Oponentský posudek na práci M. Balázsové

Nehladké Newtonovy metody

Předložená práce se zabývá metodami Newtonova typu pro numerické řešení soustav nehladkých rovnic v konečné dimenzi. V první kapitole práce je nejprve definován tzv. nesingulární systém (silných) newtonovských aproximací, pomocí kterého je zavedena obecná nehladká Newtonova metoda a je dokázána její lokální Q-superlineární (Q-kvadratická) konvergence pro lokálně lipschitzovské funkce. Následně jsou stanoveny podmínky, za jakých zůstane tato konvergence zachována i při nepřesném řešení rovnic uvnitř Newtonova cyklu. Rovněž jsou formulovány podmínky zajišťující nesingularitu newtonovských aproximací. Poté je na základě obecné nehladké Newtonovy metody navržen algoritmus pro po částech hladké funkce a je opět dokázána rychlost jeho konvergence. Na závěr první kapitoly je uveden speciální případ tohoto algoritmu pro funkce definované jakožto minimum dvou hladkých funkcí. Ve druhé kapitole je popsán jednoduchý model nosníku, jehož průhyb je zdola omezen dokonale tuhou oporou. Použitím konečných diferencí je provedena diskretizace modelu. Výsledná úloha je řešena variantou Newtonovy metody pro speciální typ po částech hladkých funkcí ze závěru první kapitoly. Součástí práce je i implementace úlohy v programu MATLAB.

Zpracované téma je nepochybně aktuální, neboť nehladké Newtonovy metody jsou díky své efektivitě široce používané k numerickému řešení úloh pocházejících z nejrůznějších oblastí. Kvalita zpracování tématu je však nízká. První kapitola, tvořící převážnou část práce, je víceméně překladem výsledků podkapitoly 7.2 v [1] (F. Facchinei a J.-S. Pang: Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems), které jsou technické a vyžadují značnou spoluúčast čtenáře. Na několika místech je text první kapitoly nepříliš dobře čitelný, matematický zápis neobratný. V tomto směru je o poznání lepší kapitola druhá, jež spočívá na odvození diskrétního modelu a provedení jeho numerické realizace. V přehledu napočítaných výsledků ale postrádám pevnější vazbu na kapitolu úvodní. De facto je pouze ukázáno, že Newtonova metoda pro dané modelové příklady (s nespecifikovaným počátečním přiblížením a nespecifikovaným řešičem vnitřních iterací) konverguje. Chybí jakékoliv detailnější studium dosažené rychlosti numerické konvergence.

Práce obsahuje celou řadu chyb a nepřesností. Mám k ní následující připomínky a dotazy:

- Přídavné jméno „newtonovský“ se píše s malým počátečním písmenem.
- Kvantifikátory $\forall$ a $\exists$ je v textu povětšinou lepší rozepisovat slovně.
- Definice lokální lipschitzovskosti v apendixu je špatně, vlastnost uvedená v práci je slabší (v terminologii mnohoznačných zobrazení odpovídá tzv. lokální lipschitzovskosti shora).
- Termín „nonsingular matrix“ se do češtiny překládá jako „regulární matice“, nikoliv „nesingulární matice“. Následně by bylo vhodnější psát ne „nesingulární“, nýbrž „regulární systém (silných) newtonovských aproximací“.

- Na str. 8, ř. 16 zdola má být $\|G(x^k)\|$ namísto $|G(x^k)|$ (G je vektorová funkce).

- Na str. 9, ř. 5 zdola má být $\mathcal{A}(x) = \{JG(x)\}$ namísto $\mathcal{A}(x) = \{A(x,d) \equiv JG(x)d\}$ (v pravém výrazu se porovnává množina funkcí s množinou nějakých vektorů).

- Jak je v důkazu věty 2 pro funkci $\Delta(t)$ definovanou na $(0, +\infty)$ vztahem

$$\Delta(t) := \sup_{x,y\in\Omega,\, \|x-y\|\le t} \|\nabla G_j(y) - \nabla G_j(x)\|$$

  zajištěna její konečnost a vlastnost $\lim_{t\to 0_+} \Delta(t) = 0$? Spojitost funkce obecně neimplikuje její omezenost či stejnoměrnou spojitost. Mimoto by měla být funkce $\Delta(t)$ zřejmě nezávislá na j.

- Na str. 11, ř. 5 má být $|G_j(x) - \nabla G_j(x)^T(x-z) - G_j(z)|$ namísto $|G_j(x) + \nabla G_j(x)^T(x-z) - G_j(z)|$.

- Na str. 12 má být poslední řádek zakončen ... $\overset{(1.16)}{<}$ ϵ namísto ... $\overset{(1.16)}{\le}$ ϵ (je třeba incidence s $\mathbf{B}(0,\epsilon)$). Totéž platí o 2. řádku na str. 13.

- Na str. 13, ř. 16 má být $x \in \Omega'$ namísto $x \in \mathbf{B}(\tilde{x}, \delta)$ (δ není na daném místě vůbec určeno).

- Je poněkud matoucí značit dvě různé funkce A a A' (věta 5).

- Na str. 15, ř. 5 má být „U na $A(U)$“ namísto „U na AU“ (A je obecně nelineární).

- Na str. 16, ř. 5 má být $d \in \overline{\mathbf{B}(d^*, \delta)}$ namísto $d \in \mathbf{B}(d^*, \delta)$ (dokazuje se kontraktivita na celém $\overline{\mathbf{B}(d^*, \delta)}$).

- Jak je zaručeno v důkazu věty 6, že $A(\bar{x}, 0) = 0$?

- Na str. 17, ř. 16 a 17 má být „$A^{-1}(x, .)$ má modul lipschitzovskosti“ namísto „$A(x, .)$ má modul lipschitzovskosti“.

- Netuším, proč by měla platit nerovnost na str. 17, ř. 5 zdola:

$$\|A(x, \bar{x} - x) - A(x, 0)\| \le L'(\|\bar{x} - x\|).$$

- Na str. 17, ř. 4 zdola má být ϵ namísto ϵ_1.

- Za jakým účelem se ve **II.)** věty 6 předpokládá, že $\mathcal{A}(x)$ je jednoprvková? A proč se dále v důkazu předpokládá, že

$$\|A(x, \bar{x} - x)\| = \|\tilde{A}(x, 0)\| \le \frac{\epsilon_1}{4L}?$$

- Definice po částech hladkých funkcí v apendixu je trochu nestandardní a není mi v ní jasné, co je míněno požadavkem na existenci jednostranných vlastních limit F' pro $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Navíc se evidentně v podkapitole 1.4 (Po částech hladké funkce) nepracuje s touto, nýbrž se standardní definicí (viz např. odstavec 4.5.1 v [1]).
- Na str. 20, ř. 11 má být $H(x^k) + \mathbb{A}(x^k)d^k = 0$ namísto $H(x^k) + \mathbb{A}(x^k, d^k) = 0$ ($\mathbb{A}(x^k)$ je matice).
- Na str. 21, ř. 4 schází definice $\mathbb{M}_i$ v případě, že $F_i(x^*) = G_i(x^*) = 0$ (tyto řádky zřejmě nemohou být zcela libovolné).
- Na str. 24, předpředposledním řádku má být
$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$
namísto
$$\frac{u(x+h) - 2u(x) - u(x-h)}{h^2}.$$
- Na str. 24, předposledním řádku má být
$$\frac{u''(x+h) - 2''u(x) + u''(x-h)}{h^2}$$
namísto
$$\frac{u''(x+h) - 2u''(x) - u''(x-h)}{h^2}.$$
- Na str. 25, ř. 9 zdola má být $\min\{\mathbf{U} - \mathbf{\Phi}, \mathbb{B}\mathbf{U} - \mathbf{\Psi}\}$ namísto $\min\{\mathbf{U} - \mathbf{\Phi}, \mathbf{U} - \mathbf{\Psi}\}$.
- Jak je v modelových příkladech voleno počáteční přiblížení x^0? Pomocí jakého řešiče jsou realizovány systémy (1.25) při počítání Newtonových iterací?
- Pro lepší představu by bylo vhodné k tabulkám podkapitoly 2.3 uvést počty neznámých odpovídajících jednotlivým délkám kroku h.
- Podle věty 8 by mohlo v uvedených příkladech při použití přesné aritmetiky docházet k nalezení přesného řešení v konečném počtu kroků. Jaký je skutečný průběh numerické konvergence?
- Co se stane v příkladu s $\varphi(x) = x^2 - 101$, $f = -4.5$, $h = 0.02$ zaznačeném stručně pomlčkou v tabulce 2.3 vpravo dole?

Celkově práce jistou hodnotu má, navíc autorka prokázala dostatečné porozumění dané problematice. Proto **doporučuji uznat předloženou práci jako práci bakalářskou.**

Přerov 22. srpna 2011

Tomáš Ligurský