Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Monika Balázsová

Nehladké Newtonovy metody

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Jaroslav Haslinger, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2011

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu prof. RNDr. Jaroslavu Haslingerovi, DrSc. za jeho trpelivost, ochotu a poskytnutí cenných rad při psaní této práce. Dále děkuji Mgr. Róbertu Pathóovi za pomoc s Matlabem, svému příteli Bc. Gáborovi Vavreczkymu za technickou podporu a svým rodičům za umožnění studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis

Název práce: Nehladké Newtonovy metody

Autor: Monika Balázsová

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jaroslav Haslinger, DrSc.

Abstrakt: V předložené práci modifikujeme klasickou Newtonovu metodu pro nehladké funkce. K tomuto účelu je v práci definovaná Newtonovská aproximace funkce. Pomocí ní odvodíme metody hledání kořenů pro lokálně lipschitzovské a po částech hladké funkce a následně dokážeme jejich konvergenční vlastnosti. Na závěr ukážeme použití jednoho algoritmu na zkoumání chování vetknutého nosníku namáhaného silou, jehož průhyb je zdola omezen překážkou. Na základě fyzikálního modelu vybudujeme matematický model a jeho diskretizaci. Řešení diskretizované úlohy je implementováno v programu MATLAB, výsledky jsou shrnuté do tabulek.

Klíčová slova: lokálně lipschitzovské funkce, Newtonovská aproximace, po částech hladké funkce

Title: Non-smooth Newton´s method

Author: Monika Balázsová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Jaroslav Haslinger, DrSc.

Abstract: In this thesis we generalize classical Newton's method for non-smooth equations. For this purpose we define the Newton approximation of functions. Then we introduce several methods for solving equations with locally Lipschitz and piecewise smooth functions. We prove that their local convergence rate is Q-superlinear or even Q-quadratic. At the end we apply one of the algorithms to the beam problem with the obstacle. Based on the physical model we establish mathematical model and its discretization. Finally we implement the problem in the MATLAB. Results are summarized in tables.

Keywords: locally Lipschitz functions, Newton approximation, piecewise smooth functions

Obsah

Seznam zkratek a značení

$\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ ... množina reálných čísel, množina přirozených čísel

$\mathbb{R}^n$ ... n-dimenzionální euklidovský prostor nad tělesem reálných čísel

(a,b), $[a,b]$ ... otevřený, uzavřený interval s krajními body $a, b \in \mathbb{R}$

$JG(x)$ ... jakobián funkce G v bodě x

$||.||$ ... maximová norma

$\mathbf{B}(x,\epsilon)$ ... otevřené ϵ-ové okolí bodu x

$\overline{\mathbf{B}(x,\epsilon)}$ ... uzavřené ϵ-ové okolí bodu x

$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ ... gradient funkce $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$

$\overline{xz}$ ... úsečka s krajními body $x, z \in \mathbb{R}^n$

$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ... vektor, na jehož i-tém místě je 1 a mimo nuly

$C([a,b])$ ... množina spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$

$C^k([a,b])$ ... množina spojitě diferencovatelných funkcí až do řádu k na intervalu $[a,b]$

$H^2(a,b) = \{u \in L^2(a,b) |\, D^\alpha u \in L^2(a,b) \quad \forall |\alpha| \leq 2\}$ ... Sobolevův prostor
funkcí $u \in L^2(a,b)$ takových, že pro každý multiindex α,
$|\alpha| \leq 2$ náleží slabá parciální derivace $D^\alpha u$ do $L^2(a,b)$.

$H_0^2(a,b) = \{u \in H^2(a,b) |\, u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0\}$

$\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ... matice typu $n \times m$

$\mathbb{A}_i$ ... i-tý řádek matice $\mathbb{A}$

$\mathbf{U}, \mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi}$ ... vektory příslušného rozměru

Úvod

Pro hledání kořenů funkce $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ existují různé numerické metody. Mezi ně patří klasická Newtonova metoda, která je také známá pod názvem metoda tečen. Její idea spočívá v linearizaci funkce $f(x)$ v okolí bodu x^0 pomocí Taylorovy řady. K tomu je ale potřebné, aby funkce byla spojitá v daném bodě a aby v tomto bodě existovala nenulová první derivace. Tato linarizace je dána vztahem

$$\bar{f}(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) \quad x \in \mathbf{B}(x^0, \delta),\ \delta > 0.$$

Místo $f(x) = 0$ budeme řešit úlohu $\bar{f}(x) = 0$, která má řešení

$$\bar{x} = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}.$$

Newtonova metoda tedy začíná odhadem kořene, tím, že zvolíme počáteční přiblížení x^0. V tomto bodě sestrojíme tečnu ke grafu funkce f a průsečík této tečny s x-ovou osou použijeme jako další odhad kořene:

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}.$$

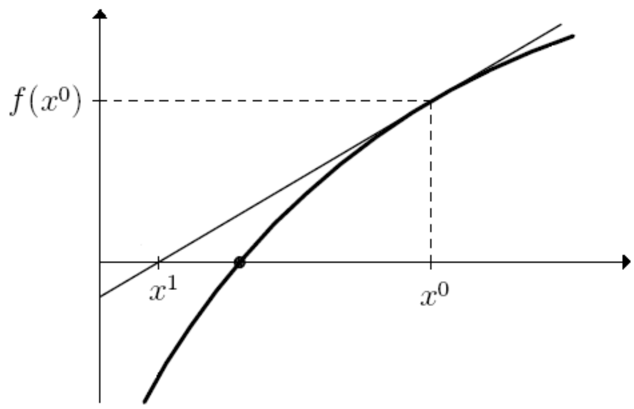
Z aproximace x^1 lze dostat obdobně

$$x^2 = x^1 - \frac{f(x^1)}{f'(x^1)}$$

a tak dál, dokud nezískáme v k-tém iteraci řešení $\bar{f}(x^k) = 0$, které už může být blízko řešení původní úlohy. První krok metody je graficky znázorněn na Obrázku 1.
Výhoda Newtonovy metody je její rychlá konvergence, neboť je to metoda 2. řádu v případě, že kořen má násobnost 1. K tomu ale je nutné, aby počáteční aproximace x^0 ležela v dostatečně blízkém okolí kořene funkce f. Pro hladkou funkci však takové okolí vždy existuje.
Nevýhodou této metody je, že není globálně konvergentní.

Vzniká přirozená otázka, jak by bylo možné klasickou Newtonovu metodu modifikovat nebo zobecnit pro nehladké, ne všude diferencovatelné funkce tak, aby se zachovala rychlá lokální konvergence.

Práce je rozdělená do dvou částí. V první kapitole se seznámíme se čtyřmi algoritmy pro hledání kořene lokálně lipschitzovské resp. po částech lineární funkce, které vznikly modifikací klasické Newtonovy metody. Klíčový krok pro jejich definici bude pojem Newtonovská aproximace funkce. Následně dokážeme konvergenční vlastnosti těchto algoritmů. Tato kapitola má rešeršní charakter, jejím jediným zdrojem byla monografie [1].
Druhá kapitola je věnována použití Algoritmu 4 k numerickému řešení variační nerovnice, která popisuje chování nosníku namáhaného silou, jehož průhyb je zdola omezen překážkou. Algoritmus 4 je implementován v programu Matlab, výsledky jsou shrnuté do tabulek a některé zajímavější situace jsou znázorněny na obrázcích.



Obrázek 1: První krok klasické Newtonovy metody

1. Lokální nehladké Newtonovy metody

Nejprve budeme hledat řešení systému nehladkých rovnic tvaru

$$G(x) = 0, \tag{1.1}$$

kde $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lokálně lipschitzovská funkce na otevřené množině Ω. Podobně jako v klasické Newtonově metodě pro funkci jedné proměnné v případě, že funkce G je spojitě diferencovatelná v Ω, je přirozenou aproximací G její linearizace ve stávající iteraci x^k:

$$G(x^k) + JG(x^k)(x - x^k), \tag{1.2}$$

kde $JG(x^k)$ značí jakobián funkce G v bodě x^k. Následující iteraci x^{k+1} vypočítáme jako řešení úlohy

$$G(x^k) + JG(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0. \tag{1.3}$$

Přepišme (1.3) dosazením $d := x^{k+1} - x^k$ na tvar

$$G(x^k) + JG(x^k)d = 0, \tag{1.4}$$

jejíž řešení označíme d^k. Iteraci x^{k+1} pak získáme ze vztahu $x^{k+1} = d^k + x^k$. Poznamenejme, že $JG(x^k)d$ dobře aproximuje rozdíl $G(x^k + d) - G(x^k)$ pro malé d, neboť platí:

$$\lim_{d \to 0} \frac{||JG(x^k)d - G(x^k + d) + G(x^k)||}{||d||} = 0. \tag{1.5}$$

Problém nastává, pokud G není diferencovatelné zobrazení a tedy jakobián JG ne všude existuje. Proto se pro naše další účely bude hodit vztah, který neobsahuje explicite jakobián JG. Uvažujme množinu $\mathcal{A}(x)$ těch funkcí $A(x, .)$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, pro které $A(x, d)$ aproximuje rozdíl $G(x + d) - G(x)$ v okolí $d = 0$. Využitím myšlenky (1.5) pak zobecníme (1.4) tím, že budeme předpokládat, že Newtonova iterační rovnice je dána vztahem

$$G(x^k) + A(x^k, d) = 0, \tag{1.6}$$

kde $G(x^k) + A(x^k, d)$ aproximuje $G(x^k + d)$ pro malé $d, A(x^k, .) \in \mathcal{A}(x^k)$.
Protože o použitelnosti metod nejvíc rozhoduje rychlost konvergence, uvedeme definici, která shrnuje základní typy řádu konvergence:

Definice 1. *Řekneme, že posloupnost* $\{x^k\} \in \mathbb{R}^n$ *konverguje k bodu* $x^* \in \mathbb{R}^n$

- *Q-lineárně, jestliže*
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{||x^{k+1} - x^*||}{||x^k - x^*||} < \infty$$
- *Q-superlineárně, jestliže*
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{||x^{k+1} - x^*||}{||x^k - x^*||} = 0$$
- *Q-kvadraticky, jestliže*
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{||x^{k+1} - x^*||}{||x^k - x^*||^2} < \infty,$$

přitom předpokládáme, že $x^k \neq x^* \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

1.1 Newtonovská aproximace funkcí

Pro vybudování aparátu, který nám umožní zkoumat lokální nehladké Newtonovy metody, budeme potřebovat, aby funkce $A(x,.)$ patřící do $\mathcal{A}(x)$ měly nějaké rozumné vlastnosti. Následující definice bude pro nás základním kamenem a zachycuje vlastnosti, které od nich budeme požadovat.

Definice 2. *Nechť* $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *(kde* Ω *je otevřená množina) je lokálně lipschitzovská funkce. Řekneme, že* G *má* **Newtonovskou aproximaci** *v bodě* $\bar{x} \in \Omega$*, pokud existuje okolí* $\Omega' \subseteq \Omega$, $\bar{x} \in \Omega'$ *a funkce* $\triangle : (0,\infty) \to [0,\infty)$ *s vlastností*
$$\lim_{t\to 0_+} \triangle(t) = 0$$
takové, že pro každý bod $x \in \Omega'$ *existuje množina* $\mathcal{A}(x)$ *zobrazení z* $\mathbb{R}^n$ *do* $\mathbb{R}^m$ *mající následující dvě vlastnosti:*

a.) $A(x,0) = 0$ *pro* $\forall\ A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$, $\forall x \in \Omega'$, $x \neq \bar{x}$;
b.) *pro* $\forall\ A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$, $\forall x \in \Omega'$, $x \neq \bar{x}$ *platí*
$$\frac{||G(x) + A(x, \bar{x} - x) - G(\bar{x})||}{||x - \bar{x}||} \leq \triangle(||x - \bar{x}||). \tag{1.7}$$

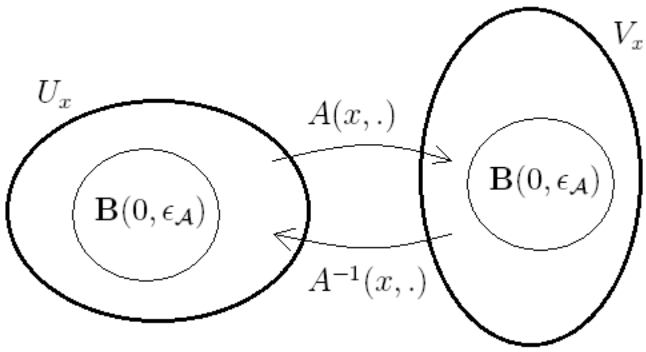
Pak $\mathcal{A}$ *nazveme* **systémem Newtonovských aproximací** *funkce* G *v* $\bar{x}$*. Pokud místo b.) požadujeme silnější požadavek a sice*

b'.) *existuje konstanta* $L' \geq 0$ *taková, že pro* $\forall A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$, $\forall x \in \Omega'$, $x \neq \bar{x}$ *platí*
$$\frac{||G(x) + A(x, \bar{x} - x) - G(\bar{x})||}{||x - \bar{x}||^2} \leq L', \tag{1.8}$$

pak řekneme, že G má **silnou Newtonovskou aproximaci** *v $\bar{x}$ a $\mathcal{A}$ nazveme* **systémem silných Newtonovských aproximací** *funkce G v $\bar{x}$.*
Pokud je ještě splněná dodatečná podmínka:

c.) *nechť $m = n$ a $\mathcal{A}$ je množina stejnoměrně lipschitzovských homeomorfismů na Ω', to jest $\exists\ L_{\mathcal{A}} \geq 0, \exists \epsilon_{\mathcal{A}} \geq 0$ takové, že pro $\forall\ A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$, $\forall x \in \Omega'$, $x \neq \bar{x}$ existují dvě otevřené množiny U_x, V_x, obě obsahující $\mathbf{B}(0, \epsilon_{\mathcal{A}})$ tak, že $A(x,.)$ je lipschitzovsky homeomorfní zobrazení U_x na V_x, přičemž inverzní zobrazení k zúženému zobrazení $A(x,.) \mid U_x$ má modul lipschitzovskosti $L_{\mathcal{A}}$ (situace je znázorněná na Obrázku 1.1),*

pak řekneme, že **silná Newtonovská aproximace je nesingulární***, a že* **systém silných Newtonovských aproximací $\mathcal{A}$ je nesingulární**.



Obrázek 1.1: Situace z předpokladu c.) Definice 2

Několik poznámek k definici:

- Důležité je si uvědomit, že jediná vlastnost, kterou od funkce $\triangle$ požadujeme, je její limitní vlastnost. Tvar této funkce a její další vlastnosti nás nezajímají.
- Předpoklad a.) neříká nic jiného, než že se model (1.6) shoduje s $G(x)$ pro $d = 0$.
- Předpoklady b.) a b'.) můžeme ekvivalentně psát v následujícím tvaru:
$$\lim_{x \to \bar{x},\ A(x,.) \in \mathcal{A}(x)} \frac{||G(x) + A(x, \bar{x} - x) - G(\bar{x})||}{||x - \bar{x}||} = 0,$$
resp.
$$\limsup_{x \to \bar{x},\ A(x,.) \in \mathcal{A}(x)} \frac{||G(x) + A(x, \bar{x} - x) - G(\bar{x})||}{||x - \bar{x}||^2} < \infty.$$
Tyto předpoklady říkají, že funkce $G(x) + A(x, \bar{x} - x)$ dobře aproximuje hodnotu $G(\bar{x})$. Ve skutečnosti to ale neznamená, že dobře aproximuje $G(x)$ na celém okolí daného bodu $\bar{x}$.
- Požadavek c.) můžeme použít jen pokud $m = n$, ale definice Newtonovské aproximace má smysl i pro případ $m \neq n$. Většinou nás ale bude zajímat právě případ $m = n$. Význam c.) spočívá v tom, že zaručuje například řešitelnost rovnice (1.6) na okolí $\bar{x}$.

- Inverzní zobrazení k zúženému zobrazení $A(x,.) \mid U_x$ budeme v dalším pro jednoduchost značit $A^{-1}(x,.)$. Jeho definičním oborem bude V_x a oborem hodnot U_x z části c.) Definice 2.

1.2 Nehladká Newtonova metoda

Definice Newtonovských aproximací nám umožní rozšířit klasickou Newtonovu metodu pro řešení nehladké rovnice. Nehladká Newtonova metoda začíná stejně jako klasická: předpokládáme, že máme daný počáteční bod $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Pomocí tohoto bodu vypočítáme první iteraci a pokračujeme dále, dokud nedostaneme k-tou iteraci, pro kterou platí $G(x^k) \approx 0$. Formální rozdíl mezi oběma metodami spočívá v iterační rovnici, která v případě nehladké Newtonovy metody může mít více řešení, jak uvidíme z následujícího schématu metody.

Algoritmus 1:

Dáno: $x^0 \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0$
1.krok: polož $k = 0$
2.krok: pokud $G(x^k) = 0$, pak algoritmus končí
3.krok: zvol nějaký prvek $A(x^k,.) \in \mathcal{A}(x^k)$ a nalezni vektor $d^k \in \mathbf{B}(0, \epsilon)$ tak, že platí

$$G(x^k) + A(x^k, d^k) = 0 \tag{1.9}$$

4.krok: polož $x^{k+1} = x^k + d^k$, $k \leftarrow k + 1$ a jdi na 2.krok

Ukončovací kritérium $G(x^k) = 0$ ve 2. kroku je ideální požadavek, který v praxi téměř nikdy nenastane. Většinou místo toho používáme podmínku $|G(x^k)| \leq \mu$, kde $\mu > 0$ je předem daná tolerance. Další nedostatek Algoritmu 1 spočívá v rovnici (1.9), kterou je zbytečné řešit přesně, proto budeme tuto metodu v dalším modifikovat. Předtím ale ukážeme, že Nehladká Newtonova metoda za určitých předpokladů zachovává rychlou lokální konvergenci klasické Newtonovy metody.

Věta 1. *Nechť $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (kde Ω je otevřená množina) je lokálně lipschitzovská funkce na okolí $\tilde{x} \in \Omega$ a nechť platí $G(\tilde{x}) = 0$. Předpokládejme, že G má nesingulární Newtonovskou aproximaci $\mathcal{A}$ v $\tilde{x}$. Pak pro $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_{\mathcal{A}}]$ existuje okolí $\mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$ takové, že pokud $x^0 \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$, Algoritmus 1 generuje jedinou posloupnost $\{x^k\}$, která konverguje Q-superlineárně k $\tilde{x}$. Navíc pokud Newtonovská aproximace $\mathcal{A}$ je silná, řád konvergence je Q-kvadratický.*

Důkaz. Zvolme pevně $\epsilon \in (0, \epsilon_{\mathcal{A}}]$. Poznamenejme, že $\epsilon_{\mathcal{A}}$ je stejné jako v c.) Definice 2. Podle předpokladu G má nesingulární Newtonovskou aproximaci, tedy podle vlastnosti b.) Definice 2 lze najít $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$ a pro $\forall A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$ platí

$$||G(x) + A(x, \tilde{x} - x)|| = ||G(x) + A(x, \tilde{x} - x) - G(\tilde{x})|| \leq \frac{1}{2L_{\mathcal{A}}}||x - \tilde{x}||, \tag{1.10}$$

kde $L_{\mathcal{A}}$ je lipschitzova konstanta z podmínky c.) Definice 2. Protože G je lokálně lipschitzovská na okolí $\tilde{x} \in \Omega$ s modulem lipschitzovskosti L, můžeme zvolit $0 < \delta < \min\left\{\frac{2\epsilon}{3}, \frac{\epsilon}{L}\right\}$ tak, že pro $\forall x \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$ platí

$$||G(x)|| = ||G(x) - G(\tilde{x})|| \leq L||x - \tilde{x}|| \leq L\delta < \epsilon. \tag{1.11}$$

Jestliže $x^k \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$, pak (1.11) zaručuje, že iterační rovnice (1.9) má jediné řešení na okolí U_{x^k}, neboť jsme předpokládali, že G má nesingulární Newtonovskou aproximaci v $\bar{x}$. Nyní vyjádříme toto řešení d^k z rovnice (1.9):

$$d^k \;=\; A^{-1}(x^k, -G(x^k)). \tag{1.12}$$

Dále budeme potřebovat následující vztah:

$$x^k - \tilde{x} = -(\tilde{x} - x^k) = -A^{-1}(x^k, A(x^k, \tilde{x} - x^k)). \tag{1.13}$$

K tomu, abychom dokázali, že $x^k \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta) \quad \forall k \in \mathbb{N}$, použijeme matematickou indukci:

- Pro počáteční iteraci $x^0 \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$ platí $||x^0 - \tilde{x}|| < \delta$ dle předpokladu.
- V indukčním kroku předpokládejme, že $||x^k - \tilde{x}|| < \delta$.
- Naším cílem bude dokázat, že $||x^{k+1} - \tilde{x}|| < \delta$. Platí, že

$$\begin{aligned} ||x^{k+1} - \tilde{x}|| &= ||x^k + d^k - \tilde{x}|| \overset{(1.12)}{=} ||x^k + A^{-1}(x^k, -G(x^k)) - \tilde{x}|| \overset{(1.13)}{=} \\ &= ||A^{-1}(x^k, -G(x^k)) - A^{-1}(x^k, A(x^k, \tilde{x} - x^k))|| \overset{c.)}{\leq} \\ &\leq L_{\mathcal{A}}\,||G(x^k) + A(x^k, \tilde{x} - x^k)|| \overset{(1.10)}{\leq} \\ &\leq \frac{1}{2}||x^k - \tilde{x}|| < \frac{1}{2}\delta \end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že pokud $x^0 \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$, pak každý bod x^k definovaný Algoritmem 1 patří do $\mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$. Odtud plyne

$$||x^{k+1} - x^k|| \leq ||x^{k+1} - \tilde{x}|| + ||\tilde{x} - x^k||| < \frac{3}{2}\delta < \epsilon$$

Tedy $d^k = x^{k+1} - x^k \in \mathbf{B}(0, \epsilon)$ a navíc existuje jediný d^k řešící (1.9). Proto $\{x^k\}$ je jediná. Dále platí, že

$$||x^{k+1} - \tilde{x}|| \leq L_{\mathcal{A}}||G(x^k) + A(x^k, \tilde{x} - x^k)|| \overset{(1.7)}{\leq} L_{\mathcal{A}}||x^k - \tilde{x}||\,\triangle(||x^k - \tilde{x}||),$$

z čehož plyne Q-superlineární konvergence. Pokud je splněno (1.8) místo (1.7), pak se dá podobně dokázat, že řád konvergence je Q-kvadratický. $\square$

Nyní ukážeme, že pokud G je spojitě diferencovatelná na okolí řešení $\tilde{x}$ a $JG(\tilde{x})$ je nesingulární, pak nehladká Newtonova metoda se redukuje na klasickou Newtonovu metodu, která splňuje předpoklady Věty 1. Poznamenejme, že jestliže G je spojitě diferencovatelná na okolí $\Omega, \tilde{x} \in \Omega$, pak jakobián $JG(x)$ existuje pro $\forall x \in \Omega$. Množina $\mathcal{A}(x)$ se sestává z jediného prvku: $\mathcal{A}(x) = \{A(x, d) \equiv JG(x)d\}$. Jak jsme už zmínili výše, potřebujeme ověřit předpoklady Věty 1, tj. ukázat, že G má nesingulární Newtonovskou aproximaci reprezentovanou právě touto $\mathcal{A}(x)$. Ověříme proto vlastnosti a.), b.), b'.), c.) Definice 2, za předpokladu, že G je spojitě diferencovatelná na okolí $\tilde{x}$.

- vlastnost a.) je triviálně splněna.
- protože $JG(\tilde{x})$ je nesingulární, existuje okolí Ω bodu $\tilde{x}$ a konstanta $L > 0$ tak, že $||JG(x)|| \leq L$ a $||JG^{-1}(x)|| \leq L$ pro $\forall x \in \Omega$. Je zřejmé, že pro $\forall x^k \in \Omega$ jsou $A(x^k, .)$ a $A^{-1}(x^k, .)$ globálně lipschitzovsky homeomorfní se společnou lipschitzovskou konstnatou L. Odtud vlastnost c.) v Definici 2 je zřejmě splněna.
- b.),b'.) ověříme tím, že dokážeme obecnější tvrzení:

  Věta 2. *Nechť $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelná funkce na okolí Ω bodu $\tilde{x}$. Potom existuje neklesající funkce $\triangle : (0, \infty) \to [0, \infty)$ s vlastností*

  $$\lim_{t \to 0} \triangle(t) = 0,$$

  pro kterou platí

  $$||G(x) + JG(x)(z - x) - G(z)|| \leq ||x - z||\triangle(||x - z||) \quad pro \quad \forall x, z \in \Omega.$$

  Navíc, pokud JG je lipschitzovsky spojitý na okolí $\tilde{x}$, potom existuje okolí $\Omega' \subseteq \Omega$ bodu $\tilde{x}$ a konstanta $L' > 0$ tak, že platí

  $$||G(x) + JG(x)(z - x) - G(z)|| \leq L'||x - z||^2 \quad pro \quad \forall x, z \in \Omega'.$$

  Důkaz. Pro dané $x, z \in \Omega$ a libovolnou složku $G_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ z věty o střední hodnotě plyne

  $$G_j(x) = G_j(z) + \nabla G_j(y^j(x))^T(x - z),$$

  kde $y^j(x) \in \overline{xz}$. Odtud

  $$\begin{aligned} |G_j(x) - G_j(z) - \nabla G_j(x)^T(x - z)| &= |(\nabla G_j(y^j(x)) - \nabla G_j(x))^T(x - z)| \leq \\ &\leq ||(\nabla G_j(y^j(x)) - \nabla G_j(x))^T||\,||(x - z)||. \end{aligned}$$

  Protože $G_j \in C^1(\Omega)$, máme

  $$\lim_{x \to z} ||\nabla G_j(y^j(x)) - \nabla G_j(x)|| = 0.$$

  Tudíž stačí položit

  $$\triangle(t) := \sup_{x,y \in \Omega, ||x-y|| \leq t} ||\nabla G_j(y) - \nabla G_j(x)||.$$

  Pro libovolnou složku G_j tedy platí

  $$|G_j(x) - G_j(z) - \nabla G_j(x)^T(x - z)| \leq ||x - z||\triangle(||x - z||).$$

  Protože

  $$||G(x) + JG(x)(z - x) - G(z)|| = \max_{j=1,\ldots,n} |G_j(x) - G_j(z) - \nabla G_j(x)^T(x - z)|,$$

  dostaneme

  $$||G(x) + JG(x)(z - x) - G(z)|| \leq ||x - z||\triangle(||x - z||).$$

Pokud gradient ∇G_j je lipschitzovský na okolí $\tilde{x}$ s konstantou $L_j > 0$, potom:

$$||\nabla G_j(y^j(x)) - \nabla G_j(x)|| \leq L_j||y^j(x) - x|| \leq L_j||x - z||,$$

odkud

$$|G_j(x) + \nabla G_j(x)^T(x - z) - G_j(z)| \leq L_j||x - z||^2,$$

pro libovolnou složku G_j. Obdobně

$$\begin{aligned} ||G(x) + JG(x)(z - x) - G(z)|| &= \max_{j=1,\dots,n} |G_j(x) - G_j(z) - \nabla G_j(x)^T(x - z)| \\ &\leq L'||x - z||^2, \end{aligned}$$

odtud máme dokázán i druhý vztah pro

$$L' := \max_{j=1,\dots,n} L_j.$$

□

Ověřili jsme, že pokud funkce G je spojitě diferencovatelná na okolí bodu $\tilde{x}$, $G(\tilde{x}) = 0$ a $JG(\tilde{x})$ je nesingulární, pak G má nesingulární Newtonovskou aproximaci. To znamená, z Věty 1 dostaneme známé konvergenční výsledky klasické Newtonovy metody.

1.3 Nepřesná nehladká Newtonova metoda

Jak jsme už zmínili v předchozí části, je časově velmi náročné a zbytečné řešit Newtonovu iterační rovnici (1.9) přesně, neboť v praxi většinou pracujeme s nějakou předem danou přesností. To samé platí i když model $A(x,.)$ je lineární, ale moc velký. Proto nehladkou Newtonovu metodu modifikujeme a ukážeme, že nově zavedená metoda bude mít stejné konvergenční vlastnosti jako ta původní.

Algoritmus 2:

Dáno: $x^0 \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0$ a posloupnost nezáporných čísel $\{\eta_k\}$
1.krok: polož $k = 0$
2.krok: pokud $G(x^k) = 0$, pak algoritmus končí
3.krok: zvol $A(x^k,.) \in \mathcal{A}(x)$ a nalezni vektor $d^k \in \mathbf{B}(0,\epsilon)$ tak, že platí

$$G(x^k) + A(x^k, d^k) = r^k, \tag{1.14}$$

kde r^k splňuje

$$||r^k|| \leq \eta_k \, ||G(x^k)|| \tag{1.15}$$

4.krok: polož $x^{k+1} = x^k + d^k$, $k \leftarrow k+1$ a jdi na 2.krok

Jak patrno, Nepřesná nehladká Newtonova metoda má podobný tvar jako předchozí přesná metoda až na to, že místo (1.9) řešíme (1.14) s pravou stranou splňující (1.15). Na první pohled není jasné, proč by měl takový vektor $d^k \in \mathbf{B}(0,\epsilon)$ existovat. Proto nejprve uvedeme a dokážeme lemma, které garantuje existenci řešení d^k v 3. kroku Algoritmu 2 pro každý r^k splňující (1.15).

Lemma 1. *Nechť $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (kde Ω je otevřená množina) je lokálně lipschitzovská funkce na okolí $\tilde{x} \in \Omega$ a nechť platí $G(\tilde{x}) = 0$. Předpokládejme, že G má nesingulární Newtonovskou aproximaci $\mathcal{A}$ v $\tilde{x}$. Pak pro $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_{\mathcal{A}}]$ $\forall \bar{\eta} > 0$ $\exists \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$ takové, že $\forall x^k \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$ $\forall \eta_k \in (0, \bar{\eta}]$ a pro $\forall r^k$ splňující (1.15), má rovnice (1.14) jediné řešení $d^k \in \mathbf{B}(0,\epsilon)$.*

Důkaz. Nejprve využijeme lokální lipschitzovskost funkce G. Z podmínky c.) Definice 2 tedy můžeme zvolit $\delta > 0$ tak, že pro $\forall x^k \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$ platí

$$\max\{1, L_{\mathcal{A}}\}(1 + \bar{\eta})||G(x^k)|| < \epsilon. \tag{1.16}$$

Dále ze stejné podmínky víme, že $A(x^k,.)$ je lipschitzovský homeomorfizmus na $\mathbf{B}(0,\epsilon)$ s modulem lipschitzovskosti $L_{\mathcal{A}}$ inverzního zobrazení k $A(x^k,.)|\mathbf{B}(0,\epsilon)$.
Z (1.14) máme

$$A(x^k, d^k) = r^k - G(x^k). \tag{1.17}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} ||r^k - G(x^k)|| &\leq ||r^k|| + ||G(x^k)|| \overset{(1.15)}{\leq} ||\eta_k(G(x^k))|| + ||G(x^k)|| \leq \\ &\leq ||\bar{\eta}(G(x^k))|| + ||G(x^k)|| \leq (1 + \bar{\eta})||G(x^k)|| \overset{(1.16)}{\leq} \epsilon. \end{aligned}$$

Rovnice (1.17) má tedy řešení d^k splňující

$$||d^k|| \leq L_{\mathcal{A}}(1+\bar{\eta})||G(x^k)|| \overset{(1.16)}{\leq} \epsilon,$$

odkud plyne, že rovnice (1.14) má jediné řešení $d^k \in \mathbf{B}(0,\epsilon)$. $\square$

V následující větě ukážeme konvergenční vlastnosti Algoritmu 2.

Věta 3. *Nechť $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (kde Ω je otevřená množina) je lokálně lipschitzovská funkce na okolí $\tilde{x} \in \Omega$ a nechť platí $G(\tilde{x}) = 0$. Předpokládejme, že G má nesingulární Newtonovskou aproximaci $\mathcal{A}$ v $\tilde{x}$. Potom $\exists\bar{\eta} > 0$ takové, že pokud $\eta_k \leq \bar{\eta}$ pro $\forall k$, potom pro $\forall\epsilon \in (0, \epsilon_{\mathcal{A}}]$ existuje okolí $\mathbf{B}(\tilde{x},\delta)$ tak, že pokud $x^0 \in \mathbf{B}(\tilde{x},\delta)$, potom nepřesná Newtonova metoda je dobře definovaná a každá posloupnost $\{x^k\}$ generovaná Algoritmem 2 konverguje Q-lineárně k $\tilde{x}$. Dále pokud $\{\eta_k\} \to 0$, řád konvergence $\{x^k\}$ je Q-superlineární. Konečně pokud Newtonova aproximace $\mathcal{A}$ je silná a pro nějaké $\tilde{\eta} > 0$ platí $\eta_k \leq \tilde{\eta}||G(x^k)||$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$, pak řád konvergence je Q-kvadratický.*

Důkaz. Podle definice Newtonovské aproximace existuje funkce $\triangle$ s vlastností

$$\lim_{t\to 0_+} \triangle(t) = 0$$

taková, že podle b.) Definice 2, pro každý $x \in \mathbf{B}(\tilde{x},\delta)$ a $A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$ platí

$$\begin{aligned} ||G(x) + A(x,\tilde{x}-x) - G(\tilde{x})|| &= ||G(x) + A(x,\tilde{x}-x)|| \\ &\leq ||x-\tilde{x}||\,\triangle(||x-\tilde{x}||). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Nechť je dané $\epsilon \in (0,\epsilon_{\mathcal{A}}]$ a předpokládejme, že $\eta_k \leq \bar{\eta}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Můžeme zvolit $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x^k \in \mathbf{B}(\tilde{x},\delta)$ platí

$$\begin{aligned} ||A(x^k,d^k)|| &= ||-G(x^k)+r^k|| \overset{(1.15)}{\leq} ||G(x^k)|| + \eta_k||G(x^k)|| \leq \\ &\leq (1+\bar{\eta})\,||G(x^k)|| = (1+\bar{\eta})\,||G(x^k)-G(\tilde{x})|| \leq \\ &\leq (1+\bar{\eta})\,L\,||x^k-\tilde{x}|| \leq (1+\bar{\eta})\,L\delta < \epsilon, \end{aligned} \tag{1.19}$$

kde L je lipschitzova konstanta funkce G na okolí $\tilde{x}$. Dále důkaz provedeme indukcí. Podle předpokladu věty $x^0 \in \mathbf{B}(\tilde{x},\delta)$. Jako indukční krok předpokládejme, že $x^k \in \mathbf{B}(\tilde{x},\delta)$ a chceme ukázat, že $x^{k+1} \in \mathbf{B}(\tilde{x},\delta)$. Poznamenejme, že funkce $A^{-1}(x^k,.)$ je stejnoměrně lipschitzovský homeomorfismus s konstantou $L_{\mathcal{A}}$. Máme tedy

$$\begin{aligned} ||x^{k+1}-\tilde{x}|| &= ||x^k - \tilde{x} + A^{-1}(x^k, -G(x^k)+r^k)|| = \\ &= ||A^{-1}(x^k,-G(x^k)+r^k) - A^{-1}(x^k, A(x^k,\tilde{x}-x^k))|| \leq \\ &\leq L_{\mathcal{A}}\,||G(x^k)+A(x^k,\tilde{x}-x^k)-r^k|| \overset{(1.18)}{\leq} \\ &\leq L_{\mathcal{A}}\,[\ ||x^k-\tilde{x}||\,\triangle(||x^k-\tilde{x}||) + ||r^k||\ ] \overset{(1.15)}{\leq} \\ &\leq L_{\mathcal{A}}\,[\ ||x^k-\tilde{x}||\,\triangle(||x^k-\tilde{x}||) + \eta_k||G(x^k)||\ ] \leq \\ &\leq L_{\mathcal{A}}\,[\ ||x^k-\tilde{x}||\,\triangle(||x^k-\tilde{x}||) + \bar{\eta}L||x^k-\tilde{x}||\ ] = \\ &= L_{\mathcal{A}}\,||x^k-\tilde{x}||\,(\triangle(||x^k-\tilde{x}||) + \bar{\eta}L\ ), \end{aligned} \tag{1.20}$$

kde jsme využili v poslední nerovnosti toho, že $\eta_k \leq \bar{\eta}$ a že

$$||G(x^k)|| = ||G(x^k) - G(\tilde{x})|| \leq L||x^k - \tilde{x}||.$$

Je zřejmé, že pokud $\bar{\eta}$ a δ jsou zvoleny dostatečně malé, pak

$$||x^{k+1} - \tilde{x}|| \leq \frac{1}{2}||x^k - \tilde{x}||,$$

odkud indukcí plyne, že $\{x^k\}$ konverguje Q-lineárně k $\tilde{x}$.
Pokud $\{\eta_k\} \to 0$, pak platí:

$$||x^{k+1} - \tilde{x}|| \leq L_{\mathcal{A}}[\ ||x^k - \tilde{x}||\triangle(||x^k - \tilde{x}||) + \eta_k||G(x^k)||\ ],$$

to jest řád konvergence je Q-superlineární.
Konečně nechť $\mathcal{A}$ je silná aproximace v $\tilde{x}$ a $\eta_k \leq \tilde{\eta}||G(x^k)||$ pro nějaké $\tilde{\eta} > 0$. V tomto případě

$$\begin{aligned} ||x^{k+1} - \tilde{x}|| &\leq L_{\mathcal{A}}[\ ||x^k - \tilde{x}||\triangle(||x^k - \tilde{x}||) + \eta_k||G(x^k)||\ ] \leq \\ &\leq L_{\mathcal{A}}[\ L'||x^k - \tilde{x}||^2 + \tilde{\eta}||G(x^k)||^2\ ] \leq \\ &\leq L_{\mathcal{A}}[\ L'||x^k - \tilde{x}||^2 + \tilde{\eta}L^2||x^k - \tilde{x}||^2\ ], \end{aligned}$$

z čehož plyne Q-kvadratický řád konvergence. □

Následující věta ukazuje, že za určitých předpokladů máme lokální jednoznačnost řešení rovnice $G(\tilde{x}) = 0$.

Věta 4. *Nechť $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (kde Ω je otevřená) je lokálně lipschitzovsky spojitá v bodě $\tilde{x} \in \Omega$ a platí $G(\tilde{x}) = 0$. Nechť G má Newtonovu aproximaci $\mathcal{A}$ v bodě $\tilde{x}$, pro kterou $\exists c > 0$ a existuje okolí $\mathcal{N}$ bodu $\tilde{x}$, a okolí $\mathcal{U}$ bodu 0 takové, že pro $\forall x \in \mathcal{N} \quad \exists A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$ splňující*

$$||A(x,d)|| \geq c||d|| \quad \forall d \in \mathcal{U}.$$

Pak existuje okolí $\mathcal{N}'$ bodu $\tilde{x}$ a $\exists c' > 0$ takové, že platí

$$||x - \tilde{x}|| \leq c'||G(x)|| \quad \forall x \in \mathcal{N}'.$$

Tedy $\tilde{x}$ je lokálně jednoznačné řešení G.

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že žádné okolí $\mathcal{N}'$ bodu $\tilde{x}$ a žádná konstanta c' neexistuje. Potom existuje posloupnost bodů $\{x^k\} \to \tilde{x}, \quad x^k \neq \tilde{x}\, \forall k \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||G(x^k)||}{||x^k - \tilde{x}||} = 0.$$

Využitím tohoto a vlastnosti b.) Definice 2 dostaneme, že

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{||G(x^k) + A(x^k, \tilde{x} - x^k) - G(\tilde{x})||}{||x^k - \tilde{x}||} = \lim_{k\to\infty} \frac{||A(x^k, \tilde{x} - x^k)||}{||x^k - \tilde{x}||}.$$

Docházíme ke sporu, protože x^k patří do daného okolí $\mathcal{N}$ bodu $\tilde{x}$, a $x^k - \tilde{x}$ patří do $\mathcal{U}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$ dostatečně velké, tedy poslední limita musí být kladná, jak plyne z předpokladů věty. □

V dalším budeme studovat za jakých podmínek můžeme tvrdit, že Newtonovská aproximace je nesingulární. K tomu nejdřív dokážeme následující pomocnou větu.

Věta 5. *Nechť A a A' jsou funkce z $U \subseteq \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ takové, že A je lipschitzovský homeomorfismus z U na AU a $A - A'$ je lipschitzovsky spojitá na U. Nechť $L > 0$ a $L' > 0$ jsou po řadě moduly lipschitzovskosti funkcí A^{-1} a $A - A'$.*
Pokud existují $d^* \in U$ a $\delta > 0$ takové, že
a) $\overline{\mathbf{B}(d^*, \delta)} \subseteq U$
b) $\overline{\mathbf{B}(A(d^*), \frac{\delta}{L})} \subseteq A(U)$
c) $LL' < 1$,
pak A' je lipschitzovský homeomorfismus z U na $A'(U)$ a jeho inverze $(A')^{-1}$ má modul lipschitzovskosti

$$\frac{L}{1 - LL'} > 0.$$

Navíc platí, že $\mathbf{B}\left(A'(d^*), \frac{(1-LL')\delta}{L}\right) \subseteq A'(U)$.

Důkaz. Jelikož $A' = (A' - A) + A$ a obě $A' - A$ i A jsou lipschitzovsky spojité na U, je i A' lipschitzovsky spojitá na U. Definujme perturbační funkci

$$P(.) := A'(.) - A(.) - (A'(d^*) - A(d^*)).$$

Je vidět, že P má modul lipschitzovskosti L'. Větu nejdříve dokážeme pro funkci $A + P$ pomocí Banachovy věty o kontrakci. Protože

$$A'(U) = (A + P)(U) + A'(d^*) - A(d^*),$$

budeme mít větu dokázanu i pro funkci A'.
Z vlastnosti lipschitzovskosti A^{-1} dostaneme

$$L \geq \sup_{y,y' \in A(U),\, y \neq y'} \frac{||A^{-1}(y) - A^{-1}(y')||}{||y - y'||} =$$

$$= \left(\inf_{d,d' \in U,\, d \neq d'} \frac{||A(d) - A(d')||}{||d - d'||} \right)^{-1} := \frac{1}{q},$$

kde jsme použili známý vztah

$$\sup_M \frac{a}{b} = \frac{1}{\inf_M \frac{b}{a}}$$

a substituci $y = A(d)$, resp. $A^{-1}(y) = A^{-1}(A(d)) = d$.
Máme tedy

$$\inf_{d,d' \in U,\, d \neq d'} \frac{||(A+P)(d) - (A+P)(d')||}{||d - d'||} \geq$$

$$\inf_{d,d' \in U,\, d \neq d'} \frac{||(A)(d) - (A)(d')||}{||d - d'||} + \inf_{d,d' \in U, d \neq d'} \frac{||(P)(d) - (P)(d')||}{||d - d'||} \geq$$

$$\geq q - \sup_{d,d' \in U,\, d \neq d'} \frac{||P(d) - P(d')||}{||d - d'||} \geq \frac{1}{L} - L',$$

odkud plyne, že $A+P$ je prostá na U a jeho inverze je lipschitzovská s modulem
$$\frac{1}{\frac{1}{L}-L'}=\frac{L}{1-LL'.}$$
Nyní ukážeme, že platí
$$\mathbf{B}\left(A(d^*),\frac{(1-LL')\delta}{L}\right)\subseteq (A+P)(U). \tag{1.21}$$
Pro $y\in\mathbf{B}\left((A(d^*),\frac{(1-LL')\delta}{L}\right)$ a $d\in\mathbf{B}(d^*,\delta)$ definujme množinu
$$T_y(d):=A^{-1}(y-P(d))\cap U.$$
Jelikož $P(d^*)=0$, máme
$$||y-P(d)-A(d^*)||\le||y-A(d^*)||+||P(d)-P(d^*)||\le\frac{(1-LL')\delta}{L}+L'\delta=\frac{\delta}{L}.$$
Množina $T_y(d)$ je tedy neprázdná, obsahuje jediný bod, protože $q>0$. Můžeme proto T_y považovat za funkci definovanou na $\overline{\mathbf{B}(d^*,\delta)}$. Přitom $T_y(\overline{\mathbf{B}(d^*,\delta)})\subseteq\overline{\mathbf{B}(d^*,\delta)}$, neboť pro $\forall d\in\overline{\mathbf{B}(d^*,\delta)}$ platí
$$\begin{aligned}||T_y(d)-d^*|| &= ||A^{-1}(y-P(d))-A^{-1}(A(d^*))||\\ &\le L||y-P(d)-A(d^*)||\le L\frac{\delta}{L}\le\delta.\end{aligned}$$
T_y je tedy zobrazení z $\overline{\mathbf{B}(d^*,\delta)}$ do $\overline{\mathbf{B}(d^*,\delta)}$. Navíc pokud d a d' jsou prvky z $\overline{\mathbf{B}(d^*,\delta)}$, potom
$$\begin{aligned}||T_y(d)-T_y(d')|| &= ||A^{-1}(y-P(d))-A^{-1}(y-P(d')||\\ &\le L||P(d')-P(d')||\le LL'||d-d'||,\end{aligned}$$
a jelikož $LL'<1$, vidíme, že T_y je kontrakce, a má proto jediný pevný bod v $\overline{\mathbf{B}(d^*,\delta)}$, který označíme $d(y)$. Zřejme $(A+P)(d(y))=y$, odkud plyne (1.21). □

Následující věta dává postačující podmínku k tomu, aby Newtonova aproximace byla nesingulární. Klíčový krok v jejím důkazu bude ověřit předpoklady Věty 5.

Věta 6. *Nechť $G:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ je lokálně lipschitzovská funkce na otevřené množině Ω, $\bar{x}\in\Omega$. Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ je systém Newtonovských aproximací v $\bar{x}$, pro který existují tři kladné konstanty ϵ_1,ϵ_2,L, splňující podmínku* **(A)**:

(A) *$\forall A(\bar{x},.)\in\mathcal{A}(\bar{x})$ existují dvě otevřené množiny U,V po řadě obsahující $\mathbf{B}(0,\epsilon_1)$ a $\mathbf{B}(0,\epsilon_2)$ takové, že $A(\bar{x},.)$ je lipschitzovský homeomorfismus U na V, a $A^{-1}(\bar{x},.)$ má modul lipschitzovskosti L.*

Dále předpokládejme, že existuje funkce $L':(0,\infty)\to[0,\infty)$ s vlastností
$$\lim_{t\to0}L'(t)=0$$
a okolí $\mathcal{N}$ bodu $\bar{x}$ takové, že aspoň jeden z předpokladů **I.)**, **II.)** *je splněn:*

- **I.)** *Pro* $\forall x \in \mathcal{N}, x \neq \bar{x}$ *a pro* $\forall A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$ *existuje* $A(\bar{x},.) \in \mathcal{A}(\bar{x})$ *takový, že* $A(x,.) - A(\bar{x},.)$ *je lipschitzovsky spojitá funkce na* U *s modulem* $L'(||x - \bar{x}||.)$

- **II.)** *Pro* $\forall x \in \mathcal{N}, x \neq \bar{x}$ *je* $\mathcal{A}(x) \equiv \{A(x,.)\}$ *jednoprvková a* $\tilde{A}(x,.) - A(\bar{x},.)$ *je lipschitzovsky spojitá na* U *s modulem* $L'(||x-\bar{x}||)$*, kde* $\tilde{A}(x,d) = A(x, \bar{x} - x + d)$.)

Potom $\mathcal{A}$ *je systém nesingulárních aproximací v bodě* $\bar{x}$.

Důkaz. Potřebujeme ukázat, že je splněná vlastnost c.) Definice 2.

- Nejprve předpokládejme, že platí **I.)**.
  Nechť $A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$ a $A(\bar{x},.) \in \mathcal{A}(\bar{x})$. Potom funkce $A(x,.) - A(\bar{x},.)$ je lipschitzovská s modulem lipschitzovskosti $L'(||x - \bar{x}||)$. Zvolme $\mathbf{B}(\bar{x}, \epsilon)$ tak, že pro $\forall x \in \mathbf{B}(\bar{x}, \epsilon)$ platí

$$L\, L'(||x - \bar{x}||) < \frac{1}{2}.$$

  Navíc bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $L > 1$ a $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Potom můžeme použít Větu 5 s $d^* = 0$ a pomocí $A(x,0) = 0 = A(\bar{x},0)$ odvodit, že $A(x,.)$ je lipschitzovský homeomorfismus z U na $A(x,U)$. Navíc $A(x,.)$ má modul lipschitzovskosti

$$\frac{L}{1 - \underbrace{L\, L'(||x - \bar{x}||)}_{<\frac{1}{2}}} < \frac{L}{\frac{1}{2}} < 2L.$$

  Odtud $\mathbf{B}(0, \frac{\epsilon_1}{2L}) \subseteq A(x,U)$, tedy vlastnost c.) Definice 2 je splněna.

- Předpokládejme nyní, že platí **II.)**.
  Podobně jako výše, můžeme ukázat, že pro nějaké $\epsilon > 0$ a pro $\forall x \in \mathbf{B}(\bar{x}, \epsilon)$ je $\tilde{A}(x,.)$ lipschitzovský homeomorfismus U na $\tilde{A}(x,U)$, a že $\tilde{A}^{-1}(x,.)$ má modul lipschitzovskosti $2L$, a navíc $\mathbf{B}(0, \frac{\epsilon_1}{2L}) \subseteq \tilde{A}(x,U)$.
  Z (1.7) plyne, že

$$\lim_{x \to \bar{x}} A(x, \bar{x} - x) = \lim_{x \to \bar{x}} \tilde{A}(x, 0) = 0,$$

  neboť

$$||\underbrace{A(x, \bar{x} - x)}_{=\tilde{A}(x,0)} - \underbrace{A(x,0)}_{=0}|| \leq L'(||\bar{x} - x||) \to 0, \quad x \to \bar{x}.$$

  Proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že ϵ_1 je dostatečně malé tak, aby platilo

$$||A(x, \bar{x} - x)|| = ||\tilde{A}(x,0)|| \leq \frac{\epsilon_1}{4L} \quad \text{a} \quad ||\bar{x} - x|| \leq \frac{1}{2}\epsilon_1.$$

  Nechť $U'(x) = U + \bar{x} - x$. Potom vlastnost c.) Definice 2 je splněna, neboť

$A(x,d) = \tilde{A}(x, d-(\bar{x}-x))$, odkud plyne, že $A(x,.)$ je lipschitovský homeomorfizmus z $U'(x)$ do $A(x,U'(x))$ a jeho inverze má modul lipschitzovskosti $2L$. Navíc

$$B\left(0, \frac{1}{2}\epsilon_1\right) \subseteq U'(x), \quad B\left(0, \frac{\epsilon_1}{4L}\right) \subseteq A(x, U'(x)).$$

Tudíž $\mathcal{A}$ je systém nesingulárních Newtonovských aproximací v $\bar{x}$ na základě **I.)** nebo **II.)**. □

1.4 Po částech hladké funkce

V této části budem zabývat funkcemi $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které jsou po částech hladké. Nechť $\{G^1(x), \dots, G^k(x)\}$ jsou spojitě diferencovatelné výběrové funkce G v x. Množina aktívních indexů v bodě x je definovaná takto

$$\mathcal{P}(x) = \{i : G(x) = G^i(x)\}.$$

Přirozeným kandidátem systému Newtonovských aproximací funkce G je množina

$$\mathcal{A}(x) = \{JG^i(x) : i \in \mathcal{P}(x)\}. \tag{1.22}$$

Víme, že $A(x,.) \in \mathcal{A}(x)$ jsou v tomto případě lineární. Budeme navíc předpokládat, že $JG^i(x)$ je nesingulární pro $\forall i \in \mathcal{P}(x)$.

1.4.1 Newtonova metoda pro po částech hladké funkce

První algoritmus pro po částech hladké funkce získáme modifikací Nehladké Newtonovy metody, kdy ve 3. kroku algoritmu použijeme výše zavedený systém (1.22).

Algoritmus 3:
Dáno: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
1.krok: polož $k = 0$
2.krok: pokud $G(x^k) = 0$, pak algoritmus končí
3.krok: zvol $i_k \in \mathcal{P}(x^k)$ a nalezni vektor d^k pro které platí

$$G(x^k) + JG^{i_k}(x^k)d^k = 0, \tag{1.23}$$

4.krok: polož $x^{k+1} = x^k + d^k,\ k \leftarrow k+1$ a jdi na 2.krok

Protože Algoritmus 3 je jenom varianta Algoritmu 1, konvergence tohoto algoritmu jednoduše plyne z Věty 1, pokud ukážeme, že (1.22) je systém nesingulárních Newtonovských aproximací.

Věta 7. *Nechť $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Ω je otevřená) je po částech hladká funkce určená výběrovými funkcemi $\{G^i : i = 1, ..., k\}$. Nechť $G(x^*) = 0$. Předpokládejme, že matice $JG^i(x^*)$ jsou nesingulární pro $\forall i \in \mathcal{P}(x^*)$. Potom existuje okolí $\mathbf{B}(x^*, \delta)$ takové, že pro $x^0 \in \mathbf{B}(x^*, \delta)$ generuje Algoritmus 3 jedinou posloupnost $\{x^k\}$, která konverguje Q-superlineárně k x^*. Pokud jsou jakobiány aktivních výběrových funkcí JG^i v bodech blízkých x^* lokálně lipschitzovské, řád konvergence je Q-kvadratický.*

Důkaz. Jestliže x je dostatečně blízko k x^*, potom zřejme

$$\mathcal{P}(x) \subset \mathcal{P}(x^*), \tag{1.24}$$

díky tomu, že G^i jsou spojité. Ověříme, že (1.22) je systémem nesingulárních Newtonovských aproximací.

- Podmínka a.) je triviálně splněna, neboť $\forall A(x, .)$ je lineární.

- Jestliže pro každou posloupnost $\{y^k\} \to x^*$, $y^k \neq x^* \, \forall k \in \mathbb{N}$ a pro $\forall i_k \in \mathcal{P}(y^k)$ bude platit

  $$\lim_{k\to\infty} \frac{||G(y^k) + JG^{i_k}(y^k)(x^* - y^k) - G(x^*)||}{||y^k - x^*||} = 0,$$

  pak podmínka b.) bude ověřena. Z (1.24) plyne, že $G(x^*) = G^{i_k}(x^*)$ pro každé dostatečně velké k. Protože také $G(y^k) = G^{i_k}(y^k)$, dostaneme, že

  $$\lim_{k\to\infty} \frac{||G(y^k) + JG^{i_k}(y^k)(x^* - y^k) - G(x^*)||}{||y^k - x^*||} =$$

  $$= \lim_{k\to\infty} \frac{||G^{i_k}(y^k) + JG^{i_k}(y^k)(x^* - y^k) - G^{i_k}(x^*)||}{||y^k - x^*||}.$$

  Protože existuje konečně mnoho indexů i_k a G^{i_k} jsou hladké funkce, výše uvedená limita se rovná nule díky Větě 2.

- Jestliže jakobiány JG^i aktívních funkcí jsou lipschitzovsky spojité na okolí bodu x^*, analogicky jako jsme ukázali pro b.), $\exists L' > 0$ taková, že

  $$\limsup_{k\to\infty} \frac{||G(y^k) + JG^{i_k}(y^k)(x^* - y^k) - G(x^*)||}{||y^k - x^*||^2} \leq L',$$

  pro každou posloupnost $\{y^k\} \to x^*, y^k \neq x^* \, \forall k \in \mathbb{N}$ a pro $\forall i_k \in \mathcal{P}(y^k)$. Tím jsme ověřili i podmínku b'.) Definice 2.

- Zbývá podmínka c.). Podle předpokladů jsou matice $JG^i(x^*)$ nesingulární pro $\forall i \in \mathcal{P}(x^*)$ a dále pro $\forall x$ dostatečně blízké k x^* platí inkluze (1.24). Pro $\forall A(x, .) \in \mathcal{A}(x)$ existuje index $i \in \mathcal{P}(x^*)$ takový, že $A(x, d) = JG^i(x)d$ pro $\forall d \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

Na následujícím příkladu budeme ilustrovat Algoritmus 3.

Příklad 1.4.1: Uvažujme nehladkou funkci H, kde

$$H(x) = \min(F(x), G(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou takové, že $F, G \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Nechť pro libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je matice $\mathbb{A}(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jejíž i-tý řádek je definován takto:

$$\mathbb{A}_i(x) = \begin{cases} \nabla F_i(x)^T & \text{pokud} \quad F_i(x) < G_i(x) \\ \text{buď} \quad \nabla F_i(x)^T \quad \text{nebo} \quad \nabla G_i(x)^T & \text{pokud} \quad F_i(x) = G_i(x) \\ \nabla G_i(x)^T & \text{pokud} \quad G_i(x) < F_i(x). \end{cases}$$

Pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$ máme $2^{|\beta(x)|}$ takových matic, kde

$$\beta(x) := \{i | F_i(x) = G_i(x)\}.$$

Tyto matice jsou Jacobiho matice výběrových funkcí H v x. Algoritmus 3 generuje posloupnost $\{x^k\}$ následovně: pro dané x^k následující iteraci $x^{k+1} = x^k + d^k$, kde d^k je řešením systému lineárních rovnic $H(x^k) + \mathbb{A}(x^k, d^k) = 0$, kde $\mathbb{A}(x^k)$ je jedna z $2^{|\beta(x)|}$ matic definovaných výše. Jestliže každá matice $\mathbb{A}(x^*)$ je nesingulární, pak Věta 7 zaručuje lokální konvergenci $\{x^k\} \to x^*$, kde x^* je řešením $H(x^*) = 0$.

1.4.2 Newtonova metoda pro funkce typu "min"

Na základě Příkladu 1.4.1 definujme množinu $\mathcal{A}_{min}(x)$, jako množinu všech matic $\mathbb{A}(x)$, jejíž i-tý řádek je definován takto:

$$\mathbb{A}_i(x) = \begin{cases} \nabla F_i(x)^T & \text{pokud} \quad F_i(x) < G_i(x) \\ \text{buď} \quad \nabla F_i(x)^T \quad \text{nebo} \quad \nabla G_i(x)^T & \text{pokud} \quad F_i(x) = G_i(x) \\ \nabla G_i(x)^T & \text{pokud} \quad G_i(x) < F_i(x). \end{cases}$$

Víme, že tato množina má $2^{|\beta(x)|}$ prvků. V dalším se budeme zabývat řešením úlohy

$$\min\{F(x), G(x)\} = 0,$$

která je ekvivalentní úloze nalézt $x^* \in \mathbb{R}^n$ splňující následující tři vztahy:

$$F(x^*) \geq 0, \quad G(x^*) \geq 0, \quad F(x^*)\, G(x^*) = 0.$$

Algoritmus 4:

Dáno: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
1.krok: polož $k = 0$
2.krok: pokud $\min\{F(x^k), G(x^k)\} = 0$, pak algoritmus končí
3.krok: zvol prvek $\mathbb{A}^k \in \mathcal{A}_{min}(x^k)$ a najdi řešení d^k systému lineárních rovnic

$$\min\{F(x^k), G(x^k)\} + \mathbb{A}^k d^k = 0 \tag{1.25}$$

4.krok: polož $x^{k+1} = x^k + d^k$, $k \leftarrow k + 1$ a jdi na 2.krok

Věta 8. *Nechť $F, G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (kde Ω je otevřená množina) jsou spojitě diferencovatelné funkce a $H(x) = \min\{F(x), G(x)\}$. Nechť x^* splňuje $H(x^*) = 0$ a nechť kazdá matice $\mathbb{M}$ jejíž i-tý řádek je definován takto:*

$$\mathbb{M}_i = \begin{cases} JF_i(x^*) & \textit{pokud} \quad F_i(x^*) = 0 < G_i(x^*) \\ JG_i(x^*) & \textit{pokud} \quad G_i(x^*) = 0 < F_i(x^*), \end{cases}$$

je nesingulární. Potom platí:

- *a.) Existuje okolí $\mathbf{B}(x^*, \delta)$ takové, že pokud $x^0 \in \mathbf{B}(x^*, \delta)$, pak Algoritmus 4 generuje jedinou posloupnost $\{x^k\}$ konvergující k x^* Q-superlineárně. Pokud JF a JG jsou lokálně lipschitzovské v x^*, řád konvergence je Q-kvadratický.*
- *b.) Pokud F a G jsou afinní funkce, potom existuje $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tak, že $x^{\bar{k}} = x^*$.*

Důkaz. Stačí když dokážeme tvrzení b.), neboť a.) je důsledkem Věty 7. Nechť $\bar{k} \in \mathbb{N}$ taková, že pro $\forall k \geq \bar{k}$, $k \in \mathbb{N}$:

- $0 = F_i(x^*) < G_i(x^*)$, z čehož plyne $F_i(x^k) < G_i(x^k)$,
- $0 = G_i(x^*) < F_i(x^*)$, z čehož plyne $G_i(x^k) < F_i(x^k)$.

Pro takový index k máme

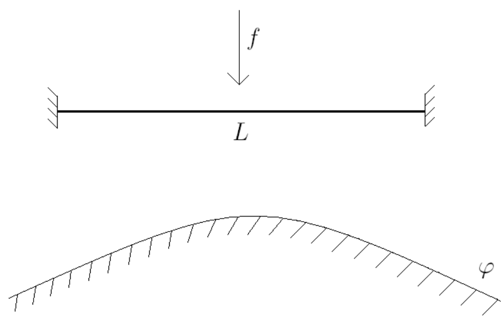
- $0 = F_i(x^k) + \nabla F_i(x^k)^T d^k = F_i(x^k + d^k) = F_i(x^{k+1})$ pro $\forall i$ takové, že $0 = F_i(x^k) < G_i(x^k)$,
- $0 = G_i(x^k) + \nabla G_i(x^k)^T d^k = G_i(x^k + d^k) = G_i(x^{k+1})$ pro $\forall i$ takové, že $0 = G_i(x^k) < F_i(x^k)$.

Navíc pro takový index i, pro který $F_i(x^*) = G_i(x^*) = 0$ máme buď $F_i(x^{k+1}) = 0$ nebo $G_i(x^{k+1}) = 0$. Jelikož x^* splňuje každou z výše uvedených rovnic, z jednoznačnosti x^{k+1} nutně $x^* = x^{k+1}$. Tedy po konečně mnoha krocích Algoritmus 4 končí iterací, která se shoduje s x^*. □

2. Příklady

2.1 Fyzikální model

Mějme na obou koncích vetknutý nosník délky L, jehož průhyb je zdola omezen překážkou reprezentovanou funkci φ. Na nosník působme v kolmém směru silou f podél jeho celé délky a zkoumejme jeho průhyb. Výchozí situace je znázorněná na Obrázku 2.1. Při řešení tohoto problému budeme uvažovat překážky různého



Obrázek 2.1: Nosník a překážka

tvaru, a rovněž budeme zkoumat průhyby nosníku pro různé síly. Je intuitivně jasné, že když působíme příliš velkou silou, tak se nosník dotkne překážky.

2.2 Matematický model a jeho diskretizace

Nosník délky L bude reprezentován intervalem $\Omega = [0, L]$, síla f a překážka φ spojitými funkcemi na $[0, L]$, tedy $f \in C([0, L])$, $\varphi \in C([0, L])$. Navíc předpokládáme, že $\varphi(0) \leq 0$, $\varphi(L) \leq 0$. Dále mějme neprázdnou konvexní množinu

$$K = \{v \in H_0^2(0, L) | v \geq \varphi \quad \text{v} \quad (0, L)\}$$

a funkcionál $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$, daný předpisem

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^L (v'')^2 dx - \int_0^L f v \, dx.$$

Variační formulace výše uvedené úlohy vede na minimizaci J na množině K, to jest máme nalézt $u \in K$ pro které platí:

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v).$$

Vzhledem k tomu, že J je ryze konvexní, nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby $u \in K$ byl minimem J na K je, aby

$$(J'(u); v - u) \geq 0 \quad \text{pro} \quad \forall v \in K, \tag{2.1}$$

kde $(J'(u);v)$ je směrová derivace J v bodě u a směru v. V našem případě:

$$\begin{aligned}(J'(u);v) &= \lim_{t\to 0_+}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t}\\ &= \int_0^L (u''v''-fv)dx.\end{aligned}$$

Dosazením do (2.1) získáme

$$u\in K: \int_0^L u''(v''-u'')dx \geq \int_0^L f(v-u)dx \quad \text{pro} \quad \forall v\in K. \tag{2.2}$$

Lze ukázat, že (2.2) má právě jedno řešení.

Věta 9. *Nechť řešení u nerovnice (2.2) patří do $C^4([0,L])$. Pak u lze ekvivalentně charakterizovat následujícími čtyřmi vztahy:*

$$u(0)=u'(0) = u(L)=u'(L)=0 \tag{2.3}$$
$$u \geq \varphi \quad v \quad (0,L) \tag{2.4}$$
$$u^{IV} \geq f \quad v \quad (0,L) \tag{2.5}$$
$$(u-\varphi)(u^{IV}-f) = 0 \quad v \quad (0,L). \tag{2.6}$$

Důkaz. "$\Rightarrow$" Nechť $u\in C^4([0,L])$ je řešením (2.2) a dokažme platnost vztahů (2.3), (2.4), (2.5), (2.6).

- Okrajové podmínky (2.3) a nerovnost (2.4) jsou triviálně splněny, neboť $u\in K$.
  Integrací per partes a využitím okrajových podmínek $u(0)=u'(0)=u(L)=u'(L)=0$ dostaneme

  $$\int_0^L u''(v''-u'')\,dx = -\int_0^L u'''(v-u)'\,dx = \int_0^L u^{IV}(v-u)\,dx \geq \int_0^L f(v-u)\,dx,$$

  tedy

  $$\int_0^L (u^{IV}-f)(v-u)\,dx \geq 0 \quad \forall v\in K. \tag{2.7}$$

- Nechť $v=u+\psi$, kde $\psi\in H_0^2(0,L)$, $\psi\geq 0$ na $(0,L)$ je libovolná funkce. Potom $v=u+\psi\geq\varphi$ na $(0,L)$ a tedy $v\in K$. Jejím dosazením do (2.7) dostaneme

  $$\int_0^L (u^{IV}-f)\psi\,dx \geq 0,$$

  pro každou nezápornou funkci ψ z $H_0^2(0,L)$. Odtud plyne $u^{IV}-f\geq 0 \quad \text{v} \quad (0,L)$, čímž je dokázáno (2.5).

- Nechť $\bar{x} \in (0, L)$ je takový, že $u(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$. Pak (2.6) triviálně platí. Nechť $\exists \bar{x} \in (0, L) : u(\bar{x}) > \varphi(\bar{x})$. Potom ze spojitosti u a φ plyne existence $\delta > 0 : u(x) > \varphi(x) \quad \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$. Nechť $\psi \in C_0^\infty(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ je libovolná funkce. Pak $v = u \pm t\psi \in K$ pro dostatečně malé t ($|t| < \epsilon$). Navíc z definice ψ plyne, že $v = u$ mimo interval $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$. Dosazením do (2.7) dostaneme:

$$\int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} (u^{IV} - f)(\pm t\psi)\, dx \geq 0 \quad \forall |t| < \epsilon,$$

  odkud plyne

$$\int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} (u^{IV} - f)\psi\, dx = 0$$

  pro každou $\psi \in C_0^\infty(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$. Tedy nutně $u^{IV} - f = 0$ v $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

"$\Leftarrow$" Nechť $u \in C^4([0, L])$ splňuje vztahy (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), dokážeme, že splňuje i (2.2).
Protože pro u platí (2.3) a (2.4), dostaneme, že $u \in K$.
Z (2.5) a z monotonie integrálu plyne

$$\int_0^L u^{IV}(v - \varphi)\, dx \geq \int_0^L f(v - \varphi)\, dx \quad \forall v \in K, \tag{2.8}$$

neboť $v - \varphi \geq 0$ v $(0, L)$. Nerovnost (2.8) je ekvivalentní

$$\int_0^L u^{IV}(v - u)\, dx + \int_0^L u^{IV}(u - \varphi)\, dx \geq \int_0^L f(v - u)\, dx + \int_0^L f(u - \varphi)\, dx \quad \forall v \in K,$$

což je ekvivalentní s ohledem na (2.6) nerovnosti

$$\int_0^L u^{IV}(v - u)\, dx \geq \int_0^L f(v - u)\, dx \quad \forall v \in K.$$

Integrací per partes a užitím okrajových podmínek dostaneme (2.2). □

V dalším budeme problém diskretizovat. Mějme ekvidistantní dělení intervalu $(0, L)$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = L,$$

kde $|x_{i+1} - x_i| = h \quad \forall i = 0, ..., n - 1$. Průhyb nosníku budeme počítat v bodech tohoto dělení.
Použitím centrálních diferencí aproximujme $u^{IV}(x_i)$ pro $i \in \{2, \ldots, n - 2\}$:

$$\begin{aligned}
u'(x) &\approx \frac{u\left(x + \frac{h}{2}\right) - u\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} \\
u''(x) &\approx \frac{u'\left(x + \frac{h}{2}\right) - u'\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} \approx \frac{u(x + h) - 2u(x) - u(x - h)}{h^2} \\
u^{IV}(x) &\approx \frac{u''(x + h) - 2u''(x) - u''(x - h)}{h^2} \\
&\approx \frac{u(x + 2h) - 4u(x + h) + 6u(x) - 4u(x - h) + u(x - 2h)}{h^4}
\end{aligned}$$

Výsledná aproximace $u^{IV}(x_i)$ pro $i \in \{2, \ldots, n-2\}$ je tedy

$$u^{IV}(x_i) \approx \frac{u(x_{i-2}) - 4u(x_{i-1}) + 6u(x_i) - 4u(x_{i+1}) + u(x_{i+2})}{h^4}.$$

Protože $u \in K$, víme, že $u(0) = u(x_0) = 0$ a $u(L) = u(x_n) = 0$, dopřednou respektive zpětnou diferencí získáme

$$0 = u'(x_0) \approx \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} = \frac{u(x_1) - 0}{h} \Longrightarrow u(x_1) = 0,$$

$$0 = u'(x_n) \approx \frac{u(x_{n-1}) - u(x_n)}{h} = \frac{u(x_{n-1}) - 0}{h} \Longrightarrow u(x_{n-1}) = 0.$$

Pro další účely označme

$$\mathbf{U} = (u(x_2),\, u(x_3), \ldots,\, u(x_{n-2})) \in \mathbb{R}^{n-3}$$
$$\mathbf{\Phi} = (\varphi(x_2),\, \varphi(x_3), \ldots,\, \varphi(x_{n-2})) \in \mathbb{R}^{n-3}$$
$$\mathbf{\Psi} = (f(x_2),\, f(x_3), \ldots,\, f(x_{n-2})) \in \mathbb{R}^{n-3}$$

$$\mathbb{B} = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-3)\times(n-3)}$$

Na základě (2.3) a (2.4) dále označme

$$F(\mathbf{U}) := \mathbf{U} - \mathbf{\Phi}, \quad \text{kde} \quad F : \mathbb{R}^{n-3} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-3}$$
$$G(\mathbf{U}) := \mathbb{B}\mathbf{U} - \mathbf{\Psi}, \quad \text{kde} \quad G : \mathbb{R}^{n-3} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-3}.$$

Vztahy (2.3) a (2.4) budeme tedy splňovat pouze v bodech dělení $x_2, \ldots, x_{n-2}$, to jest hledáme $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n-3}$ takové, že

$$F(\mathbf{U}) \geq \mathbf{0},\ G(\mathbf{U}) \geq \mathbf{0},\ F^T(\mathbf{U})G(\mathbf{U}) = 0,$$

což je ekvivalentní úloze, najít $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n-3}$ takové, že

$$\min\{F(\mathbf{U}),\, G(\mathbf{U})\} = \min\{\mathbf{U} - \mathbf{\Phi},\, \mathbf{U} - \mathbf{\Psi}\} = \mathbf{0}.$$

Tuto úlohu budeme řešit Algoritmem 4. Ve 3. kroku tohoto algoritmu je potřeba zvolit matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{(n-3)\times(n-3)}$, jejíž i-tý řádek je definován následovně:

$$\mathbb{A}_i = \begin{cases} \nabla F_i(\mathbf{U})^T & \text{pokud} \quad F_i(\mathbf{U}) < G_i(\mathbf{U}) \\ \text{buď} \quad \nabla F_i(\mathbf{U})^T \quad \text{nebo} \quad \nabla G_i(\mathbf{U})^T & \text{pokud} \quad F_i(\mathbf{U}) = G_i(\mathbf{U}) \\ \nabla G_i(\mathbf{U})^T & \text{pokud} \quad G_i(\mathbf{U}) < F_i(\mathbf{U}). \end{cases}$$

V našem případě

$$F_i(\mathbf{U}) = U_i - \Phi_i \Longrightarrow \nabla F_i(\mathbf{U})^T = \mathbf{e}_i^T$$
$$G_i(\mathbf{U}) = (\mathbb{B}U)_i - \Psi_i \Longrightarrow \nabla G_i(\mathbf{U})^T = \mathbb{B}_i^T.$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat

$$\mathbb{A}_i = \begin{cases} \mathbf{e}_i^T & \text{pokud} \quad F_i(\mathbf{U}) \leq G_i(\mathbf{U}) \\ \mathbb{B}_i^T & \text{pokud} \quad G_i(\mathbf{U}) < F_i(\mathbf{U}). \end{cases}$$

2.3 Numerická realizace a výsledky

Pro naprogramování Algoritmu 4 jsem používala Matlab. Za ukončovací kritérium jsem si zvolila podmínku

$$||\min\{F, G\}|| < \text{eps}, \quad \text{kde} \quad \text{eps} = 10^{-6}.$$

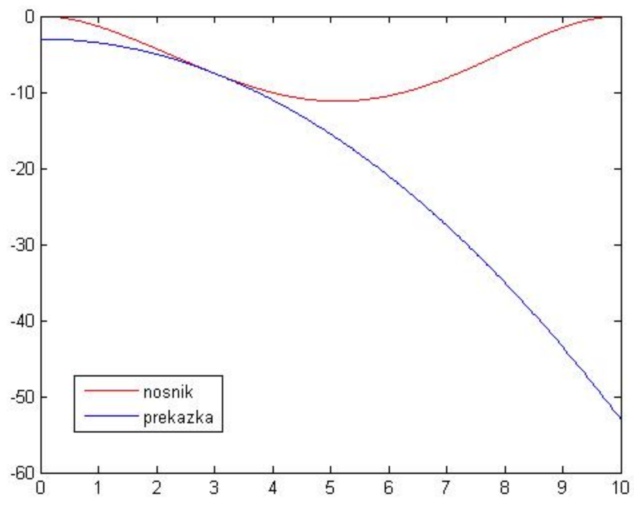
Uživatel zadává délku ekvidistantního dělení h i délku nosníku L. Program jsem testovala pro různé síly a pro překážky různého tvaru při $L = 10$.

Následující tabulka shrnuje výsledky pro překážku tvaru $\varphi(x) = -0.5x^2 - 3$. První sloupec obsahuje délku kroku h, ostatní sloupce pak obsahují počet iterací potřebných k nalezení řešení úlohy při namáhání příslušnou sílou.

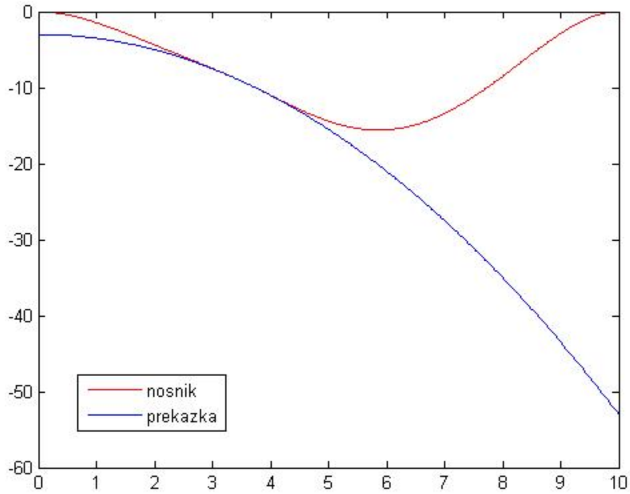
délka kroku h	**velikost síly** f			
	-0.5	-1.5	-3.5	-5
0.1	15	34	31	28
0.08	18	41	39	35
0.06	24	55	52	46
0.04	36	82	76	68
0.03	48	110	102	91
0.02	72	164	151	135

Tabulka 2.1: $\varphi(x) = -0.5x^2 - 3$

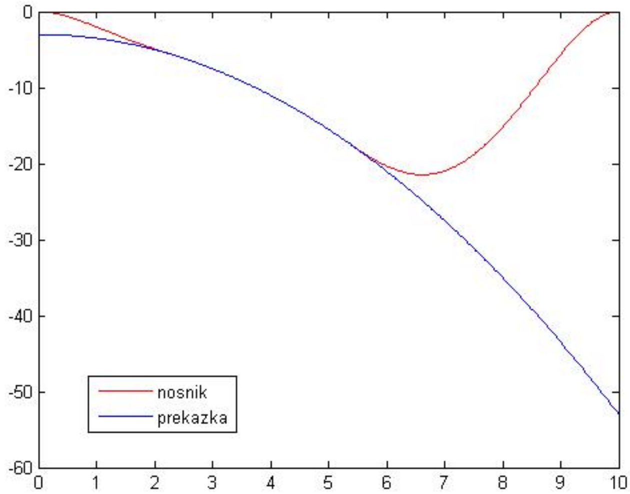
Následující obrázky ilustrují zvětšující se kontakt nosníku s překážkou při rostoucí velikosti síly:



Obrázek 2.2: $\varphi(x) = -0.5x^2 - 3$, $f = -0.5$ a $h = 0.02$



Obrázek 2.3: $\varphi(x) = -0.5x^2 - 3$, $f = -1.5$ a $h = 0.02$



Obrázek 2.4: $\varphi(x) = -0.5x^2 - 3$, $f = -5$ a $h = 0.02$

V dalším budeme měnit tvar překážky φ. Její rovnice bude vždy uveden pod příslušnou tabulkou.

délka kroku h	**velikost síly** f			
	-1.5	-3.5	-5.5	-10
0.1	21	33	33	33
0.08	26	42	42	41
0.06	35	55	56	54
0.04	51	82	83	80
0.03	71	110	110	108
0.02	103	165	165	161

Tabulka 2.2: $\varphi(x) = -x^2 - 10$

délka kroku h	**velikost síly** f			
	-3	-3.5	-4	-4.5
0.1	11	20	24	28
0.08	15	24	30	61
0.06	66	70	76	90
0.04	100	107	119	160
0.03	133	145	165	224
0.02	201	217	243	-

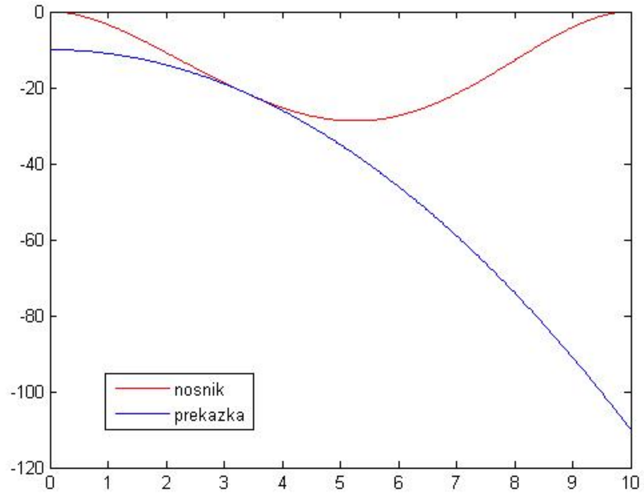
Tabulka 2.3: $\varphi(x) = x^2 - 101$

délka kroku h	**velikost síly** f			
	-1.5	-3.5	-5.5	-7
0.1	25	34	32	31
0.08	30	42	40	39
0.06	51	56	54	51
0.04	66	98	80	77
0.03	89	123	107	103
0.02	135	185	185	153

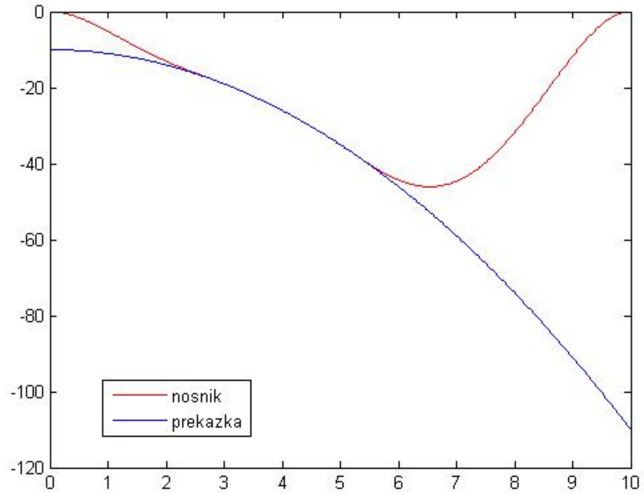
Tabulka 2.4: $\varphi(x) = -5x - 3$

délka kroku h	**velikost síly** f			
	-0.5	-1.5	-2	-5
0.1	14	23	25	19
0.08	18	28	35	24
0.06	24	45	43	32
0.04	35	63	67	49
0.03	46	89	77	65
0.02	73	137	119	99

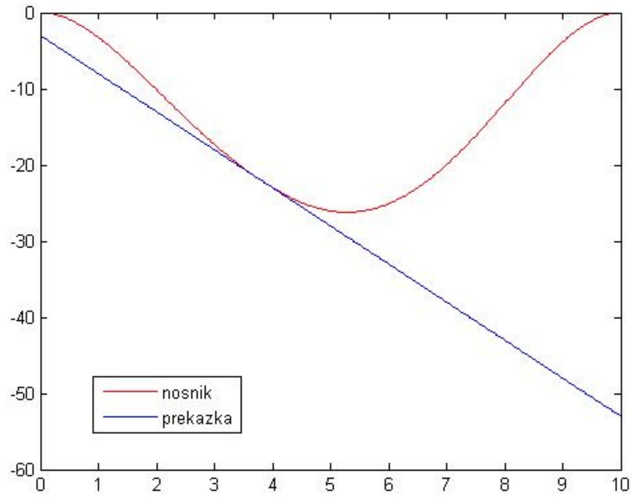
Tabulka 2.5: $\varphi(x) = \sin(1.5x) - 3$



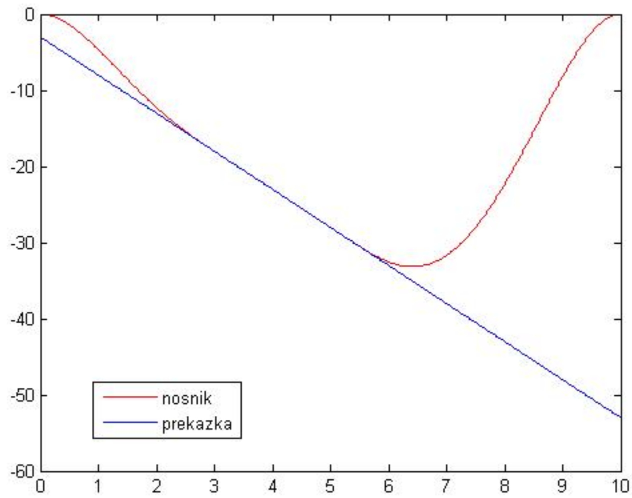
Obrázek 2.5: $\varphi(x) = -x^2 - 10,\ f = -1.5$ a $h = 0.02$



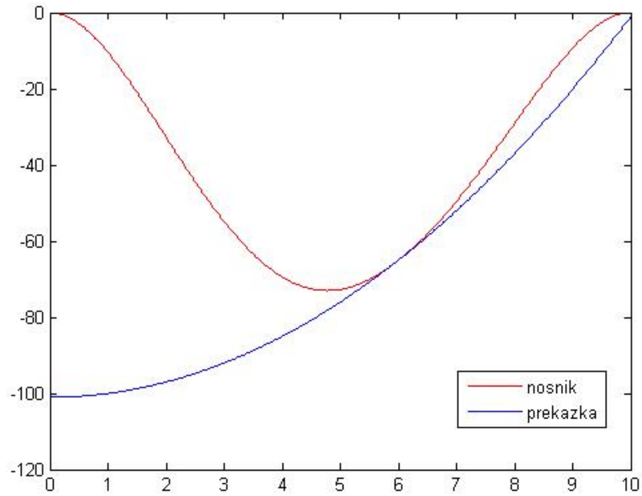
Obrázek 2.6: $\varphi(x) = -x^2 - 10,\ f = -10$ a $h = 0.02$



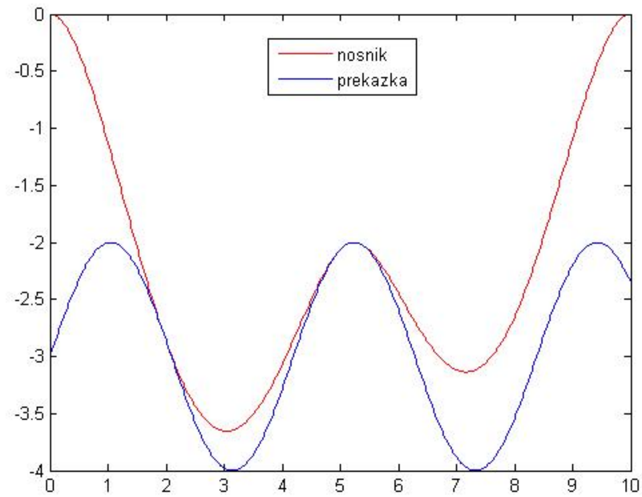
Obrázek 2.7: $\varphi(x) = -5x - 3,\ f = -1.5$ a $h = 0.02$



Obrázek 2.8: $\varphi(x) = -5x - 3,\ f = -7$ a $h = 0.02$



Obrázek 2.9: $\varphi(x) = x^2 - 101,\ f = -4$ a $h = 0.02$



Obrázek 2.10: $\varphi(x) = \sin(1.5x) - 3,\ f = -1.5$ a $h = 0.02$

Appendix

Definice: *Funkce* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je lipschitzovská v* $\mathbb{R}^n$*, jestliže existuje konstanta* $L > 0$ *tak, že pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$||F(x) - F(y)|| \leq L\,||x - y||.$$

Definice: *Funkce* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je lokálně lipschitzovská v* $\mathbb{R}^n$*, jestliže* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *existují* $\delta > 0, L > 0$ *takové, že pro všechna* $y \in \mathbf{B}(x, \delta)$ *platí*

$$||F(x) - F(y)|| \leq L\,||x - y||.$$

Definice: *Řekneme, že spojitá funkce* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je po částech hladká, jestliže existuje konečně mnoho bodů* x_i*,* $i = 1, \ldots, k$ *tak, že* F' *je spojitá mimo tyto body a v bodech* x_i*,* $i = 1, \ldots, k$ *má* F' *jednostranné vlastní limity.*

Závěr

Předkládaná práce se zabývala modifikací klasické Newtonovy metody pro hledání kořenů nehladkých funkcí. Definováním Newtonovské aproximace funkce jsme zavedli nehladkou Newtonovu metodu a následně jsme ukázali, že zachovává rychlou lokální konvergenci původní metody. Navíc pro spojitě diferencovatelnou funkci se redukuje na klasickou Newtonovu metodu. Další modifikací vznikla nepřesná Newtonova metoda. Na závěr první kapitoly jsme se zabývali třídou po částech hladkých funkcí a zavedli jsme Newtonovu metodu pro hledání kořene těchto funkcí a její modifikaci pro funkce typu "min".

V druhé kapitole jsme využili poslední variantu pro řešení variační nerovnice, která popisuje chování nosníku namáhaného silou, jehož průhyb je zdola omezen tuhou překážkou. Diskretizovaný matematický model jsme implementovali v MATLAB-u a program jsme testovali pro různé síly a překážky různého tvaru. Na obrázcích lze vidět zvětšující se kontakt nosníku s překážkou při rostoucí velikosti síly.

Seznam použité literatury

[1] Facchinei F., Pang J.S.: *Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer, 2003.