Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Novotný

Operátory skládání na prostorech funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Jiří Spurný Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	obecná matematika

Praha 2011

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své práce panu doc. RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D. za čas, který mi věnoval a dále také za jeho podněty a připomínky, které mi při práci velmi pomohly.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Operátory skládání na prostorech funkcí

Autor: Matěj Novotný

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Spurný Ph.D.

Abstrakt: V práci je nejprve definován pojem operátoru skládání na prostoru spojitých či měřitelných funkcí komplexní proměnné a posléze jsou zkoumány jeho základní vlastnosti v závislosti na vlastnostech zobrazení, které jej indukuje. Jsou hledány podmínky, za kterých je operátor spojitý, kompaktní či izomorfismem. U operátorů indukovaných spojitými zobrazeními alespoň zčásti určíme jejich spektrum.

Klíčová slova: Lineární operátor, L^p prostory, spojité zobrazení

Title: Composition operators on function spaces

Author: Matěj Novotný

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Spurný Ph.D.

Abstract: In the thesis we define what is an composition operator on the space of continuous or measurable functions of one complex variable so that we may proceed to study its properties depending on properties of the mapping the operator is induced by. We search for conditions under which the operator is continuous, compact and an isomorphism. We roughly estimate the spectrum of an operator defined on a space of continuous functions.

Keywords: Linear operator, L^p spaces, continuous mapping

Obsah

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{N}$	přirozená čísla
$\mathbb{N}_0$	přirozená čísla včetně nuly
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{C}$	komplexní čísla
$\mathbb{C}^n$	kartézský součin $\overbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}}^{n}$
U	otevřený jednotkový kruh v $\mathbb{C}$
T	jednotková kružnice v $\mathbb{C}$
$\overline{M}$	uzávěr množiny M
(a, b)	otevřený interval a, b
$[a, b]$	uzavřený interval a, b
$B(x, \delta)$	otevřená koule o středu x a poloměrem δ
$\dim H$	dimenze vektorového prostoru H
$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	nekonečná posloupnost bodů $a_1, a_2, a_3, ...$
$\mathcal{C}(K)$	prostor spojitých funkcí z K do $\mathbb{C}$
$g \circ \varphi$	složení zobrazení g a φ
φ^n	$\overbrace{\varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi}^{n}$
$\|f\|$	norma f
φ^{-1}	inverzní zobrazení k φ
Id	identické zobrazení
$e^x, \exp(x)$	exponenciála v bodě x
$\varphi(K)$	obraz množiny K při zobrazení φ
$Im(g)$	imaginární část funkce g
$Re(g)$	reálná část funkce g
$\overline{f}$	komplexně sdružená funkce k f
$\overline{\lambda}$	komplexně sdružené číslo k λ
$Rng(T)$	range operátoru T
$\sigma(T)$	spektrum operátoru T
$\sigma_p(T)$	bodové spektrum operátoru T
T'	adjungovaný operátor k T
$\mathcal{M}(K)$	prostor všech komplexních Radonových měr na K
φ_α	obraz míry α při měřitelném zobrazení φ
χ_A	charakteristická funkce množiny A

Úvod

Práce je rozdělena do dvou hlavních kapitol. První kapitola se vztahuje k prostoru spojitých funkcí nad kompaktem, v druhé kapitole pak pracujeme na L^p prostorech. V obou kapitolách definujeme operátor skládání a zabýváme se jeho vlastnostmi. Ukážeme, že některé z nich, například spojitost či linearita, vyplývají přímo z definice samotného operátoru a nezávisí na zobrazení, které operátor indukuje. U ostatních vlastností formulujeme nutné a postačující podmínky pro to, aby operátor kýžených vlastností nabýval.

Jak uvidíme, prostor L^p je daleko složitější strukturou než prostor spojitých funkcí, především pro to, že jeho prvky jsou třídy ekvivalence, nikoliv funkce. Projeví se to i na předpokladech tvrzení, které oproti spojitému případu budou o něco složitější. Pro operátor definovaný na prostoru spojitých funkcí určíme zčásti spektrum. Objevíme, že spektrum operátoru skládání souvisí nejen s vlastnostmi zobrazení, které jej indukuje, ale i se strukturou kompaktního prostoru, nad kterým je prostor funkcí definován.

1. Operátory skládání na $\mathcal{C}(K)$

1.1. Formulace problému Nechť $(K,\rho),(L,\pi)$ jsou kompaktní metrické prostory, a $\varphi : L \to K$ je spojité zobrazení. Definujme na prostoru spojitých funkcí z K do $\mathbb{C}$ operátor T následovně:

$$Tg = g \circ \varphi, \quad g \in \mathcal{C}(K).$$

Jelikož složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení, platí $Tg \in \mathcal{C}(L)$. Operátor $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ je tedy dobře definovaný. V dalším se budeme zabývat především vlastnostmi T a jejich vztahem k zobrazení φ.

Základní vlastnosti T

1.2. Linearita, spojitost a norma T Není vůbec složité ověřit, že T je lineárním operátorem. Pro $r \in \mathbb{C}$ a $g \in \mathcal{C}(K)$ totiž platí

$$r(Tg) = r(g \circ \varphi) = (rg) \circ \varphi = T(rg)$$

a obdobně pro $f, g \in \mathcal{C}(K)$ máme

$$T(f+g) = (f+g) \circ \varphi = f \circ \varphi + g \circ \varphi = Tf + Tg.$$

Operátor T je tedy lineární. Jak víme, spojitost je u lineárních operátorů ekvivalentní omezenosti. Odhadněme proto výraz $\|Tf\|$ pro $f \in \mathcal{C}(K)$:

$$\|Tf\| = \|f \circ \varphi\| \leq \|f\|. \tag{1.1}$$

Operátor T je omezený, lineární a tedy i spojitý. Protože v (1.1) nastává při volbě $f = const$ rovnost, platí $\|T\| = 1$, a to nezávisle na zobrazení φ. To v podstatě znamená, že operátor T každou funkci vzhledem k normě "zmenší nebo zachová". Jak se liší norma $\|Tg\|$ od normy $\|g\|$ pro $g \in \mathcal{C}(K)$, záleží nejen na φ, ale i na konkrétní volbě g. Pro ilustraci uveďme dva příklady:

Příklad 1 Nechť $K = L = [0,1]$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1$ a $g(x) = x$, $x \in K$. Pak $\|g\| = 1$ a

$$\|g \circ \varphi_1\| = |g(0)| = 0, \qquad \|g \circ \varphi_2\| = |g(1)| = 1.$$

Příklad 2 Nechť $K = L = [0,1]$, $\varphi(x) = \sin x$ a $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 1 - x$, $x \in K$. Potom

$$\|g_1\| = \sup_{x \in [0,1]} |x| = 1, \qquad \|g_1 \circ \varphi\| = \sup_{x \in [0,\sin 1]} |x| = \sin 1 < 1,$$

$$\|g_2\| = \sup_{x \in [0,1]} |1-x| = 1, \qquad \|g_2 \circ \varphi\| = \sup_{x \in [0,\sin 1]} |1-x| = 1.$$

Je vidět, že pokud T "zmenší"(v normě) funkci $g \in \mathcal{C}(K)$, je to způsobeno tím, že zúží její definiční obor z K na $Rng(\varphi) = \varphi(L) := \{\varphi(x)|\ x \in L\}$. Z toho však plyne, že T zachovává normu právě tehdy, je-li $\varphi : L \to K$ surjektivní. Opravdu, pro φ surjekci a $g \in \mathcal{C}(K)$ platí

$$Tg(L) = g \circ \varphi(L) = g(K),$$

proto

$$\sup |Tg(L)| = \sup |g(K)|$$

a dostáváme $\|Tg\| = \|g\|$. Tudíž T je lineární izometrie z $\mathcal{C}(K)$ do $\mathcal{C}(L)$.

Pokud naopak T je lineární izometrie, zvolme libovolný bod $x \in K$ a k němu funkci $f_x \in \mathcal{C}(K)$ tak, aby rovnice

$$|f_x(y)| = \|f_x\| \tag{1.2}$$

platila výhradně v bodě $y = x$. Jelikož

$$\|f_x\| = \|Tf_x\| = \|f_x \circ \varphi\|,$$

existuje bod $z \in L$ takový, že $f_x \circ \varphi(z) = \|f_x\|$. Protože však x je jediný bod K, ve kterém (1.2) platí, je nutně $\varphi(z) = x$. Vzhledem k tomu, že bylo $x \in K$ zvoleno libovolně, je φ surjektivní zobrazení.

Předchozí výsledek o izometrii nám zároveň říká něco o injektivitě operátoru T: Totiž, že T je injektivní, pokud $\varphi : L \to K$ je na. Snadno se přesvědčíme, že platí i opačná implikace.

Pokud totiž φ není na, množina $X := K \setminus \varphi(L)$ je neprázdná. X je otevřená v K, neboť $\varphi : L \to K$ je spojité zobrazení a $\varphi(L)$ je tak kompaktní. Protože je X otevřená, můžeme zvolit $x \in X$ a funkci $f \in \mathcal{C}(K)$ splňující $f(x) = 1$ a $f(y) = 0$ pro $y \in \varphi(L)$. Pro f pak dostaneme $Tf = f \circ \varphi = 0$, avšak $f \neq 0$, z čehož je vidět, že T není injektivní.

Předchozí pozorování nás přivádí na otázku, zda lze zkoumat i surjektivitu T. Pro danou funkci $f \in \mathcal{C}(L)$ hledáme $g \in \mathcal{C}(K)$, takovou, aby

$$Tg = g \circ \varphi = f, \tag{1.3}$$

přičemž rovnost chápeme jako rovnost funkcí v každém bodě L. Pokud je φ injektivní, je pro každé $x \in \varphi(L)$

$$g(x) = f \circ \varphi^{-1}(x).$$

Pokud by existovala $G \in \mathcal{C}(K)$, která by se rovnala g na $\varphi(L)$, pak by jistě platilo

$$TG = G \circ \varphi = g \circ \varphi = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = f \tag{1.4}$$

na L. Hledejme proto nějaké rozšíření $G \in \mathcal{C}(K)$.

Jelikož φ je spojité zobrazení, je $\varphi(S)$ je kompaktní množina v K pro každou $S \subseteq L$ uzavřenou. Tedy $(\varphi^{-1})^{-1}(S) = \varphi(S)$ je uzavřená v K a φ^{-1} je spojité zobrazení. Díky tomu je $g = f \circ \varphi^{-1}$ spojité zobrazení uzavřené množiny $\varphi(L) \subseteq K$ do $\mathbb{C}$. Rozložme nyní g na

$$g = Re(g) + i \cdot Im(g).$$

Pak funkce $Re(g)$ i $Im(g)$ jsou spojité, reálné funkce, definované na uzavřené podmnožině $\varphi(L)$ normálního topologického prostoru K. Dle Tietzeho věty([1] str. 15) existují spojitá zobrazení $G_1 \in \mathcal{C}(K)$ a $G_2 \in \mathcal{C}(K)$, která se shodují po řadě s $Re(g)$ a $Im(g)$ na $\varphi(L)$. Pak ale funkce G definovaná na K jako

$$G := G_1 + i \cdot G_2$$

je na K spojitá a shoduje se s g na $\varphi(L)$. Našli jsme tedy spojité rozšíření pro g na celý prostor K, z čehož s využitím vztahu (1.4) dostáváme, že T je surjektivní operátor a injektivita φ je pro to postačující podmínkou.

Opět nás bude zajímat i platnost zpětné implikace: Je φ injektivní, pokud je T surjekce? Odpověď je opět kladná, neboť rovnice (1.3) má platit bodově na L, což nelze zaručit, pokud φ není prosté. Pokud totiž pro $x, y \in L$, $x \neq y$, platí $\varphi(x) = \varphi(y)$, zvolme funkci f tak, aby platilo

$$f(x) \neq f(y).$$

Pokud pak $g(\varphi(x)) = f(x)$, zcela jistě platí $g(\varphi(y)) \neq f(y)$, neboť $g(\varphi(y)) = g(\varphi(x)) = f(x)$.
Shrňme předcházející výsledky do tvrzení:

1.3. Tvrzení *Operátor $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ definovaný v odstavci 1.1. je*

(i) *surjektivní právě tehdy, je-li zobrazení φ prosté,*

(ii) *prostý právě tehdy, je-li T zároveň lineární izometrií, což nastává tehdy a jen tehdy, je-li zobrazení φ surjektivní.*

Důkaz. Tvrzení plynou bezprostředně z postupů popsaných v odstavci 1.2. $\square$

Další vlastností, kterou hodláme v textu zkoumat, je kompaktnost T. Aby byl T kompaktní, stačí, aby $Rng(T)$ byl konečně dimenzionální podprostor $\mathcal{C}(L)$. Takový podprostor je izomorfní množině uspořádaných n-tic $(x_1, .., x_n)$, pro nějaké pevné $n \in \mathbb{N}$, kde $x_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, .., n\}$. To tedy znamená, že každá funkce z $Rng(T)$ by měla být reprezentovatelná nějakou n-ticí komplexních čísel, z čehož plyne, že by měla každá funkce $f \circ \varphi$ pro $f \in \mathcal{C}(K)$ nabývat jen konečně mnoha různých hodnot, nejvýše n.

1.4. Tvrzení *Operátor T definovaný v odstavci 1.1. je kompaktní tehdy a jen tehdy, nabývá-li φ nejvýše konečně mnoha navzájem různých hodnot.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že φ nabývá nekonečně mnoha různých hodnot. Vyberme z nich libovolnou nekonečnou prostou posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$, která má limitu $M \in K$, avšak $M \neq a_n,\ n \in \mathbb{N}$. To vždy lze, neboť

1. Je-li bodů (navzájem po dvou různých) nekonečně, lze z nich vybrat nějakou prostou posloupnost.
2. Tato posloupnost má alespoň jeden hromadný bod v K, neboť K je kompaktní množina.
3. Z množiny hromadných bodů lze vybrat jeden bod M, k němu pak podposloupnost s limitou rovnou M.
4. Pokud tato podposloupnost obsahuje M, pak právě jednou, lze tedy odpovídající člen z posloupnosti vyjmout.

Definujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(K), n \in \mathbb{N}$, takových, aby platilo

$$f_n(a_n) = 1,\ f_n(a_i) = 0,\ i \neq n,\ \|f_n\|_K = 1,\ i, n \in \mathbb{N}$$

a navíc měly každé dvě různé funkce disjunktní nosiče. To lze vždy zajistit, neboť každý bod z $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má okolo sebe neprázdné okolí U_n, ve kterém neleží žádný z ostatních bodů posloupnosti. Funkci f_n definujeme tak, aby byl její nosič podmnožinou $U_n,\ n \in \mathbb{N}$. Jelikož vzdálenost (daná supremovou metrikou na $\mathcal{C}(K)$) libovolných dvou funkcí z posloupnosti $\{f_n\}$ je rovna 1, nelze ani z $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f_n \circ \varphi\}_{n\in\mathbb{N}}$ vybrat konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T.

Opačně, nechť φ nabývá hodnot $a_i \in K,\ i \in \{1, .., k\}$, pro nějaké $k,\ k \in \mathbb{N}$. Potom L se rozpadá na disjunktní množiny

$$A_i := \{x \in L |\ \varphi(x) = a_i\},\ \bigcup_{i=1}^{k} A_i = L,$$

na kterých $f \circ \varphi$ je konstantní funkce pro každou $f \in \mathcal{C}(K)$. Tedy každá funkce $g \in Rng(T)$ se dá reprezentovat uspořádanou n-ticí komplexních čísel $(g(A_1), g(A_2), .., g(A_k))$, kde $g(A_i)$ značí hodnotu g na množině $A_i,\ i \in \{1, .., k\}$. Z toho plyne, že $Rng(T)$ je izomorfní nějakému podprostoru $\mathbb{C}^k$, a tedy

$$\dim Rng(T) \leq \dim \mathbb{C}^k < \infty.$$

Proto T je kompaktní. $\square$

Zaměřme se nyní na případ, kdy $(K, \rho) = (L, \pi)$. T je pak spojitý lineární operátor z $\mathcal{C}(K)$ do $\mathcal{C}(K)$. Naskýtá se otázka, pro jaká $\lambda \in \mathbb{C}$ je operátor $\lambda I - T$ spojitě invertovatelný na $\mathcal{C}(K)$.

Spektrum operátoru T

Jelikož spektrum operátoru je obsaženo v kruhu o poloměru $\nu > 0$,([1], str. 567) spočtěme nejdříve tento (spektrální) poloměr pro T:

$$\nu(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\sup_{f\in\overline{B(0,1)}\subseteq\mathcal{C}(K)} \|f\circ(\varphi^n)\|)^{1/n}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} (\sup_{f\in\overline{B(0,1)}} \|f\|)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1^{1/n} = 1,$$

čili $\nu(T) \leq 1$. Nasnadě je otázka, zda existují $\lambda \in \sigma(T)$ o velikosti $|\lambda| = 1$. Odpověď je kladná, neboť každá konstantní funkce f je vlastním vektorem T pro vlastní číslo 1. Opravdu, pro pevné $c \in \mathbb{C}$ a $f(x) = c$, $x \in K$, platí

$$(\lambda I - T)f = \lambda f - f\circ\varphi = \lambda c - c,$$

což je při volbě $\lambda = 1$ rovno nule. Spektrální poloměr $\nu(T)$ je tedy roven jedné a nezávisí na zobrazení φ.

Víme, že spektrum T je podmnožinou jednotkového kruhu a že $1 \in \sigma_p(T)$ vždy. Zajímá nás, jestli existuje ještě nějaké číslo z jednotkového kruhu, které by leželo ve spektru T nezávisle na φ. Analogicky, existuje nějaké $\lambda \in \overline{\mathrm{U}}$, které v $\sigma(T)$ neleží nikdy?

Volme $\varphi = Id$ na K. Potom je pro každou $g \in \mathcal{C}(K)$

$$Tg = g\circ\varphi = g\circ Id = g,$$

takže T je identita na $\mathcal{C}(K)$ a $\sigma(T) = \{1\}$. Jednička je tak jediným prvkem spektra, který nesouvisí s vlastnostmi φ.

Obráceně, pro λ z jednotkového kruhu existují vždy K a φ taková, že $\lambda \in \sigma(T)$. Stačí volit $K = \overline{\mathrm{U}}$ a $\varphi(x) = \lambda x$, $x \in K$. Pak je totiž λ vlastním číslem T pro vektor $g(x) = x$, $x \in \overline{\mathrm{U}}$. Opravdu,

$$\lambda g(x) = \lambda x = g(\lambda x) = g(\varphi(x)).$$

Další vlastností spektra, kterou lze vyvodit již z definice operátoru T, je symetrie podle reálné osy.

1.5. Tvrzení *Náleží-li λ do spektra T, pak také $\overline{\lambda}$ náleží do spektra T.*

Důkaz. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\lambda \in \sigma(T)$.

a) Pokud není $\lambda I - T$ injektivní, existuje nenulová funkce $g \in \mathcal{C}(K)$ taková, že platí bodově rovnost

$$\lambda g = g\circ\varphi.$$

Funkce $\overline{g}$ potom splňuje bodově rovnost

$$\overline{\lambda}\overline{g} = \overline{g}\circ\varphi,$$

a je tedy vlastním vektorem k vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$. Tedy $\overline{\lambda} \in \sigma(T)$.

b) Nechť $f \in \mathcal{C}(K)$. Potom rovnice

$$\overline{\lambda} g - g \circ \varphi = \overline{f}$$

má řešení v $\mathcal{C}(K)$, právě tehdy, pokud má v $\mathcal{C}(K)$ řešení rovnice

$$\lambda g - g \circ \varphi = f.$$

Protože $g \in \mathcal{C}(K)$ právě tehdy, je-li $\overline{g} \in \mathcal{C}(K)$, řeší první rovnici funkce $\overline{g}$ právě tehdy, řeší-li g rovnici druhou. Operátor $\lambda I - T$ je tedy surjektivní právě tehdy, je-li surjektivní operátor $\overline{\lambda} I - T$. Protože bylo $\lambda \in \sigma(T)$, platí $\overline{\lambda} \in \sigma(T)$.

□

Než se pustíme do počítání spektra T, uveďme poslední z obecných poznatků o spektru T:

1.6. Tvrzení *Pro operátor T platí*

i) *Bodové spektrum T je podmnožinou jednotkové kružnice* T *právě tehdy, je-li zobrazení φ surjektivní.*

ii) *Spektrum T leží v jednotkové kružnici právě tehdy, je-li φ bijekce.*

Důkaz. Je-li zobrazení φ surjektivní, je dle tvrzení 1.3. T lineární izometrie a tedy pro každý vlastní vektor $g \in \mathcal{C}(K)$ platí

$$|\lambda| \|g\| = \|\lambda g\| = \|g \circ \varphi\| = \|g\|,$$

z čehož ihned plyne $|\lambda| = 1$. Naopak, je-li $\sigma_p(T) \subseteq \mathrm{T}$, potom $0 \notin \sigma_p(T)$, T je injektivní a dle 1.3. je φ surjektivní. Část i) je tak dokázána.

Je-li $\sigma(T) \subseteq \mathrm{T}$, pak $0 \notin \sigma(T)$ a tedy T je izomorfismus na $\mathcal{C}(K)$. Z tvrzení 1.3. pak plyne, že φ je bijekce. Je-li nyní φ bijekce, je z 1.3. T izomorfismus na $\mathcal{C}(K)$. Inverzní operátor T^{-1} je pak definován pomocí

$$T^{-1} g = g \circ \varphi^{-1},\ g \in \mathcal{C}(K),$$

neboť

$$T T^{-1} g = g \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = g = g \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = T^{-1} T g.$$

Čili T^{-1} je taktéž operátor skládání na $\mathcal{C}(K)$ a platí $\sigma(T^{-1}) \subseteq \overline{\mathrm{U}}$. Protože pro T izomorfismus je $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$, platí $\sigma(T) \subseteq \mathrm{T}$ a tvrzení ii) je dokázáno.

□

Zkusme nyní zjistit, které prvky do spektra patří v závislosti na daném φ.

1.7. Pozorování Omezme se nyní na případ, kdy K je konečná množina a φ je injektivní. Potom je φ zároveň surjektivní, neboť φ je definované na celém K a bodů K je konečně mnoho. Zvolme libovolný prvek $x \in K$. Protože K sestává z konečně mnoha prvků a φ je injektivní, existuje nutně $n_x \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\varphi^{n_x}(x) = x.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že n_x je nejmenší takové, zároveň definujme $\varphi^0 = Id$. Pak množina $Z_x := \{x, \varphi(x), \varphi^2(x), .., \varphi^{n_x-1}(x)\}$ je cyklem o délce n_x ve smyslu následující definice:

1.7.1. Definice Množinu $Z \subseteq K$ nazveme cyklem o délce $d \in \mathbb{N}$, pokud pro libovolný bod $x \in Z$ platí:

i) body $x, \varphi(x), \varphi^2(x), .., \varphi^{d-1}(x)$ tvoří prostou posloupnost a jsou jedinými body Z.

ii) $\varphi^d(x) = x$.

Vezměme $z \in Z_x$. Jistě $z = \varphi^k(x)$ pro jedno $k \in \{0, .., n_x - 1\}$. Pak posloupnost

$$z, \varphi(z), .., \varphi^{n_x-k-1}(z), \varphi^{n_x-k}(z), .., \varphi^{n_x-1}(z)$$

je rovna

$$\varphi^k(x), \varphi^{k+1}(x), .., \varphi^{n_x-1}(x), x, .., \varphi^{k-1}(x),$$

čili tvoří prostou posloupnost ze Z_x a $\varphi^{n_x}(z) = z$, proto Z_x je cyklus.

Vezměme nyní libovolný bod $y \in K \backslash Z_x$ a utvořme pro něj množinu Z_y stejným postupem, jako jsme vytvořili Z_x pro x. Obdobně postupujme dále, než budou všechny prvky K náležet nějakému cyklu. Tento stav je zaručen konečností K. Prostor K se nyní rozpadá do konečně mnoha disjunktních cyklů. Zvolme nyní libovolný cyklus, bez újmy na obecnosti například Z_x a sledujme jeho úlohu při určování spektra T. Pro vlastní vektor $g \in \mathcal{C}(K)$ a $a \in Z_x$ platí:

$$\lambda g(a) = g \circ \varphi(a), \tag{1.5}$$

z čehož iterací dostáváme

$$\lambda^{n_x} g(a) = \lambda^{n_x-1} g \circ \varphi(a) = \lambda^{n_x-2} g \circ \varphi^2(a) = ... = g \circ \varphi^{n_x}(a).$$

Z poslední úpravy plyne $g = 0$ na Z_x nebo $\lambda^{n_x} = 1$. Využijme tohoto pozorování pro určení vlastních vektorů T. Pro cyklus Z_x o délce $n_x \in \mathbb{N}$ a $i \in \mathbb{C}$ imaginární jednotku označme

$$\lambda := \exp(\frac{2\pi i}{n_x}).$$

Pro $j \in \{0, .., n_x - 1\}$ definujme funkce $g_j : K \to \mathbb{C}$ následovně:

$$g_j(a) = \begin{cases} 0 & a \notin Z_x, \\ (\lambda^j)^d & a \in Z_x,\ \varphi^d(x) = a,\ 0 \leq d \leq n_x. \end{cases}$$

Jelikož je K diskrétní, jsou $g_j \in \mathcal{C}(K)$, $j \in \{0,..,n_x-1\}$. Každá z funkcí g_j je navíc vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu λ^j. Abychom se o tom přesvědčili, dosaďme do rovnice (1.5). Pro $a = \varphi^d(x)$, $0 \leq d \leq n_x$, tedy platí

$$\lambda^j g_j(a) = \lambda^j \cdot (\lambda^j)^d,$$

což je pro $d = n_x - 1$ rovno

$$(\lambda^j)^{n_x} = 1 = (\lambda^j)^0 = g_j(x) = g_j(\varphi(a))$$

a pro $d \neq n_x - 1$

$$(\lambda^j)^{d+1} = g_j(\varphi^{d+1}(x)) = g_j(\varphi(a)).$$

Pokud $a \notin Z_x$, pak $g_j(a) = g_j(\varphi(a)) = 0$ a rovnice (1.5) platí triviálně pro všechna $j \in \{0,1,..,n_x-1\}$.

Pozorování 1.7. nám dává okamžitý důsledek:

1.7.2. Důsledek *Nechť je K konečný. Sestává-li K z k nezávislých cyklů o délkách $n_1, n_2, .., n_k$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, pak bodové spektrum T sestává ze všech n_j-tých odmocnin jedničky.*

Důkaz. V pozorování 1.7. jsme již našli vlastní vektor pro každou z n_j-tých odmocnin jedné. Stačí tedy ukázat, že $\sigma_p(T)$ jiná čísla neobsahuje.

Je-li tedy $\lambda^{n_j} \neq 1$ pro všechna $j \in \{1,2,..,k\}$, vezměme libovolný bod $y \in K$. Ten je součástí nějakého cyklu (označme jej Z_y) o pevné délce (značme $n_y \in \{n_1, n_2, .., n_k\}$). Pak ale každá funkce $g \in \mathcal{C}(K)$ splňující bodově rovnici

$$\lambda g = g \circ \varphi$$

musí být v y nulová, neboť

$$\lambda^{n_y} g(y) = g(\varphi^{n_y}(y)) = g(y),$$

ale $\lambda^{n_y} \neq 1$. Jelikož y bylo libovolné, platí $g = 0$ na K, g není vlastní vektor a λ není vlastní číslo T. $\square$

Uveďme nyní ještě jeden postup, na základě kterého lze stanovit (alespoň z části) spektrum T:

1.8. Surjektivita $\lambda I - T$ Mějme $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ a $f \in \mathcal{C}(K)$. Pokud má být operátor $\lambda I - T$ surjektivní, musí existovat $g \in \mathcal{C}(K)$ taková, že bodově platí rovnost

$$\lambda g - g \circ \varphi = f. \tag{1.6}$$

Pokud nějaká funkce $g \in \mathcal{C}(K)$ splňuje rovnici (1.6), pak splňuje i rovnice vzniklé úpravami (1.6). Složme tedy (1.6) zprava s φ

$$\lambda g \circ \varphi - g \circ \varphi^2 = f \circ \varphi. \tag{1.7}$$

Pronásobíme-li rovnici (1.6) číslem λ a sečteme-li ji s (1.7), dostáváme:

$$\lambda^2 g - g \circ \varphi^2 = \lambda f + f \circ \varphi.$$

Doposud jsme z rovnice (1.6) odvodili vztah

$$\lambda^n g - g \circ \varphi^n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f \circ \varphi^{n-1-k} \tag{1.8}$$

pro $n = 2$. Ukažme, že tento vztah plyne z (1.6) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$:
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Rovnici (1.6) složíme zprava s funkcí φ^n, čímž dostaneme

$$\lambda g \circ \varphi^n - g \circ \varphi^{n+1} = f \circ \varphi^n. \tag{1.9}$$

Dále rovnici (1.8) pronásobíme číslem λ a sečteme s (1.9). Dostáváme tak

$$\lambda^{n+1} g - g \circ \varphi^{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k+1} f \circ \varphi^{n-1-k} + f \circ \varphi^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k f \circ \varphi^{n-k},$$

čili jsme ověřili, že vztah (1.8) plyne z (1.6) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Tento vztah si zapamatujme: Ještě se na něj budeme v textu odkazovat.

Vraťme se teď ještě k případu z 1.7. a zkusme k počítání $\sigma(T)$ využít vztah (1.8). Nechť je tedy K konečný a φ injektivní a nechť platí stejné značení jako v odstavci 1.7. Nechť je dána funkce $f \in \mathcal{C}(K)$ a nechť funkce $g \in \mathcal{C}(K)$ je libovolná taková, že platí rovnost (1.6). Zvolme nějaký cyklus (pro jednoduchost opět Z_x) z K. Pak s využitím vztahu (1.8) má pro libovolné $a \in Z_x$ platit

$$\lambda^{n_x} g(a) - g \circ \varphi^{n_x}(a) = \sum_{k=0}^{n_x-1} \lambda^k f \circ \varphi^{n_x-1-k}(a),$$

čili

$$(\lambda^{n_x} - 1) g(a) = \sum_{k=0}^{n_x-1} \lambda^k f \circ \varphi^{n_x-1-k}(a). \tag{1.10}$$

Pokud však $\lambda^{n_x} = 1$, vztah (1.10) neplatí pro $f \in \mathcal{C}(K)$ splňující $f(a) = 1$, $f(z) = 0$, $z \in K$. Tedy $\lambda I - T$ není surjektivní, pokud $\lambda^{n_x} = 1$.

Naopak, pokud $\lambda^{n_x} \neq 1$, je hodnota $g(a)$ jednoznačně určena. Jelikož $a \in Z_x$ bylo libovolné, je g jednoznačně určená na Z_x. Pokud bude platit $\lambda^{n_j} \neq 1$ pro každé $j \in \{1, .., k\}$, kde $n_1, n_2, .., n_k$ jsou délky cyklů v K, je g vztahem (1.10) jednoznačně určena na celém K. Protože K je diskrétní, je $g \in \mathcal{C}(K)$. Zbývá ukázat, že funkce g splňuje rovnici (1.6). Zvolme libovolný bod $a \in K$. Ten náleží nějakému cyklu Z o délce n_a. Pak dle (1.10) je hodnota $g(a)$ rovna

$$g(a) = \sum_{k=0}^{n_a-1} \frac{\lambda^k}{\lambda^{n_a} - 1} f \circ \varphi^{n_a-1-k}(a).$$

Rozdíl

$$\lambda g(a) - g(\varphi(a))$$

má pak tvar

$$\lambda \sum_{k=0}^{n_a-1} \frac{\lambda^k}{\lambda^{n_a}-1} f\circ\varphi^{n_a-1-k}(a) - \sum_{k=0}^{n_a-1} \frac{\lambda^k}{\lambda^{n_a}-1} f\circ\varphi^{n_a-1-k}(\varphi(a)) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{n_a}-1}(-f\circ\varphi^{n_a}(a) + \lambda f\circ\varphi^{n_a-1}(a) - \lambda f\circ\varphi^{n_a-1}(a) + ... + \lambda^{n_a-1} f(\varphi(a))$$

$$-\lambda^{n_a-1} f(\varphi(a)) + \lambda^{n_a} f(a)) = \frac{(\lambda^{n_a}-1)f(a)}{\lambda^{n_a}-1} = f(a).$$

Jelikož $a \in K$ bylo libovolné, g splňuje rovnici (1.6) na celém K, a tedy $\lambda I - T$ je surjektivní.

Pomocí důsledku 1.7.1. dostáváme, že spektrem T je právě množina všech n_j-tých odmocnin jedničky, $j \in \{1, .., k\}$, kde čísla $n_1, .., n_k$ označují po řadě délky všech k cyklů v K.

Doposud jsme spektrum T hledali pro K konečný. Cílem následujícího paragrafu je zobecnit tvrzení z odstavce 1.7. a 1.8. i na případ, kdy K nebude konečný.

Cykly v K

Pokud v K neexistuje nekonečná prostá posloupnost $x, \varphi(x), \varphi^2(x), ...$ pro žádné $x \in K$, existují nutně pro každé $x \in K$ čísla $k_x, n_x \in \mathbb{N}_0$, $k_x < n_x$ taková, že $\varphi^{n_x}(x) = \varphi^{k_x}(x)$. Můžeme předpokládat, že čísla k_x, n_x jsou nejnižší možná taková, pro která rovnost platí.

Nechť je zobrazení φ injektivní. Pak $k_x = 0$, pro každé $x \in K$, neboť pro $k_x > 0$ by bylo zároveň $\varphi(\varphi^{k_x-1}(x)) = \varphi(\varphi^{n_x-1}(x))$, avšak $\varphi^{k_x-1}(x) \neq \varphi^{n_x-1}(x)$. Dále lze ke každému prvku $y \in K$ najít prvek $z \in K$ s vlastností $\varphi(z) = y$. Stačí za z zvolit prvek $z = \varphi^{n_y-1}(y)$. Zobrazení φ je tedy spojitá bijekce, tedy homeomorfismus K na K, jelikož K je kompaktní množina.

Vzhledem k tomu, že každý prvek nejen určuje nějaký cyklus v K, ale je zároveň jeho součástí, rozpadá se K do disjunktních cyklů. Jak jsme si všimli v pozorování 1.7. a v odstavci 1.8., pokud byl K konečný a φ bijekce, spektrum T sestávalo výhradně z odmocnin jedničky, závisle na délkách cyklů obsažených v K. Asi nás nepřekvapí, bude-li tomu stejně i v případě, že K je nekonečný- avšak jen dokud φ bude bijekce a K bude tak možné rozložit do nezávislých cyklů.

1.9. Tvrzení *Nechť φ je injektivní. Nechť pro každé $x \in K$ existuje číslo $n_x \in \mathbb{N}$, takové, že posloupnost $x, \varphi(x), \varphi^2(x), .., \varphi^{n_x}(x)$ není prostá a nechť n_x je nejmenší s touto vlastností.*

i) Existuje-li $C > 0$ takové, že pro libovolné $x \in K$ platí $n_x \leq C$, pak

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \lambda^{n_y} = 1;\ y \in K\} =: M.$$

ii) Existuje-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ v K cyklus o délce $d \in \mathbb{N}$, $d \geq n$, potom

$$\sigma(T) = \mathrm{T}.$$

Důkaz. Důkaz toho, že se K rozpadá do disjunktních cyklů a φ je surjektivní byl proveden v předešlém odstavci.

i) Využijeme toho, že spektrum T je stejné jako spektrum adjungovaného operátoru T'. Adjungovaný operátor T' je definován na duálním prostoru $(\mathcal{C}(K))^*$ předpisem

$$T'x^*(f) = x^*(Tf),\ x^* \in (\mathcal{C}(K))^*,\ f \in \mathcal{C}(K).$$

Dle Rieszovy věty([3], str.130) existuje pro každý funkcionál $x^* \in (\mathcal{C}(K))^*$ právě jedna Radonova míra $\mu_x \in \mathcal{M}(K)$ taková, že pro každou $f \in \mathcal{C}(K)$ platí

$$x^* f = \int_K f d\mu_x$$

Definici T' lze tedy přepsat takto:

$$\int_K f\ dT'\mu = \int_K Tf\ d\mu = \int_K f \circ \varphi\ d\mu,\ f \in \mathcal{C}(K),\ \mu \in \mathcal{M}(K).$$

Nechť $\mu \in \mathcal{M}(K)$ a zvolme $A \in \mathcal{B}(K)$. Dle Lusinovy věty([3], str. 55) existuje posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(K)$ taková, že pro $X_n := \{x;\ f_n(x) \neq \chi_A(x)\}$ platí

$$T'\mu(X_n) \leq \frac{1}{n}$$

a navíc $\|f_n\| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$T'\mu(A) = \int_K \chi_A dT'\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{K\setminus X_n} f_n dT'\mu = \lim_{n\to\infty} (\int_K f_n \circ \varphi\ d\mu - \int_{X_n} f_n dT'\mu) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_K f_n d\varphi_\mu - \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f_n dT'\mu = \int_K \chi_A d\varphi_\mu = \varphi_\mu(A).$$

Míra $T'\mu$ je tedy obrazem míry μ při zobrazení φ. Značme φ_μ. Dokažme nejprve, že pokud $\lambda \in M$, pak $\lambda \in \sigma(T') = \sigma(T)$. Nechť tedy $\lambda^{n_x} = 1$, kde n_x je délka nějakého cyklu $Z_x \subseteq K$ a $x \in Z_x$. Definujme atomické míry $\delta_0, .., \delta_{n_x-1}$ předpisem

$$\delta_j(D) = \begin{cases} 0 & \varphi^{-j}(x) \notin D,\ D \in \mathcal{B}(K) \\ \lambda^j & \varphi^{-j}(x) \in D,\ D \in \mathcal{B}(K). \end{cases}$$

Definujme dále míru μ jako

$$\mu = \sum_{k=0}^{n_x-1} \delta_k$$

a ověřme, že je vlastním vektorem T' pro číslo λ. Máme

$$\lambda\mu = \sum_{k=0}^{n_x-1} \lambda\delta_k = \sum_{k=0}^{n_x-2} \varphi_{\delta_k} + \lambda\delta_{n_x-1} = \sum_{k=0}^{n_x-2} \varphi_{\delta_{k+1}} + \varphi_{\delta_0} = \sum_{k=0}^{n_x-1} \varphi_{\delta_k} = \varphi_\mu.$$

Proto $\lambda \in \sigma_p(T')$. Nechť nyní $\lambda \notin M$. Ověříme, že operátor $\lambda I - T'$ je injektivní. Nechť pro nějakou míru $\mu \in \mathcal{M}(K)$ platí pro každou $D \in \mathcal{B}(K)$ rovnost

$$\lambda\mu(D) = \varphi_\mu(D).$$

Vezměme libovolný cyklus $Z \subseteq K$. Nechť $d \in \mathbb{N}$ je jeho délka. Protože Z je uzavřená množina, je $Z \in \mathcal{B}(K)$. Protože $\varphi_{\varphi_\mu} = \varphi_\mu^2$ a $\varphi^d = Id$ na Z, pro cyklus Z platí

$$\lambda^d\mu(Z) = \lambda^{d-1}\varphi_\mu(Z) = ... = \lambda\varphi_\mu^{d-1}(Z) = \varphi_\mu^d(Z) = \mu(Z).$$

Z toho však plyne $\lambda^d = 1$ nebo $\mu(Z) = 0$. Jelikož $\lambda \notin M$, je $\mu(Z) = 0$. Cyklus Z byl však zvolen libovolně a K se dá rozložit do disjunktních cyklů. Proto $\mu(K) = 0$ a μ není vlastním vektorem T'. Operátor $\lambda I - T'$ je tedy injektivní.

Zbývá ukázat, že pokud $\lambda \notin M$, pak je operátor $\lambda I - T$ surjektivní. Použijme k tomu vztah (1.8) z odstavce 1.8., v místo funkcí f a g však budeme dosazovat míry. K tomu je však nejprve učinit malé pozorování:

Protože K se rozpadá do disjunktních cyklů s omezenou délkou, existuje $k \in \mathbb{N}$ disjunktních množin $Z_{n_1}, Z_{n_2}, ..., Z_{n_k}$, kde

$$Z_{n_j} = \bigcup Z, \ \textit{Z je cyklus délky } n_j.$$

Dokažme, že tyto množiny jsou borelovské. Definujme funkci $d : K \to [0, \infty)$ předpisem

$$d(x) = \min_{i,j \in \{1,..,n_x\},\ i \neq j} \{\rho(\varphi^i(x), \varphi^j(x))\},$$

kde n_x je délka cyklu, ve kterém x leží. Je zřejmé, že d je konstantní na každém cyklu. Jelikož je d složením konečně mnoha spojitých zobrazení, je $d \in \mathcal{C}(K)$. Definujme nyní množiny $R_c^j := \{x \in Z_{n_j};\ d(x) \geq c\}$, $j \in \{1, .., k\}$, $c \geq 0$. Zvolme množinu Z_{n_j} a číslo $m \in \mathbb{N}$. Vyberme $y \in K \setminus Z_{n_j}$. Jistě y náleží nějakému cyklu o délce $n_y \neq n_j$. Zvolme libovolné $x \in R_{1/m}^j$. Jelikož je funkce φ^{n_y} spojitá, můžeme vybrat takové $\delta_0 > 0$, že platí:

$$a \in B(y, \delta_0) \Rightarrow \varphi^{n_y}(a) \in B(y, \frac{d(x)}{3}).$$

Zvolme $\delta = \min(\delta_0, \frac{d(x)}{3})$. Potom $x \notin B(y, \delta)$, neboť by bylo $\varphi^{n_y}(x) \in B(y, \frac{d(x)}{3})$ a tedy $\rho(x, \varphi^{n_y}(x)) \leq \frac{2}{3}d(x)$, což ovšem není možné, protože $x \neq \varphi^{n_y}(x)$ a $d(x) \geq \frac{1}{m}$. Jelikož x i y byla zvolena libovolně, existuje pro každé $y \in K \setminus Z_{n_j}$ neprázdné okolí, které nepronikná $R_{1/m}^j$. Zároveň je pro každé $m \in \mathbb{N}$ množina $R_{1/m}^j$ uzavřená v Z_{n_j}, neboť d je spojité. Množina $R_{1/m}^j$ je tedy uzavřená v K pro každé $m \in \mathbb{N}$. Jelikož $\cup_{m \in \mathbb{N}} R_{1/m}^j = Z_{n_j}$, je Z_{n_j} spočetným sjednocením uzavřených množin a je tedy borelovskou množinou, konkrétně typu F_σ.

Nechť $\lambda \notin M$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathcal{M}(K)$ jsou dány. Definujme míru α a ověřme, že řeší rovnici

$$\lambda\alpha - \varphi_\alpha = \mu. \tag{1.11}$$

Předpokládejme, že $\varphi^0 = Id$ a proto $\varphi^0_\mu = \mu$. Pro $j \in \{1,..,k\}$ definujme míry

$$\alpha_j = \begin{cases} 0 & K \setminus Z_{n_j} \\ \dfrac{1}{\lambda^{n_j}-1} \displaystyle\sum_{i=0}^{n_j-1} \lambda^i \varphi_\mu^{n_j-1-i} & Z_{n_j}. \end{cases}$$

Protože $Z_{n_j} \in \mathcal{B}(K)$, $j \in \{1,..,k\}$, platí $\alpha_j \in \mathcal{M}(K)$ pro libovolné $j \in \{1,..,k\}$. Zvolme míru α jako $\alpha = \sum_{j=1}^k \alpha_j$. Pak i $\alpha \in \mathcal{M}(K)$ a zbývá ověřit, že α řeší rovnici (1.11). Jelikož K je disjunktním sjednocením množin Z_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, stačí ukázat, že α řeší rovnici na Z_{n_j} pro libovolné $j \in \{1,..,k\}$. Nechť tedy $j \in \{1,..,k\}$ je pevné. Pravá strana (1.11) má na Z_{n_j} tvar

$$\lambda\alpha - \varphi_\alpha = \frac{1}{\lambda^{n_j}-1}\Big(\sum_{i=0}^{n_j-1} \lambda^{i+1}\varphi_\mu^{n_j-i-1} - \sum_{i=0}^{n_j-1} \lambda^i \varphi_\mu^{n_j-i}\Big) = \sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{\lambda^{i+1}\varphi_\mu^{n_j-i-1} - \lambda^i\varphi_\mu^{n_j-i}}{\lambda^{n_j}-1} =$$

$$= \frac{\lambda^{n_j}\mu - \varphi_\mu^{n_j}}{\lambda^{n_j}-1} = \frac{(\lambda^{n_j}-1)\mu}{\lambda^{n_j}-1} = \mu,$$

což je rovno levé straně rovnice (1.11). Pro volbu $\lambda \notin M$ je tedy operátor $\lambda I - T'$ surjektivní. Protože $\lambda I - T'$ je izomorfismus, je $\lambda \notin \sigma(T') = \sigma(T)$.

ii) V důkazu i) jsme našli vlastní vektor T' pro každé $\lambda \in M$. Protože však v K existuje posloupnost cyklů $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taková, že délka c_n je větší než n, je množina M nekonečná a hustá v T. Protože $\sigma(T)$ je uzavřená množina a φ je bijekce, využitím tvrzení 1.6. dostáváme $\sigma(T) = \mathrm{T}$. $\square$

Jak jsme viděli v důkazu předcházejícího tvrzení, pokud v K existuje nějaký cyklus o délce d, jsme schopni poměrně snadno určit vlastní vektory T' k d-tým odmocninám jedné. Podotkněme, že φ nemusí na tomto místě být ani injektivní, ani surjektivní. Bijektivita φ nám ale zajišťuje, že T jiná vlastní čísla nemá.

2. Operátory skládání na L^p prostorech

2.1. Formulace problému Nechť $(K, \mathcal{S}, \mu)$ a $(L, \mathcal{T}, \alpha)$ jsou prostory s mírou, μ i α jsou σ-konečné. Buď $\varphi : L \to K$ měřitelné zobrazení, $p \in [1, \infty)$.
Mezi prostory $L^p(K)$ a $L^p(L)$ bychom chtěli definovat operátor skládání T analogicky jako na prostoru spojitých funkcí, tedy složením s φ. Formální definice by tedy mohla vypadat nějak takto:

$$Tg = g \circ \varphi, \;\; g \in L^p(K).$$

Řešme nejprve otázku, co vlastně taková definice znamená a za jakých podmínek je taková definice korektní.

2.2. Definice operátoru Má-li operátor T zobrazovat z prostoru $L^p(K)$ do $L^p(L)$, musí zobrazovat třídy ekvivalence na třídy ekvivalence. To bychom mohli zajistit následujícím postupem:

Mějme třídu ekvivalence $[f] \in L^p(K)$. Vyberme z $[f]$ jednu funkci $f \in [f]$ a tu složme s φ. Jelikož f i φ jsou měřitelná zobrazení, je $f \circ \varphi : L \to \mathbb{C}$ měřitelné. Je-li $[f']$ třída ekvivalence funkcí, které se rovnají funkci $f \circ \varphi$ α-skoro všude, definujme

$$T[f] := [f'].$$

K tomu, aby takto definovaná struktura T byla zobrazením z $L^p(K)$ do $L^p(L)$, jsou nutné 2 podmínky:

a) T je zobrazení

b) $T[f] \in L^p(L)$ pro každou $[f] \in L^p(K)$.

V a) budeme požadovat, aby pro každou třídu ekvivalence $[f] \in L^p(K)$ existovala právě jedna třída ekvivalence $[f']$ taková, že

$$T[f] = [f'].$$

To tedy znamená, že pro každou funkci $f \in [f]$ náleží $f \circ \varphi$ do třídy ekvivalence $[f']$, tj. jsou-li $f_1, f_2 \in [f]$ dva různí reprezentanti $[f]$, pak

$$f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \varphi$$

(α-) skoro všude (značme $f_1 \circ \varphi \simeq f_2 \circ \varphi$). Jelikož f_1 a f_2 se mohly lišit nejvýše na množině (μ-) nulové míry, požadujeme, aby měl vzor této množiny při zobrazení φ taktéž míru nula. Musí tedy platit:
a) Pokud pro nějakou $D \in \mathcal{S}$ je $\mu(D) = 0$, pak také $\alpha(\varphi^{-1}(D)) = 0$.

Pokud totiž $\alpha(\varphi^{-1}(D)) > 0$, pak funkce $f_1 = 0$, $f_2 = \chi_D$ patří do stejné třídy ekvivalence, avšak funkce $f_1 \circ \varphi$, $f_2 \circ \varphi$ nikoliv, neboť se liší na $\varphi^{-1}(D)$, což je

množina kladné míry. (Poznamenejme, že je-li φ_α obraz míry α při zobrazení $\varphi : (L, \mathcal{T}) \to (K, \mathcal{S})$, pak podmínka **a)** neříká nic jiného, než že φ_α je absolutně spojitá vzhledem k μ. Značme $\varphi_\alpha \ll \mu$.)
Podmínka b) nám říká, že pro každou $f \in L^p(K)$ je integrál

$$\int_L |f \circ \varphi|^p \, d\alpha \tag{2.1}$$

konečný. Abychom měli lepší představu, za jakých okolností nebude integrál v (2.1) konečný, uveďme dva příklady:

Příklad 1 Buď $(K, \mathcal{S}, \mu) = (L, \mathcal{T}, \alpha) = ((1, \infty), \mathfrak{M}, \lambda)$ (předpokládejme, že $\mathfrak{M}$ jsou Lesbeguovsky měřitelné množiny a λ je Lesbeguova míra) a buď $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \in (1, \infty)$. Pak pro $f \in L^p(K)$, $f(x) = x^{-2/p}$ platí

$$\int_1^\infty |f \circ \varphi(x)|^p \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \infty.$$

Příklad 2 Buď $K = L = (1, \infty)$, $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \mathfrak{M}$, $\mu = \lambda$ a buď α Lesbegue-Stieltjesova míra indukovaná funkcí $x \to e^x$. Dále buď $\varphi = Id$. Pak pro funkci $f \in L^p(K)$, $f(x) = \exp(-\frac{x}{p})$, platí

$$\int_L |f \circ \varphi|^p \, d\alpha = \int_1^\infty e^{-x} \cdot e^x \, dx = \infty.$$

Z uvedených příkladů je vidět, že aby byl integrál v (2.1) konečný, nemělo by φ množiny libovolně "zmenšovat". Formulujme tuto myšlenku exaktně:

b) Je-li pro každou $f \in L^p(K)$ $Tf \in L^p(L)$, potom existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každou $D \in \mathcal{S}$, $\mu(D) < \infty$ platí:

$$\alpha(\varphi^{-1}(D)) \le C \cdot \mu(D), \tag{2.2}$$

čili, že

$$\varphi_\alpha \le C\mu.$$

Ukažme, že tato myšlenka platí. Předně, je-li $\mu(D) = 0$, musí platit $\varphi_\alpha(D) = 0$, dle podmínky a). Stačí se tedy omezit na množiny kladné míry. Předpokládejme pro spor, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje množina $D_n \in \mathcal{S}$ kladné konečné míry taková, že platí

$$\varphi_\alpha(D_n) > n \cdot \mu(D_n).$$

Definujme funkci $f : K \to \mathbb{C}$ jako

$$f = \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\chi_{D_n}}{n^2 \mu(D_n)}\right)^{1/p}.$$

S využitím Leviho věty dostáváme

$$\int_K |f|^p d\mu = \int_K \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi_{D_n}}{n^2 \mu(D_n)} d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_K \frac{\chi_{D_n}}{n^2 \mu(D_n)} d\mu = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

a tedy

$$\int_K |f|^p d\mu < \infty,$$

takže $f \in L^p(K)$. Avšak $Tf \notin L^p(L)$, neboť

$$\int_L |f \circ \varphi|^p d\alpha = \int_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\varphi^{-1}(D_n)}}{n^2 \mu(D_n)} d\alpha \geq \int_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\varphi^{-1}(D_n)}}{n \varphi_\alpha(D_n)} d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

2.3. Lemma *Nechť existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každou $D \in \mathcal{S}$, $\mu(D) < \infty$ platí*

$$\varphi_\alpha(D) \leq C \cdot \mu(D).$$

Potom pro každou nezápornou měřitelnou funkci $f : K \to \mathbb{C}$ platí

$$\int_K f d\varphi_\alpha \leq C \int_K f d\mu.$$

Důkaz. Jelikož f je nezáporná a měřitelná, existuje neklesající posloupnost nezáporných měřitelných funkcí $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že $f_n \nearrow f$([2], str. 259). Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n = \sum_{k=1}^{q_n} a_{n,k} \chi_{D_{n,k}}$, $a_{n,k} > 0$, $D_{n,k} \in \mathcal{S}$. Pomocí Leviho věty dostáváme

$$\int_K f d\varphi_\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_K f_n d\varphi_\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q_n} a_{n,k} \int_K \chi_{D_{n,k}} d\varphi_\alpha \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q_n} a_{n,k} C \int_K \chi_{D_{n,k}} d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} C \int_K \sum_{k=1}^{q_n} a_{n,k} \chi_{D_{n,k}} d\mu = \lim_{n\to\infty} C \int_K f_n = C \int_K f d\mu.$$

□

V odstavci 2.2. jsme vyvodili podmínku (2.2) nutnou pro to, aby T, definovaný na začátku tohoto odstavce, byl zobrazením z $L^p(K)$ do $L^p(L)$. Využitím předcházejícího lemmatu dokážeme, že podmínka (2.2) je nejen nutná, ale zároveň postačující pro definovatelnost T.

2.4. Tvrzení *Nechť existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každou $D \in \mathcal{S}$ platí:*

$$\varphi_\alpha(D) \leq C \cdot \mu(D).$$

Potom je T, definovaný v odstavci 2.2., lineární, spojitý operátor z $L^p(K)$ do $L^p(L)$.

Důkaz. Jelikož pro každou $D \in \mathcal{S}$ plyne z $\mu(D) = 0$ rovnou $\varphi_\alpha(D) = 0$, pak pro $[f] \in L^p(K)$ a libovolné $f_1, f_2 \in [f]$ platí $[f_1 \circ \varphi] = [f_2 \circ \varphi]$ a tedy T je zobrazení z $L^p(K)$.

Vezměme nyní $f \in L^p(K)$. Jelikož je funkce $|f|^p$ nezáporná a měřitelná, platí dle lemmatu 2.3.

$$\int_L |f \circ \varphi|^p d\alpha = \int_L |f|^p \circ \varphi \; d\alpha = \int_K |f|^p d\varphi_\alpha \leq C \int_K |f|^p d\mu = C\|f\|^p.$$

Funkce Tf je tedy prvkem $L^p(L)$, operátor T je omezený a $\|T\| \leq \sqrt[p]{C}$. Ověření linearity je trivialitou, pročež T je spojitý. $\square$

V dalším textu předpokládejme, že podmínka (2.2) platí a T je korektně definován.

Vlastnosti operátoru T

Kompaktnost T Jednou z možností, jak zajistit, aby T byl kompaktní, je zajistit, aby $Rng(T)$ byl konečně dimenzionální podprostor v $L^p(L)$. Analogický problém jsme už řešili na prostoru spojitých funkcí, kde bylo postačující, pokud φ nabývalo konečne mnoha hodnot. Neboť měřitelná funkce z K do $\mathbb{C}$ může nabývat nejvýše tolika hodnot, kolik obsahuje algebra $\mathcal{S}$ prvků, snadno formulujeme postačující podmínku pro kompaktnost T:

2.5. Tvrzení *Nechť existuje nejvýše konečně mnoho $D_1, D_2, .., D_n \in \mathcal{S},\ n \in \mathbb{N}$ takových, že $\varphi_\alpha(D_i) \neq 0,\ i \in \{1, 2, .., n\}$. Potom je operátor T kompaktní.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že jsou množiny $D_1, D_2, .., D_n$ po dvou disjunktní. Pokud by tomu tak nebylo, můžeme můžeme je vhodným pronikáním "zdisjunktnět". Protože je množin konečný počet, počet množin se vzorem kladné míry zůstane po zdisjunktnění konečný. Vzhledem k tomu, že jsou množiny disjunktní, platí pro každou D_i a každou její vlastní podmnožinu $M \in \mathcal{S},\ M \subset D_i$

$$\varphi_\alpha(M) = 0 \Rightarrow \mu(M) = 0 \tag{2.3}$$

Pokud by totiž pro nějakou vlastní, měřitelnou $M \subset D_i$ podmínka (2.3) neplatila, pak

$$\varphi_\alpha(D_i \setminus M) = \varphi_\alpha(D_i) - \varphi_\alpha(M) = \varphi_\alpha(D_i) \neq 0,$$

avšak množiny D_i a $D_i \setminus M$ nejsou disjunktní, což je spor s předpokladem. Nechť tedy $D_1, D_2, .., D_n,\ D_i \in \mathcal{S},\ n \in \mathbb{N}$ jsou disjunktní množiny kladné míry, z nichž žádná neobsahuje vlastní podmnožinu kladné míry. Z toho díky σ-aditivitě μ plyne $\mu(D_i) < \infty,\ i \in \{1, 2, .., n\}$. Zároveň libovolná měřitelná funkce $f : D := \cup_{i \leq n} D_i \to \mathbb{C}$ je na každém D_i skoro všude konstantní a patří do nějaké třídy $[f] \in L^p(K)$. Čili pro každou třídu ekvivalencí $f \in L^p(D)$ existuje uspořádaná n-tice komplexních čísel $(a_1, .., a_n) \in \mathbb{C}^n$ tak, že platí $f|_{D_i} = a_i,\ i \in \{1, 2, .., n\}$. Jelikož platí $\varphi_\alpha(K \setminus D) = 0$, je prostor $Rng(T) \subseteq L^p(L)$ izomorfní s prostorem $L^p(D)$. Prostor $L^p(D)$ je izomorfní s $\mathbb{C}^n$, tudíž má $Rng(T)$ konečnou dimenzi a T je kompaktní. $\square$

2.5. Tvrzení *Nechť je operátor T kompaktní. Potom pro každou dvojici konstant $c_1, c_2 > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho navzájem disjunktních množin $D_i \in \mathcal{S},\ i \in \mathbb{N}$ s vlastnostmi*

$$\mu(D_i) < c_2,\ \varphi_\alpha(D_i) > c_1. \tag{2.4}$$

Důkaz. Nechť existují takové konstanty $c_1, c_2 > 0$ a nekonečně mnoho po dvou disjunktních $D_i \in \mathcal{S},\ i \in \mathbb{N}$ takových, že platí (2.4). Definujme posloupnost funkcí $\{f_n\},\ f_n : K \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$, následovně:

$$f_n := (\frac{\chi_{D_n}}{(\mu(D_n)})^{1/p}.$$

Pak

$$\|f_n\|^p = \int_K \frac{\chi_{D_n}}{\mu(D_n)} d\mu = 1,$$

takže $f_n \in L^p(K),\ n \in \mathbb{N}$ a $\{f_n\}$ je omezená. Zároveň ale pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$, máme

$$\|T(f_n - f_m)\|^p = \int_L |f_n \circ \varphi - f_m \circ \varphi|^p d\alpha = \int_L \frac{\chi_{\varphi^{-1}_{(D_n)}}}{\mu(D_n)} d\alpha + \int_L \frac{\chi_{\varphi^{-1}_{(D_m)}}}{\mu(D_m)} d\alpha \geq$$

$$\geq \int_L \frac{\chi_{\varphi^{-1}_{(D_n)}}}{c_2} d\alpha + \int_L \frac{\chi_{\varphi^{-1}_{(D_m)}}}{c_2} d\alpha \geq 2\frac{c_1}{c_2}.$$

Protože pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ jsou od sebe členy Tf_n a Tf_m vzdálené (v $L^p(L)$ metrice) nejméně o $2\frac{c_1}{c_2} > 0$, nelze z posloupnosti $\{Tf_n\}$ vybrat Cauchyovskou podposloupnost a T není kompaktní. $\square$

Injektivita a surjektivita T Již v tvrzení 2.5. jsme použili jistou analogii mezi vlastnostmi operátorů skládání pro spojité funkce a operátorů pro funkce měřitelné. V každém z problémů totiž hraje podobnou roli jiná struktura:

1. V prvním případě jsou to body; prvky kompaktních prostorů K, L.
2. V případě druhém jsou to množiny kladné míry.

Víme, že v případě $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L),\ Tf = f \circ \varphi,\ f \in \mathcal{C}(K)$ pro K, L kompaktní prostory je T injektivní právě tehdy, je-li φ surjektivní. Budeme-li se držet výše zmíněné analogie, zjistíme, že pro T definované na L^p prostorech platí tvrzení téměř identické. Proto zaveďme následující pojem:

2.7. Definice *Zobrazení $\varphi : (L, \mathcal{T}) \to (K, \mathcal{S})$ nazveme α-μ-*surjektivní*, platí-li*

$$\forall D \in \mathcal{S} :\ \mu(D) > 0 \Rightarrow \varphi_\alpha(D) > 0$$

Tato definice v podstatě říká, že pro každou množinu kladné míry $Y \in \mathcal{S}$ existuje množina kladné míry z $X \in \mathcal{T}$, jejíž obraz při φ je právě Y. Z toho je hned zřejmé, že aby bylo φ α-μ-surjektivní, musí být surjektivní (pomineme-li triviální případ $\mu(K) = 0$).

2.8. Tvrzení *Operátor T definovaný na L^p prostorech je injektivní právě tehdy, je-li φ α-μ-surjektivní.*

Důkaz. Nechť existuje $D \in \mathcal{S}$, pro kterou platí $\mu(D) > 0$ a zároveň $\varphi_\alpha(D) = 0$. Protože je μ σ-aditivní, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $\mu(D) < \infty$. (V opačném případě existuje totiž $D' \in \mathcal{S},\ D' \subseteq D$, pro kterou platí $\mu(D') < \infty$ a nutně také $\varphi_\alpha(D') = 0$). Zvolíme-li nyní $f \in L^p(K)$ jako $f = \chi_D$, pak

$$\|Tf\|^p = \int_L |f \circ \varphi|^p d\alpha = \int_L \chi_{\varphi^{-1}(D)} = \varphi_\alpha(D) = 0$$

ale $f \neq 0$, čili T není injektivní.

Nechť naopak T není injektivní. Potom existuje $[f] \in L^p(K),\ [f] \neq 0$ taková, že $T[f] = 0$. Zvolme libovolnou $f \in [f]$. Buď nyní $A := \{x \in K |\ f(x) \neq 0\}$. f je měřitelná, tudíž A je měřitelná a platí $\mu(A) > 0$. Jelikož $f \circ \varphi \simeq 0$, platí $\varphi_\alpha(A) = 0$ a tedy φ není α-μ-surjektivní. □

Předtím než formulujeme nutnou a postačující podmínku pro surjektivitu T, dokážeme jedno pomocné lemma.

2.9. Lemma *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor. Nechť $D = Rng(T)$ je hustý v Y a nechť existuje konstanta $m > 0$ taková, že platí*

$$\forall y \in D, \exists x \in X,\ Tx = y,\ m\|x\| \leq \|y\|.$$

Potom je operátor T surjektivní.

Důkaz. Nechť $y \in Y$. Hledáme $x \in X$, splňující $Tx = y$. Jelikož je D hustý v Y, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $y_n \in D$ takový, že platí

$$\|y - y_n\| < 2^{-n}.$$

Definujme posloupnost $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ následovně: $z_1 = y_1$, $z_n = y_n - y_{n-1}$, $n \geq 2$. Jistě $z_n \in D$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť $D = Rng(T)$ je podprostor v Y. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_1 + y_2 - y_1 + \ldots - y_{n-2} + y_n - y_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Pro $n \geq 2$ platí z trojúhelníkové nerovnosti

$$\|z_n\| \leq \|z_n + \sum_{k=1}^{n-1} z_k - y\| + \|y - \sum_{k=1}^{n-1} z_k\| \leq 2^{-n} + 2^{1-n} \leq 2^{2-n}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prvek $x_n \in X$ s vlastnostmi $Tx_n = z_n$ a $m\|x_n\| \leq \|z_n\|$. Vzhledem k tomu, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq m \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| \leq m(\|y_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{2-n}) = m(\|y_1\| + 2),$$

konverguje suma $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a platí $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \in X$. Dostáváme

$$T \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = y,$$

čímž jsme ověřili, že T je surjektivní. $\square$

.

2.10. Tvrzení *Operátor skládání T na L^p prostorech je surjektivní právě tehdy, pokud existuje konstanta $m > 0$ a pro každou $A \in \mathcal{T}$, $0 < \alpha(A) < \infty$ existuje $B \in \mathcal{S}$ splňující*

i) $\alpha(\varphi^{-1}(B) \cap A) = \alpha(A)$,

ii) $\alpha(\varphi^{-1}(B) \cap A^c) = 0$,

iii) $m \cdot \mu(B) \leq \alpha(A)$.

Důkaz. Pro důkaz nutnosti $i)$ a $ii)$ předpokládejme, že existuje množina $A \in \mathcal{T}$, $0 < \alpha(A) < \infty$ a pro každou $B \in \mathcal{S}$ neplatí $i)$ nebo $ii)$. Vezměme libovolnou $f \in L^p(K)$. Pro $D_f := \{x \in K | \ f(x) = 1\}$ platí $D_f \in \mathcal{S}$ a proto i $\alpha(\varphi^{-1}(D_f) \cap A) \neq \alpha(A)$ nebo $\alpha(\varphi^{-1}(D_f) \cap A^c) > 0$. Tedy alespoň jedna z množin $A \setminus \varphi^{-1}(D_f)$ a $\varphi^{-1}(D_f) \cap A^c$ je kladné míry. Na žádné z těchto množin se však f a χ_A nerovnají ani v jednom bodě. Jelikož f byla libovolná, v $L^p(K)$ neexistuje vzor pro χ_A a T není surjektivní.

Je-li T surjektivní, $Rng(T)$ je zřejmě uzavřený v $L^p(L)$ a existuje proto konstanta $m > 0$ taková, že platí([1], str. 487)

$$\forall f \in L^p(L), \ \exists g \in L^p(K), \ Tg = f, \ m\|g\| \leq \|f\|. \tag{2.5}$$

Zvolme $A \in \mathcal{T}$, $\alpha(A) > 0$. Protože funkce χ_A nabývá skoro všude jen hodnot 0 a 1, pak každá funkce $h \in L^p(K)$, pro kterou platí

$$\|h\| = \inf\{\|w\|; w \in L^p(K), \ Tw = \chi_A\},$$

nabývá taktéž hodnot 0 a 1 skoro všude. Poznamenejme, že alespoň jedna taková funkce h existuje, neboť norma jako spojité zobrazení na uzavřené množině $\{w \in L^p(K); \ Tw = \chi_A\}$ nabývá svého minima. Pokud pro $h' \in L^p(K)$ platí $Th' = \chi_A$, ale přesto existuje množina $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) > 0$, na které $h' \neq 0$, $h' \neq 1$, pak ale $\varphi_\alpha(E) = 0$ a funkce $h'' = h' \cdot (1 - \chi_E)$ jistě splňuje $Th'' = \chi_A$, avšak $\|h''\| < \|h\|$. Funkce h tedy nabývá skoro všude jen hodnot 0 a 1. Pak pro měřitelnou množinu $B := \{x \in K|\ h(x) = 1\}$ platí podmínky $i)$ a $ii)$. Zvolíme-li v (2.5) $f = \chi_A$, pak pro $g = \chi_B = h$ musí platit $m\|\chi_B\| \leq \|\chi_A\|$. To ale není nic jiného, než $m\mu(B) \leq \alpha(A)$ a tvrzení $iii)$ je dokázáno.

Nechť nyní existuje $m > 0$ a pro každou $A \in \mathcal{T}$, $0 < \alpha(A) < \infty$ existuje $B \in \mathcal{S}$ taková, že platí podmínky $i) - iii)$. Pak díky $i)$ a $ii)$ existuje pro každou $E \in \mathcal{T}$, $\alpha(E) < \infty$ taková $F \in \mathcal{S}$, že platí rovnost $\chi_E = \chi_{\varphi^{-1}(F)} = T\chi_F$. Tedy pro každou $E \in \mathcal{T}$, $\alpha(E) < \infty$ je $\chi_E \in Rng(T)$. Tudíž pro každou $f \in L^p(L)$ jednoduchou platí $f \in Rng(T)$. Každá jednoduchá funkce $f \in L^p(L)$ nabývá nejvýše konečně mnoha hodnot, proto ji lze vyjádřit ve tvaru $f = \sum_{k=1}^n a_k\chi_{D_k}$ pro vhodná čísla $a_k \in \mathbb{C}$ a po dvou disjunktní množiny $D_k \in \mathcal{T}$, $k \in \{1, .., n\}$. Pro každou z množin D_k existuje množina F_k splňující podmínky $i) - iii)$. Proto je $T\sum_{k=1}^n a_k\chi_{F_k} = f$ a platí odhad

$$\int_K \sum_{k=1}^n |a_k|^p \chi_{F_k} d\mu \leq m \int_L \sum_{k=1}^n |a_k|^p \chi_{D_k} d\alpha.$$

Protože jednoduché L^p funkce leží hustě v $L^p(L)$ a zaroveň leží v $Rng(T)$, je $D = Rng(T)$ hustý v L^p. Dále, L^p prostory jsou Banachovy. Protože existuje konstanta $m > 0$ taková, že pro každou $f \in D$ existuje $g \in L^p(K)$ splňující $Tg = f$ a $m\|g\| \leq \|f\|$, můžeme aplikovat lemma 2.8., čímž dostáváme, že T je surjektivní.

$\square$

Seznam použité literatury

[1] Dunford, Nelson – Schwartz, Jacob T. *Linear Operators Part I.* INTERSCIENCE PUBLISHERS, INC., NEW YORK, 1958. 857 s. 57-10545.

[2] Lukeš, Jaroslav *Teorie míry a integrálu I.* Univerzita Karlova, Praha 1980. 301 s. 60-62-80.

[3] Rudin, Walter *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Company 1986. 416 s. ISBN 0-07-100276-6.