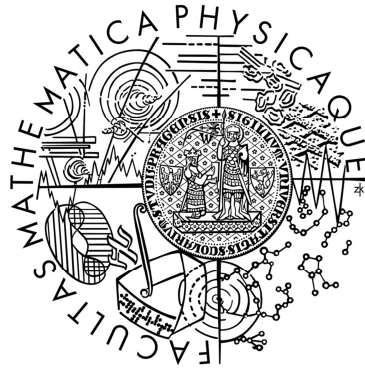


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jana Vaverová

Víceroznicové soustavy jako nástroj pro zpracování finančních a ekonomických dat

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2011

Chtěla bych poděkovat především mé vedoucí bakalářské práce, RNDr. Jitce Zichové, Dr., za její podporu, cenné rady a připomínky, které mi při psaní práce velmi pomohly. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, kteří mě podporovali během celého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 4.8.2011

Název práce: Vícerovnicové soustavy jako nástroj pro zpracování finančních a ekonomických dat

Autor: Jana Vaverová

Katedra / Ústav: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Abstrakt: Tato práce pojednává o analýze vícerozměrných finančních a ekonomických dat. V první části je vyložena teorie vícerovnicových soustav, vektorové autoregrese a konstrukce těchto modelů. Druhá část se zabývá analýzou závislosti časových řad měr inflací na různých makroekonomických ukazatelích a vyšetřováním vzájemné závislosti dvou řad měnových kurzů v čase. Data byla zpracována softwarem Mathematica 8.0.

Klíčová slova: vícerovnicové soustavy, vektorová autoregrese, inflace, měnové kurzy

Title: Econometric Systems of Equations as a Tool for Financial Data Analysis

Author: Jana Vaverová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Abstract: This thesis deals with analysing multivariate financial and economical data. The first section describes various types of econometric systems of equations, vector autoregression and constructing models based on this theory. The second part deals with analysing the dependence of time series of inflation rates on various macroeconomical indicators and reciprocal dependence of two exchange rates time series. All results were obtained by the Mathematica 8.0 software.

Keywords: econometric systems of equations, vector autoregression, inflation rate, exchange rates

Obsah

Úvod	1
1. Víceroznicové ekonometrické soustavy	2
1.1. Obecný model	2
1.2. SUR soustava	3
1.3. Modely pro panelová data	5
1.3.1. Panelový model s fixními efekty	5
1.3.2. Panelový model s náhodnými efekty	6
1.4. Soustava simultánních rovnic	7
1.4.1. Odhady soustavy simultánních rovnic	8
1.4.2. Testování exogenity	11
2. Vektorová autoregrese	12
2.1. Základní vlastnosti vícerozměrných časových řad	12
2.2. Model vektorové autoregrese	13
2.3. Konstrukce modelu VAR(p)	15
2.3.1. Identifikace modelu	15
2.3.2. Odhad parametrů modelu	15
2.3.3. Verifikace modelu	16
2.4. Předpovědi v rámci modelu VAR	17
3. Zpracování dat	18
3.1. Modelování inflace SUR soustavou	18
3.2. Modelování inflace soustavou simultánních rovnic	22
3.3. Modelování kurzů měn	25
Závěr	29
Seznam použité literatury	30

Úvod

Tato práce pojednává o teorii víceroznicových soustav včetně souvisejícího modelu vektorové autoregrese, tedy o základech mnohorozměrných časových řad. Ve finanční praxi se většinou setkáváme s daty ve formě časových řad a to takových, které jsou ovlivněny i řadami jiných dat. Proto je výhodné tato data modelovat pomocí mnohorozměrných modelů.

Práce se dělí celkem na 3 kapitoly, kde je zprvu vysvětlena potřebná teorie víceroznicových soustav a základy vícerozměrné autoregrese, přičemž celá tato část převážně vychází z knihy [5]. V seznamu literatury jsou uvedeny i další doplňkové zdroje. Poté je vyložená teorie aplikována na reálná data z finanční praxe.

V první kapitole jsou popsány modely víceroznicových soustav, které se dnes v praxi stále častěji uplatňují a rozvíjejí. Je zde uvedeno několik různých typů těchto soustav pro analýzu tzv. poolových dat.

Ve druhé kapitole se pojednává o samotné vektorové autoregresi a základních vlastnostech mnohorozměrných časových řad. Je vysvětleno, jak se postupuje při konstrukci modelu a jeho správné identifikaci a verifikaci.

Třetí kapitola je aplikací nastudované teorie na reálná data. V této části uvádíme tři aplikace teoretické části práce. V prvních dvou příkladech modelujeme data pomocí dvou různých víceroznicových soustav z první kapitoly a ve třetím příkladu názorně ukážeme aplikaci vektorové autoregrese. Numerická studie prezentuje výsledky získané pomocí softwaru Mathematica 8.0.

1. Víceroznicové ekonometrické soustavy

1.1. Obecný model

Ve finanční a ekonomické analýze je mnohdy nutné pracovat současně s větším počtem proměnných najednou. Proměnné vyjadřují různé veličiny, které se navzájem ovlivňují. Tyto vztahy lze vyjádřit pomocí soustav rovnic.

V ekonometrii se většinou setkáváme se specifickými typy pozorování, která kombinují informace jednotlivých průřezových dat (např. jednotlivé tituly cenných papírů) s informacemi časovými (např. jednotlivé obchodní dny). Průřezovou složku budeme označovat indexem $j = 1, 2, \dots, m$ a časovou složku indexem $t = 1, 2, \dots, T$.

Takováto data se někdy označují jako *poolová*. Lze je popsat soustavou rovnic

$$y_{jt} = \alpha_{jt} + \mathbf{x}'_{jt} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{jt} + \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T, \quad \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega}, \quad (1)$$

kde: y_{jt} ... je daná vysvětlovaná proměnná (např. výnos j -tého titulu cenných papírů v t -tý obchodní den),

\mathbf{x}'_{jt} ... je řádkový vektor vysvětlujících proměnných (regresorů) o $k-1$ složkách,

T ... je délka časové řady,

m ... je počet jednotlivých pozorovaných proměnných,

ε_{jt} ... je reziduální složka s nulovou střední hodnotou

$\boldsymbol{\Omega}$... je rozptylová matice typu $mT \times mT$ vektoru $\boldsymbol{\varepsilon}$ reziduálních složek ε_{jt} ,

α_{jt} ... je absolutní člen (dále intercept),

$\boldsymbol{\gamma}_{jt}$... je sloupcový vektor neznámých regresních parametrů.

Ve víceroznicových soustavách vystupují endogenní a exogenní proměnné. *Endogenní proměnné* jsou výstupem ze soustavy. Alespoň v jedné z rovnic musí být vysvětlovanou proměnnou, v některých rovnicích mohou být vysvětlující proměnnou. *Exogenní proměnné* mohou být jedině vysvětlující. Platí, že podmíněné rozdělení proměnné y při pevných hodnotách exogenních proměnných se nemění při změnách procesu generujícího tyto proměnné.

Obecný model je však nevhodný pro praktické použití, neboť obsahuje více parametrů ($kmT + mT(mT+1)/2$, kde druhý sčítanec je dán počtem prvků dolního trojúhelníku symetrické rozptylové matice), než je počet pozorování mT . Proto se v praxi běžně používají jeho speciální případy, jako jsou SUR soustava,

panelová data, (dynamická) soustava simultánních rovnic a model vektorové autoregrese VAR.

1.2. SUR soustava

Nejprve se podrobněji podíváme na první speciální případ obecné soustavy - tzv. SUR soustavu (Seemingly Unrelated Regression). Tento systém se skládá z několika jednotlivých vztahů, které jsou propojené tím, že jejich reziduální složky jsou korelované ve stejném čase, ale nejsou korelované v různých časech.

Model se dá zapsat následujícím způsobem

$$y_{jt} = \alpha_j + \mathbf{x}'_{jt} \cdot \boldsymbol{\gamma}_j + \varepsilon_{jt}, \quad E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij}, \quad E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = 0 \quad (2)$$

pro libovolná $i, j, s \neq t$.

Jelikož se soustavy (1) a (2) liší tím, že v (2) máme $\alpha_{jt} = \alpha_j$, $\boldsymbol{\gamma}_{jt} = \boldsymbol{\gamma}_j$, lze o SUR soustavě říci, že marginální efekt vysvětlujících proměnných se liší mezi jednotlivými rovnicemi, ale nezávisí na čase.

V tomto modelu se dále předpokládá, že jednotlivé vysvětlující proměnné \mathbf{x}'_{jt} jsou exogenní.

Maticový zápis tohoto modelu má tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{pmatrix},$$

$$\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{1m}\mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{mm}\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

kde: \mathbf{y}_j ... je vektor ($T \times 1$) pozorovaných hodnot j -té vysvětlované proměnné,

\mathbf{X}_j ... je matice ($T \times k$) pozorovaných hodnot regresorů j -té rovnice (jejíž první sloupec je tvořen jedničkami),

$\boldsymbol{\beta}_j$... je vektor ($k \times 1$) regresních parametrů j -té rovnice s první složkou α_j ,

$\boldsymbol{\varepsilon}_j$... je vektor ($T \times 1$) reziduální složky j -té rovnice

\mathbf{I} ... je jednotková matice ($T \times T$).

Zaměříme se dále na problém nalezení nejlepšího nestranného lineárního odhadu parametrů. Pokud by $\boldsymbol{\beta}_j$ byly odhadnuty metodou nejmenších čtverců individuálně

pro každou rovnici zvlášť, byla by ignorována vzájemná korelace mezi jednotlivými reziduálními složkami. Proto budeme na celou SUR soustavu pohlížet jako na jednu regresní rovnici vytvořenou z mT pozorování: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde \mathbf{y} , $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ jsou sloupcové vektory délky mT a \mathbf{X} je blokově diagonální matice z (3).

Prakticky se postupuje dvoustupňově za podmínky, že $m \leq T$, tedy že počet průřezových dat (pozorování různých jevů v jednom časovém období) nepřesáhne délku časových řad, neboť jinak by neexistovala inverzní matice k odhadnuté matici $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$.

- (1) Nejprve odhadneme rezidua $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j$ metodou nejmenších čtverců pro každou rovnici SUR soustavy zvlášť

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j = \mathbf{y}_j - \hat{\mathbf{y}}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \mathbf{b}_j, \text{ kde } \mathbf{b}_j = (\mathbf{X}'_j \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}'_j \mathbf{y}_j.$$

Potom určíme konzistentní odhady parametrů σ_{ij} pro odhad $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$ varianční matice reziduí $\boldsymbol{\Omega}$ předpisem

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{it} \hat{\varepsilon}_{jt}.$$

- (2) Vypočítáme přípustný Aitkenův odhad ve tvaru

$$\bar{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}' \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{y}.$$

Lze dokázat, že tento odhad je za určitých v praxi dosažitelných předpokladů konzistentní, asymptoticky eficientní a má asymptotické normální rozdělení $N(\boldsymbol{\beta}, (\mathbf{X}' \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X})^{-1})$.

Poznámka: Parametry $\boldsymbol{\beta}_j$ lze optimálně odhadnout metodou nejmenších čtverců pro každou rovnici zvlášť ve dvou speciálních případech:

- (i) $\sigma_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$,
- (ii) všechny rovnice mají stejné regresory: $\mathbf{X}_j = \mathbf{X}$ pro všechna j .

V těchto případech totiž nejsou jednotlivé rovnice propojeny. Nekorelovanost reziduí se dá statisticky testovat pomocí LM-testu s nulovou hypotézou $H_0: \sigma_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$. Jeho kritický obor vypadá následovně

$$T \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m r_{ij}^2 > \chi_{1-\alpha}^2 \left(\frac{m(m-1)}{2} \right), \text{ kde } r_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii} \hat{\sigma}_{jj}}} \quad (4)$$

a na pravé straně nerovnosti je $(1-\alpha)$ -kvantil chí-kvadrát rozdělení.

1.3. Modely pro panelová data

V případě, že $m > T$, tedy, že počet průřezových jednotek přesáhne délku časových řad, mluvíme o *panelových datech* (panel data), někdy nazývaných také longitudinální data. Na data tohoto typu se používají tzv. panelové modely.

Využívá se předpokladu, že marginální efekt vysvětlujících proměnných (kromě interceptu) zůstává konstantní v čase, ale i mezi jednotlivými průřezovými jednotkami ($\alpha_{jt} = \alpha_j, \gamma_{jt} = \gamma$).

V panelovém modelu lze uvažovat fixní nebo náhodné efekty.

1.3.1. Panelový model s fixními efekty

Formálně lze panelový model s fixními efekty vyjádřit rovnicí

$$y_{jt} = \alpha_j + \mathbf{x}'_{jt}\boldsymbol{\gamma} + \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5)$$

Z rovnice je ihned vidět, že parametr interceptu α_j je konstanta reprezentující efekty, které jsou charakteristické pro j -tou rovnici. Předpokládá se, že reziduální složky ε_{jt} jsou nezávislé stejně rozdělené s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2 . Symbolicky lze psát

$$\varepsilon_{jt} \sim iid(0, \sigma^2), \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T.$$

Maticový zápis tohoto modelu vypadá následovně

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{pmatrix} \boldsymbol{\gamma} + \begin{pmatrix} \mathbf{e} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{e} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_j \sim iid(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{1}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (6)$$

kde: \mathbf{y}_j ... je vektor ($T \times 1$) pozorovaných hodnot j -té vysvětlované proměnné,

\mathbf{X}_j ... je matice ($T \times (k-1)$) hodnot regresorů j -té rovnice (bez sloupce jedniček),

$\boldsymbol{\gamma}$... je vektor ($(k-1) \times 1$) regresních parametrů,

\mathbf{e} ... je jednotkový sloupcový vektor o T složkách,

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)'$

$\boldsymbol{\varepsilon}_j$... je vektor ($T \times 1$) reziduální složky j -té rovnice,

Opět se předpokládá, že všechny vysvětlující proměnné jsou exogenní.

Na základě vlastností reziduální složky ε_{jt} dostáváme, že nejlepší nestranný lineární odhad parametrů $\boldsymbol{\gamma}$ a $\boldsymbol{\alpha}$ je odhad metodou nejmenších čtverců.

(i) Odhad parametrů $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\mathbf{c} = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}_{jt} - \bar{\mathbf{x}}_j) (\mathbf{x}_{jt} - \bar{\mathbf{x}}_j)' \right)^{-1} \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}_{jt} - \bar{\mathbf{x}}_j) (y_{jt} - \bar{y}_j),$$

$$\text{kde } \bar{\mathbf{x}}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{jt}, \quad \bar{y}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{jt}.$$

Tento odhad je konzistentní, když $mT \rightarrow \infty$.

(ii) Odhad parametrů $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\alpha_j = \bar{y}_j - \bar{\mathbf{x}}_j' \mathbf{c}.$$

Tento odhad je konzistentní pro $T \rightarrow \infty$.

1.3.2. Panelový model s náhodnými efekty

Nyní budeme pracovat s následujícím modelem:

$$y_{jt} = \alpha + \mathbf{x}'_{jt} \boldsymbol{\gamma} + \omega_{jt}, \quad \omega_{jt} = \varepsilon_{jt} + \eta_j, \quad \varepsilon_{jt} \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad \eta_j \sim iid(0, \sigma_\eta^2), \quad (7)$$

$$j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T,$$

přičemž ω_{jt} je chybový člen složený ze dvou navzájem nezávislých komponent pro všechna j a t . V předchozím modelu jsme parametry α_j chápali jako fixní konstanty, kdežto v tomto modelu jsou jednotlivá $\alpha_j = \alpha + \omega_{jt}$ náhodné veličiny.

V modelu s náhodnými efekty navíc předpokládáme, že:

- (i) $E(\omega_{jt}) = 0$,
- (ii) $E(\omega_{jt}^2) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2$,
- (iii) $E(\omega_{jt} \omega_{js}) = \sigma_\eta^2$ pro $s \neq t$,
- (iv) $E(\omega_{is} \omega_{jt}) = 0$ pro $i \neq j$.

Jako eficientní odhad parametrů $\boldsymbol{\gamma}$ a α použijeme přípustný Aitkenův odhad a to dvoustupňově, jako tomu bylo u SUR soustavy.

Poznámka: Panelový model s náhodnými efekty se nejčastěji využívá v případech, kdy máme velký počet průřezových dat za kratší časová období, neboť počet parametrů nezávisí na počtu průřezových jednotek. Jelikož parametr α je pro

všechny rovnice stejný, ε_{jt} a η_j mají různé rozptyly a regresních parametrů $\boldsymbol{\gamma}$ je opět $k-1$, dostaneme celkem pouze $k+2$ parametrů.

1.4. Soustava simultánních rovnic

Soustava simultánních rovnic má oproti předešlým modelům tu vlastnost, že mezi vysvětlujícími proměnnými mohou být obsaženy i endogenní proměnné.

Formálně může být soustava simultánních rovnic popsána následujícím předpisem

$$y_{jt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \gamma_{ji} y_{it} + \sum_{i=1}^k \beta_{ji} x_{it} + \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T. \quad (8)$$

Celkem tedy máme m endogenních proměnných y_{jt} a k exogenních proměnných x_{it} . Stejně jako tomu bylo u SUR soustavy, i nyní pro reziduální složky předpokládáme, že

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij}, \quad E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = 0 \quad \text{pro libovolná } i, j, s \neq t.$$

Navíc se ale také předpokládá, že $\gamma_{ji} \neq 0$ pro nějaké $i \neq j$ – tedy, že alespoň jedna rovnice obsahuje více než jednu endogenní proměnnou.

Pro $\gamma_{ji} = 0, i, j = 1, \dots, m$ se (8) redukuje na SUR soustavu (2) rozepsanou pro jednotlivé složky, β_{ji} jsou složky vektoru $\boldsymbol{\beta}_j$ zavedeného ve vyjádření (3) SUR soustavy.

Maticový zápis této soustavy má následující tvar (nazývaný také *strukturální*):

$$\mathbf{Y}\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\Delta} + \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

kde:

\mathbf{Y} ... je matice ($T \times m$) pozorovaných hodnot všech endogenních proměnných,

$\boldsymbol{\Gamma}$... je matice parametrů ($m \times m$),

\mathbf{X} ... je matice pozorovaných hodnot všech exogenních proměnných ($T \times k$),

\mathbf{B} ... je matice parametrů ($k \times m$),

$\mathbf{Z} = (\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ je matice pozorovaných hodnot všech $k+m$ proměnných soustavy ($T \times (k+m)$),

$\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Gamma}', \mathbf{B}')'$ je odpovídající matice parametrů ($(k+m) \times m$),

$\mathbf{E} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m)$ je matice reziduálních složek ($T \times m$).

Za podmínky regularity matice parametrů Γ , lze ze strukturálního tvaru přejít na tzv. redukovaný tvar soustavy vynásobením soustavy zprava inverzní maticí Γ^{-1}

$$Y = -XB\Gamma^{-1} - E\Gamma^{-1} = X\Pi + V, \text{ tedy } \Pi = -B\Gamma^{-1} \text{ a } V = -E\Gamma^{-1}. \quad (10)$$

V redukovaném tvaru vyjadřujeme endogenní proměnné jako funkce pouze exogenních proměnných a reziduální složky.

1.4.1. Odhady soustavy simultánních rovnic

Pro odhad soustavy simultánních rovnic ve strukturálním tvaru není vhodné používat klasickou metodu nejmenších čtverců, neboť takovýto odhad není obecně ani nestranný, ani konzistentní.

1.4.1.1. Nepřímý odhad metodou nejmenších čtverců

Pokud převedeme soustavu simultánních rovnic do redukovaného tvaru, můžeme pro odhad použít metodu nejmenších čtverců, neboť v redukovaném tvaru máme jednotlivé endogenní proměnné y_j vyjádřené jako lineární funkci exogenních proměnných a reziduální složky. Pro j -tý sloupec maticového redukovaného zápisu, dostaneme

$$y_j = X\pi_j + v_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

kde y_j , π_j a v_j jsou j -té sloupce matic Y , Π a V .

Metoda nejmenších čtverců nám dává nestranný a konzistentní odhad parametrů redukovaného tvaru. S použitím značení z (10) jej lze zapsat ve tvaru

$$P = (X'X)^{-1}X'Y.$$

Nicméně v pro praktickou analýzu určitého systému je zapotřebí odhadnout původní strukturální tvar soustavy simultánních rovnic. Potřebujeme tedy parametry Π redukovaného tvaru transformovat jednoznačně zpět na parametry Γ, B strukturálního tvaru. Potom se použije stejná transformace na odhad P parametru Π a získáme nestranný a konzistentní odhad původních parametrů Γ a B .

Zdali je možné jednoznačně vyjádřit z parametrů redukovaného tvaru, parametry strukturálního tvaru, závisí na jejich *identifikaci*.

(i) Daná rovnice soustavy se nazývá *neidentifikovaná*, jestliže z parametrů redukované rovnice nelze získat všechny parametry strukturální rovnice. U takovýchto rovnic nelze provést odhad metodou nejmenších čtverců.

(ii) *Přesně identifikovaná* rovnice je taková, u které lze z redukovaných parametrů jednoznačně určit strukturální parametry. U těchto rovnic existuje právě jeden OLS-odhad, který je navíc i konzistentní a asymptoticky eficientní.

(iii) Poslední typ rovnice je *přeidentifikovaná*. To jest z parametrů redukované soustavy lze získat dva a více různých souborů strukturálních parametrů. Pro tyto rovnice existují dva a více OLS-odhadů, které jsou sice konzistentní, ale ani jeden není asymptoticky eficientní.

O identifikaci rovnice se rozhoduje na základě 2 podmínek:

- a) *hodnotní podmínka (nutná a postačující)*, která je založena na hodnotech matic parametrů,
- b) *rozměrová podmínka (nutná)* je založena na počtu zařazených proměnných v dané rovnici a je v praxi používána kvůli jednoduché formulaci. Máme-li m endogenních proměnných soustavy, m_j počet endogenních proměnných v j -té rovnici (na pravé i levé straně rovnice), k exogenních proměnných soustavy a k_j počet exogenních proměnných v j -té rovnici, potom je daná rovnice

(i) neidentifikovaná, pokud: $k - k_j < m_j - 1$,

(ii) přesně identifikovaná, pokud: $k - k_j = m_j - 1$,

(iii) přeidentifikovaná v případě, že: $k - k_j > m_j - 1$.

1.4.1.2. Dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců

Dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců (dále jako 2SLS-odhad) je použitelný jak pro přesně identifikované rovnice, tak i pro přeidentifikované rovnice. Konstrukce se většinou provádí ve dvou stupních, a to pro každou rovnici zvlášť. Pro j -tou rovnici pak máme

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Y}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad (11)$$

kde \mathbf{y}_j je vektor $(T \times 1)$ hodnot j -té endogenní proměnné, \mathbf{Y}_j označuje matici $(T \times (m_j - 1))$ hodnot endogenních proměnných na pravé straně j -té rovnice v (8), $\boldsymbol{\gamma}_j$ je

vektor $((m_j-1) \times 1)$ jejich příslušných parametrů, \mathbf{X}_j je matice $(T \times k_j)$ hodnot exogenních proměnných j -té rovnice a $\boldsymbol{\beta}_j$ je vektor $(k_j \times 1)$ parametrů exogenních proměnných \mathbf{X}_j .

(1) V prvním stupni nejprve odhadneme endogenní proměnné na pravé straně rovnice pomocí jejich pozorovaných hodnot a hodnot všech exogenních proměnných soustavy.

$$\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{X}\mathbf{P}_j = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_j.$$

(2) Druhý stupeň spočívá v nahrazení regresorů v původní rovnici (11) \mathbf{Y}_j vypočítanými odhady $\hat{\mathbf{Y}}_j$ z prvního stupně

$$\mathbf{y}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad (12)$$

na který opět použijeme OLS-odhad a dostaneme konečný odhad \mathbf{c}_{2SLSj} a \mathbf{b}_{2SLSj} parametrů $\boldsymbol{\gamma}_j$ a $\boldsymbol{\beta}_j$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{2SLSj} \\ \mathbf{b}_{2SLSj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'_j \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}'_j \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}'_j \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}'_j \mathbf{X}_j \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'_j \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}_j \\ \mathbf{X}'_j \mathbf{y}_j \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Konzistentní odhad rozptylové matice reziduální složky dostaneme ve tvaru

$$\mathbf{S}_{2SLSj} = \hat{\sigma}_{2SLSj}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'_j \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}'_j \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}'_j \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}'_j \mathbf{X}_j \end{pmatrix}^{-1}, \text{ kde}$$

$$\hat{\sigma}_{2SLSj}^2 = \frac{\mathbf{y}'_j \mathbf{y}_j + \mathbf{c}'_{2SLSj} \mathbf{Y}'_j \mathbf{Y}_j \mathbf{c}_{2SLSj} - 2 \mathbf{c}'_{2SLSj} \mathbf{Y}'_j \mathbf{y}_j - \mathbf{b}'_{2SLSj} \mathbf{X}'_j \mathbf{X}_j \mathbf{b}_{2SLSj}}{T}.$$

Tento dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců nám dává konzistentní, asymptoticky normální a asymptoticky eficientní odhad parametrů j -té rovnice.

Poznámka: Odhad simultánních rovnic lze provést také třístupňově metodou nejmenších čtverců (3SLS-odhad), který nám na rozdíl od dvoustupňového odhadu dává asymptoticky eficientní odhad nejen vzhledem k j -té rovnici, ale i vzhledem k celé soustavě.

1.4.2. Testování exogenity

V praxi se velmi často používají tzv. *testy exogenity*, neboť bývá obtížnější rozeznat, zda je daná proměnná exogenní či endogenní.

Nejčastěji se používá Hausmanův test, kde nulovou hypotézou v rovnici (11) je

$$H_0: \boldsymbol{\gamma}_j = 0.$$

Její zamítnutí znamená, že v j -té rovnici se vyskytují \mathbf{Y}_j jako exogenní proměnné.

K testování hypotézy použijeme LM-test s (asymptotickým) kritickým oborem (na hladině α)

$$LM = T \cdot R^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(m_j - 1), \quad (14)$$

kde R^2 je koeficient determinace v modelu

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \mathbf{u}_j \quad (15)$$

pro OLS-rezidua $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \mathbf{b}_j$ vypočtená z modelu $\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j$ s odhadem parametrů \mathbf{b}_j .

2. Vektorová autoregrese

Další možností pro modelování vzájemných souvislostí několika proměnných v čase jsou modely mnohorozměrných časových řad. Velmi používané a jednoduše interpretovatelné jsou zejména lineární vektorové autoregresní modely. V této kapitole tedy budeme studovat m -rozměrné časové řady $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})'$.

2.1. Základní vlastnosti vícerozměrných časových řad

Slabě stacionární vícerozměrnou řadou budeme rozumět časovou řadu, která splňuje následující vlastnosti

- (i) $E(\mathbf{y}_t) = \boldsymbol{\mu} = \text{konstatnta}$ pro libovolné t ,
- (ii) $\text{var}(\mathbf{y}_t) = \text{konstatnta}$ pro libovolné t ,
- (ii) $\text{cov}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_t) = \text{cov}(\mathbf{y}_{s+h}, \mathbf{y}_{t+h})$ pro libovolné h .

Maticová autokovarianční funkce pro stacionární vícerozměrné procesy má pro časové posunutí $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ tvar

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = \text{cov}(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-k}) = E(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})',$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = \begin{pmatrix} \text{cov}(y_{1t}, y_{1,t-k}) & \text{cov}(y_{1t}, y_{2,t-k}) & \dots & \text{cov}(y_{1t}, y_{m,t-k}) \\ \text{cov}(y_{2t}, y_{1,t-k}) & \text{cov}(y_{2t}, y_{2,t-k}) & \dots & \text{cov}(y_{2t}, y_{m,t-k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(y_{mt}, y_{1,t-k}) & \text{cov}(y_{mt}, y_{2,t-k}) & \dots & \text{cov}(y_{mt}, y_{m,t-k}) \end{pmatrix},$$

a *maticová autokorelační funkce* je

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{D}^{-1/2} \boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{D}^{-1/2},$$

kde matice \mathbf{D} je diagonální matice, na jejíž diagonále jsou hodnoty $\text{var}(y_{1t}), \text{var}(y_{2t}), \dots, \text{var}(y_{mt})$.

Prvek na pozici (i, j) matice $\boldsymbol{\Gamma}_k$ se nazývá *vzájemná kovarianční funkce* časových řad $\{y_{it}\}$ a $\{y_{jt}\}$, kterou označíme $\gamma_{ij}(k)$. Stejným způsobem se definuje *vzájemná korelační funkce* $\rho_{ij}(k)$, která nám udává korelační koeficient mezi y_{it} a $y_{j,t-k}$.

$\boldsymbol{\Gamma}_k$ a $\boldsymbol{\rho}_k$ jsou pro $k = 0$ symetrické matice, ale pro $k \geq 1$ již nikoli. Lze také ukázat, že platí vztahy $\boldsymbol{\Gamma}_k = \boldsymbol{\Gamma}'_{-k}$ a $\boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\rho}'_{-k}$ a proto nadále budeme uvažovat pouze $k \geq 0$.

Odhad maticové autokovarianční funkce z pozorované mnohorozměrné řady $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t$ lze pro $k = 0, 1, \dots, n - 1$ vypočítat dle následujícího vztahu

$$\mathbf{C}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_{t-k} - \bar{\mathbf{y}})', \quad \bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t \quad (16)$$

a odhad maticové autokorelační funkce

$$\mathbf{R}_k = \hat{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Řekneme, že časové řady $\{y_{it}\}$ a $\{y_{jt}\}$ jsou

(i) *vzájemně nekorelované*, jestliže pro libovolné $k \geq 0$ platí

$$\rho_{ij}(k) = \rho_{ji}(k) = 0,$$

(ii) *současně nekorelované*, jestliže $\rho_{ij}(0) = 0$,

(iii) *nesoučasně nekorelované*, jestliže $\rho_{ij}(k) = \rho_{ji}(k) = 0$ pro všechna $k > 0$.

Pokud $\rho_{ij}(k) = 0$ pro všechna $k > 0$ a $\rho_{ji}(l) \neq 0$ pro nějaké $l > 0$, potom řekneme, že existuje *jednostranná závislost* $\{y_{jt}\}$ na $\{y_{it}\}$. Pokud $\rho_{ij}(k) \neq 0$ pro alespoň jedno $k > 0$ a $\rho_{ji}(l) \neq 0$ pro nějaké $l > 0$, potom existuje *zpětná vazba* mezi $\{y_{jt}\}$ a $\{y_{it}\}$.

Vícerozměrný *bílý šum* $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ je časová řada, pro níž platí

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}, \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t) = \boldsymbol{\Sigma}, \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}'_t) = \mathbf{0} \quad \text{pro } s \neq t.$$

Tedy složky tohoto vektoru jsou centrované a časově nekorelované, ale ve stejném čase mohou být korelované a mají pozitivně definitní rozptylovou matici $\boldsymbol{\Sigma}$.

2.2. Model vektorové autoregrese

Nyní se zaměříme na samotný model vektorové autoregrese VAR. Tento model řádu p se dá vyjádřit následující rovnicí

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t &= \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\varphi}_0 - \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} = \boldsymbol{\Phi}(B) \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\varphi}_0, \end{aligned} \quad (18)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ je m -rozměrný bílý šum, $\boldsymbol{\Phi}_i$ jsou parametrické matice typu $(m \times m)$, $\boldsymbol{\varphi}_0$ představuje m -rozměrný intercept a

$$\boldsymbol{\Phi}(B) = 1 - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \boldsymbol{\Phi}_2 B^2 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p \quad (19)$$

je maticový polynom operátoru zpětného posunutí B definovaného předpisem $B^k \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-k}$.

Model vektorové autoregrese lze charakterizovat jako kombinaci modelů jednorozměrných časových řad a soustav simultánních rovnic z kapitoly 1.4. Proces tedy tvoří soustava lineárních regresních rovnic, kde se nerozlišuje mezi exogenními a endogenními proměnnými. Každá vysvětlující proměnná se vyjadřuje pomocí bílého šumu, svých zpožděných hodnot, ale také pomocí zpožděných hodnot ostatních proměnných.

Pro jednoduchost si uvedeme obecný tvar soustavy modelu VAR(1)

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (20)$$

Zapsáním po složkách dostaneme následující soustavu

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \varphi_{10} + \Phi_{11} y_{1,t-1} + \dots + \Phi_{1m} y_{m,t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= \varphi_{20} + \Phi_{21} y_{1,t-1} + \dots + \Phi_{2m} y_{m,t-1} + \varepsilon_{2t}, \\ &\vdots \\ y_{mt} &= \varphi_{m0} + \Phi_{m1} y_{1,t-1} + \dots + \Phi_{mm} y_{m,t-1} + \varepsilon_{mt}. \end{aligned}$$

Rovnice (20) se nazývá *redukováný tvar* modelu VAR. Stejně jako tomu bylo v kapitole 1.4., lze tento tvar převést na tzv. *strukturální* (viz [5]).

Řekneme, že model VAR(p) je *stacionární*, jestliže všechny kořeny polynomu $\boldsymbol{\Phi}(B)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. To zajišťuje možnost přepsat model VAR(p) ve tvaru lineárního procesu

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\psi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \dots = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\psi}_1 B + \boldsymbol{\psi}_2 B^2 + \dots) \boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\psi}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (21)$$

V modelu VAR(1) lze podmínku stacionarity ekvivalentně vyjádřit tak, že vlastní čísla matice $\boldsymbol{\Phi}$ leží uvnitř jednotkového kruhu.

2.3. Konstrukce modelu VAR(p)

Konstrukce modelu vektorové autoregrese spočívá ve fázích identifikace řádu p , včetně transformace k zajištění stacionarity, poté odhadu parametrů a nakonec verifikace odhadnutého modelu.

2.3.1. Identifikace modelu

V první řadě se vizuálně zkontroluje stacionarita dané časové řady vykreslením grafu jejích hodnot. Pokud daná řada není stacionární, je potřeba provést vhodné transformace a tím proces stacionarizovat.

- i) *Diference logaritmů* řady $\ln(y_t) - \ln(y_{t-1})$. Používá se zejména pro finanční časové řady.
- ii) *1. Diference* $y_t - y_{t-1} = D_t$. Ta zpravidla odstraní nestacionaritu ve střední hodnotě (nekonstantní střední hodnota).
- iii) *2. Diference* $D_t - D_{t-1}$. Tato transformace je vhodná u řad, které porušují podmínku stacionarity v rozptylu (nekonstantní rozptyl).

Pokud již máme stacionární řadu, ale s nenulovou střední hodnotou, je třeba řadu $\{y_t\}$ nahradit řadou $\{y_t - \bar{y}\}$, kde \bar{y} je aritmetický průměr hodnot původní řady. Pro mnohorozměrné řady se transformace provádějí po složkách.

K identifikaci řádu p našeho VAR modelu je vhodné použít buď statistické testy (např. LR-test, viz [5]), nebo informační kritéria. Nejčastěji používaným je AIC kritérium pro m -rozměrné časové řady. Ve zdroji [9] je uvedeno ve tvaru

$$AIC(p) = \ln |\hat{\Sigma}_p| + \frac{2m^2p}{T}, \quad (22)$$

kde $|\hat{\Sigma}_p|$ je determinant odhadnuté rozptylové matice reziduální složky modelu VAR(p). Volíme takový model, který má minimální hodnotu AIC.

2.3.2. Odhad parametrů modelu

Matice parametrů Φ_i a vektor φ_0 odhadujeme z T pozorování řady \mathbf{y}_t . K tomu lze použít buď metodou maximální věrohodnosti (ML-metoda), nebo klasický OLS-odhad. Za předpokladu normálního rozdělení reziduí nám obě metody dávají

stejný odhad, který je konzistentní. Odhadové procedury jsou popsány například v knize [8]. Logaritmická věrohodnostní funkce je v tomto zdroji uvedena následovně

$$\ln L(\Phi, \Sigma) = -\frac{T-p}{2} \ln |2\pi\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} S(\Phi), \quad (23)$$

$$S(\Phi) = \sum_{t=p+1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t,$$

přičemž pro $t < p + 1$ je $\boldsymbol{\varepsilon}_t = 0$. K výpočtu odhadů parametrů maximalizací (23) se používá vhodný software.

2.3.3. Verifikace modelu

Zaměříme se pouze na některé typy ověřování adekvátnosti modelu.

(i) *Kontrola stacionarity* – ověřuje se podmínka stacionarity, tedy kontrolujeme, zda kořeny $\Phi(B)$ leží vně jednotkové kružnice v komplexní rovině.

(ii) *Kontrola výsledného bílého šumu* – důležitým nástrojem je vypočítaný bílý šum $\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\}$, pomocí kterého se zejména testuje časová nekorelovanost teoretického bílého šumu $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$.

Tu lze statisticky testovat pomocí m -rozměrného Q-testu s kritickým oborem

$$Q_m = T^2 \sum_{k=1}^K \frac{1}{T-k} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}'_k \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_k \hat{\mathbf{C}}_0^{-1}) \geq \chi^2_{1-\alpha}(m^2(K-p)), \quad (24)$$

kde \mathbf{C}_k je odhad maticové autokovarianční funkce (viz (16)). Za hodnotu K se doporučuje volit \sqrt{T} .

Nekorelovanost lze testovat také například Bartlettovou aproximací, která se aplikuje na jednotlivé odhadnuté autokorelace a vzájemné autokorelace odhadnuté reziduální složky s nenulovým zpožděním k , v praxi většinou počítáme pro $k = 1$.

Testujeme nulovou hypotézu nekorelovanosti s kritickým oborem

$$|r_{ij}(k)| \geq 2 \sqrt{\frac{1}{T}} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

kde $r_{ij}(k)$ je prvek matice (17).

2.4. Předpovědi v rámci modelu VAR

V identifikovaném a ověřeném VAR(p) modelu lze konstruovat předpovědi do budoucna podle předpisu

$$\mathbf{y}_{t+h}(t) = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t+h-1}(t) + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t+h-p}(t),$$
$$\mathbf{y}_{t+j}(t) = \mathbf{y}_{t+j} \text{ pro } j \leq 0.$$

Symbolem $\mathbf{y}_{t+h}(t)$ značíme předpověď v čase t o h časových jednotek.

Poznámka: Speciálně se také definuje *vektorový proces klouzavých součtů* VMA(q)

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\theta}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q} = \boldsymbol{\theta}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

a *vektorový smíšený proces* VARMA(p, q)

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\theta}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q}, \text{ tedy}$$
$$\boldsymbol{\Phi}(B) \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\theta}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Jejich vlastnosti jsou popsány např. v knihách [5] a [8].

3. Zpracování dat

V této kapitole názorně ukážeme použití uvedené teorie na reálných datech. V prvním příkladu budeme analyzovat data pomocí SUR soustavy. Konkrétněji půjde o modelování míry inflace v několika zemích.

Poté budeme používat model soustav simultánních rovnic. Zde se budeme snažit určit závislost mezi endogenními proměnnými, konkrétně mezi mírou inflace ve Velké Británii a ve Francii.

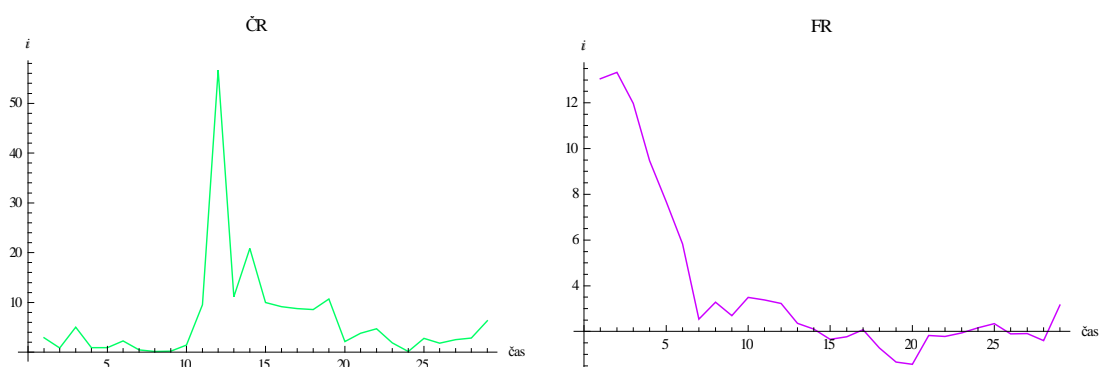
V posledním příkladu ukážeme, jak modelovat měnové kurzy metodou vektorové autoregrese. K výpočtu byl ve všech příkladech aplikován software Mathematica 8.0.

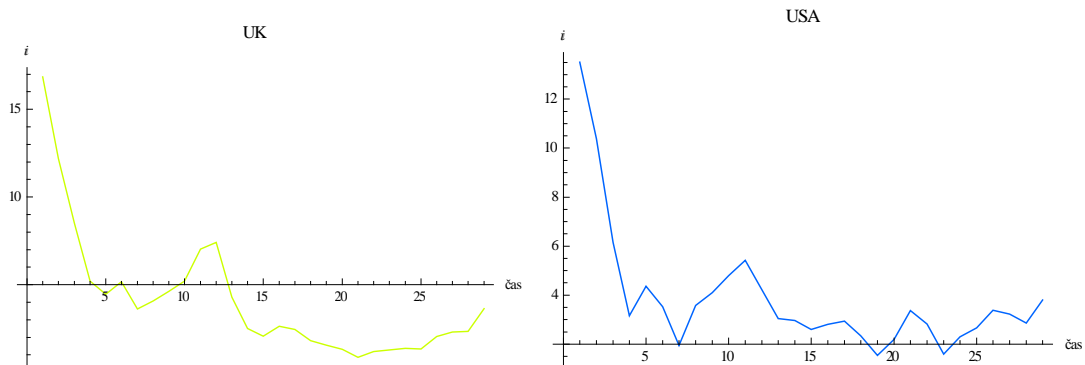
3.1. Modelování inflace SUR soustavou

Nejprve se budeme zabývat modelací roční míry inflace v závislosti na ročním HDP a průměrné roční míře nezaměstnanosti. Použijeme data z ČR, Francie, Velké Británie a z USA a to od roku 1980 do roku 2008. Bude se tedy pracovat s 12 časovými řadami o délce 29. Tato data zpracujeme pomocí SUR soustavy z kapitoly 1.2.

Průřezovými jednotkami jsou jednotlivé státy. Vysvětlovanou proměnnou je roční míra inflace a vysvětlující proměnné jsou zbylé charakteristiky. Data pro jednotlivé státy jsou získána z webových stránek International Monetary Fund [11].

Na následujících obrázcích jsou vývoje grafů inflace v jednotlivých zemích.





Označme nyní roční míru inflace I_{jt} v j -té zemi za t -tý rok, dále hrubý domácí produkt HDP_{jt} a roční míru nezaměstnanosti N_{jt} . Potom budeme modelovat SUR soustavu tvaru (2)

$$I_{jt} = \alpha_j + HDP_{jt} \cdot \gamma_j + N_{jt} \cdot \delta_j + \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad t = 1, \dots, 29. \quad (26)$$

Maticovým zápisem dostaneme model

$$\mathbf{I} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde \mathbf{I} je sloupcový vektor inflací, tedy 116 hodnot. \mathbf{X} je blokově diagonální matice (116×29), v níž jsou jednotlivé submatice tvaru (29×3). Tedy

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X}_4 \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} 1 & HDP_{i1} & N_{i1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & HDP_{i29} & N_{i29} \end{pmatrix} \text{ pro } i = 1, \dots, 4.$$

Matice $\boldsymbol{\beta}$ (12×1) má následující tvar

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{\beta}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{pmatrix}.$$

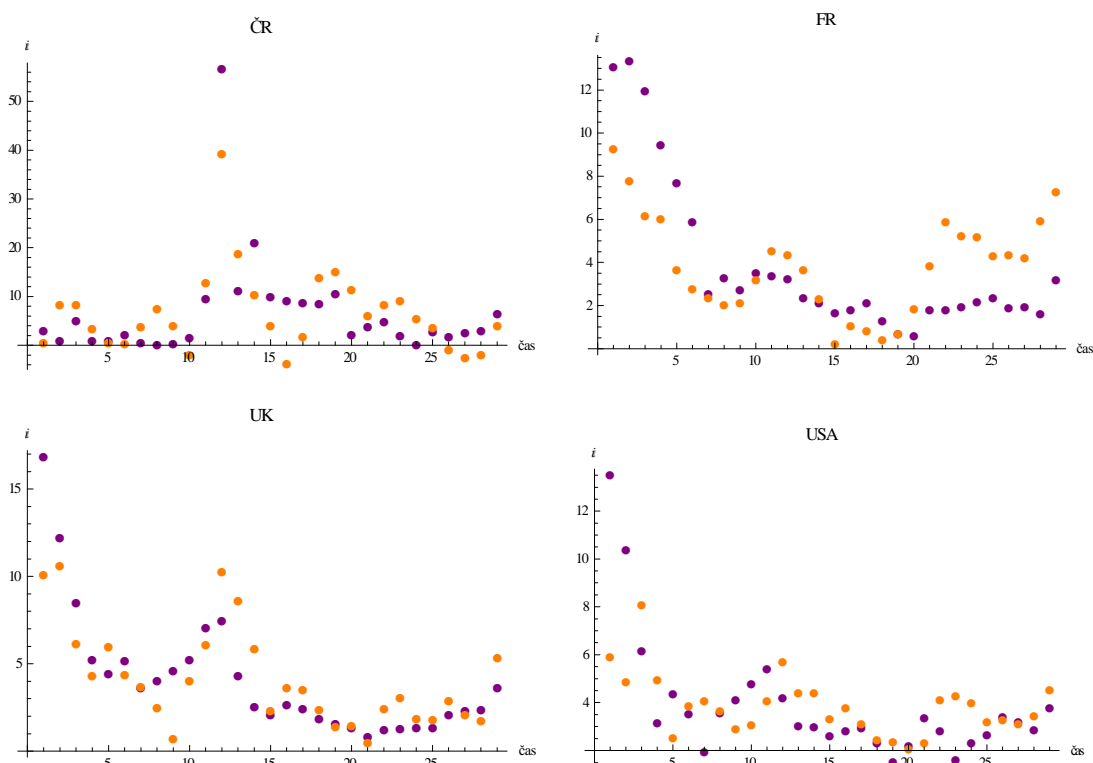
K jejímu odhadnutí budeme postupovat dvoustupňově tak, jak bylo popsáno v kapitole 1.2.

Odhad $\hat{\Omega}$ varianční matice reziduí

Nejprve se odhadovala rezidua pro každou j -tou rovnici zvlášť. K tomu bylo zapotřebí vypočítat jednotlivá proložení tvaru

$$\hat{\mathbf{y}}_j = \mathbf{X}_j \mathbf{b}_j = \mathbf{X}_j (\mathbf{X}_j' \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j' \mathbf{y}_j.$$

Tyto hodnoty (oranžově) spolu s hodnotami inflace (fialově) jsou znázorněny na následujících grafech, kde je možné zkontrolovat, že vypočítané hodnoty prokládají skutečná data uspokojivě.



Matice odhadů parametrů σ_{ij} vyšla následovně

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 41.624 & -0.814 & -2.810 & -0.825 \\ -0.814 & 7.624 & 2.621 & 2.492 \\ -2.810 & 2.621 & 4.413 & 2.887 \\ -0.825 & 2.492 & 2.887 & 4.533 \end{pmatrix}.$$

Odhadnutá korelační matice vypočítaných reziduí ukazuje, že současná korelovanost reziduí není nezanedbatelná.

$$\begin{pmatrix} 1. & -0.045689 & -0.20734 & -0.06002925 \\ -0.045689 & 1. & 0.451907 & 0.423915 \\ -0.20734 & 0.451907 & 1. & 0.645493 \\ -0.0600292 & 0.423915 & 0.645493 & 1. \end{pmatrix}.$$

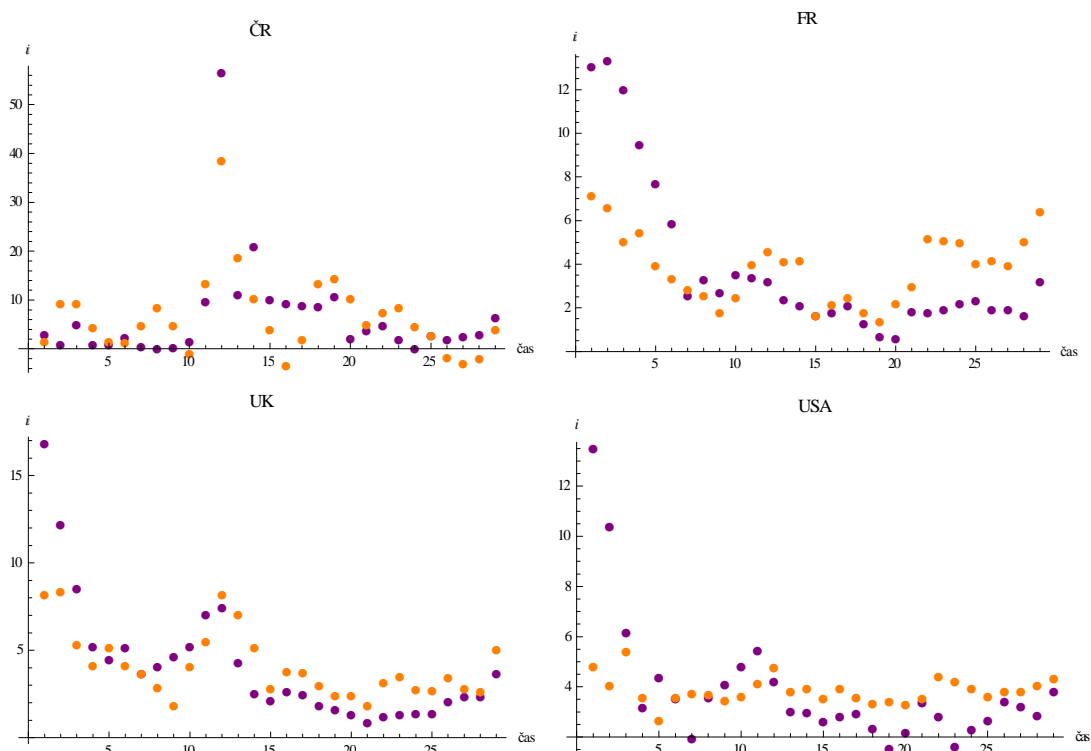
Testová statistika LM-testu (viz (4)) je v našem případě rovna 24,629. Pro hladinu $\alpha = 0,05$ je kvantil chí-kvadrát rozdělení o 6-ti stupních volnosti roven hodnotě 12,592. Tedy jednoznačně zamítáme nulovou hypotézu o současné nekorelovanosti reziduálních složek. Proto OLS-odhady \mathbf{b}_j konstruované individuálně pro každou rovnici SUR soustavy zvláště nejsou eficientní a je tudíž nutné použít dvoustupňovou metodu.

Výpočet odhadu $\bar{\mathbf{b}}$ – Aitkenův odhad

Přípustný Aitkenův odhad vyšel následovně

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 9.616 \\ -2.348 \\ 0.443 \\ 14.548 \\ -0.653 \\ -0.983 \\ 3.857 \\ -1.008 \\ 0.340 \\ 4.378 \\ -0.280 \\ 0.0482 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \begin{matrix} \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 9.616 \\ -2.348 \\ 0.443 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 14.548 \\ -0.653 \\ -0.983 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3.857 \\ -1.008 \\ 0.340 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{\beta}_4 = \begin{pmatrix} 4.378 \\ -0.280 \\ 0.0482 \end{pmatrix}. \end{matrix}$$

Dosazením těchto parametrů do rovnic (26) dostaneme konečná přiblížení, která jsou znázorněna na následujících grafech (původní data jsou znázorněna fialově, proložení oranžově).



3.2. Modelování inflace soustavou simultánních rovnic

Budeme modelovat míru inflace ve Velké Británii a Francii pomocí soustavy simultánních rovnic. Byla použita stejná databáze jako v kapitole 3.1. Jako exogenní proměnné budou vystupovat HDP a míra nezaměstnanosti v dané zemi.

Označme nyní roční míru inflace I_{jt} v j -té zemi za t -tý rok, dále hrubý domácí produkt HPD_{jt} a roční míru nezaměstnanosti N_{jt} . Potom budeme uvažovat následující model ve tvaru odpovídajícímu vzorci (8)

$$\begin{aligned} I_{1t} &= \gamma_{12}I_{2t} + \beta_{11} + \beta_{12}HPD_{1t} + \beta_{13}N_{1t} + \varepsilon_{1t}, \\ I_{2t} &= \gamma_{21}I_{1t} + \beta_{21} + \beta_{24}HPD_{2t} + \beta_{25}N_{2t} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned}$$

Nechť tedy \mathbf{B} je matice parametrů exogenních proměnných, tedy matice typu (5×2) , $\mathbf{\Gamma}$ necht' je matice (2×2) parametrů endogenních proměnných a \mathbf{E} je matice reziduálních složek. Označme \mathbf{Y} matici všech endogenních proměnných a \mathbf{X} matici všech exogenních proměnných včetně sloupce jedniček, který odpovídá interceptu. Potom můžeme zapsat soustavu ve strukturálním tvaru (9)

$$\mathbf{Y}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ kde}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{21} \\ \vdots & \vdots \\ I_{1T} & I_{2T} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & HDP_{11} & N_{11} & HDP_{21} & N_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & HDP_{1T} & N_{1T} & HDP_{2T} & N_{2T} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & 0 \\ \beta_{13} & 0 \\ 0 & \beta_{24} \\ 0 & \beta_{25} \end{pmatrix}.$$

Problém identifikace

V našem příkladu máme $k = 5$ exogenních proměnných a $m = 2$. Obě rovnice jsou přeidentifikované, neboť splňují následující podmínku

$$k - k_j > m_j - 1, \text{ v našem případě } 5 - 3 > 2 - 1.$$

Můžeme proto přistoupit k samotnému odhadu parametrů, neboť obě rovnice splňují podmínku identifikovanosti.

Odhad parametrů

Odhad parametrů provedeme dvoustupňovou metodou nejmenších čtverců, tedy budeme postupovat pro každou rovnici zvlášť, viz rovnice (11)

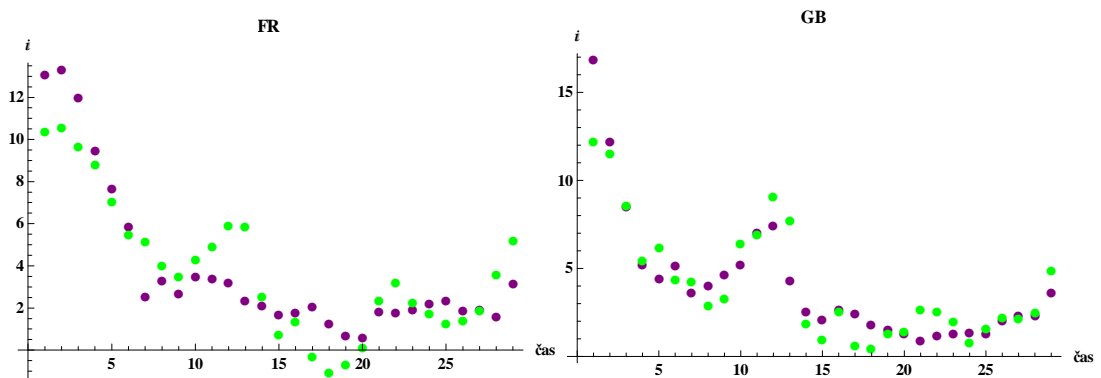
$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Y}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j.$$

Nejprve tedy odhadneme teoretické hodnoty vysvětlujících endogenních proměnných v dané rovnici klasickou metodou nejmenších čtverců a poté použijeme opět tuto metodu k odhadu strukturálních parametrů této rovnice.

(1) Odhadneme endogenní proměnné na pravé straně rovnice

$$\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_j.$$

Na následujících grafech jsou znázorněny tyto hodnoty (zeleně) s původními hodnotami inflací (fialově)



(2) Poté nahradíme regresory v původní rovnici \mathbf{Y}_j vypočítanými odhady $\hat{\mathbf{Y}}_j$ z prvního kroku dle (12)

$$\mathbf{y}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j.$$

a opět použijeme OLS-odhad a dostaneme konečný odhad \mathbf{c}_{2SLSj} a \mathbf{b}_{2SLSj} parametrů $\boldsymbol{\gamma}_j$ a $\boldsymbol{\beta}_j$ ze vzorce (13)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{2SLSj} \\ \mathbf{b}_{2SLSj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j' \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j' \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j' \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j' \mathbf{X}_j \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j' \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}_j \\ \mathbf{X}_j' \mathbf{y}_j \end{pmatrix}$$

Pro první rovnici, tedy pro modelaci míry inflace ve Velké Británii jsme dostali následující odhady parametrů

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{2SLS1} \\ \mathbf{b}_{2SLS1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.629 \\ 2.687 \\ -0.795 \\ 0.118 \end{pmatrix},$$

dostaneme tedy tvar pro první rovnici

$$I_{1t} = 0,629I_{2t} + 2,687 - 0,795HPD_{1t} + 0,118N_{1t} + \varepsilon_{1t}.$$

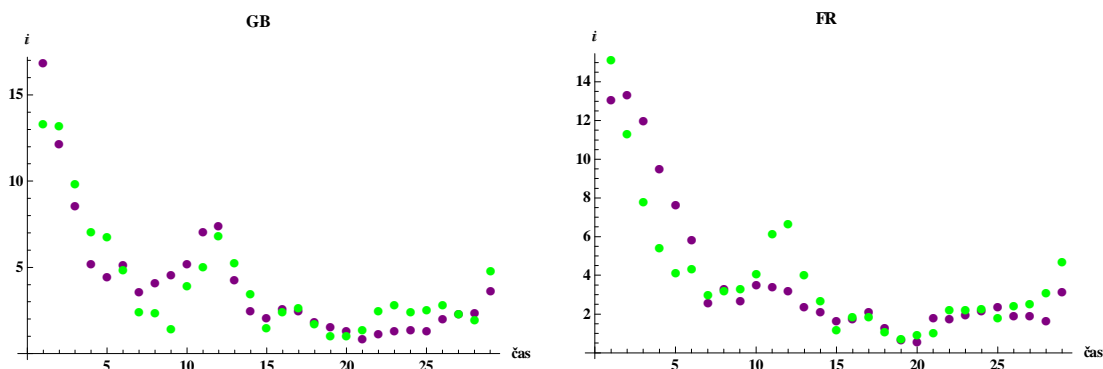
Pro data Francie jsme dostali následující výsledky

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{2SLS2} \\ \mathbf{b}_{2SLS2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.762 \\ 5.899 \\ -0.285 \\ -0.484 \end{pmatrix},$$

tedy odhadnutá rovnice má následující podobu

$$I_{2t} = 0,762I_{1t} + 5,899 - 0,285HPD_{2t} - 0,484N_{2t} + \varepsilon_{2t}.$$

Na následujících grafech jsou znázorněna původní data inflací (fialově) a příslušné proložení (zeleně). Z obou grafů je vidět, že proložení původních dat je uspokojivé.

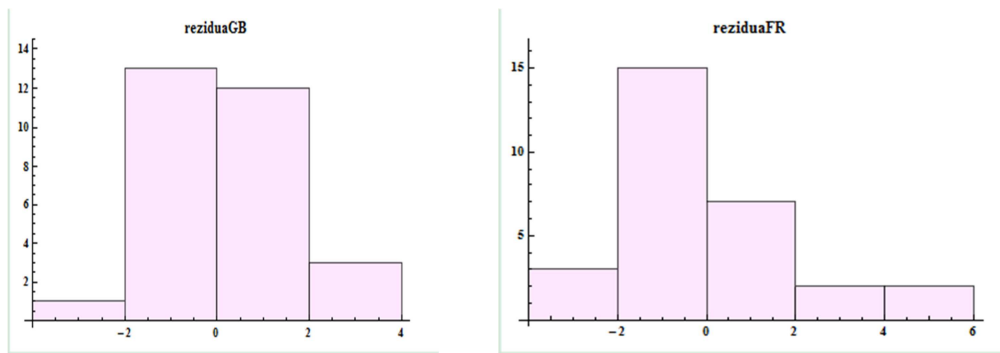


Dále byl proveden Shapiro-Wilkův test normality reziduí s následujícími výsledky.

Vektor chyb	p-hodnota	Součet čtverců chyb	Odhad střední hodnoty chyb
ε_1	0,1334	56,413	-5.766×10^{-15}
ε_2	0,0204	87,672	2.906×10^{-14}

Na hladině 1% se nezamítá normalita reziduí obou rovnic, na hladině 5% bychom normalitu reziduí druhé rovnice zamítali.

V grafech vidíme histogramy reziduí první a druhé rovnice.



Při testování nulovosti parametrů jednotlivých rovnic se zamítla nulovost parametrů γ_{12} i γ_{21} . Byl použit postup z knihy [1] pro testování nulovosti regresních parametrů.

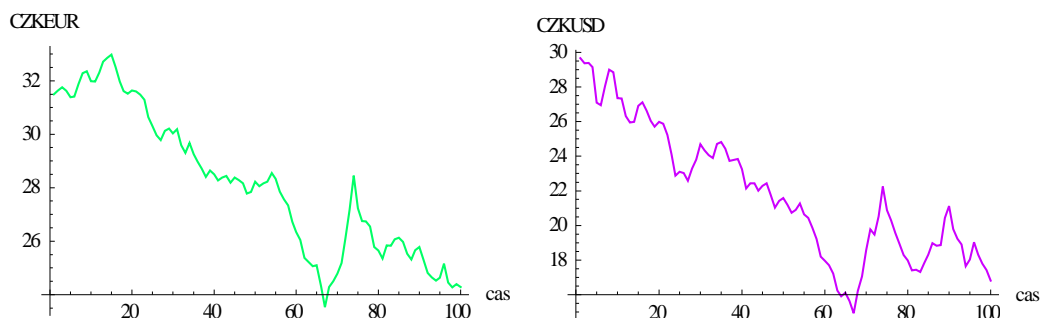
Pro γ_{12} vyšla testová statistika 5,857 a pro γ_{21} měla testová statistika hodnotu 6,206. U obou testů se statistika porovnávala s kvantilem Studentova rozdělení $t_{25}(0,95) = 1,708$.

Testování exogenity příslušných proměnných bylo tedy zbytečné. Jelikož obě endogenní proměnné na sobě oboustranně závisí, je použití modelu soustav simultánních rovnic opodstatněné.

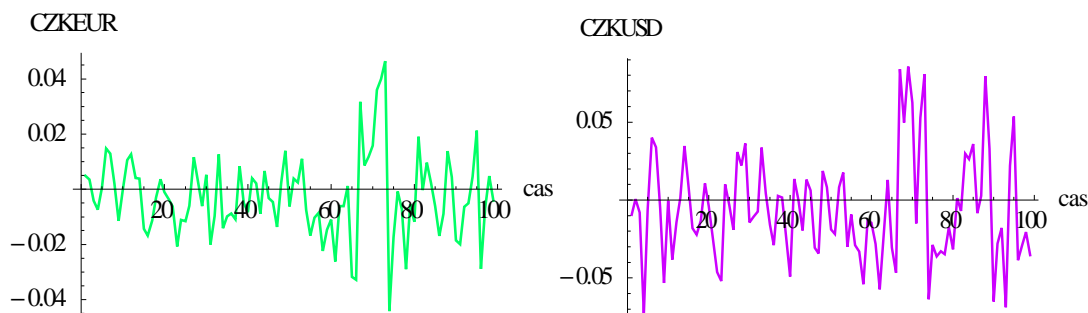
3.3. Modelování kurzů měn

Poslední zpracovanou řadou je časová řada kurzů měn české koruny k euru a americkému dolaru. Data tvoří hodnoty měsíčních průměrů od ledna 2003 do dubna 2011. Bude se tedy pracovat s dvourozměrnou časovou řadou o délce 100 pozorování. Tato data budeme modelovat pomocí vektorové autoregrese uvedené v kapitole 2.

Na následujících obrázcích jsou grafické záznamy vývoje kurzu české koruny k euru a české koruny k americkému dolaru.



Z grafů lze usoudit, že původní řady nejsou stacionární a je třeba je nejdříve vhodně transformovat. V tomto případě je vhodné použít transformaci diferencí logaritmů $\ln(y_t) - \ln(y_{t-1})$. Následující obrázky zobrazují grafy již transformovaných řad.



Mezi oběma časovými řadami je silná pozitivní korelační vazba, neboť odhadnutý korelační koeficient je roven hodnotě 0.943 u původních řad a hodnotě 0.681 u transformovaných řad.

Dále byla spočítána výběrová maticová autokorelační funkce s následujícími výsledky. Vztah mezi řadami má tedy tvar zpětné vazby.

Zpoždění k	$\rho_{11}(k)$	$\rho_{12}(k)$	$\rho_{21}(k)$	$\rho_{22}(k)$
0	1	0.681	0.681	1
1	0.263	0.153	0.244	0.285
2	-0.022	-0.101	0.042	-0.062

Konstrukce modelu VAR(p)

System Mathematica 8.0 má zabudovanou proceduru *Hannan – Rissanen*, která je založena na odhadu metodou nejmenších čtverců. Tento algoritmus nám navrhl dva nejlepší modely MA(1) a VAR(1), nicméně při porovnání těchto modelů informačním kritériem AIC (viz (21)) vyšly obě hodnoty velice podobné (-15.9 při modelu MA(1) a -15.882 při modelu VAR(1)). Proto jsme dále pracovali s modelem VAR(1), kterému je věnována teoretická část práce.

Hannan-Rissanen odhadl parametrickou matici Φ následovně

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.219 & 0.078 \\ -0.1 & 0.469 \end{pmatrix}.$$

Vyvolání zabudované procedury odhadu metodou maximální věrohodnosti (23) nám dalo stejný odhad parametrické matice Φ . Intercept φ_0 se neodhadoval, neboť transformovaná data mají nulovou střední hodnotu.

Rozepišme si odhadnutý model VAR(1) po složkách:

$$y_{1t} = 0,219 \cdot y_{1,t-1} + 0,078 \cdot y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} ,$$

$$y_{2t} = -0,1 \cdot y_{1,t-1} + 0,469 \cdot y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} .$$

Nejmenší koeficient 0,078 naznačuje nevýraznou závislost kurzu koruny k euru na zpožděném kurzu koruny k dolaru, což lze pozorovat i z hodnoty $\rho_{12}(k) = 0,153$ výběrové maticové autokorelační funkce.

Verifikace modelu

Vlastní čísla matice Φ vyšla rovna $0.272 + 0.049i$ a $0.272 - 0.049i$. Jejich absolutní hodnota 0.276 leží uvnitř jednotkového kruhu, a tedy je podmínka stacionarity splněna.

Nekorelovanost výsledného bílého šumu jsme testovali dvěma postupy.

(1) Nejdříve jsme použili m -rozměrný Q-test s kritickým oborem

$$Q_m = T^2 \sum_{k=1}^K \frac{1}{T-k} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}_k' \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_k \hat{\mathbf{C}}_0^{-1}) \geq \chi_{1-\alpha}^2(m^2(K-p)).$$

Testová statistika vyšla 55,429. Tuto hodnotu jsme porovnávali s hodnotou kvantilu chí-kvadrát rozdělení o 36-ti stupních volnosti na hladině $\alpha = 0,05$, tedy s hodnotou 50,999. Na hladině 5% zamítáme nulovou hypotézu nekorelovanosti.

Při zvolení hladiny $\alpha = 0,01$ je kvantil roven hodnotě 59,619 a tedy na hladině 1% již nekorelovanost reziduí nezamítáme.

(2) Poté jsme provedli Bartlettovu aproximaci. Jednotlivé prvky odhadnuté autokorelační funkce reziduální složky jsme porovnávali s hodnotou 0,201 (viz vzorec (25)) a pro $k = 1$ lze odhadnutá rezidua $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$ považovat za nekorelovaná. Pro $k = 2,3$ již ale vyšly některé korelace statisticky významné.

$$\boldsymbol{\rho}_1(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) = \begin{pmatrix} 0,005 & -0,012 \\ 0,022 & 0,022 \end{pmatrix},$$

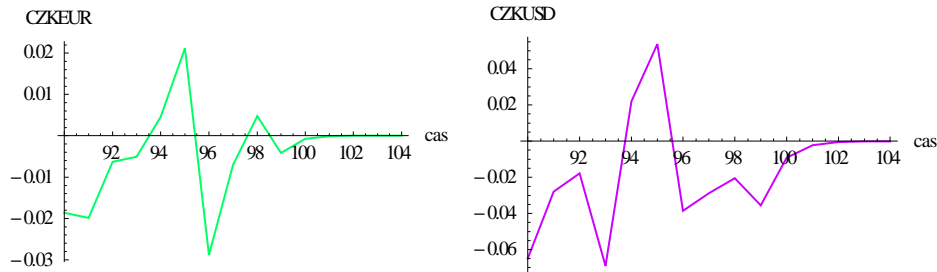
$$\boldsymbol{\rho}_2(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) = \begin{pmatrix} -0,095 & -0,023 \\ -0,217 & -0,187 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3(\hat{\varepsilon}_t) = \begin{pmatrix} 0,004 & -0,023 \\ 0,241 & 0,169 \end{pmatrix}.$$

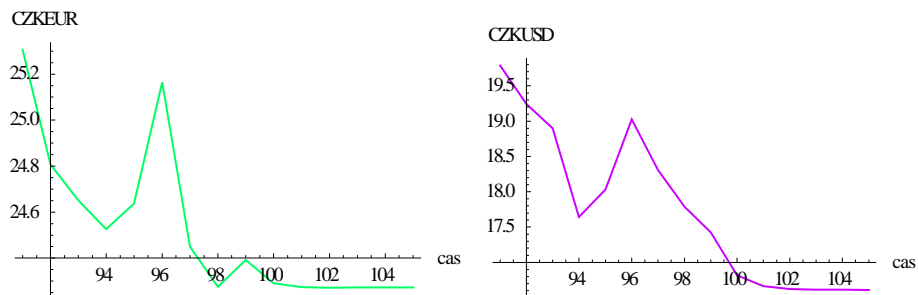
Jak je vidět, překročení hodnoty 0,201 se v obou případech objevilo v maticích $\rho_2(\hat{\varepsilon}_t)$ a $\rho_3(\hat{\varepsilon}_t)$ na pozici (2,1) a tedy lze usoudit, že korelace složky $\hat{\varepsilon}_{2t}$ se zpožděnými hodnotami $\hat{\varepsilon}_{1,t-2}$ a $\hat{\varepsilon}_{1,t-3}$ není zanedbatelná. Právě tyto korelace nejspíše způsobily vyšší testovou statistiku m -rozměrného Q-testu.

Konstrukce předpovědí

Zvolený model VAR(1) použijeme ke konstrukci pěti předpovědí do budoucna. Následující grafy znázorňují posledních 10 hodnot a 5 předpovědí transformovaných řad.



Po zpětné transformaci předpovědí jsme dostali 5 budoucích předpovědí původní časové řady. Tyto předpovědi odhadují očekávaný vývoj průměrných měsíčních kurzů CZK/EUR a CZK/USD a jsou vykresleny spolu s posledními deseti hodnotami řady. Reprezentují úroveň, kolem které by měnové kurzy měly kolísat.



Závěr

Cílem práce bylo vyložit teorii o víceroznicových soustavách a vektorové autoregresi a aplikovat ji na konkrétní finanční a ekonomická data.

V teoretické části jsme se zaměřili na odhady regresních parametrů víceroznicových soustav a na zkoumání závislosti mezi endogenními proměnnými. Také byly vyloženy základní vlastnosti vícerozměrných časových řad a model vektorové autoregrese, kde jsme se zaměřili i na teoretickou konstrukci tohoto modelu. Celá tato část tedy pojednává o základech vícerozměrné finanční analýzy.

V praktické části jsou pomocí vyložených modelů zkoumány různé časové řady. Nejprve šlo o vícerozměrnou řadu inflací, kterou jsme modelovali s využitím dalších makroekonomických ukazatelů. Z výsledků je patrné, že použité modely jsou vhodné pro analýzu těchto dat.

Druhou vícerozměrnou časovou řadou byla řada kurzů české koruny k euru a americkému dolaru za posledních 8 let. Podle výsledků lze soudit, že právě takovéto řady je výhodné modelovat pomocí vektorové autoregrese. Model VAR(1) byl použit na transformovaná data diferencí logaritmů, protože s rostoucími hodnotami rostl i jejich rozptyl, jako je tomu u většiny finančních dat. Aplikovaný model VAR(1) vykázal uspokojivé vlastnosti. Software navrhl jako alternativní možnost mnohorozměrný model VMA(1).

Veškeré výsledky byly získány pomocí softwaru Mathematica 8.0. Vytvořené spustitelné programy jsou uvedeny na CD.

Seznam použité literatury

- [1] Anděl, J.: Základy matematické statistiky. Matfyzpress, Praha, 2004.
- [2] Arlt, J.: Finanční časové řady. Grada Publishing, 2003.
- [3] Arlt, Arltová, Rubíková: Analýza ekonomických časových řad. 2002
- [4] Cipra, T.: Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii. SNTL, Praha, 1986.
- [5] Cipra, T.: Finanční ekonometrie. Ekopress, Praha, 2008.
- [6] JOHNSTON, J., DiNARDO, J.: Econometric Methods. McGrawHill, 1997.
- [7] Verbeek, M.: A Guide to Modern Econometrics. John Wiley & Sons, 2008.
- [8] Wei, W.: Time Series Analysis. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [9] Time Series Pack, Reference and User's Guide. Wolfram, Champaign, 1995.
- [10] www.cnb.cz
- [11] www.imf.org