tak, aby

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ Q \to \infty}} hQ = m,$$

kde h je vzdálenost zdroje a propadu, $m \in \mathbb{R}$. Pomocí kosinové věty vyjádříme

$$r' = \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr\cos\theta},$$

kde θ je úhel sevřený polopřímkou, na které leží zdroj a propad a úsečkou mezi zdrojem a bodem, ve kterém počítáme potenciál. Teď spočteme limitu potenciálu (například pomocí aritmetiky limit a l'Hospitalova pravidla), když se k sobě blíží zdroj a propad výše popsaným způsobem.

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ Q \to \infty}} \frac{Qh}{4\pi} \frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ Q \to \infty}} \frac{Qh}{4\pi} \frac{r - \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr\cos\theta}}{hr\sqrt{r^2 + h^2 - 2hr\cos\theta}} = \frac{m\cos\theta}{4\pi r^2}.$$

Dostali jsme **potenciál dubletu** (dipólu), který má za osu polopřímku od bývalého zdroje k propadu a moment m.

Další případ je **spojité rozložení zdrojů a propadů**. Mějme omezený objem V, q je vydatnost zdrojů na jednotku objemu. Posčítáním přes celý objem získáme

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{q(a, b, c)\, dv}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2}}. \tag{3.1}$$

Konvergence tohoto integrálu závisí na q. Stačí například, aby byla spojitá na $\overline{V}$, když V je omezená množina, neboť potom q nabývá svých extrémů na $\overline{V}$, lze ji tedy odhadnout.

Všimněme si, že tentýž tvar (3.1) má řešení Poissonovy rovnice $\Delta\varphi = q$ viz (1.21).

Analogicky jako v objemu mohou být zdroje rozloženy na ploše nebo po křivce, potenciál pak bude vyjádřen jako plošný, resp. křivkový integrál.

Spojité rozložení dubletů dostaneme podobně. Uvažujme hladkou plochu S, a na ní spojitě rozložené dublety, jejichž osy splývají s normálami k ploše S v daném bodě. Potom je potenciál tvaru

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{m \cos\theta}{r^2} ds,$$

kde m je hustota dubletů na jednotce plochy a θ je úhel mezi osou a polopřímkou z bodu na ploše k bodu, ve kterém počítáme potenciál.

Zmiňme ještě tzv. **metodu zrcadlení**, používanou například, když vyšetřujeme proudění podél stěny. Spočívá v tom, že ke zdrojům, propadům, dubletům přidáme odpovídající zrcadlené objekty stejné vydatnosti, resp. momentu, kde zrcadlem je pevná stěna. Zrcadlit můžeme i nadvakrát, natřikrát, podle různých stěn. Například, chceme-li dostat proudění v rohu ve třech dimenzích, budeme zrcadlit postupně třikrát. Objekty, které leží na stěně zrcadlení, dvojnásobí svou vydatnost. Proč tato metoda funguje, je zřejmé: Přidáme-li druhý zrcadlený objekt, normálová složka rychlosti na ploše mezi nimi bude nulová. A to je přesně okrajová podmínka pro pevnou stěnu.

3.2 Proudění v rovině

Proudění je rovinné, pokud existuje taková kartézská soustava souřadnic, že $v_3 = 0$. Jen připomeňme, že i nadále předpokládáme, že proudění je nevířivé, nestlačitelné a nevyskytují se v něm žádné zdroje ani propady.

Definice. *Nechť máme proudění jako výše. Zvolme si bod v tekutině, označme ho $A = [a_1, a_2]$. Definujme* ***proudovou funkci*** *$\psi(p_1, p_2, t)$ jako tok tekutiny (libovolným) obloukem spojujícím body A a $P = [p_1, p_2]$.*

ψ je určena jednoznačně až na konstantu (záleží na bodu, který jsme vybrali, zvolíme-li jiný, liší se tyto dvě proudové funkce přesně o tok obloukem mezi jejich vztažnými body), a to díky podmínce nestlačitelnosti a absenci zdrojů. Když přepíšeme definici ve tvaru $\psi + \psi_0 = \int (v_1 dx_2 - v_2 dx_1)$, kde ψ_0 je nějaká konstanta, plyne z rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu, že $v_1 dx_2 - v_2 dx_1$ je totálním diferenciálem funkce ψ. A z toho dostáváme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = v_1, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = v_2.$$

Z (1.4) vyplývá

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}. \tag{3.2}$$

Další vlastností proudové funkce je, že v každém pevném čase je po proudnici konstantní. Poznamenejme ještě, že proudnice jsou kolmé na tzv. ekvipotenciální křivky, po kterých je φ konstantní.

Definice. *Nechť φ je potenciál a ψ je proudová funkce nějakého proudění. Potom funkci $u(z) = \varphi + i\psi$ nazveme* ***komplexním potenciálem proudění****.*

Funkce $u = \varphi + i\psi$ komplexní proměnné je holomorfní (má spojité derivace všech řádů) právě tehdy, když splňuje Cauchyho-Riemannovy podmínky (3.2) (viz Věta 7). Tedy komplexní potenciál je holomorfní funkce. Kvůli konvenci budeme dále používat $x_1 = x$ a $x_2 = y$, $z = x + iy$. Derivace komplexního potenciálu je

$$\begin{aligned}\frac{du(z)}{dz} &= \frac{d(\varphi + i\psi)}{dx + idy} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + i\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + i\frac{\partial\psi}{\partial y}dy}{dx + idy} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy}{dx + idy} = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + i\left(i\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dy}{dx + idy} \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_x - iv_y.\end{aligned}$$

Z poslední rovnosti je patrné, proč derivaci komplexního potenciálu nazýváme **komplexní rychlost**. A rychlostní pole dostaneme snadno

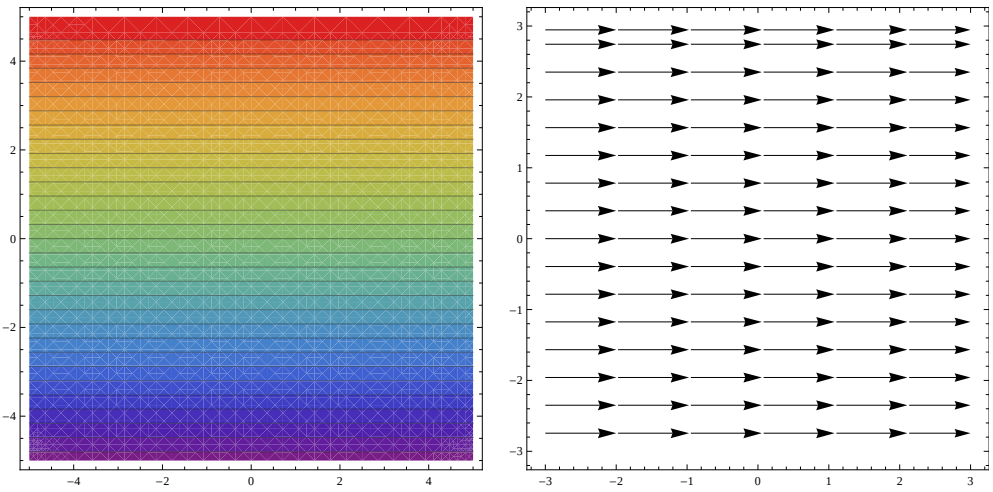
$$Re\left(\frac{du}{dz}\right) = v_x, \quad -Im\left(\frac{du}{dz}\right) = v_y.$$

Nyní ukažme na několika příkladech, jak se s komplexním potenciálem pracuje. Buď máme potenciál, a vyšetříme proudění, které popisuje, nebo máme proudění, popsáno pomocí okrajových podmínek, a snažíme se určit potenciál. Začněme s tím prvním.

Uvažujme potenciál $u = az$, kde $a \in \mathbb{R}$. Tedy $\varphi = ax, \psi = ay$. Derivujme

$$\frac{du}{dz} = a,$$

a z toho máme $v_x = a, v_y = 0$. To znamená, že tento potenciál popisuje rovnoměrný pohyb tekutiny ve směru osy x. Proudnice jsou rovnoběžné s osou x, a ekvipotenciální čáry s osou y, viz Obrázek 3.1.



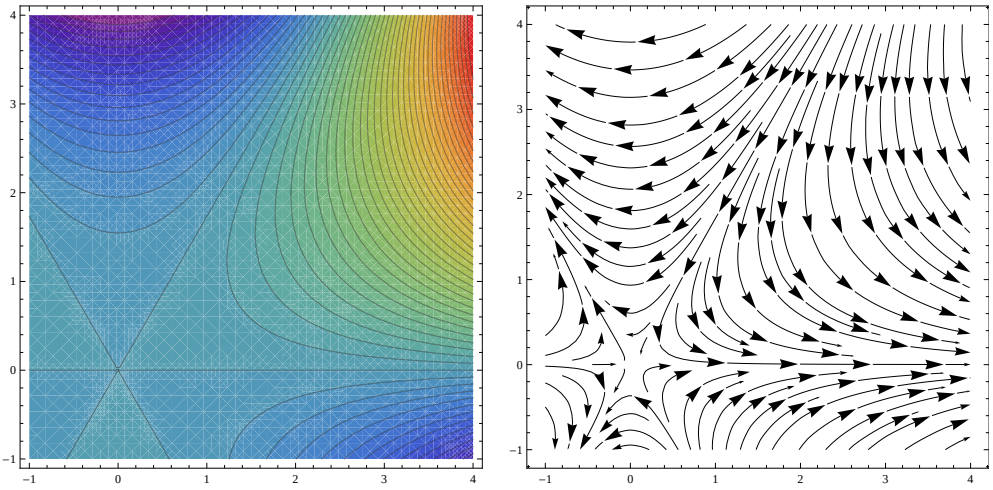
Obrázek 3.1: Rovnoměrné proudění ve směru osy x, vlevo proudnice, vpravo rychlostní pole.

Další příklad potenciálu bude $u = az^n$. To upravíme podle známého vzorce $u = ar^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$, kde n je kladné číslo, r velikost komplexního čísla a

θ je argument komplexního čísla. Proudnice budou mít rovnice $\psi = ar^n \sin(n\theta) = c, c \in \mathbb{R}$, ekvipotenciální křivky $\varphi = ar^n \cos(n\theta) = c$. Proudnice dané $\psi = 0$, tedy $\theta = 0$ a $n\theta = \pi$ jsou polopřímky začínající v počátku. Vzhledem k tomu, že rychlost je v každém bodě k proudnici tečná, lze ji považovat za pevnou stěnu. Tento komplexní potenciál tedy popisuje proudění v rohu mezi stěnami, svírajícími úhel π/n. Rychlost spočteme pomocí derivace

$$\frac{du}{dz} = anz^{n-1} = anr^{n-1}(\cos((n-1)\theta) + i\sin((n-1)\theta)).$$

$v_x = anr^{n-1}\cos((n-1)\theta)$, $v_y = -anr^{n-1}\sin((n-1)\theta)$. Viz Obrázek 3.2.



Obrázek 3.2: Proudění mezi stěnami svírajícími úhel $\alpha = \pi/3$.

Nyní vyšetřujme $u = a\ln z = a\ln(re^{i\theta})$. $\varphi = a\ln r$, $\psi = a\theta$, proudnice jsou polopřímky z počátku, ekvipotenciální křivky jsou kružnice se středem v počátku. Komplexní rychlost bude

$$\frac{du}{dz} = \frac{a}{z} = a\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{ax}{r^2} - i\frac{ay}{r^2}.$$

$$v_x = \frac{ax}{r^2}, \quad v_y = \frac{ay}{r^2}$$

Jak je vidět z pomínky stálosti průtoku, která je v rovině

$$|\mathbf{v}| = \frac{Q}{2\pi r},$$

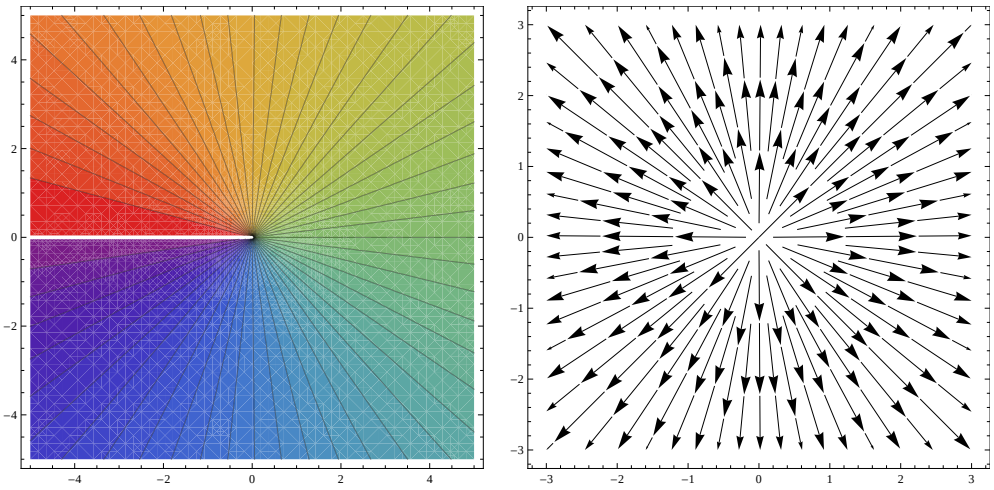
tento potenciál odpovídá proudění, kdy je v počátku zdroj s vydatností $2\pi a$. Viz Obrázek 3.3.

Odvoďme nyní komplexní potenciál dubletu, tj. propad se blíží ke zdroji, vydatnost Q roste do nekonečna. Provedeme to pro dublet v počátku s osou x, a předpokládejme, že

$$\lim_{\substack{Q\to\infty \\ x_1\to 0}} Qx_1 = m.$$

Komplexní potenciál zdroje v počátku a propadu v bodě x_1 je

$$u = \frac{Q}{2\pi}\ln z - \frac{Q}{2\pi}\ln(z - x_1) = \frac{Q}{2\pi}\ln\left(\frac{z}{z - x_1}\right).$$



Obrázek 3.3: Zdroj v počátku.

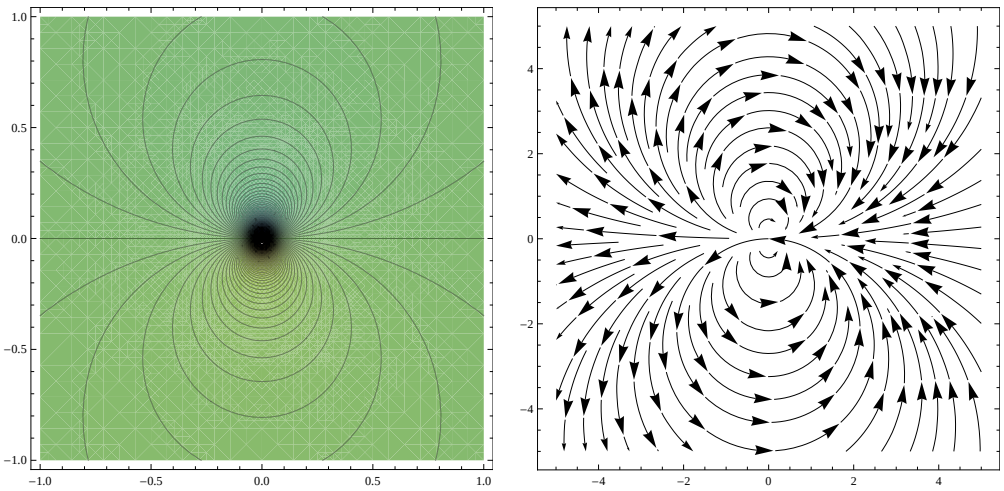
Spočtěme limitu

$$\lim_{\substack{Q\to\infty\\ x_1\to 0}} \frac{Q}{2\pi}\ln\left(\frac{z}{z-x_1}\right) = \lim_{\substack{Q\to\infty\\ x_1\to 0}} \frac{1}{2\pi}\ln\left(\left(1+\frac{x_1}{z-x_1}\right)^{\frac{Qx_1}{x_1}}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(e^{\frac{m}{z}}\right) = \frac{m}{2\pi z} = u.$$

Podotkněme, že tato komplexní funkce má v počátku singularitu, ale to nám v našich dalších úvahách nebude vadit, protože do počátku umístíme obtékané těleso, jak uvidíme za okamžik. Viz Obrázek 3.4. Ještě dopočteme rychlost

$$\frac{du}{dz} = -\frac{m}{2\pi z^2} = -\frac{m\left(x^2-y^2-2ixy\right)}{2\pi\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$$v_x = -\frac{m\left(x^2-y^2\right)}{2\pi\left(x^2+y^2\right)^2},\quad v_y = -\frac{mxy}{\pi\left(x^2+y^2\right)^2}.$$



Obrázek 3.4: Proudění vyvolané dubletem.

3.3 Obtékání válce

Mějme následující rovinný problém: Z nekonečna proudí tekutina rovnoměrným pohybem rovnoběžným s osou x, rychlost v nekonečnu označme v_∞, a válec o poloměru $a > 0$ je umístěn tak, aby jeho příčný řez ležel v rovině xy a jeho střed byl v počátku. Na plášti válce je normálová složka rychlosti nulová. Naším prvním úkolem bude nalézt komplexní potenciál $u = \varphi + i\psi$, aby vyhovoval popsanému proudění. Shrňme tedy své požadavky:

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \mathbf{v} = \lim_{x^2+y^2\to\infty} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \lim_{x^2+y^2\to\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = (v_\infty, 0) \tag{3.3}$$

$$\psi(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R},\ \text{neboli}\ \nabla\varphi(x,y)\cdot\boldsymbol{\nu} = 0,\ \ \forall (x,y) : x^2+y^2 = a^2 \tag{3.4}$$

A, vzhledem k tomu, že proudění je nevířivé, tj. $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, tak

$$0 = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \Delta\,\psi,\ \ \forall (x,y).$$

Z nestlačitelnosti, tj. $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$,

$$0 = \operatorname{div}\nabla\varphi = \Delta\,\varphi,\ \ \forall (x,y).$$

Komplexní potenciál je holomorfní funkce (a i všechny jeho derivace jsou holomorfní), takže můžeme první derivaci rozvinout v Laurentovu řadu se středem v počátku (viz Věta 8):

$$\frac{du}{dz} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$. Aby tato řada, vyjadřující komplexní rychlost, splnila (3.3), musí platit $c_k = 0,\ \forall k = 1,2,3,\ldots$. Přepišme ji do tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{z^k} = v_x - iv_y,$$

$a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Tato řada konverguje stejnoměrně pro $|z| \geq a$, zintegrujeme ji člen po členu

$$u = (a_0 + ib_0)z + (a_1 + ib_1)\ln z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{(-k+1)z^{k-1}}.$$

Když do vyjádření komplexní rychlosti dosadíme z (3.3) dostaneme, že $a_0 = v_\infty,\ b_0 = 0$. Abychom snáze určili další koeficienty Laurentovy řady, z zapíšeme v goniometrickém tvaru.

$$\begin{aligned} u = {} & v_\infty r\,(\cos\theta + i\sin\theta) + (a_1 + ib_1)\ln\left(re^{i\theta}\right) \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{(1-k)r^{k-1}}\left(\cos\left((k-1)\theta\right) - i\sin\left((k-1)\theta\right)\right) \end{aligned}$$

Pro proudovou funkci a pro potenciál platí

$$\psi = v_\infty r\sin\theta + b_1\ln r + \theta a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k\cos\left((k-1)\theta\right) - a_k\sin\left((k-1)\theta\right)}{(1-k)r^{k-1}}$$

$$\varphi = v_\infty r\cos\theta + a_1 \ln r - b_1\theta + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k \cos\left((k-1)\theta\right) + b_k \sin\left((k-1)\theta\right)}{(1-k)r^{k-1}}$$

Dosaďme $r = a$, z podmínky (3.4) pro ψ plyne

$$v_\infty a\sin\theta + b_1 \ln a + \theta a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k \cos\left((k-1)\theta\right) - a_k \sin\left((k-1)\theta\right)}{(1-k)a^{k-1}} = c.$$

Musí tedy platit $a_1 = b_2 = a_k = b_k = 0, k = 3, 4, \ldots$, a dále

$$v_\infty a\sin\theta + b_1 \ln a + \frac{a_2}{a}\sin\theta = c,$$

z toho vyplývá, že

$$v_\infty a + \frac{a_2}{a} = 0,$$

neboli

$$a_2 = -v_\infty a^2.$$

Komplexní potenciál má tento tvar

$$u = v_\infty \left(z + \frac{a^2}{z}\right) + ib_1 \ln z.$$

Z příkladů, které jsme rozebírali výše, se u skládá z potenciálu rovnoměrného proudění ve směru osy x, dále z potenciálu dubletu, umístěného v počátku, a ještě jednoho členu, podívejme se na něj podrobněji.

Vyšetřeme komplexní potenciál, který se rovná $ib_1 \ln z$. Potenciál $\varphi = -b_1\theta$ a proudová funkce $\psi = b_1 \ln r$. Ekvipotenciálními křivkami jsou polopřímky z počátku, proudnicemi kružnice se středem v počátku, viz Obrázek 3.5. Rychlost určíme z komplexní rychlosti

$$v_x - iv_y = \frac{ib_1}{z} = \frac{ib_1(x-iy)}{x^2+y^2},$$

$$v_x = \frac{b_1 y}{r^2}, \quad v_y = -\frac{b_1 x}{r^2}. \tag{3.5}$$

A spočteme-li třetí složku vířivosti

$$\mathrm{rot}_3\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{-b_1(x^2+y^2) + 2b_1x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{b_1(x^2+y^2) - 2b_1y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

$$(x, y) \neq (0, 0),$$

zjistíme, že kromě jednoho bodu je proudění nevířivé (ostatní složky vířivosti jsou nulové, protože proudění je rovinné). V počátku tedy leží vírový bod (ve skutečnosti jde o přímé vírové vlákno, které splývá s osou x_3). Chceme-li zjistit jeho intenzitu, stačí spočíst hodnotu cirkulace rychlosti po nějaké uzavřené křivce, takové, aby index počátku k této křivce byl 1 (například po kružnici o poloměru r se středem v počátku, opsané proti směru hodinových ručiček). Potom, pomocí

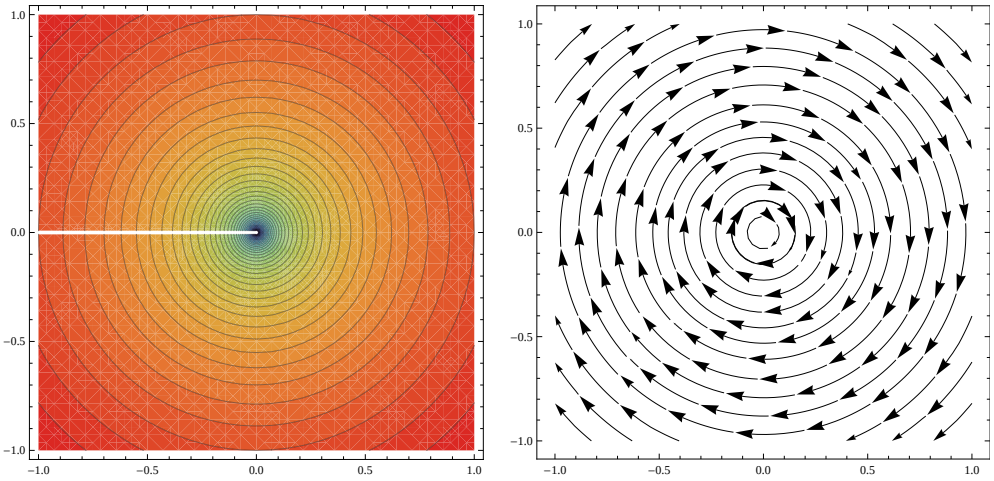
Stokesovy věty (viz Věta 6), se cirkulace rovná intenzitě. Tedy pro popsanou kružnici

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint (v_x dx + v_y dy) = \oint \left(\frac{b_1 y}{x^2+y^2} dx - \frac{b_1 x}{x^2+y^2} dy \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{b_1 r^2 \sin^2\theta}{r^2} - \frac{b_1 r^2 \cos^2\theta}{r^2} \right) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} b_1 d\theta = -2\pi b_1 = \mu.\end{aligned}$$

Když nahlédneme do předchozí kapitoly viz (2.1), zjistíme, že nám rychlostní pole indukované přímým vírovým vláknem vyšlo stejně.

Komplexní potenciál vírového bodu můžeme nyní zapsat

$$ib_1 \ln z = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$



Obrázek 3.5: Proudění způsobené vírovým bodem.

A konečně zpátky k problému obtékání válce

$$u = v_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Pokud $\Gamma = 0$, hovoříme o necirkulačním obtékání, je-li $\Gamma \neq 0$, obtékání je cirkulační. Nyní spočteme polohu kritických bodů, tj. bodů, kde $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, což nastává právě tehdy, když

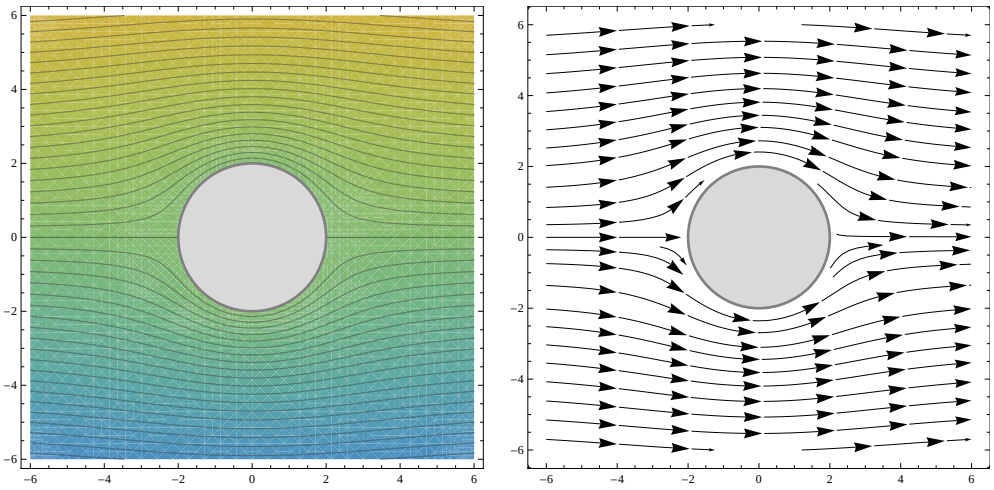
$$0 = \frac{du}{dz} = v_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z}.$$

Řešme tedy kvadratickou rovnici

$$v_\infty z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - v_\infty a^2 = 0.$$

Jejími kořeny jsou

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4v_\infty^2 a^2}}{2v_\infty}.$$



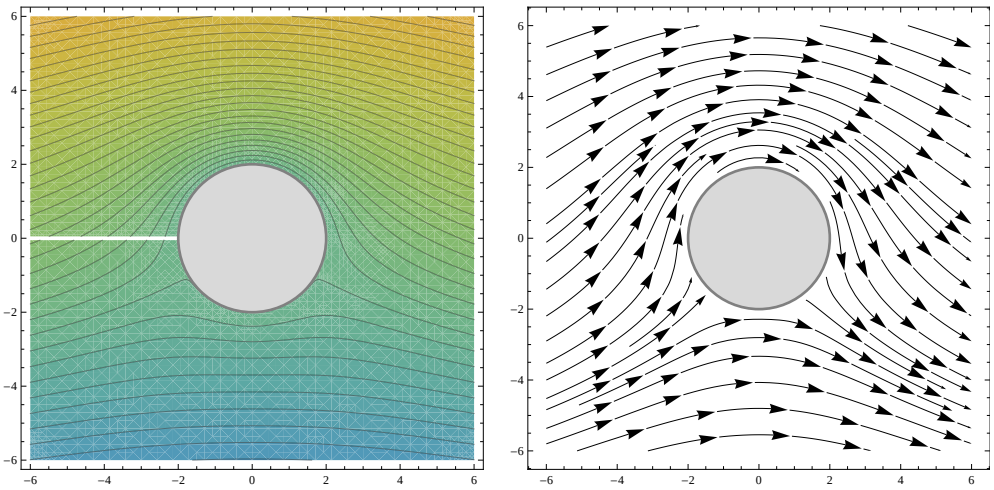
Obrázek 3.6: Necirkulační obtékání válce.

Pro $\Gamma = 0$ jsou $z_{1,2} = \pm a$, leží tedy na stěně válce, na reálné ose (viz Obrázek 3.6).

Pro $\Gamma \neq 0$ záleží, zda je diskriminant větší, rovný nebo menší než 0. Je-li kladný (pro $|\Gamma| < 4\pi v_\infty a$), dostaneme

$$Im(z_{1,2}) = \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}, \quad Re(z_{1,2}) = \pm\sqrt{-\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_\infty^2} + a^2}.$$

$|z_{1,2}| = a$, oba kritické body tedy leží na stěně válce, symetricky podle osy y (viz Obrázek 3.7).

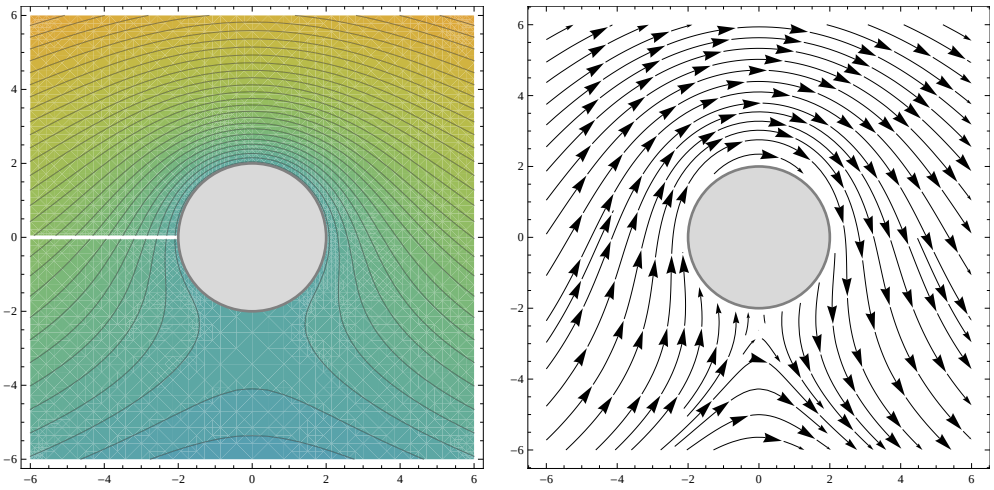


Obrázek 3.7: Cirkulační obtékání válce se dvěma kritickými body na stěně válce.

Pro nulový diskriminant ($|\Gamma| = 4\pi v_\infty a$) máme jeden kritický bod

$$z = \frac{i\Gamma}{4\pi v_\infty} = ia\mathrm{sgn}(\Gamma),$$

který opět leží na stěně válce (viz Obrázek 3.8).

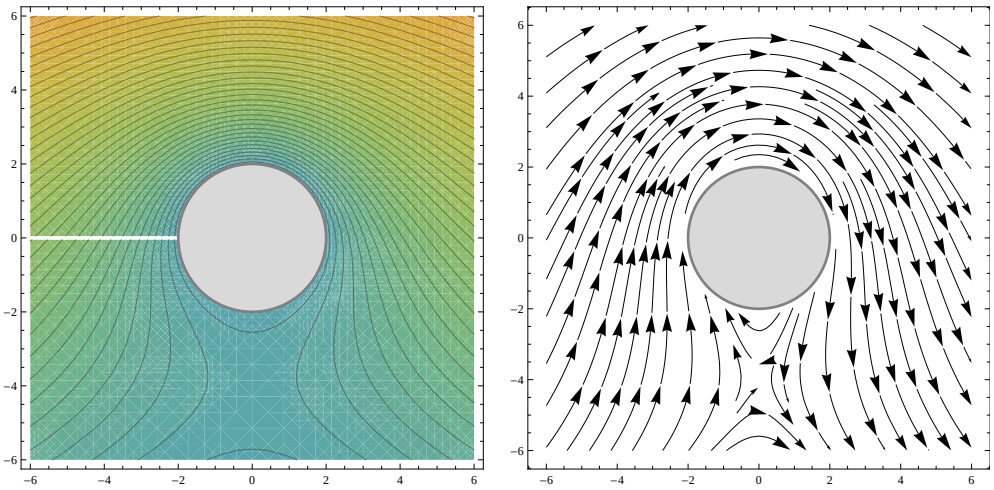


Obrázek 3.8: Cirkulační obtékání válce s jedním kritickým bodem na stěně válce.

A konečně pro záporný diskriminant ($|\Gamma| > 4\pi v_\infty a$) rovnice dává dva ryze imaginární kořeny

$$z_{1,2} = i\left(\frac{\frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} - 4v_\infty^2 a^2}}{2v_\infty}\right),$$

z nichž vždy leží jeden uvnitř a jeden vně válce (viz Obrázek 3.9).



Obrázek 3.9: Cirkulační obtékání válce s jedním kritickým bodem mimo válec.

Nyní spočteme prostou hodnotu rychlosti na povrchu válce (dosadíme za $z = ae^{i\theta}$)

$$\frac{du}{dz} = v_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z} = v_\infty\left(1 - \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right) - \frac{\Gamma(i\cos\theta + \sin\theta)}{2\pi a}$$

$$v_x = -\frac{\Gamma\sin\theta}{2\pi a} + 2v_\infty\sin^2\theta, \quad v_y = -v_\infty\sin(2\theta) + \frac{\Gamma\cos\theta}{2\pi a} \tag{3.6}$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{v}|^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\
&= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} - \frac{2\Gamma v_\infty \sin^3\theta}{\pi a} + 4v_\infty^2 \sin^4\theta + 4v_\infty^2 \sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{2\Gamma v_\infty \sin\theta\cos^2\theta}{\pi a} \\
&= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} - \frac{2\Gamma v_\infty \sin\theta}{\pi a} + 4v_\infty^2 \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Pro výpočet tlaku na povrchu válce jednotkové výšky použijeme Bernoulliho rovnici

$$\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p = c, \quad c \text{ je konstantní.}$$

Vyjádříme z ní tlak a dosadíme za rychlost

$$p = c - \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 = c - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} - \frac{2\Gamma v_\infty \sin\theta}{\pi a} + 4v_\infty^2 \sin^2\theta\right).$$

Pro výslednici tlakových sil na válec jednotkové výšky platí (k je kružnice o poloměru a se středem v počátku, $ds = ad\theta$ je element oblouku kružnice, $\boldsymbol{\nu}$ je jednotková vnější normála)

$$\mathbf{R} = -\oint_k p\boldsymbol{\nu} ds = -\int_0^{2\pi} p(\cos\theta, \sin\theta) a d\theta.$$

Spočteme složky výslednice:

$$
\begin{aligned}
R_x &= -\int_0^{2\pi} pa\cos\theta d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(c - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} - \frac{2\Gamma v_\infty \sin\theta}{\pi a} + 4v_\infty^2 \sin^2\theta\right)\right) a\cos\theta d\theta \\
&= 0, \\
R_y &= -\int_0^{2\pi} pa\sin\theta d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(c - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} - \frac{2\Gamma v_\infty \sin\theta}{\pi a} + 4v_\infty^2 \sin^2\theta\right)\right) a\sin\theta d\theta \\
&= -\Gamma v_\infty \rho,
\end{aligned}
$$

kde jsme využívali vlastností goniometrických funkcí, a jedině na členu se $\sin^2\theta$ jsme napočetli nenulovou hodnotu:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\Gamma\rho v_\infty}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta &= -\frac{\Gamma\rho v_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\
&= -\frac{\Gamma\rho v_\infty}{2\pi}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= -\Gamma v_\infty \rho
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Tedy vztlaková síla při záporné cirkulaci působí svisle vzhůru, pro kladnou zase dolů, a je-li cirkulace rovna 0, je výslednice tlakových sil působících na válec nulová.

4. Obtékání válce s termodynamicky generovanou vířivostí

Dva základní způsoby, jak v tekutině může vzniknout vír, jsou následující: Buď tekutina vlivem vazkosti ulpívá na stěně, podél které proudí, přímo na stěně má nulovou rychlost a v mezní vrstvě spojitě se vzdáleností od stěny nabývá rychlosti proudící tekutiny. Pokud se mezní vrstva odloučí od stěny, dochází ke vzniku vírů. Nebo při obtékání tělesa s ostrou zadní hranou dojde k tomu, že rychlost tekutiny proudící kolem z jedné a z druhé strany se liší, vzniká tzv. dělicí plocha, která se často rozpadá v několik vírů. Obtékání válce, které jsme propočetli, pracovalo s nevazkou tekutinou – jak se tedy mohla vytvořit cirkulace? Jednoduše, zavedli jsme ji jako pro vazkou tekutinu, která by ulpívala na stěně válce a chceme-li, aby byla nenulová, představili jsme si, že válec navíc rotuje kolem své osy. Takže pro nevazký model je cirkulace uměle zavedená.

Další způsob, jak můžeme uvažovat vytvoření vírů a následné cirkulace kolem obtékaného tělesa, je ten, že na jedné jeho straně (např. na horní) budeme malými otvory vypouštět horkou páru, ta v okolním studenějším vzduchu zkondenzuje, a část energie uvolněné při tomto procesu se přemění na energii kinetickou a dojde i ke vzniku vírů. Dokladů těchto přírodních jevů nám počasí poskytuje nesčetně: například ničivé hurikány a tornáda. Energie uvolněná v těchto případech je ohromná – jednak kondenzuje velké množství vody a též měrné kondenzační teplo není nijak zanedbatelné. Zkusme ho tedy využít.

Mějme opět obtékaný válec o poloměru a, a na jeho horní polovině vypouštějme páru. Předpokládejme, že celková entalpie bude konstantní a v Croccově větě (1.18) zanedbáme i vliv viskozity, máme tedy

$$T\nabla S = -\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right] \tag{4.1}$$

Entropie má v tomto vztahu fyzikální rozměr J/kg K, takže vztah (4.1) vyjadřuje specifickou sílu na jednotku hmotnosti tekutiny. Uvažujeme-li, že proudění je rovinné, potom zřejmě $v_3 = 0$ a pouze třetí složka vířivosti je nenulová. Dostaneme

$$\begin{aligned} T\frac{\partial S}{\partial x_1} &= -v_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \\ T\frac{\partial S}{\partial x_2} &= v_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Též ještě odvodíme

$$\operatorname{rot}_3 \mathbf{v} = -\frac{T}{v_2}\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{T}{v_1}\frac{\partial S}{\partial x_2},$$

nicméně při dalším postupu bychom museli vyřešit nelineární parciální diferenciální rovnice a tak zvolíme jiný postup. Rovnost (4.1) vynásobíme jednotkovou vnější normálou $\mathbf{n}$ k plášti válce:

$$T\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

Rozdělme rychlostní pole na nevířivou část $\mathbf{v}^-$, která v předchozí kapitole popisovala necirkulační obtékání válce, a na část vyvolanou kondenzací $\mathbf{v}^*$. Víme, že $\operatorname{rot}\mathbf{v}^- = 0$, tedy

$$T\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^*) \times \operatorname{rot}\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n},$$

ze vzorce, v němž $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou vektory,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}),$$

$$T\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = -\operatorname{rot}\mathbf{v}^* \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^*)).$$

Vzhledem k tomu, že vířivost má pouze třetí složku nenulovou, a normála a rychlost první dvě nenulové složky, platí

$$T\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = -\operatorname{rot}_3\mathbf{v}^*(n_1(v_2^- + v_2^*) - n_2(v_1^- + v_1^*)),$$

$$\operatorname{rot}_3\mathbf{v}^* = -\frac{T}{n_1(v_2^- + v_2^*) - n_2(v_1^- + v_1^*)}\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}}.$$

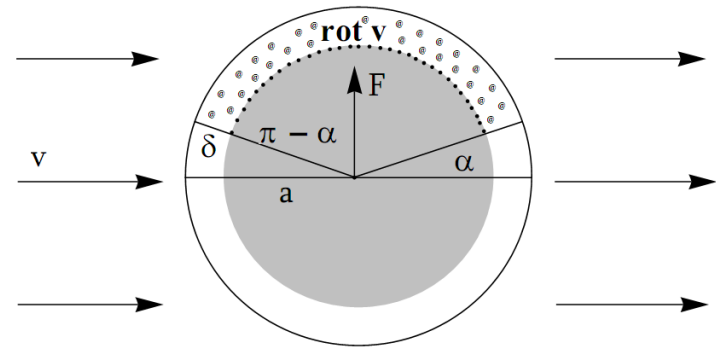
Právě v tomto okamžiku musíme na pravé straně zanedbat členy s rychlostí vyvolanou kondenzací – nevyřešili jsme totiž rovnice (4.2). Výpočtem zjistíme (použijeme (3.6) pro $\Gamma = 0$, vzorec platí pro libovolnou vzdálenost od válce), že

$$n_1 v_2^- - n_2 v_1^- = -2v_\infty \sin\theta.$$

Máme tedy

$$\operatorname{rot}_3\mathbf{v}^* = \frac{T}{2v_\infty \sin\theta}\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}}.$$

Kondenzace způsobila vznik vířivosti na nějakém pásu o tloušťce δ kolem té poloviny válce, kde jsme napařovali. Pomocí Stokesovy věty spočteme cirkulaci kolem válce po křivce s, která obemyká válec včetně δ vrstvy, křivkový integrál převedeme na plošný (jednotkovou normálu k ploše P jsme určili jako $(0, 0, 1)$, vypouštění páry budeme uvažovat úhlově mezi α a $\pi - \alpha$, $\alpha \in (0, \pi/2)$ viz Obrázek 4.1).



Obrázek 4.1: Vířivost generovaná kondenzací páry nad válcem.

$$\Gamma = \oint_s \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \int_P \operatorname{rot}\mathbf{v}^*\cdot\boldsymbol{\nu}\,dP = \int_P \operatorname{rot}_3\mathbf{v}^*\,dP = \int_a^{a+\delta}\int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{T\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}}}{2v_\infty \sin\theta} r\,d\theta\,dr = (**),$$

nyní použijme znalost z termodynamiky, že při každém fázovém přechodu (v našem případě při kondenzaci) se změní entropie:

$$T\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} \doteq \frac{T(S_{kap} - S_{par})}{\delta} = \frac{h_{par,kap}}{\delta} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,m}}\right],$$

kde $h_{par,kap}$ je kondenzační teplo.

$$\begin{aligned}
(**) &= \int_a^{a+\delta}\int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{h_{par,kap}}{2\delta v_\infty \sin\theta} r d\theta dr = \frac{\delta(2a+\delta)h_{par,kap}}{4\delta v_\infty}\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sin\theta}d\theta \\
&\doteq \frac{a h_{par,kap}}{2v_\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{|\cos\theta - 1|}{|\cos\theta + 1|}\right]_\alpha^{\pi-\alpha} \\
&= \frac{a h_{par,kap}}{4v_\infty}\ln\frac{|\cos(\pi-\alpha)-1|\,|\cos\alpha+1|}{|\cos(\pi-\alpha)+1|\,|\cos\alpha-1|} \\
&= \frac{a h_{par,kap}}{4v_\infty}\ln\frac{|-\cos\alpha-1|\,|\cos\alpha+1|}{|-\cos\alpha+1|\,|\cos\alpha-1|} \\
&= \frac{a h_{par,kap}}{4v_\infty}\ln\frac{(\cos\alpha+1)^2}{(\cos\alpha-1)^2} \quad \left[\frac{\mathrm{m\,J\,s}}{\mathrm{kg\,m\,s^2}} = \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}\right]
\end{aligned}$$

Při odvození jsme předpokládali, že $a \gg \delta$. Máme spočtenou cirkulaci a můžeme využít vzorec pro vztlakovou sílu, který jsme spočetli v předchozí kapitole, viz (3.7). Tedy celkem

$$F_{x_2} = -\frac{\rho a h_{par,kap}}{4}\ln\frac{(\cos\alpha+1)^2}{(\cos\alpha-1)^2} \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] \tag{4.3}$$

Budeme-li vypouštět vodní páru při teplotě $T = 300\,K$ a tlaku $p = 3568\,Pa$ je kondenzační teplo $h_{par,kap} = -2,55\,MJ/kg$. Kondenzační teplo je záporné, protože je to teplo (energie) kterou je třeba odvést. V tomto případě bude vztlaková síla kladná a těleso bude nadnášet.

Zkusme spočítat vztlakovou sílu pro válec o poloměru $a = 0,05\,m$, obtékaný vzduchem o hustotě $\rho = 1,2\,kg/m^3$ při náběžné rychlosti $v_\infty = 10\,m/s$. Předpokládejme, že páru budeme vypouštět mezi $\pi/12$ a $11\pi/12$. Podle vzorce (4.3) velikost vztlakové síly na tloušťce kondenzační vrstvy nezávisí (stejně tak by neměl záviset na náběžné rychlosti). Dosazením do vzorce (4.3) vychází síla o velikosti $3,1 \cdot 10^5\,N/m$. Tato síla vychází vzhledem k vysokému kondenzačnímu teplu poměrně vysoká. Není reálné, aby na uvažovaném povrchu kondenzoval $1\,kg$ páry. Takové množství tepla není reálné odvést. Za předpokladu, že by zkondenzoval přibližně $0,1\,g$ páry, bude vztlaková síla $31\,N$, což by mohla být již realizovatelná hodnota.

Závěr

Zabývali jsme se výpočtem vztlakové síly za pomoci potenciálního proudového pole a získali jsme konkrétní výsledek pro obtékaný válec. Zjistili jsme, že vztlaková síla má směr osy y, směřuje tedy svisle vzhůru nebo kolmo dolů a její velikost je rovna součinu velikostí náběžné rychlosti, hustoty tekutiny a cirkulace. Ve skutečném případě si cirkulaci můžeme představit tak, že válec rotuje úhlovou rychlostí rovnou cirkulaci. Při studiu potenciálního proudového pole jsme si vyzkoušeli užitečnost tohoto přístupu a popsali a zobrazili jsme základní typy proudění. Odvodili jsme analogii Biotova – Savartova zákona v hydrodynamice a na příkladu přímého vírového vlákna ukázali, že se výsledek shoduje při výpočtu pomocí komplexního potenciálu vírového bodu.

V poslední kapitole jsme využili předchozích výsledků a Croccovu větu pro vztah mezi energií uvolněnou při kondenzaci a vířivostí. Při tomto výpočtu jsme zanedbali část rychlosti generovanou kondenzací, a provedli jsme další aproximace, nedostali jsme tedy přesný výsledek. Též ne všechna energie se v reálném případě přemění na pohybovou energii. Zde se ovšem nachází prostor pro vylepšení našich výsledků v dalších pracích.

Tato práce slouží jako podklad pro návrh fyzikálního experimentu, který teprve ukáže na oprávněnost všech použitých předpokladů.

Seznam použité literatury

[1] Brdička, Miroslav, Samek, Ladislav, Sopko, Bruno. *Mechanika kontinua*. 3. vydání, rev. Praha: Academia, 2005. ISBN 80-200-1344-X

[2] Gurtin, Morton E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981. ISBN-978-0-12-309750-7

[3] Maršík, František. *Termodynamika kontinua*. Praha: Academia, 1999. ISBN 80-200-0758-X

[4] Lojcjanskij, L.G. *Mechanika kapalin a plynů*. Praha: SNTL, 1954.

[5] Batchelor, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-66396-2

[6] Černý, Ilja. *Analýza v komplexním oboru*. Praha: Academia, 1983.

[7] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet II*. Praha: Academia, 1976.

[8] Maršík, František, Dvořák, Ivan. *Biotermodynamika*. Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0664-8

Použité věty

Věta 4. ***Derivace složeného zobrazení***

Buďte $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ reálné funkce s proměnných mající diferenciál v bodě $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s)$, $b_j = \varphi_j(\boldsymbol{a})$, $j = 1, \ldots, r$. Budiž f funkce r proměnných, mající diferenciál v bodě $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_r)$. Potom funkce $F(\boldsymbol{t}) = f(\varphi_1(\boldsymbol{t}), \ldots, \varphi_r(\boldsymbol{t}))$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál, který je dán výrazem

$$L(\boldsymbol{h}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(\boldsymbol{b})}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \varphi_j(\boldsymbol{a})}{\partial t_k} h_k,$$

a pro $k = 1, \ldots, s$ platí

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{a})}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f(\boldsymbol{b})}{\partial x_j} \, \frac{\partial \varphi_j(\boldsymbol{a})}{\partial t_k}.$$

Důkaz je v [7].

Věta 5. ***Gaussova o divergenci***

Nechť V je omezená regulární oblast v $\mathbb{R}^3$, ∂V je hranice V, nechť $\boldsymbol{v} : V \to \mathbb{R}$ je hladké vektorové pole, potom

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v} \, dv,$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je jednotková vnější normála k ∂V.

Viz. [2].

Věta 6. ***Stokesova*** *Nechť $\boldsymbol{v}$ je hladké vektorové pole na $V \subset \mathbb{R}^3$. Nechť S je kruhová plocha, a c je křivka obepínající S orientovaná tak, aby $\boldsymbol{\nu}$ jednotková normála k S splnila pravidlo pravé ruky. Potom*

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \int_c \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Důkaz lze nalézt v [2].

Věta 7. ***Cauchyho-Riemannovy podmínky***

Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající f při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, tj. takovou, že $f(x + iy) = \tilde{f}_1(x, y) + i\tilde{f}_2(x, y)$ pro $x + iy$ z definičního oboru f. Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě tehdy když $\tilde{f}$ má v bodě (a, b) totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b)$$
$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b).$$

Důkaz v [6].

Věta 8. ***O rozvoji holomorfní funkce v Laurentovu řadu***

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq \infty$ a f je holomorfní funkce na mezikruží $P(z_0, r, R)$. Potom existuje jednoznačně určená Laurentova řada o středu z_0, jejímž součtem v $P(z_0, r, R)$ je f, tedy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = f, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Důkaz v [6].