Oponentský posudek balalářské práce

Matěj Novotný: „Operátory skládání na prostorech funkcí“

Předložená práce se zabývá vlastnostmi operátorů skládání (tj. operátorů tvaru $f \mapsto f\circ\varphi$) na prostorech spojitých funkcí na kompaktu a na prostorech L^p pro $1 \leq p < \infty$. Zkoumá se, kdy je takový operátor prostý, na, kompaktní, jaké má spektrum a podobné otázky. Téma je zajímavé, struktura práce je dobrá a přirozená, nicméně práce obsahuje několik nepřehlédnutelných chyb závažnějšího charakteru. Zejména jde o tyto chyby:

1. Strana 6, konstrukce posloupnosti $\{f_n\}$:

(i) K tomu, aby funkce f_n měly disjunktní nosiče, by bylo třeba, aby množiny U_n byly disjunktní. To zajistit lze, ale v práci to zajištěno není.

(ii) Disjunktnost nosičů funkcí f_n není ovšem potřebná.

(iii) Podstatné je nikoli jaká je vzdálenost funkcí f_n, ale vzdálenost jejich restrikcí na $\varphi(L)$. Ta je ovšem alespoň 1, protože body a_n patří do $\varphi(L)$.

2. Strana 14-15: Důkaz je špatně. Podrobněji:

(i) V první části se správně dokáže, že $\mu(Z) = 0$ pro každý cyklus Z. Z toho se usuzuje, že $\mu(K) = 0$, a z toho pak implicitně, že $\mu = 0$. Ani jeden z těchto kroků není správný. První proto, že cyklů může být nespočetně mnoho, druhý proto, že nejde o nezápornou míru.

(ii) Tvrdí se, že funkce d je spojitá. Důkaz není správný. Je dokázáno jen, že restrikce d na každou z množin Z_i je spojitá. Implicitně se pak používají neověřené vlastnosti funkce $x \mapsto n_x$. Protože k důkazu borelovskosti množin Z_i se používá spojitost d, je i tento důkaz špatně.

(iii) Definice α_j na straně 15 je zapsána podivně, měla by se zapsat pomocí restrikce μ na Z_j. Tím pádem i důkaz, že α je ta správná míra, je podivný. Co to znamená, že pravá strana má „na Z_j“ nějaký tvar? Opět jde asi o restrikci μ na Z_j. Je třeba použít invarianci Z_j vůči φ. Ta je sice zřejmá, ale musí se explicitně použít.

(iv) Vše lze opravit: Nejprve dokázat, že množiny Z_n jsou borelovské a invariantní. Invariance je zřejmá, borelovskost plyne snadno z definice: $Z_n = \{x : \varphi(x) \neq x, \dots, \varphi^{n-1}(x) \neq x, \varphi^n(x) = x\}$, tedy Z_n je rozdílem dvou uzavřených množin. Pak ukázat, že každá kompaktní podmnožina Z_n má (za předpokladů na první polovině strany 14) nulovou míru. Argumenty na straně 15 je potřeba správně přepsat s použitím vhodných restrikcí.

3. Strana 19, Tvrzení 2.5: Předpoklady jsou velmi silné, až zbytečně. Důkaz je navíc špatně. Nelze předpokládat, že množiny D_i jsou po dvou disjunktní a že to jsou všechny množiny kladné míry. To proto, že sjednocení těchto množin mají také kladnou míru. Správnější formulace by byla, že míra φ_α nabývá jen konečně mnoha hodnot - pak jde o atomickou míru vyjádřitelnou pomocí konečně mnoha atomů.

4. Strana 22, důkaz Tvrzení 2.10: Na řádku 4 zdola se používá, že spojité zobrazení na uzavřené množině nabývá minima. To je nepravdivé tvrzení. Funkce h splňující $Th = \chi_A$ s minimální normou nemusí existovat. To ale vůbec nevadí, stačí správná práce s definicí infima.

Kromě těchto závažnějších chyb je v práci i několik drobnějších nedostatků, ne zcela vhodných formulací a neobratných postupů. Například:

(i) V Kapitole 1 se předpokládá, že se pracuje s metrickými kompaktními prostory. Existence metriky se na několika místech používá bez řečí (třeba na straně 4 při volbě f_x). Chtělo by to použití tohoto předpokladu explicitně komentovat. Stálo by za úvahu i zamyslet se nad potřebností tohoto předpokladu. Myslím si, že potřebný není.

(ii) Strana 7: Je zřejmé, že $\|T\| = 1$, a tedy $\nu(T) \leq 1$. Není potřeba používat Beurlingův vzorec. A když už se používá, je snadné si všimnout, že $\|T^n\| = 1$ pro každé n, a tedy $\nu(T) = 1$. Pozorování, že 1 je vlastním číslem, je samozřejmě zajímavé též.

(iii) Strana 10, řádek 3-4: Asi má být $d < n_x$, chtělo by to zdůraznit, že se používá definice $g_j(a)$.

(iv) Strana 11, dolní polovina: Zkoumat surjektivitu není potřebné. Je-li K konečný, je $\dim C(K) < \infty$, a tedy $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ (operátor $\lambda I - T : C(K) \to C(K)$ je prostý, právě když je na; jak je známo z lineární algebry).

(v) Strana 12, poslední řádek: Zápis množiny není jasný, mělo by tam být napsáno „$\lambda^{n_y} = 1$ pro nějaké $y \in K$“.

(vi) Strana 16, řádek 9 zdola: Formulace „pro každou $f \in [f]$“ není šťastná – f se používá ve dvou významech.

(vii) Strany 19-20: Jsou zde dvě tvrzení stejného čísla 2.5.

(viii) Strana 21, řádky 1-4: To není přesné. Ta definice říká, že pro každé Y kladné míry je $\varphi^{-1}(Y)$ také kladné míry. Obrazem nemusí být celé X. φ také nemusí být surjektivní, například může být surjektivní až na množinu míry 0. Nebo jen $K \setminus \varphi(L)$ může mít nulovou vnitřní míru (nemusí to být měřitelná množina).

Závěr: Struktura práce je dobrá. Matematickou práci s elementárními pojmy uchazeč zvládá dobře, ale práce s pokročilejšími pojmy (jako míra nebo borelovské množiny) vykazuje vážné nedostatky. To je v práci, kde práce s mírami patří k hlavním tématům, na pováženou. Dále některé otázky nejsou dotažené, i když by dotáhnout je bylo nepochybně možné (například dvojice tvrzení s číslem 2.5 není úplně uspokojující), takže práce trochu působí uspěchaným dojmem. Nicméně práce dle mého názoru **splňuje předpoklady** kladené na bakalářskou práci. Navrhuji hodnotit ji známkou **dobře**. V případě vynikající obhajoby, zejména prokáže-li uchazeč, že rozumí uvedeným připomínkám a práci s mírami, bylo by možné i hodnocení **velmi dobře**.

V Praze dne 29. srpna 2011

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D.
KMA MFF UK