Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zuzana Dortová

Kónická optimalizace: teorie a aplikace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Ing. Miloš Kopa Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2011

Děkuji RNDr. Ing. Miloši Kopovi Ph.D. za vedení práce a pomoc s jejím zpracováním.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2.8.2011 Podpis autora

Název práce: Kónická optimalizace: teorie a aplikace

Autor: Zuzana Dortová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa Ph.D.

Abstrakt: Tato práce pojednává o úlohách kónického programování druhého řádu (SOCP). Tyto úlohy jsou speciální třídou semidefinitního programování. V práci jsou shrnuté základní definice, vlastnosti a tvrzení známé o těchto úlohách. Velká pozornost je věnována metodám řešení SOCP úloh. V poslední části práce jsou formulovány některé úlohy matematického programování (lineární programování, kvadratické programování...) jako speciální případy úloh SOCP.

Klíčová slova: kuželové programování druhého řádu, kónická optimalizace, Newtonova metoda, problémy minimalizující normy

Title: Conic optimization: theory and applications

Author: Zuzana Dortová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa Ph.D.

Abstract: This work discusses the second-order cone programming (SOCP) problems, that are a special case of semidefinite programming. The work summarized basic definitions, properties and claims known about this topic. Special attention is paid to methods of solving SOCP problems. In the last part of the paper some well-known mathematical programming problems (linear programming, quadratic programming, ...) as special cases of SOCP problems are formulated.

Keywords: second order cone programming, conic optimization, Newton's method, norm minimization problems

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Optimalizační úlohy jsou úlohy, které minimalizují anebo maximalizují hodnotu nějaké funkce za daných podmínek. Optimalizačním úlohám se také říká úlohy matematického programování. Optimalizační úlohy se dělí do několika tříd podle tvaru účelové funkce (funkce, která je minimalizována, anebo maximalizována) a tvaru omezujících podmínek. Pokud účelová funkce i omezující podmínky jsou lineární, jedná se o úlohu lineárního programování. Pokud je účelová funkce kvadratická a příslušná matice pozitivně semidefinitní, ale podmínky jsou lineární, jedná se o úlohu kvadratického programování. Pokud účelová funkce i omezující podmínky jsou hladké a nelineární, jedná se o úlohu nelineárního programování. O výše uvedených druzích optimalizačních úloh pojednává [5]. Úlohy, jejichž proměnné nabývají pouze celočíselných hodnot, jsou nazývány úlohami celočíselnými. Příklad takovéto úlohy lze najít v [7]. Úlohy, které v omezujících podmínkách kladou požadavek na semidefinitnost nějaké matice, jsou úlohami semidefinitního programování. O úlohách SDP pojednává [6]. Úlohami kónického programování (což je speciální třída úloh SDP) jsou nazývány úlohy, kde se v některé z podmínek vyskytuje kužel, tj. norma vektoru skládajícího se z několika proměnných je shora omezena jinou proměnnou. Úlohy kuželového programování druhého řádu, jež lze najít např v [1], [4], jsou úlohy kuželového programování, jejichž kužely jsou zavedeny pomocí Eukleidovské normy.

Tato práce se zabývá úlohami kuželového programování druhého řádu. Shrnuje základní definice a poznatky o vlastnostech úloh kuželového programování druhého řádu, dále se zabývá řešitelností a způsoby řešení těchto úloh a uvádí, pro jaké speciální volby parametrů vychází SOCP jako lineární či kvadratické programování.

Po úvodní kapitole následuje zavedení základních pojmů, definic a uvedení vět a některých vlastností používaných výrazů. V další kapitole se práce zabývá problémem řešitelnosti SOCP a uvádí základní metody řešení úloh spadajících pod SOCP. Další kapitola uvádí různé druhy úloh, které jsou speciálními případy SOCP.

Kapitola 2

Zavedení úloh pro SOCP

Matematické programování se zabývá řešením optimalizačních úloh, tj. úloh minimalizující (resp. maximalizující) nějakou funkci za určitých omezujících podmínek. Kuželové programování druhého řádu se zabývá jedním z mnoha druhů optimalizačních úloh, a to úlohami kuželového programování, kde některé proměnné shora omezují Euklidovskou normu jiných proměnných.

2.1 Definice a pojmy

Nejprve zavedeme značení a zadefinujeme některé výrazy. Nebude-li uvedeno jinak, definované pojmy odpovídají pojmům z [1].

Pro oddělení první složky vektoru zavedeme značení $\mathbf{x} = (x_0, \underline{\mathbf{x}})$.

$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1{}^T & \cdots & \mathbf{x}_r{}^T \end{pmatrix}^T$ budeme značit $(\mathbf{x}_1; ...; \mathbf{x}_r)$.

Značením A$\geq$ 0 budeme značit, že matice A je pozitivně semidefinitní.
Značením A>0 budeme značit, že matice A je pozitivně definitní.

Definice 2.1. *Kartézský součin množin* A a B kde $A, B \subseteq R$ je $A \times B = \{(\mathbf{x}; \mathbf{y}) | \ \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$

Definice 2.2. *Kartézský součin* dvou *matic* A a B je $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$

Definice 2.3. *Eukleidovská norma vektoru* $\mathbf{x} = (x_1; ...; x_n)$ je $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Definice 2.4. *Kužel druhého řádu (Lorentzův kužel)* je $K_n = \{(x_0; \underline{\mathbf{x}}) \in R^n | \ x_0 \geq \|\underline{\mathbf{x}}\|\}$ kde $\|\|$ je Eukleidovská norma ($K_1 = \{x \in R | x \geq 0\}$).

Definice 2.5. *Hranice kuželu* K_n je bd $K_n = \{(x_0; \underline{\mathbf{x}}) \in R^n | \ x_0 = \|\underline{\mathbf{x}}\|, \mathbf{x} \neq 0\}$

Definice 2.6. *Vnitřek kuželu* K_n je int $K_n = \{(x_0; \underline{\mathbf{x}}) \in R^n | \ x_0 > \|\underline{\mathbf{x}}\|\}$

Definice 2.7. *Vnitřní bod kuželu* K_n je $\mathbf{x} \in \text{int } K_n$.

Definice 2.8. *Duální kužel* ke kuželu K_n je $K_n^* = \{\mathbf{z} | \ \mathbf{x}^T\mathbf{z} \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in K_n\}$

Definice 2.9. *Bodový kužel* je $K \subset R^n$ pro který platí $K \cap (-K) = \{\mathbf{0}\}$

Definice 2.10. *Ortogonální doplněk množiny* L je $L^\perp = \{\mathbf{u} \in R^n | \ \mathbf{u}^T\mathbf{y} = 0 \ \forall \mathbf{y} \in L\}$

Definice 2.11. *Jádro matice* A je Ker(A)=$\{\mathbf{x} | \ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

Definice 2.12. *Vnitřní součin* čtvercových *matic* $n \times n$ *A*= (a_{ij}) *a B*= (b_{ij}) *je* $\mathrm{A} \bullet \mathrm{B} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$*, kde* a_{ij} *(resp.* b_{ij}*) je prvek matice A (resp.B) v i-tém řádku a j-tém sloupci. Toto značení vnitřního součinu je přejato z [7].*

Množinu symetrických pozitivně semidefinitních matic $n \times n$ označíme S^n stejně jako v [6].

Semidefinitní programování se zabývá úlohami, které v omezujících podmínkách kladou požadavek na semidefinitnost některých matic. Úloha semidefinitního programování má tvar:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathrm{C} \bullet \mathrm{X} \\ \text{za podmínek} & (\mathrm{A}_1 \bullet \mathrm{X}; ...; \mathrm{A}_r \bullet \mathrm{X}) = \mathbf{b} \\ & \mathrm{X} \geq 0 \end{array}$$

Duální úloha k této úloze má tvar:

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_i^m \mathbf{b}_i\mathbf{y}_i \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^m \mathbf{y}_i\mathrm{A}_i + \mathrm{Z} = \mathrm{C} \\ & \mathrm{Z} \geq 0 \end{array}$$

kde X, Z, C, $\mathrm{A}_i \in S^n, i = 1...r$, **b, y** $\in R^m$**.** Zavedení úlohy SDP je převzato z [6].

Kuželové programování druhého řádu je speciálním případem úloh SDP. Úloha SDP je úlohou SOCP, když matice X má tvar $\begin{pmatrix} x_0\mathrm{I} & \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{x}}^T & x_0 \end{pmatrix}$, kde I značí jednotkovou matici. To ukážeme v kapitole 2.2.

Standardní forma úlohy kuželového programování druhého řádu má tedy tvar:

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{i=1}^r \mathbf{c}_i^T\mathbf{x}_i \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^r \mathrm{A}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_i \in K_{n_i}, i = 1...r \end{array}$$

Tuto úlohu budeme nazývat *primární úlohou.*
Duální úloha k této úloze má tvar:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{za podmínek} & \mathrm{A}_i^T\mathbf{y} + \mathbf{z}_i = \mathbf{c}_i, \ i = 1...r \\ & \mathbf{z}_i \in K_{n_i}^*, \ i = 1...r \end{array}$$

kde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (\mathbf{x}_1; ...; \mathbf{x}_r) \\
\mathbf{z} &= (\mathbf{z}_1; ...; \mathbf{z}_r) \\
\mathbf{c} &= (\mathbf{c}_1; ...; \mathbf{c}_r),\ \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{c}_i \in R^{n_i} \\
\mathrm{A} &= (\mathrm{A}_1; ...; \mathrm{A}_r),\ \mathrm{A}_i \in R^{m \times n_i} \\
n &= \sum_{i=1}^{r} n_i \\
K &= \times_{i=1}^{r} K_{n_i}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{b}, \mathbf{y} \in R^m$$

Přičemž předpokládáme, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé a existují ostře přípustná řešení ve smyslu definice 2.13 a 2.14 .

Výrazem $x_{i,j}$ budeme mínit j-tý řádek i-té části vektoru $\mathbf{x}$.

Výrazem $x_{i,a...b}$ budeme značit a-tý až b-tý řádek i-té části vektoru $\mathbf{x}$.

Definice 2.13. Vektor $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; ...; \mathbf{x}_r)$ je *primárně přípustné řešení,* když $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{A}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \in K_{n_i}\ i = 1...r$.

Definice 2.14. Vektory $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1; ...; \mathbf{z}_r)$ jsou *duálně přípustné řešení,* když $\mathrm{A}_i^T \mathbf{y} + \mathbf{z}_i = \mathbf{c}_i, \mathbf{z}_i \in K_{n_i}^*\ i = 1...r$.

Definice 2.15. Úloha je *primárně přípustná*, když existuje primárně přípustné řešení.

Definice 2.16. Úloha je *duálně přípustná*, když existuje duálně přípustné řešení.

Definice 2.17. Vektor $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; ...; \mathbf{x}_r)$ je *primárně ostře přípustné řešení,* když $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{A}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \in \mathrm{int}\ K_{n_i}\ i = 1...r$.

Definice 2.18. Vektory $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1; ...; \mathbf{z}_r)$ jsou *duálně ostře přípustné řešení,* když $\mathrm{A}_i^T \mathbf{y} + \mathbf{z}_i = \mathbf{c}_i, \mathbf{z}_i \in \mathrm{int}\ K_{n_i}^*\ i = 1...r$.

Definice 2.19. Úloha je *primárně ostře přípustná*, když existuje primárně ostře přípustné řešení.

Definice 2.20. Úloha je *duálně ostře přípustná*, když existuje duálně ostře přípustné řešení.

Definice 2.21. *Optimální řešení primární úlohy* je $p^* = \inf_{\mathbf{x}}\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} |\ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in K\}$.

Definice 2.22. *Optimální řešení duální úlohy* je $d^* = \sup_{(\mathbf{y},\mathbf{z})}\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} |\ \mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{z} \in K^*\}$.

Pokud je primární úloha nepřípustná je $p^* = \infty$.

Pokud je duální úloha nepřípustná je $d^* = \infty$.

Definice 2.23. *„Duality gap“* je $\eta = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{y}$, kde $\mathbf{x}$ je primárně přípustné řešení a ($\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$) je duálně přípustné řešení.

Definice 2.24. *Komplementární skluzovost (complementary slackness)* je $\mathbf{x}^T\mathbf{z}$, kde $\mathbf{x}$ je primárně přípustné řešení a ($\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$) je duálně přípustné řešení.

Definice 2.25. *Primární rezidua* jsou $\mathbf{r}_p = \mathrm{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$

Definice 2.26. *Duální rezidua* jsou $\mathbf{r}_d = \mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{c}$

Definice 2.27. *Šipkotvará matice (arrow-shaped) vektoru* $\mathbf{x} = (x_0; \underline{\mathbf{x}}) \in R^n$ má tvar Arw($\mathbf{x}$)= $\begin{pmatrix} x_0 & \underline{\mathbf{x}}^T \\ \underline{\mathbf{x}} & x_0\mathrm{I} \end{pmatrix}$

Nyní zavedeme speciální násobení vektorů pomocí operátoru $\circ$ tak, že $\mathbf{x}_i \circ \mathbf{x}_j = (\mathbf{x}_i{}^T\mathbf{x}_j; x_{i,0}x_{j,1} + x_{j,0}x_{i,1}; ...; x_{i,0}x_{j,n} + x_{j,0}x_{i,n}) = \mathrm{Arw}(\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_j$

Pro $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; ...; \mathbf{x}_r)$ budeme rozumět:

- šipkotvarou maticí kartézský součin jednotlivých šipkotvarých matic (Arw($\mathbf{x}$)=Arw($\mathbf{x}_1$) $\oplus$ ... $\oplus$ Arw($\mathbf{x}_r$))
- jednotkovým vektorem vektor skládající se z jednotkových vektorů jednotlivých částí $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_{n_1}; ...; \mathbf{e}_{n_r})$, kde $\mathbf{e}_{n_i} = (1; 0; ...; 0)$ je n_i složkový vektor.

Definice 2.28. *Charakteristický polynom vektoru* $\mathbf{x}$ je

$$p(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda^2 - 2x_0\lambda + (\mathbf{x}_0^2 - \|\underline{\mathbf{x}}\|^2)$$

Definice 2.29. *Vlastními čísly vektoru* $\mathbf{x}$=(x_0; $\underline{\mathbf{x}}$) rozumíme čísla $x_0 \pm \|\underline{\mathbf{x}}\|$, značíme je λ_1, λ_2.

Výrazem $\lambda_i(\mathbf{x}_j), i = 1, 2$ budeme značit vlastní čísla vektoru $\mathbf{x}_j$.

Definice 2.30. *Jordanův rámec vektoru* $\mathbf{x}$ je $\{\frac{1}{2}(1; \frac{\underline{\mathbf{x}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\|}), \frac{1}{2}(1; \frac{-\underline{\mathbf{x}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\|})\}$, jeho prvky značíme $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$.

Definice 2.31. *Spektrální dekompozice vektoru* $\mathbf{x}$ je $\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2$, kde pro i =1,2 jsou λ_i vlastní čísla $\mathbf{x}$ a $\mathbf{c}_i$ Jordanův rámec $\mathbf{x}$.

Definice 2.32. *Stopou vektoru* $\mathbf{x}$ rozumíme součet jeho vlastních čísel: tr($\mathbf{x}$)=

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2x_0$$

Definice 2.33. *Determinantem vektoru* $\mathbf{x}$ rozumíme součin jeho vlastních čísel: det($\mathbf{x}$)=$\lambda_1\lambda_2 = x_0^2 - \|\underline{\mathbf{x}}\|^2$

Definice 2.34. *Frobeniova norma vektoru* $\mathbf{x}$ je

$$\|\mathbf{x}\|_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \sqrt{(x_0 + \|\underline{\mathbf{x}}\|)^2 + (x_0 - \|\underline{\mathbf{x}}\|)^2}$$

$= \sqrt{x_0^2 + 2x_0\|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + x_0^2 - 2x_0\|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{x}}\|^2} = \sqrt{2x_0^2 + 2\|\underline{\mathbf{x}}\|^2} = \sqrt{2(x_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2)} = \sqrt{2}\|\mathbf{x}\|$

Definice 2.35. *Norma druhého řádu* vektoru $\mathbf{x}$ je $\|\mathbf{x}\|_2 = \max\{\|\lambda_1\|, \|\lambda_2\|\}$

Definice 2.36. *Inverzní vektor k vektoru* $\mathbf{x}$ je $\mathbf{x}^{-1} = \lambda_1^{-1}\mathbf{c}_1 + \lambda_2^{-1}\mathbf{c}_2 = \frac{\mathrm{R}\mathbf{x}}{\det(\mathbf{x})}$ pro $\mathbf{x}$, $\det(\mathbf{x}) \neq 0$, kde R je zavedeno v definici 2.39.

Definice 2.37. *Hodnotou funkce* f *ve vektoru* $\mathbf{x}$ myslíme vektor $\mathrm{f}(\mathbf{x})=\mathrm{f}(\lambda_1)\mathbf{c}_1+\mathrm{f}(\lambda_2)\mathbf{c}_2$ pro $\mathrm{f}(\lambda_i) < \infty, i = 1, 2$.

Definice 2.38. Řekneme, že *vektory* $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ spolu *komutují*, jestliže mají stejný Jordanův rámec.

Definice 2.39. Řekneme, že *matice* A a B spolu *komutují*, když AB=BA.

Pro $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1; ...; \mathbf{x}_r)$ označme $\mathrm{R}=\mathrm{R}_{n_1}\oplus \dots \oplus \mathrm{R}_{n_r}$, kde

$$\mathrm{R}_{n_i}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \text{ je matice dimenze } n_i \times n_i, i = 1...r\ .$$

Tato matice odpovídá matici R v [1], přestože tam není explicitně zavedena.

Definice 2.40. *Kvadratická reprezentace vektoru* $\mathbf{x}$ je

$$\mathrm{Q}_{\mathbf{x}} = 2\mathrm{Arw}^2(\mathbf{x}) - \mathrm{Arw}(\mathbf{x}^2) = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\|^2 & 2x_0\underline{\mathbf{x}}^T \\ 2x_0\underline{\mathbf{x}} & 2x_0\det(\mathbf{x})\mathrm{I} + 2\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{x}}^T \end{pmatrix}$$

$= (2\mathbf{x}\mathbf{x}^T - \det(\mathbf{x})\mathrm{R})$

Označme $\mathbf{x}^{1/2} = \lambda_1^{1/2}\mathbf{c}_1 + \lambda_2^{1/2}\mathbf{c}_2$ pro $\mathbf{x} \in K$.

Pro $\mathbf{x}^{1/2}$ je $\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}} = \begin{pmatrix} x_0 & \underline{\mathbf{x}}^T \\ \underline{\mathbf{x}} & 2\det^{1/2}(\mathbf{x})\mathrm{I} + \frac{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{x}}^T}{\det^{1/2}(\mathbf{x})+x_0} \end{pmatrix}$

Zavedeme značení $\mathbf{w_i}=\mathrm{Q}_{\mathbf{x_i}^{1/2}}\mathbf{z_i}, \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1; ...; \mathbf{w}_r)$

Vyjádření některých pojmů pro vektor složený z podvektorů:
Pro $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; ...; \mathbf{x}_r)$ $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1; ...; \mathbf{z}_r)$, $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in R^{n_i}, i = 1...r$ je

- $\mathbf{x} \circ \mathbf{z} = (\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{z}_1; ...; \mathbf{x}_r \circ \mathbf{z}_r)$
- $\mathrm{Arw}(\mathbf{x}) = \mathrm{Arw}(\mathbf{x}_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Arw}(\mathbf{x}_r)$
- $\mathrm{Q}_{\mathbf{x}} = \mathrm{Q}_{\mathbf{x}_1} \oplus ... \oplus \mathrm{Q}_{\mathbf{x}_r}$
- $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1; ...; \mathbf{w}_r)$
- $p(\lambda, \mathbf{x}) = \Pi_{i=1}^r p_i(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$
- $\mathbf{x}$ má $2r$ vlastních čísel, $\lambda(\mathbf{x}) = \cup_{j=1}^2 \cup_{i=1}^r \lambda_j(\mathbf{x}_i)$.

- $K = K_{n_1} \times ... \times K_{n_r}$
- $\|\mathbf{x}\|_F^2 = \sum_{i=1}^r \|\mathbf{x}_i\|_F^2$
- $\|\mathbf{x}\|_2 = \max_{i=1}^r \|\mathbf{x}_i\|_2$
- $\mathbf{x}^t = (\mathbf{x}_1^t; ...; \mathbf{x}_r^t)$ pro $t \in R$, kde $\mathbf{x}_i{}^t = \lambda_1^t \mathbf{c}_1 + \lambda_2^t \mathbf{c}_2$
- $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ komutují, právě když $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{y}_i$ komutují $\forall i$.

Definice 2.41. Pro $\mathbf{x}$ z int K zavedeme *bariérovou funkci* $\phi(\mathbf{x})$=-ln(det($\mathbf{x}$)). Pro $\mathbf{x} \notin$ int K ji dodefinujeme nekonečnem.

Definice 2.42. *Otočený kvadratický kužel* K je $\hat{K} = \{\mathbf{x} = (x_0; x_1; \hat{\mathbf{x}}) \in R \times R \times R^{n_i-2} |\ 2x_0x_1 \geq \|\hat{\mathbf{x}}\|^2, x_0, x_1 \geq 0\}$

Pro $\mathbf{p} \in$ int K budeme značit

$$\mathbf{u}^{\sim} = \mathrm{Q}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\sim} = \mathrm{Q}_{\mathbf{p}^{-1}}\mathbf{u} \tag{2.1}$$

Definice 2.43. Řekneme, že ($\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$) splňuje *ostrou komplementaritu*, pokud $\mathbf{x} + \mathbf{z} \in$ int K.

2.2 Vlastnosti a věty

Nyní uvedeme některé věty a vlastnosti zavedených výrazů.

Vyjádření pomocí kuželu: Pro vektor $\mathbf{x}$ lze $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq kl\ k, l \geq 0$ vyjádřit ekvivalentně jako $\|(2\mathbf{x}; k - l)\| \leq k + l$.

Důkaz:

$$k + l \geq \|(2\mathbf{x}; k - l)\|$$
$$k + l \geq \sqrt{(2x_0)^2 + ... + (2x_n)^2 + (k - l)^2)}$$
$$k + l \geq \sqrt{4({x_0}^2 + ... + {x_n}^2) + k^2 - 2kl + l^2}$$
$$(k + l)^2 \geq 4({x_0}^2 + ... + {x_n}^2) + k^2 - 2kl + l^2$$
$$k^2 + 2kl + l^2 \geq 4({x_0}^2 + ... + {x_n}^2) + k^2 - 2kl + l^2$$
$$4kl \geq 4({x_0}^2 + ... + {x_n}^2)$$
$$kl \geq ({x_0}^2 + ... + {x_n}^2) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$$

Nezápornost k a l vyplývá z nezápornosti normy.

Lemma: Lorentzův kužel je samoduální ($K = K^*$).

Proto můžeme od této chvíle psát $\mathbf{z} \in K$ místo $\mathbf{z} \in K^*$. Výše uvedené tvrzení lze bez důkazu najít v [1].

Vlastnosti součinu $\circ$:

1) Když $\mathbf{z} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$, pak $\mathbf{x} \circ (a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a\mathbf{x} \circ \mathbf{y} + b\mathbf{x} \circ \mathbf{z}$ a $(a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) \circ \mathbf{x} = a\mathbf{y} \circ \mathbf{x} + b\mathbf{z} \circ \mathbf{x} \ \ \forall a, b \in R$

2) $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}$

3) $\mathbf{x} \circ \mathbf{e} = \mathbf{x}$ pro kanonický vektor $\mathbf{e}$ =(1;**0**)

4) Pro $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} \circ \mathbf{x}$ matice Arw($\mathbf{x}$) a Arw($\mathbf{x}^2$) komutují, tedy pro každé $\mathbf{y} \in R^2$ je $\mathbf{x} \circ (\mathbf{x}^2 \circ \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 \circ (\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$.

5) $\circ$ není asociativní pro $n > 2$. Ale pro libovolné p, q $\in R$ platí $\mathbf{x}^p \circ \mathbf{x}^q = \mathbf{x}^{p+q}$

Důkaz lze nalézt v [1].

Vlastnosti šipkotvaré matice:

Bod $\mathbf{x}_i \ \in K$, právě když Arw($\mathbf{x}$) je pozitivně semidefinitní.

Bod $\mathbf{x}_i \in \text{int } K$, právě když Arw($\mathbf{x}$) je pozitivně definitní.

Arw($\mathbf{x}$) je pozitivně semidefinitní, právě když $\mathbf{x}$=**0** nebo

$$x_0 > 0 \text{ a } x_0 - \underline{\mathbf{x}}^T (x_0 \mathrm{I})^{-1} \underline{\mathbf{x}} \geq 0$$

Informaci obsaženou v tomto tvrzení lze najít v [1], přestože v uvedeném zdroji není uvedena ve větě.

Vlastnosti Jordanova rámce pro spektrální dekompozici : Nechť $\mathbf{x}$=$\lambda_1\mathbf{c}_1+ \lambda_2\mathbf{c}_2$. Pak platí:

- $\mathbf{c}_1 \circ \mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$
- $\mathbf{c}_i^2 = \mathbf{c}_i, i = 1, 2$
- $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{e}$
- $\mathbf{c}_1 = \mathrm{R}\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2 = \mathrm{R}\mathbf{c}_1$
- $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \text{bd } K$

Každý Jordanův rámec má tvar $(\frac{1}{2}(1; \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}); \frac{1}{2}(1; \frac{-\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}))$, tj. vektory

$$(\frac{1}{2}; \pm\mathbf{c}), \text{ kde} \|\mathbf{c}\| = \frac{1}{2}$$

Každá dvojice vektorů $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, pro kterou platí

- $\mathbf{c}_1 \circ \mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$
- $\mathbf{c}_i^2 = \mathbf{c}_i, i = 1, 2$
- $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{e}$

tvoří Jordanův rámec. Všechna výše uvedená tvrzení o Jordanově rámci lze najít v [1].

Vlastnosti spektrální dekompozice:

Nechť $\mathbf{x}$ má spektrální dekompozici $\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2$. Pak:

1) $\mathrm{Arw}(\mathbf{x})$ a $\mathrm{Q}_{\mathbf{x}}$ komutují a mají stejné vlastní vektory

2) λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla $\mathrm{Arw}(\mathbf{x})$. Když $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak každé z nich má násobnost 1. x_0 je vlastní číslo $\mathrm{Arw}(\mathbf{x})$ a pro $\mathbf{x} \neq 0$ je jeho násobnost $n-2$.

3) λ_1^2, λ_2^2 jsou vlastní čísla $\mathrm{Q}_{\mathbf{x}}$. Když $\lambda_1 \neq \lambda_2$, každé má násobnost 1. Determinant $\mathbf{x}$ je vlastní číslo $\mathrm{Q}_{\mathbf{x}}$ a pro $\mathbf{x}$ s nenulovým determinantem a s různými vlastními čísly má násobnost $n-2$.

Důkaz lze nalézt v [1].

Vztahy komutativních objektů: Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ komutují

2) $\mathrm{Arw}(\mathbf{x})$ a $\mathrm{Arw}(\mathbf{y})$ komutují

3) $\mathrm{Q}_{\mathbf{x}}$ a $\mathrm{Q}_{\mathbf{y}}$ komutují.

Důkaz lze nalézt v [1].

Charakterizace komutujících vektorů: Vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ spolu komutují, právě když $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, nebo $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, anebo když $\underline{\mathbf{x}} = \alpha \underline{\mathbf{y}}$ pro $\alpha \in \mathrm{R}$. Důkaz lze nalézt v [1].

Vlastnosti operátoru Q : Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u} \in R^n$, kde $\det(\mathbf{x}) \neq 0$, $\alpha \in R$, a t je celé číslo, je

1)$\mathrm{Q}_{\alpha \mathbf{y}} = \alpha^2 \mathrm{Q}_{\mathbf{y}}$

2)$\mathrm{Q}_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}, \mathrm{Q}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{-1}$

3)$\mathrm{Q}_{\mathbf{y}} \mathbf{e} = \mathbf{y}^2$

4)$\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^t} = \mathrm{Q}_{\mathbf{x}}^t$

5)Pro $\mathbf{y}$, $\det(\mathbf{y}) \neq 0$ je $(\mathrm{Q}_{\mathbf{x}} \mathbf{y})^t = \mathrm{Q}_{\mathbf{x}^t} \mathbf{y}^t$

6)$\nabla_{\mathbf{x}}(\ln(\det(\mathbf{x}))) = 2\mathbf{x}^{-1}, \nabla_{\mathbf{x}}^2(\ln(\det(\mathbf{x}))) = -2\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1}}$

7)$\mathrm{Q}_{\mathrm{Q}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}} = \mathrm{Q}_{\mathbf{y}} \mathrm{Q}_{\mathbf{x}} \mathrm{Q}_{\mathbf{y}}$

8)$\det(\mathrm{Q}_{\mathbf{x}} \mathbf{y}) = \det^2(\mathbf{x}) \det(\mathbf{y})$

Důkaz lze nalézt v [1].

Lema o slabé dualitě: Když $\mathbf{x}$ je primárně přípustné řešení a ($\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$) je duálně přípustné řešení, pak duality gap $\eta = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{y} = \mathbf{z}^T \mathbf{x} \geq 0$

Důkaz lze nalézt v [2].

Podmínky komplementarity: Mějme primárně přípustné řešení $\mathbf{x}$ a duálně přípustné řešení $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Pak $\mathbf{z}^T \mathbf{x} = 0$, právě když $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{y} = 0$. Pro všechna $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ taková, že $\mathbf{z}^T \mathbf{x} = 0$, je $\mathbf{x}$ primárně optimální řešení a $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ duálně optimální řešení.

Důkaz lze nalézt v [2].

Nutná a postačující podmínka pro podmínku komplementarity: Pro $\mathbf{x}$ a $\mathbf{z}$ z K je $\mathbf{x}^T \mathbf{z} = 0$, právě když $\mathbf{x}_i \circ \mathbf{z}_i = \mathrm{Arw}(\mathbf{x}_i) \mathrm{Arw}(\mathbf{z}_i) \mathbf{e} = 0, i = 1....r$, což je ekvivalentní s tím, že

1) $\mathbf{x}_i^T\mathbf{z}_i = x_{i0}^T z_{i0} + \underline{\mathbf{x}}_i^T\underline{\mathbf{z}}_i = 0$ pro $i = 1....r$
2)$x_{i0}\underline{\mathbf{z}}_i + z_{i0}\underline{\mathbf{x}}_i = 0$, $i = 1....r$

Důkaz lze nalézt v [1].

Věta o dualitě: Mějme primární úlohu P a duální úlohu D. Nechť existuje vnitřní přípustný bod problému P a hodnota účelové funkce je omezena na primárně přípustné množině. Pak duální problém je řešitelný a optimální řešení P a D dávají stejnou hodnotu účelové funkce. Když je problém D ostře přípustný, pak jsou oba problémy řešitelné, $\eta = 0$ a řešení ($\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$) je optimální, právě když $\mathbf{z}^T\mathbf{x} = 0$.

Pokud P nebo D je přípustná, pak $p^* = d^*$

Tvzení je převzato z [1].

Podmínky optimality: Když P a D mají ostře přípustná řešení, pak ($\mathbf{x}$,($\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$)) je optimální dvojice řešení, právě když: A$\mathbf{x}$=$\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in K$,
$\mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{z} \in K$
$\mathbf{x} \circ \mathbf{z} = \mathbf{0}$

Důkaz lze naléz v [1].

Vlastnosti bariérové funkce: Bariérová funkce $\phi(x_0, \underline{\mathbf{x}})$ (viz definice 2.41) je konečná, právě když $\mathbf{x} \in$ int K a konverguje k nekonečnu když se $\mathbf{x}$ blíží k bd K.

Derivace bariérové funkce je $\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}) = \frac{2}{x_0^2 - \underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\mathbf{x}}; -x_0)$. Hessova matice bariérové funkce je $\nabla_{\mathbf{x}}^2\phi(\mathbf{x}) = \frac{2}{(x_0^2 - \underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{x}})^2}\begin{pmatrix} (x_0^2 - \underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{x}})\mathrm{I} + 2\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{x}}^T & -2x_0\underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{x}}^T & (x_0^2 + \underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{x}})^2 \end{pmatrix}$.

Vlastnosti bariérové funkce lze nalét v [4].

Kapitola 3

Metody řešení SOCP

3.1 Centrální míry

Nejprve zavedeme centrální míry stejně jako v [1]. Pomocí nich se zavádějí centrální cesty:

$d_F(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \|\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}}\mathbf{z} - \mu\mathbf{e}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}[(\lambda_1(\mathbf{w}_i) - \mu)^2 + (\lambda_2(\mathbf{w}_i) - \mu)^2]}$

$d_2(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \|\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}}\mathbf{z} - \mu\mathbf{e}\|_2 = \max_{i=1\ldots r}\{\|\lambda_1(\mathbf{w}_i) - \mu\|, \|\lambda_2(\mathbf{w}_i) - \mu\|\}$

$d_{-\infty}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mu - \min_{i=1\ldots r}\{\lambda_1(\mathbf{w}_i), (\lambda_2(\mathbf{w}_i)\}$

Zavedeme ještě vzdálenost bodů **u** a **v** stejně jako v [3],
tedy dist(**u**, **v**)=min$\{\sum_{i=1}^{2r}(\sqrt{u_i} - \sqrt{v_i})^2\}$

3.2 Centrální cesty

Nyní zavedeme centrální cesty. Centrální cesta se používá v metodách následující cestu. Centrální cestu lze zavést různými způsoby:

1. způsob : $\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\|\mathbf{x},\mathbf{z} \in \operatorname{int} K,\ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{x}\circ\mathbf{z} = 2\mu\mathbf{e}, \mu > 0\}$
2. způsob : $\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\|\mathbf{x},\mathbf{z} \in \operatorname{int} K,\ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c},$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda_2((\mathbf{x}_1{\mathbf{x}_1}^T - \det(\mathbf{x}_1)\mathrm{R})\mathbf{z}_1); \lambda_1((\mathbf{x}_1{\mathbf{x}_1}^T - \det(\mathbf{x}_1)\mathrm{R})\mathbf{z}_1); ...;$$

$\lambda_2((\mathbf{x}_r{\mathbf{x}_r}^T - \det(\mathbf{x}_r)\mathrm{R})\mathbf{z}_r); \lambda_1((\mathbf{x}_r{\mathbf{x}_r}^T - \det(\mathbf{x}_r)\mathrm{R})\mathbf{z}_r)) = \mu(1; ....; 1), \mu > 0\}$

3. způsob : $\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\|\mathbf{x},\mathbf{z} \in \operatorname{int} K,\ \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{z}_{i,j} = \mathbf{x}_{i,j}^{-1}\mu, \mu > 0\}$

Centrální cesta zavedena prvním způsobem je použita v [1]. Další způsoby vycházejí ze zavedení v [3], ale zužujeme je na **x** a **z** z vnitřku kuželu.

3.3 Okolí

Nyní zavedeme okolí:

$$N_F(\gamma) = \{(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) | \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathrm{int}\ K, d_F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) <= \gamma\mu\}$$

$$N_2(\gamma) = \{(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) | \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathrm{int}\ K, d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) <= \gamma\mu\}$$

$$N_{-\infty}(\gamma) = \{(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) | \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathrm{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathrm{int}\ K, d_{-\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) <= \gamma\mu\}$$

$$N_2^2(\gamma) = \{\mathbf{v} \in R^{2r} |\ \|\mathbf{v} - \mu(1;...;1)\| \leq \gamma\mu, \mu = \sum_{i=1...2r} \frac{v_i}{r}\}$$

$$N_{-\infty}^2(\gamma) = \{\mathbf{v} \in R^{2r} |\ v_j \geq \gamma\mu\ \forall j, \mu = \sum_{i=1...2r} \frac{v_i}{r}, \mu > 0\}$$

$$N^{WR}(\gamma, \beta) = \{\mathbf{v} \in R_+^{2r} |\ \mathrm{dist}(N_{-\infty}(\gamma), \mathbf{v}) \leq \gamma\mu\beta, \mu = \sum_{i=1...r} \frac{v_i}{r}, \mu > 0\}$$

Kde první tři okolí odpovídají okolím z [1] a poslední tři okolí z [3].

Úprava úloh:

Mějme dvojici primární a duální úlohy P a D. Přidáním bariérové funkce do úlohy P dostaneme úlohu $P(\mu)$:

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{i=1}^r \mathbf{c}_i^T\mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^r \ln(\det(\mathbf{x}_i)) \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^r \mathrm{A}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_i \in K_{n_i}, i = 1...r \end{array}$$

Duální úloha k $P(\mu)$ je $D(\mu)$:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} + \mu \sum_{i=1}^r \ln(\det(\mathbf{z}_i)) \\ \text{za podmínek} & \mathrm{A}_i^T\mathbf{y} + \mathbf{z}_i = \mathbf{c}_i, i = 1...r \\ & \mathbf{z}_i \in K_{n_i}, i = 1...r \end{array}$$

Řešení úlohy $P(\mu)$ řeší soustavu:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^r \mathrm{A}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b} \\ \mathrm{A}_i^T\mathbf{y} + 2\mathbf{z}_i = \mathbf{c}_i, i = 1...r \\ \mathbf{x}_i \circ \mathbf{z}_i = 2\mu\mathbf{e}_i, i = 1...r \\ \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i \in \mathrm{int}\ K_{n_i}, i = 1...r \end{array} \tag{3.1}$$

3.4 Newtonova metoda

Pomocí Newtonovy metody se z problému $P(\mu)$ vypočítávají směry. Místo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ dosadíme do soustavy (3.1) $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}, \mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}$.

Dostáváme soustavu ve tvaru

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \mathrm{Arw}(\mathbf{z}) & 0 & \mathrm{Arw}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\mathbf{y} \\ \Delta\mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} - A\mathbf{x} \\ \mathbf{c} - A^T\mathbf{y} - \mathbf{z} \\ 2\mu\mathbf{e} - \mathbf{x} \circ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

Užitím Gaussovy eliminace dostaneme Newtonovy směry ve tvaru

$\Delta\mathbf{y} = (A\mathrm{Arw}^{-1}(\mathbf{z})\mathrm{Arw}(\mathbf{x})A^T)^{-1}((\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + A\mathrm{Arw}^{-1}(\mathbf{z})(\mathrm{Arw}(\mathbf{x})(\mathbf{c} - A^T\mathbf{y} - \mathbf{z})) - (2\mu\mathbf{e} - \mathbf{x} \circ \mathbf{z}))$

$\Delta\mathbf{z} = (\mathbf{c} - A^T\mathbf{y} - \mathbf{z}) - A^T\Delta\mathbf{y}$

$\Delta\mathbf{y} = -\mathrm{Arw}^{-1}(\mathbf{z})(\mathrm{Arw}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{z} - (2\mu\mathbf{e} - \mathbf{x} \circ \mathbf{z}))$

Dvojici úloh P a D můžeme upravit pomocí „scalingu“. Zvolíme $\mathbf{p} \in \mathrm{int}\, K$ a dosadíme

$\mathbf{x}^{\sim}$ za $\mathbf{x}$
$\mathbf{c}_{\sim}$ za $\mathbf{c}$
$\mathbf{y}$ za $\mathbf{y}$
$\Delta\mathbf{y}$ za $\Delta\mathbf{y}$
$A_{\sim}$ za A
$\mathbf{z}_{\sim}$ za $\mathbf{z}$
$\Delta\mathbf{x}^{\sim}$ za $\Delta\mathbf{x}$
$\Delta\mathbf{z}_{\sim}$ za $\Delta\mathbf{z}$

podle (2.1) do úloh P a D, čímž dostaneme úlohy $P^{\sim}$ a $D^{\sim}$:

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{i=1}^{r} \mathbf{c}_{\sim i}^T \mathbf{x}_i^{\sim} \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^{r} A_{\sim i}\mathbf{x}_i^{\sim} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_i^{\sim} \in K_{n_i} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{za podmínek} & A_{\sim i}^T\mathbf{y} + \mathbf{z}_{\sim i} = \mathbf{c}_{\sim i},\ i = 1...r \\ & \mathbf{z}_{\sim i} \in K_{n_i},\ i = 1...r \end{array}$$

Aplikací Newtonova systému dostaneme soustavu

$$\begin{pmatrix} A_{\sim} & 0 & 0 \\ 0 & A_{\sim}^T & I \\ \mathrm{Arw}(\mathbf{z}_{\sim}) & 0 & \mathrm{Arw}(\mathbf{x}^{\sim}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x}^{\sim} \\ \Delta\mathbf{y} \\ \Delta\mathbf{z}_{\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} - A_{\sim}\mathbf{x}^{\sim} \\ \mathbf{c}_{\sim} - A_{\sim}^T\mathbf{y} - \mathbf{z}_{\sim} \\ 2\mu\mathbf{e} - \mathbf{x}^{\sim} \circ \mathbf{z}_{\sim} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Lema o soustavách: Směry $(\Delta\mathbf{x}^{\sim}, \Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{z}_{\sim})$ řeší systém rovnic

$A_{\sim}\Delta\mathbf{x}^{\sim} = \mathbf{b} - A_{\sim}\mathbf{x}^{\sim}$

$A_{\sim}^T\Delta\mathbf{y} + \Delta\mathbf{z}_{\sim} = \mathbf{c}_{\sim} - A_{\sim}^T\mathbf{y} - \mathbf{z}_{\sim}$

$\Delta\mathbf{x}^{\sim} \circ \mathbf{z}_{\sim} + \mathbf{x}^{\sim} \circ \Delta\mathbf{z}_{\sim} = 2\mu\mathbf{e} - \mathbf{x}^{\sim} \circ \mathbf{z}_{\sim}$

právě když směry $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{z})$ řeší systém rovnic

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathrm{A}\mathbf{x} \\
&\mathrm{A}^T\Delta\mathbf{y} + \Delta\mathbf{z} = \mathbf{c} - \mathrm{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{z} \\
&(\mathrm{Q}_{\mathbf{p}}\Delta\mathbf{x}) \circ (\mathrm{Q}_{\mathbf{p}^{-1}}\mathbf{z}) + (\mathrm{Q}_{\mathbf{p}}\mathbf{x}) \circ (\mathrm{Q}_{\mathbf{p}^{-1}}\Delta\mathbf{z}) = 2\mu\mathbf{e} - (\mathrm{Q}_{\mathbf{p}}\mathbf{x}) \circ (\mathrm{Q}_{\mathbf{p}^{-1}}\mathbf{z})
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Směry $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{z})$ a $(\Delta\mathbf{x}^{\sim}, \Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{z}_{\sim})$ jsou obecně různé. Pro vhodně zvolené $\mathbf{p}$ v operátoru $\mathrm{Q}_{\mathbf{p}}$ dostaneme směry $\Delta\mathbf{x}^{\sim}$ a $\Delta\mathbf{z}_{\sim}$ takové, že spolu komutují.

Pro $\mathbf{p}$=$\mathbf{e}$ nejsou směry obecně komutativní. Volby $\mathbf{p}$, při nichž jsou směry $\Delta\mathbf{x}^{\sim}$ a $\Delta\mathbf{z}_{\sim}$ komutativní:

Pro $\mathbf{p} = \mathbf{z}^{1/2}$ je $\mathbf{z}_{\sim} = \mathrm{Q}_{\mathbf{p}^{-1}}\mathbf{z} = \mathrm{Q}_{\mathbf{z}^{-1/2}}\mathbf{z} = \mathrm{Q}_{\mathbf{z}^{-1/2}}(\mathbf{z}^{1/2})^2 = \mathrm{Q}_{\mathbf{z}^{-1/2}}\mathrm{Q}_{\mathbf{z}^{1/2}}\mathbf{e} = \mathbf{e}$

Pro $\mathbf{p} = \mathbf{x}^{-1/2}$ je $\mathbf{x}^{\sim} = \mathrm{Q}_{\mathbf{p}}\mathbf{x} = \mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1/2}}\mathbf{x} = \mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1/2}}(\mathbf{x}^{1/2})^2 = \mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1/2}}\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}}\mathbf{e} = \mathbf{e}$

Pro Nesterův Toddův směr $\mathbf{p}$=$[\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}}(\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}}\mathbf{z})^{-1/2}]^{-1/2} = [\mathrm{Q}_{\mathbf{z}^{-1/2}}(\mathrm{Q}_{\mathbf{z}^{1/2}}\mathbf{x})^{1/2}]^{-1/2}$ je

$$\mathrm{Q}_{\mathbf{p}}^2\mathbf{x} = \mathrm{Q}_{\mathbf{p}^2}\mathbf{x} = (\mathrm{Q}_{\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1/2}}(\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}}\mathbf{z})^{1/2}})\mathbf{x} = (\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1/2}}\mathrm{Q}_{(\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}}\mathbf{z})^{1/2}}\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1/2}})\mathbf{x} =$$

$$(\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1/2}}\mathrm{Q}^2_{\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}}\mathbf{z}})\mathbf{e} = (\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{-1/2}}\mathrm{Q}_{\mathbf{x}^{1/2}})\mathbf{z} = \mathbf{z}$$

3.5 Vyšetřování přípustnosti

V úloze P předpokládáme, že matice A má plnou hodnost. Pro vyšetřování přípustnosti nahradíme x_{i0} výrazem $\check{x}_{i0} = x_{i0} + t - 1$,$i = 1...r$. Předpokládejme, že tento bod leží v kuželu K.

Pokud $t \leq 1$, pak $\mathbf{x} \in K$. Pro $t < 1$ $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\ K$, a tedy existuje ostře přípustné řešení.

Pokud $t \geq 1$, pak úloha P nemá přípustné řešení.

Mějme problém FP:

$$\begin{array}{rl}
\min & t \\
\text{za podmínek} & \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} + t\mathbf{e} \in K \\
& t \geq 0
\end{array}$$

Když optimální řešení $t^* > 1$, pak původní problém P je nepřípustný.

Když optimální řešení $t^* < 1$, pak původní problém P je ostře přípustný.

Když optimální řešení $t^* = 1$, pak původní problém P má pouze hraniční optimální řešení.

Pro řešení úlohy FP ji převedeme do standardního tvaru a odvodíme, že optimální řešení úlohy FP_2:

$$\begin{array}{rl} \min & t \\ \text{za podmínek} & \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \check{x}_{i0} - x_{i0} - t = -1, i = 1...r \\ & h = H \\ & (\check{x}_{i0};\ \underline{\check{\mathbf{x}}}_i) \in K, i = 1...r \\ & (h; \mathbf{x}_{1,0}; ...; \mathbf{x}_{r,0}) \in K \\ & t \geq 0 \end{array}$$

je stejné jako u úlohy FP, pokud konstanta H je dostatečně velká.

Jako primární počáteční bod vezmeme řešení lineárního systému FP. Z možných řešení vybereme to s nejmenší $\|\mathbf{x}\|$. Úloha může být řešena jako $\mathrm{AA}^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Poté položíme $\mathbf{x} = \mathrm{A}^T\mathbf{y}$.

Volme např. t=max $\{\frac{1}{2}; \max_i(\|\underline{\mathbf{x}}_i\| - x_{i,0}) + \frac{3}{2}\}$

H= $100\|x_{1,0}; ...; x_{r,0}\| + 1$, což zajistí existenci přípustného vnitřního bodu úlohy FP_2.

3.6 Hledání ostře přípustného řešení

Hranice duálních proměnných:

Mějme dvojici úloh P:

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{i=1}^r \mathbf{c}_i^T\mathbf{x}_i + Hx_{r+1,0} \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^r \mathrm{A}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{r+1,1...n_{r+1}-1} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_i \in K_{n_i}, i = 1...r+1 \end{array}$$

D:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{za podmínek} & \mathrm{A}_i^T\mathbf{y} + \mathbf{z}_i = \mathbf{c}_i, i = 1...r \\ & (H; \mathbf{y}) \in K \\ & \mathbf{z} \in K \end{array}$$

kterou získáme z úloh ve standardním tvaru omezením normy $\mathbf{y}$ shora konstantou H.

Ostře přípustné řešení úlohy P získáme tak, že si zvolíme nějaké $\mathbf{x}_{i,1...n_i-1}$ pro i=1...r a zvolíme k nim $x_{i,0}$, aby $\mathbf{x}_i \in K_{n_i}$. Posledních $r-1$ složek vektoru $\mathbf{x}_{r+1,1...n_{r+1}-1}$ vypočítáme z rovnice v primární úloze a zvolíme první složku tak, aby $\mathbf{x}_{r+1} \in K_{n_{r+1}}$.

Metoda fáze 1: Řešme dvojici úloh

P:

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{i=1}^r \mathbf{c}_i^T\mathbf{x}_i \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^r \mathrm{A}_i\mathbf{x}_i = 0 \\ & \sum_{i=1}^r x_{i,0} = 1 \\ & \mathbf{x}_i \in K_{n_i}, i = 1...r \end{array}$$

D:

$$\begin{array}{rl} \max & t \\ \text{za podmínek} & \mathrm{A}_i^T\mathbf{y} + \mathbf{z}_i = \mathbf{c}_i^T\mathbf{x} - t, i = 1...r, \\ & \mathbf{z}_i \in K_{n_i} \end{array}$$

Ostře přípustný bod lze najít ve tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, -$t > \max_i(\|\mathbf{c}_{i,1...n_i-1}\| - c_{i,0})$.
Pokud je $t^* > 0$, pak problém má vnitřní přípustné řešení.
Pokud je $t^* = 0$, pak problém má pouze hraniční přípustné řešení.
Pokud je $t^* < 0$, pak problém nemá přípustné řešení.

3.7 Metody řešení úloh

Metoda vnitřního bodu: Výrazem $\mu^{(k)}$ budeme značit hodnotu parametru μ v k-té iteraci algoritmu. Obdobným způsobem budeme značit hodnotu v k-té iterace u vektorů.

Mějme dvojici úloh P a D a vnitřní (primárně i duálně) přípustný bod $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Předpokládejme, že existuje vnitřní řešení. Zvolíme si nějaké okolí (např. $N_2, N_F, N_{-\infty}$) a parametr přesnosti $\epsilon > 0$.

1) Do soustavy (3.3) dosadíme $\mu^{(k)} = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{x}^{(k)} \circ \mathbf{z}^{(k)})}{r}\sigma$, přičemž σ volíme z intervalu $(0,\ 1)$ a vypočítáme směry $(\Delta\mathbf{x}^{(k)}, \Delta\mathbf{y}^{(k)}, \Delta\mathbf{z}^{(k)})$.

2) Za $(\mathbf{x}^{(k+1)}; \mathbf{y}^{(k+1)}; \mathbf{z}^{(k+1)})$ dosadíme $(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}; \mathbf{y}^{(k)} + \Delta\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{z}^{(k)} + \Delta\mathbf{z}^{(k)})$.

3) Pokud $\mathbf{x}^{(k+1)T}\mathbf{z}^{(k+1)} < \epsilon$, zastavíme algoritmus, jinak jdeme na 1).

Pro $\sigma = (1 - \frac{\delta}{\sqrt{r}})$, kde $\gamma, \delta \in (0,\ 1)$ (a některé z okolí $N_2, N_F, N_{-\infty}$) algoritmy následující cestu konvegrují. Pro $\mathbf{p}$ dávající nekomutativní směry je úloha v některém z okolí N_2 , $N_{-\infty}$ neřešitelná.

Řešení úlohy bez vnitřních přípustných bodů: Mějme dvojici úloh P a D, že P nemá ostře přípustné řešení, ale má přípustné řešení. Do úlohy místo $x_{i,0}$ dosadíme $\check{x}_{i,0} = x_{i,0} + \epsilon, i = 1...r$, $(\check{x}_{i,k} = x_{i,k}, k \neq 0, i = 1...r)$. Pro $\epsilon > 0$ má tato úloha ostře přípustný bod.

Nechť ρ je parametr penalizace.

Místo P řešíme penalizovanou úlohu PP:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}^T\check{\mathbf{x}} - (\mathbf{c}^T\mathbf{e})\epsilon + \rho\epsilon \\ \text{za podmínek} & \mathrm{A}\check{\mathbf{x}} - (\mathrm{A}\mathbf{e})\epsilon = \mathbf{b} \\ & \check{\mathbf{x}}_i \in K_{n_i},\ i = 1...r \\ & \epsilon \geq 0 \end{array}$$

kde $\check{x}_{i,0} = x_{i,0} + \epsilon$. Dostáváme, že $\mathrm{A}\check{\mathbf{x}} - (\mathrm{A}\mathbf{e})\epsilon = \mathbf{b}$, právě když $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Problém PP má vnitřní přípustný bod, když existuje $\epsilon > 0$ že $\check{x}_{i,0} = x_{i,0} + \epsilon, i = 1...r$, $\check{x}_{i,k} = x_{i,k}, k \neq 0, i = 1...r$.

Duální úloha k problému PP je PD ve tvaru:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{c} - \mathrm{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}} \\ & \rho - (\mathbf{c}^T\mathbf{e}) + (\mathrm{A}\mathbf{e})^T\mathbf{y} = \mathbf{z}_\epsilon \\ & z_\epsilon \geq 0, \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}} \in K_{n_{\hat{\mathbf{x}}}} \end{aligned}$$

Pro dostatečně velké ρ je $\mathbf{z}_\epsilon$ kladné. Vnitřní řešení $\mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}}$ existuje, pokud problém D má ostře přípustné řešení.

Problém PP můžeme přeformulovat na problém $\mathrm{P_2P}$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \hat{\mathbf{c}}^T\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{c}}_0^T\hat{\mathbf{x}}_0 + \rho\epsilon \\ \text{za podmínek} \quad & \hat{\mathrm{A}}\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{A}^0\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \\ & \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 - \epsilon * \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ & h = H \\ & (h; \mathbf{x}_0) \in K \\ & \hat{\mathbf{x}} \in K \\ & \epsilon \geq 0 \end{aligned}$$

kde $\hat{\mathrm{A}}$ se skládá ze sloupců matice A, prvky na místech $\{1,0;...;r,0\}$ jsou nahrazeny nulami, A^0 je matice, která obsahuje právě ty sloupce A s indexy v $\{1,0;...;r,0\}$, $\hat{\mathbf{c}}$ je gradient $\mathbf{c}$ s nulovými koeficienty $\hat{\mathbf{c}}_i$ pro $i \in \{1,0;...;,r0\}$ $\mathbf{c}_0 = (c_{1,0};...;c_{r,0})$, $\mathbf{x}_0 = (x_{1,0};...;x_{r,0})$, H je dostatečně velká konstanta a ρ je parametr penalizace.

Duální úloha k $\mathrm{P_2P}$ je $\mathrm{P_2D}$:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{y}_\mathbf{b} + Hy_H \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{c} - \hat{\mathrm{A}}^T\mathbf{y}_b - \hat{\mathrm{I}}\mathbf{y}^1 = \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}} \\ & -\mathrm{A}^{0^T}\mathbf{y}_b + \mathrm{I}\mathbf{y}^1 = \mathbf{z}_{\mathbf{x}_0} \\ & \rho + \textstyle\sum_{i=1}^r \mathbf{y}_i^1 = z_\epsilon \\ & -y_H = z_h \\ & \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}} \in K \\ & (z_h, \mathbf{z}_{\mathbf{x}_0}) \in K \\ & \mathbf{z}_\epsilon \geq 0 \\ & \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 - \epsilon * \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ & h = H \\ & (h; \mathbf{x}_0) \in K \\ & \hat{\mathbf{x}} \in K, i = 1...r \\ & \epsilon \geq 0 \end{aligned}$$

kde $\hat{\mathrm{I}}$ je matice $n \times r$ s i-tým r dimenzionálním jednotkovým vektorem v řádku i_0 a nulovými řádky jinde, $\mathbf{y_b} \in R^m, \mathbf{y}^1 \in R^r, \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}} \in R^n, \mathbf{z}_{\mathbf{x}_0} \in R^r, z_\epsilon, z_h \in R, H \in R$.

Pro nekonečně velké h dostaneme úlohu, která nemá vnitřní primárně přípustný bod.

Lemma (Optimální řešení úlohy bez vnitřních přípustných bodů): Nechť P a D mají přípustná řešení. Mějme $\rho > r(2\|\mathbf{c}\| + 1)$. Předpokládejme, že vybereme dostatečně velké H, že $H > \|\mathbf{x}_0^*\|$ pro optimální řešení $\mathbf{x}^*$. Pak $\mathrm{P_2P}$ i $\mathrm{P_2D}$ mají vnitřní přípustné body a platí :

Každé optimální řešení $(\hat{\mathbf{x}}^*; h^*; \mathbf{x}_0^*; \epsilon^*)$ úlohy $\mathrm{P_2P}$ s $\epsilon^* = 0$ dává optimální řešení $\hat{\mathbf{x}}^*$ úlohy P.

Každé optimální řešení $(\mathbf{y}_{\mathbf{b}}^*; \mathbf{y}^{1*}; y_H^*; \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}}^*; \mathbf{z}_{\mathbf{x}_0}^*; z_\epsilon^*; z_h^*)$ úlohy $\mathrm{P_2D}$ s $\mathbf{z}_{\mathbf{x}_0}^* = 0$ dává přípustné duální řešení $(\mathbf{y}_{\mathbf{b}}^*, \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}}^*)$ úlohy D.
Pro optimální řešení $\mathrm{P_2D}$, pro které je $y_H^* = 0, \mathbf{z}_{\mathbf{x}_0}^* = \mathbf{0}$, je $(\mathbf{y}_{\mathbf{b}}^*, \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{x}}}^*)$ optimální řešení D.

Důkaz lze nalézt v[2].

Metoda nepřípustného vnitřního bodu:
Uvažujme okolí

$$\check{N}(\gamma,\beta) = \{(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z}) | \mathbf{x},\mathbf{z} \in K, \min_{j=1}^{2} \lambda_j(\mathrm{Q}^T_{\mathbf{z}_i^{1/2}} \mathbf{x}_i) \geq (1-\gamma)\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{z}}{r}, i = 1...r,$$

$$\|\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d\| \leq \|\mathbf{r}_p^{(0)}, \mathbf{r}_d^{(0)}\| \beta \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{z}}{\mathbf{x}^{(0)T}\mathbf{z}^{(0)}}\}$$

0) Začínáme v libovolném bodě, s parametrem $\epsilon \in (0{,}1)$, $\sigma \in (0{,}1)$, $\beta > 1$, $\gamma \in (0{,}1)$
Položíme $\mu = \mu^{(0)} = \frac{\mathbf{z}^{0T}\mathbf{x}^0}{r}$
1) Vypočítáme matici scalingu a scalovaný problém
2) Vypočítáme Newtonův směr z Newtonova systému s $\mu = \sigma\frac{\mathbf{x}^{T(k)}\mathbf{z}^{(k)}}{2r}$
3) Přetransformujeme směr zpátky
4) Položíme $(\mathbf{x}^{(k+1)}; \mathbf{y}^{(k+1)}; \mathbf{z}^{(k+1)})$ rovno $(\mathbf{x}^{(k)} + t^{(k)}\Delta\mathbf{x}^{(k)}; \mathbf{y}^{(k)} + t^{(k)}\Delta\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{z}^{(k)} + t^{(k)}\Delta\mathbf{z}^{(k)})$ pro největší $t^{(k)} > 0$, že $(\mathbf{x}^{(k+1)}; \mathbf{y}^{(k+1)}; \mathbf{z}^{(k+1)}) \in \check{N}(\gamma,\beta)$ a přípustný bod ($\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$) v $k+1$. iteraci splňuje *zobecněnou Armijovu podmínku*, tj. když $\frac{\mathbf{x}^{(k+1)T}\mathbf{z}^{(k+1)}}{r} \leq (1 - 0.01t^{(k)}\frac{\mathbf{x}^{(k)T}\mathbf{z}^{(k)}}{r})$.
5) Pokud $\mathbf{x}^{(k+1)T}\mathbf{z}^{(k+1)} \geq \epsilon$, jdeme na bod 1), jinak algoritmus končí a $\mathbf{x}^{(k+1)}$ je primární optimální řešení.

Pro parametr σ a krok velikosti $t^{(k)}$ dostáváme: $\frac{\mathbf{x}^{(k+1)T}\mathbf{z}^{(k+1)}}{r} = \frac{1}{r}\mathbf{x}^{T(k+1)}\mathbf{z}^{(k+1)} = \frac{1}{r}(\mathbf{x}^{T(k)}\mathbf{z}^{(k)} + t^{(k)}(\mathbf{x}^{T(k)}\Delta\mathbf{z}^{(k)}) + t^{(k)}(\mathbf{z}^{T(k)}\Delta\mathbf{x}^{(k)}) + t^{2(k)}(\Delta\mathbf{x}^{T(k)}\Delta\mathbf{z}^{(k)}) = \frac{\mathbf{x}^{(k)T}\mathbf{z}^{(k)}}{r} + \frac{1}{r}t^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)T}\Delta\mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{z}^{T(k)}\Delta\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\mathbf{x}^{(k)T}\mathbf{z}^{(k)}}{r} + \frac{1}{r}t^{(k)}(\mathrm{Arw}^k(\mathbf{x})\Delta\mathbf{z}^{(k)} + \mathrm{Arw}^k(\mathbf{z})\Delta\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\mathbf{x}^{(k)T}\mathbf{z}^{(k)}}{r} + \frac{1}{r}t^{(k)}\mathbf{e}^T(\sigma\mu^{(k)}\mathbf{e} - \mathrm{Arw}^k(\mathbf{z})^k\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\mathbf{x}^{(k)T}\mathbf{z}^{(k)}}{r} + \frac{1}{r}t^{(k)}\mathbf{e}^T(\sigma\frac{\mathbf{x}^{(k)T}\mathbf{z}^{(k)}}{r} - \mathrm{Arw}^k(\mathbf{z})\mathbf{x}^{(k)}) = (1-(1-\sigma)t^{(k)})\frac{\mathbf{x}^{(k)T}\mathbf{z}^{(k)}}{r}$. Pro $(1-(1-\sigma)t^{(k)})\frac{\mathbf{x}^{(k)T}\mathbf{z}^{(k)}}{r} < 1$ se duality gap redukuje.

Pokud rezidua Newtonova systému nejsou nula a $\Delta\mathbf{x}^{(k)T}\Delta\mathbf{z}^{(k)} \neq 0$, pak pro nepřípustné řešení je $\mu^{(k+1)} = (1-(1-\sigma)t^{(k)})\mu^{(k)} + t^{2(k)}\frac{\Delta\mathbf{x}^{(k)T}\Delta\mathbf{z}^{(k)}}{r}$. Proto je pro redukci potřeba zobecněná Armijova podmínka.

Kapitola 4

Typy úloh, které lze řešit pomocí SOCP

Základní tvar primární a duální úlohy je:
P:

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{i=1}^{r} \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i \\ \text{za podmínek} & \sum_{i=1}^{r} \mathrm{A}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_i \in K_{n_i}, i = 1...r \end{array}$$

a D:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podmínek} & \mathrm{A}_i^T \mathbf{y} + \mathbf{z}_i = \mathbf{c}_i,\ i = 1...r \\ & \mathbf{z}_i \in K_{n_i},\ i = 1...r \end{array}$$

Kde $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; ...; \mathbf{x}_r), \mathbf{z} = (\mathbf{z}_1; ...; \mathbf{z}_r), \mathbf{c} = (\mathbf{c}_1; ...; \mathbf{c}_r), \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{c}_i \in R^{n_i}$ $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1; ...; \mathrm{A}_r), \mathrm{A}_i \in R^{m \times n_i}, n = \sum_{i=1}^{r} n_i$

4.1 Lineární programování

Úloha lineárního programování je speciálním případem SOCP, kde $\mathbf{x}_i$ mají nejvýše dvě složky.

Dostáváme úlohu lineárního programování ve tvaru:
min $\sum_{i=1}^{r} c_i x_i$
za podmínek $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = b$
$x_i \geq 0, i = 1...r$
pokud jsou všechna x jednosložková, nebo

min $\sum_{j=1}^{r} c_j^1 x_j^1 + \sum_{j=1}^{r} c_j^2 x_j^2$
za podmínek $a_{j,m}^1 x_{j,m}^1 + a_{j,m}^2 x_{j,m}^2 = b_m$
$x_{j,m}^1 \geq x_{j,m}^2 \forall m$
kterou zavedením skluzových proměnných v_m snadno převedeme na standardní tvar lineární úlohy:

min $\sum_{j=1}^{r} c_j^1 x_j^1 + \sum_{j=1}^{r} c_j^2 x_j^2$
za podmínek $a_{j,m}^1 x_{j,m}^1 + a_{j,m}^2 x_{j,m}^2 = b_m$
$x_{j,m}^1 - v_m = x_{j,m}^2, v_m \geq 0 \; \forall m$

4.2 Kvadratické programování

Úlohu kvadratického programování s kvadratickými nebo lineárními omezeními lze také vyjádřit jako SOCP:

Pro lineární omezení má SOCP tvar:

min u_0
za podmínek $\mathrm{M}^{1/2}\mathbf{x} - \underline{\mathbf{u}} = (1/2)\mathrm{M}^{-1/2}\mathbf{a}$
$\mathbf{x} \geq 0, (u_0, \underline{\mathbf{u}}) \in K,$

což je vyjádření úlohy
min $\mathbf{x}^T \mathrm{M}\mathbf{x} + \mathbf{a}^T\mathbf{x} + \beta$
za podmínek $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$, kde M je symetrická pozitivně definitní matice. (účelovou funkce lze napsat ve tvaru $\|\underline{\mathbf{u}}\|^2 + \beta - (1/4)\mathbf{a}^T\mathrm{M}^{-1}\mathbf{a}$, kde $\underline{\mathbf{u}} = \mathrm{M}^{1/2}\mathbf{x} + (1/2)\mathrm{M}^{-1/2}\mathbf{a}$)

Pro kvadratická omezení má úloha programování druhého řádu tvar
min $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$
za podmínek $\underline{\mathbf{u}} = (\mathrm{B}\mathbf{x}; \frac{\mathbf{ax}+\beta+1}{2})$
$u_0 = \frac{1-\mathbf{a}^T\mathbf{x}-\beta}{2}$
$(u_0, \underline{\mathbf{u}}) \in K$

což je přepis kvadratické úlohy ve tvaru
min $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$
za podmínek $\mathbf{x}^T\mathrm{B}_i^T\mathrm{B}_i\mathbf{x} + \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + \beta_i \leq 0, i = 1....m, \mathrm{B}_i \in R^{k_i \times m_i}$, kde B_i má hodnost k_i

4.3 Problémy minimalizující normy

Problémy minimalizující normy v různých tvarech lze také vyjádřit jako úlohy kuželového programování druhého řádu:

Úloha kuželového programování
min $\sum_{i-1}^{r} v_{i0}$
za podmínek $\mathrm{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i = \underline{\mathbf{v}}_i, i = 1....r$
$\mathbf{v}_i \in K \; i = 1...r$
je vyjádření úlohy minimalizující součet norem $\|\mathrm{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|$ přes $\mathbf{x}$.

Úloha vyjádřená pomocí SOCP jako

min t
za podmínek $\mathrm{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i = \mathbf{v}_i, i = 1....r$
$(t; \mathbf{v}_i) \in K, i = 1...r$

je přepis úlohy minimalizující maximum normy $\|\mathrm{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|$, kde minimum se uvažuje přes $\mathbf{x}$ a maximum přes i.

Úloha zapsaná jako min $\sum_{i=1}^{r} u_i + kt$
za podmínek $\mathrm{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i = \mathbf{v}_i, i = 1...r$
$\|\mathbf{v}_i\| \leq u_i + t, i = 1...r$
$u_i \geq 0, i = 1...r$
je přepis úlohy minimalizující součet k největších norem $\|\mathrm{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|$

4.4 Jiné typy úloh

Problém ve tvaru
min $\sum_{i=1}^{r} u_i$
za podmínek $v_i = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + \beta_i, i = 1...r$
$\mathbf{w}^T\mathbf{w} = 1$
$(u_i + v_i; 2\mathbf{w}; u_i - v_i) \in K_{n_i}; i = 1...r$
$u_i \geq 0, i = 1...r$
je v SOCPu zapsaná úloha minimalizujcící harmonický průměr kladných afinních funkcí $\mathbf{a}_i^T + \beta_i,\ i = 1....r$

Zápis úlohy jako SOCP
min $\sum_{i=1}^{r} t_i$ za podmínek
$(\mathrm{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i)^T(\mathrm{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i) \leq t_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + \beta_i), i = 1...r$, $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + \beta_i > 0, i = 1....r$
je optimalizační úloha minimalizující součet
$\frac{\|\mathrm{A}_i\mathbf{x}+\mathbf{b}_i\|^2}{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+\beta_i}$.

Zápis úlohy jako problém SOCP ve tvaru
min t za podmínek $\mathbf{w}^T\mathbf{w} = 1$, $(t + \frac{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}}{b_i}; 2\mathbf{w}; t - \frac{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}}{b_i}) \in K_{n_i}, i = 1...r$
$\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}}{b_i}$ $(t + 1; 2\mathbf{v}; t - 1) \in K_{n_i}, i = 1...r$
$t \geq 0$, kde logaritmus pro $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}$ dodefinováváme jako $-\infty$
je vyjádření úlohy minimalizující maximální Čebyševovu logaritmickou aproximaci $\|\ln(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}) - \ln(b_i)\|$

Úloha kužele druhého řádu min $\sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}{z_i}$
za podmínky $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{D}_i^T\mathbf{v}_i = \mathbf{y}$
pro pevné $z_i > 0, i = 1...r$ a $\mathbf{y}$, že pro nějaké $v_i, i = 1...r$ platí $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{D}_i^T\mathbf{v}_i = \mathbf{y}$
$\sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}{z_i} \leq t$
pro $\mathbf{y} \in R^n, z \in R_+^r$, $t \geq 0, \mathbf{v}_i \in R^{n_i}$ je úloha minimalizující zlomky kvadratických funkcí.

Kapitola 5

Závěr

V práci byly uvedeny základní definice a pojmy používané v souvislosti s kuželovým programováním druhého řádu. Dále byly uvedeny věty a vlastnosti vektorů, matic a operátorů, používaných v souvislosti s úlohami SOCP. Poté jsme uvedli základní metody pro vyšetření přípustnosti, hledání přípustného bodu a řešení úlohy SOCP pomocí iteračních metod. Nakonec jsme uvedli ukázky úloh, které lze řešit jako úlohy kuželového programování druhého řádu.

Kapitola 6

Použité zkratky

SOCP = Second order cone programing (Kuželové programování druhého řádu)
SDP = Semidefinitní programování
resp. = respektive
tj. = to je
např. = například

Literatura

[1] F. Alizadeh, D. Goldfarb (2002) Second-order cone programming , Mathematical Programmingg, 95 (1), 3-51

[2] S. Drewes (2009) Mixed Integer Second Order Cone Programming, dizertační práce, TU Darmstadt

[3] J. F. Sturm (2002) Implementation of Interior Point Methods for Mixed Semidefinite and Second Order Cone Optimization Problems, Omtimization Methods and Software, 17 (6), 1105-1154

[4] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, H. Lebret (1998) Applications of second-order cone programming, Linear Algebra and its applications, 284, 193-228

[5] P. Lachout (2008) Matematické programování, pracovní text, MFF UK, Praha

[6] J. Dattorro (2005) Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry, Meboo Publishing, USA

[7] S. Kim, M. (2001) Second Order Cone Programming Relaxation of Nonconvex Quadratic Optimization Problems, Optimization Methods and Software, 15, 201-224