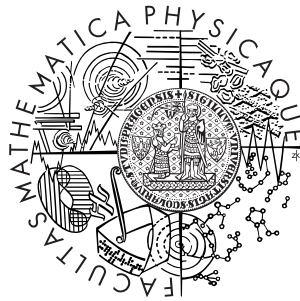


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jaroslav Vosáhlo

Návrh dynamických rozhodovacích strategií pro obchodování na futures trzích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Dipl.-Eng. Tatiana V.Guy, PhD.,
ÚTIA AV ČR

Studijní program: Finanční matematika, Obor Matematika

2011

Chtěl bych poděkovat vedoucí bakalářské práce Dipl.-Eng. Tatianě V.Guy, PhD. za trpělivost a cenné rady a dále Ing. Janu Zemanovi a Mgr. Janu Šindelářovi, kteří byli tak ochotní a věnovali mi svůj čas. Práce byla částečně podporována MŠMT ČR 1M0572, GACR 102/08/0567.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 13.7.2011

Jaroslav Vosáhlo

Obsah

1	Úvod	5
1.1	Základní pojmy a značení	6
2	Obchodování s futures	7
2.1	Popis kontraktu	7
2.2	Popis obchodování	8
2.3	Hledání strategie	8
3	Dynamické programování jako nástroj optimalizace	9
3.1	Systém: základní definice	9
3.2	Zisk	11
3.3	Optimalizace a Bellmanova funkce	11
4	Bayesovská statistika a model vývoje cen	15
4.1	Bayesovská předpověď a odhad parametrů	15
4.2	Normální autoregresní model	17
4.3	Bayesovské odhadování autoregresního modelu	19
5	Aproximace optimálního řešení	20
5.1	Úprava Bellmanovy rovnice	20
5.2	Optimální zisk a zisk aproximovaného optimálního řešení . .	21
5.3	Rozdělení ztrátové funkce při známých akcích a parametrech	22
6	Riziko a neurčitost	24
6.1	Rozptyl ztrátové funkce	24
6.2	VaR a CVaR	25
6.3	Porovnávací funkce	25
6.4	Míra rizika založená na aktuální úspěšnosti algoritmu	27

7	Popis algoritmů	29
7.1	Přímý přístup pomocí bodových odhadů	29
7.2	Algoritmus s bayesovským odhadem parametrů	31
7.3	Volba parametrů	33
8	Výsledky, závěr	34
8.1	Výsledky porovnávací funkce $Q_1(x)$	34
8.2	Výsledky porovnávací funkce $Q_2(x)$	35
8.3	Výsledky algoritmů založených na aktuální úspěšnosti	36
8.4	Závěr	36
9	Příloha	38
9.1	Ukázky obchodování	38
	Literatura	40

Název práce: Návrh dynamických rozhodovacích strategií pro obchodování na futures trzích

Autor: Jaroslav Vosáhlo

Katedra (ústav): Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova

Vedoucí bakalářské práce: Dipl.-Eng. Tatiana V.Guy, PhD., ÚTIA AV ČR

e-mail vedoucího: guy@utia.cas.cz

Abstrakt: Práce se zabývá problematikou obchodování na komoditních trzích z hlediska investičního spekulanta a zaměřuje se na tzv. komoditní futures kontrakty. Cílem práce je pomocí metod dynamického programování a přibližného dynamického programování navrhnout optimální strategii a tuto strategii otestovat na reálných datech. K dosažení úspěšné strategie jsou použity prostředky bayesovské statistiky pro předpovědi chování náhodných veličin a rizikové ukazatele pro návrh míry opatrnosti při obchodování. Algoritmus je otestován v programu Matlab na více než 15 tisících obchodovacích dnech.

Klíčová slova: futures, dynamické programování, bayesovská statistika

Title: Design of dynamic decision-making strategies for futures trading

Author: Jaroslav Vosáhlo

Department: Faculty of mathematics and physics, Charles University

Supervisor: Dipl.-Eng. Tatiana V.Guy, PhD., ÚTIA AV ČR

Supervisor's e-mail address: guy@utia.cas.cz

Abstract: This thesis deals with an issue of futures derivative trading from a perspective of a minor speculator. The aim of this work is to find and design an optimal trading strategy using dynamic programming and approximate dynamic programming. We use means of Bayesian statistics to obtain predictions of variate's behavior and risk indicators to form a rate of carefulness. Effectivity of algorithm is afterwards tested in Matlab program. Available data for testing the success of the method offer more then 15.000 trading days.

Keywords: futures derivatives, dynamic programming, Bayesian statistics

Kapitola 1

Úvod

Tato práce se zabývá hledáním optimální strategie pro obchodování s futures kontrakty z pohledu menšího spekulanta [3], tedy spekulanta, který svým chováním neovlivňuje trh. Výsledkem by měl být ucelený postup, který nám na základě dostupných dat (minulý cenový vývoj a naše předchozí akce na trhu) doporučí, jak postupovat, a zároveň odhadne velikost rizika, tzn. určí, jak moc můžeme našemu rozhodnutí věřit.

Futures je velmi vhodným finančním derivátem pro spekulování na trhu s komoditami. Nabízí totiž práci s cenami téměř všech možných druhů zboží. Cena kontraktu závisí výrazně právě na ceně dané komodity - podkladového aktiva.

Práce navazuje na výzkum pracovníků ÚTIA AV ČR [14],[15],[12],[11]. Oproti předchozím výzkumům se obchodní strategie navržená v této práci pokusí zohlednit riziko a dle získaného rizikého ukazatele měnit množství nakoupených nebo prodaných kontraktů (předchozí algoritmy pracovaly s jednotkovými nákupy či prodeji). Tento přístup se opírá o metody přibližného dynamického programování (Kapitola 3). K předpovědím vývoje cen používáme autoregresní model (Kapitola 4). V Kapitole 5 je popsáno aproximační řešení úlohy. Kapitola 6 je klíčovou částí, kde se pracuje s rozptylem a hodnotami VaR (Value at Risk) a CVaR (Conditional Value at Risk), jako ukazateli rizika. Zároveň je k určení rizikovosti investice navržena i metoda, založena na aktuální úspěšnosti algoritmu.

Navržené strategie jsou naprogramovány v jazyce a programovém prostředí Matlab a otestovány na reálných datech pěti trhů na časovém intervalu deseti let. Porovnáváme analytické řešení s metodami Monte Carlo. Algoritmy jsou popsány v Kapitole 7 a výsledky v Kapitole 8.

1.1 Základní pojmy a značení

t	čas, pořadí dne;
T	čas ukončení obchodování;
t^*	množina obchodovacích časů, $t^* = (1, \dots, T)$;
y_t	cena kontraktu v čase t ;
u_t	akce v čase t , tj. množství nakoupených či prodaných kontraktů, např. $u_t = -2$ znamená prodej dvou kontraktů v čase t , $u_t = 1$ znamená nákup jednoho kontraktu;
u_t^*	množina přípustných akcí v čase t ;
x_t	stav obchodníka v čase t , množství kontraktů a pozice v nich;
c	transakční náklady spjaté s prodejem/nákupem, za každou operaci u_t platíme poplatek ve výši $c u_t $;
P_t	pozorovaná data do času t , $P_t = (y_1, u_1, y_2, u_2, \dots, y_{t-1}, u_{t-1}, y_t)$;
Q	posloupnost popisující celý systém do času T , $Q = (y_1, u_1, \dots, y_T, u_T)$;
R_t	rozhodovací pravidlo v čase t , $R_t : P_t^* \rightarrow u_t^*$;
R_t^o	optimální rozhodovací pravidlo v čase t ;
$g_{t,t+1}$	zisk způsobený akcí u_t ;
$z_{t,t+1}$	ztráta způsobená akcí u_t ;
$G_t(Q)$	zisk od času t až do konce obchodování T ;
$Z_t(Q)$	ztráta od času t až do konce obchodování T ;
\mathbf{R}_0^+	nezáporná reálná čísla ;
\mathbf{N}	přirozená čísla ;
\hat{y}_{t+1}	bodový odhad y_{t+1} ;
$X \sim A$	X má rozdělení A ;
$N(\mu, \delta^2)$	normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem δ^2 ;
$f(x y)$	podmíněná pravděpodobnostní hustota;
$E[\cdot]$	střední hodnota;
$D[\cdot]$	rozptyl.

Kapitola 2

Obchodování s futures

2.1 Popis kontraktu

Futures kontrakt je dohoda mezi dvěma stranami, z nichž jedna se zavazuje prodat dané množství konkrétního podkladového aktiva v daný čas za předem určenou cenu (*krátká pozice*) a druhá strana se zavazuje toto aktivum koupit (*dlouhá pozice*). Aktuální cena tohoto derivátu tedy závisí především na ceně podkladového aktiva. Dále se pak v ceně kontraktu odráží doba splatnosti (časová hodnota peněz) a skladovací a dopravní náklady.

Futures se na rozdíl od jednodušších forwardových smluv, které vznikají mezi obchodníky ústní dohodou, obchodují na burzách (největší takové burzy jsou Chicago Board of Trade a Chicago Mercantile Exchange). Podkladová aktiva jsou standardizována z hlediska kvality, množství a geografické polohy, což usnadňuje obchodovatelnost a porovnatelnost s jinými kontrakty.

Na trhu s futures deriváty se nacházejí tři druhy obchodníků s různými cíli. První skupinou jsou *hedgeri*. Ti se vstupem do dlouhé či krátké pozice jistí proti nepříznivému vývoji cen na trhu, popřípadě množství komodity na trhu (od „dostatkovosti“ se většinou odvíjí cena). Druhou skupinou jsou *spekulanti*. Ti nemají zájem o podkladové aktivum. Zaujímají místo na trhu za účelem nabytí kladného zisku, vzniklým sázkou na pokles či růst ceny podkladového aktiva. Třetím důvodem k obchodování s futures je vstup na trh za účelem bezrizikového výnosu (arbitrážní zisk). Tento případ se často překrývá s hedgingem, ale arbitráž vyžaduje operace na více různých trzích, například nákup cizích státních dluhopisů a futures na prodej této měny.

2.2 Popis obchodování

Tato práce se snaží najít optimální strategii pro spekulanta. Princip spekulace je jednoduchý: pokud očekáváme zvýšení ceny daného aktiva, vstoupíme do dlouhé pozice a po nárůstu ceny kontrakt se ziskem prodáme. Očekáváme-li naopak pokles ceny, kontrakt před poklesem prodáme a pak levněji nakoupíme. Optimální strategie se hledá s ohledem na transakční náklady, které platíme za každou akci.

K finančnímu vyrovnání dochází až v době splatnosti. Za kontrakt platí obchodníci pouze zálohu clearingovému centru (tzv. maržový vklad). Tato částka, která je zlomkem nominální hodnoty kontraktu a může tedy být potřeba ji doplatit podle aktuálního vývoje ceny, je zárukou toho, že obchodníci dostojí svým závazkům. To umožňuje obchodovat s objemem komodit, který má větší hodnotu než vlastní kapitál (pákový efekt). Zároveň nepotřebujeme žádné sklady nebo přepravní techniku, která by při opravdovém nákupu podkladových aktiv byla nutná.

2.3 Hledání strategie

Úspěšnost obchodní strategie klíčově závisí na kvalitní předpovědi budoucího cenového vývoje. Dalším problémem je určení optimálních obchodovacích okamžiků, neboť vzhledem k uvažovaným transakčním nákladům není optimální strategie založena pouze na postupu: „cena se nachází v lokálním maximu, přejdeme do krátké pozice“ a obráceně.

Velkým problémem a výzvou, za kterou můžeme vidět případnou neúspěšnost strategie, je volba modelu, podle něhož předpokládáme, že se ceny vyvíjejí. Námí zvolený autoregresní model předpovídá cenový vývoj na základě předchozích cen kontraktů. Na vývoj cen kontraktů, které vznikají na burze stejně jako ostatní ceny zákonem nabídky a poptávky, má ale vliv spousta faktorů (válečné konflikty, objevení nových nalezišť, přírodní katastrofy apod.) a takové vlivy není možné do těchto modelů zahrnout.

Kapitola 3

Dynamické programování jako nástroj optimalizace

V této kapitole vymežíme řešenou optimalizační úlohu a veličiny, se kterými budeme pracovat.

3.1 Systém: základní definice

Systémem rozumíme část světa, která nás pro řešení úlohy zajímá a kterou se snažíme popsat nebo ovlivnit. V této úloze systém představuje trh, na kterém se obchoduje jednou denně. *Rozhodovač* (obecně osoba, nebo stroj, v našem případě obchodník) pozoruje systém a navrhuje/aplikuje rozhodnutí s cílem maximalizovat svůj zisk. Systém popisujeme pomocí posloupnosti pozorovaných *výstupů* systému y_t a *vstupů* u_t (akce rozhodovače) do systému:

$$(y_1, u_1), (y_2, u_2), (y_3, u_3), \dots \quad (3.1)$$

$y_t \in R_0^+, t \in t^* = \{1, \dots, T\}$, T je horizont, představuje cenu jednoho kontraktu v čase t .

$u_t \in u_t^*, t \in t^*$ značí *akci* obchodníka na trhu v čase t , to znamená nákup (kladná hodnota) nebo prodej (záporná hodnota), případně nulová akce. Množina u_t^* je množina všech přípustných akcí v čase t .

Znalost systému, kterou máme v daný čas $t \in t^*$, jsou pozorované vstupy a výstupy:

$$P_t = (y_1, u_1, y_2, u_2, \dots, y_{t-1}, u_{t-1}, y_t). \quad (3.2)$$

Napozorované hodnoty nazýváme *data*. Tato znalost popisuje systém jen částečně.

Posloupnost vstupů a výstupů do času T , tzn. chování smyčky „systém-rozhodovač“, značíme Q . V čase $t \in t^*$ se množina Q skládá z minulých vstupů a pozorovaných výstupů P_t , navrhované akce u_t a neznámých budoucích veličin $(y_{t+1}, u_{t+1}, \dots, y_T, u_T)$:

$$Q = (P_t, u_t, y_{t+1}, u_{t+1}, \dots, y_T, u_T) \quad (3.3)$$

Poznámka 1 V obecném případě může vstup u_t ovlivnit chování systému. V našem případě předpokládáme, že akce u_t systém neovlivňuje, tzn. že spekulantův nákup/prodej neovlivní budoucí cenový vývoj $(y_\tau)_{\tau>t}$ (viz Podkapitola 4.2).

Na základě znalosti P_t vytváříme akci u_t . Rozhodovací pravidlo

$$R_t : P_t^* \rightarrow u_t^* \quad (3.4)$$

je tedy zobrazení, které nám na základě znalosti systému určuje naši akci na trhu. Posloupnost těchto rozhodovacích pravidel $\{R_t\}_{t \in t^*}$ pak nazýváme *strategií*.

K určení kvality rozhodovacího pravidla a celé strategie se definuje *ztrátová funkce* $Z(Q)$. Tato funkce ke každé realizaci $Q \in Q^*$, přiřazuje ohodnocení - ztrátu $Z(Q)$. *Optimální strategie* $(R_t^o)_{t \in t^*}$ je ta, která minimalizuje ztrátovou funkci, popř. její střední hodnotu.

Stav obchodníka x_t popisuje množství a pozici vlastněných kontraktů. Předpokládáme, že můžeme nakupovat a prodávat pouze celé množství kontraktů.

Je zřejmé, že akce u_t mění stav x_{t-1} následovně:

$$x_t = x_{t-1} + u_t \quad (3.5)$$

Poznámka 2 V práci [4] se pracuje s vícerozměrnými výstupy y_t . Tento vektor pak pro jeden typ kontraktu obsahuje více než 30 tzv. informačních kanálů, například cenu při otevření a ukončení obchodovacího dne, nejvyšší a nejnižší cenu dne, počet aktivních obchodů na dané burze za den a tak dále. Vícerozměrné modelování nedosáhlo požadované kvality predikcí, proto v této práci zůstaneme u skalárních cen, konkrétně u cen kontraktu při ukončení obchodování.

3.2 Zisk

Budeme obchodovat s omezením $x_t \in (\underline{x}, \bar{x})$. Tato podmínka neznamena přímo omezené množství finančních prostředků, ale ohraničení množství kontraktů, které můžeme koupit nebo prodat (k finančnímu vyrovnání dochází až v době splatnosti). Horní hranice \bar{x} může být menší a díky pákovému efektu i větší, než kolik bychom mohli získat s naším volným finančním kapitálem.

Za každou akci u_t platí obchodník transakční náklady $c|u_t|$. Definujeme parciální zisk způsobený akci u_t v čase t

$$g_{t,t+1}(x_{t-1}, x_t, y_t, y_{t+1}) = g_{t,t+1} = x_t(y_{t+1} - y_t) - c|x_t - x_{t-1}| = x_t(y_{t+1} - y_t) - c|u_t| \quad (3.6)$$

Celkový zisk od času $\tau \leq T$ je součtem těchto parciálních zisků:

$$G_\tau(Q) = \sum_{t=\tau}^{T-1} [x_t(y_{t+1} - y_t) - c|u_t|] - c|u_T| = \sum_{t=\tau}^{T-1} g_{t,t+1} - c|u_T| \quad (3.7)$$

Poznámka 3 *Finanční toky by se měly diskontovat bezrizikovou úrokovou mírou. To ale pro jednoduchost zanedbáme, neboť nás nezajímá ani tak současná hodnota zisku, jako spíš nalezení strategie maximalizující zisk na časovém intervalu. V Kapitole 5 uvidíme, že tímto předpokladem nedojde k zvýhodnění strategie s dlouhodobějším návratem investice.*

3.3 Optimalizace a Bellmanova funkce

Kritérium pro hledání rozhodovacího pravidla $R_t : P_t^* \rightarrow u_t^*$ je maximalizace celkového zisku (3.7). Jak bylo řečeno, v optimalizačních úlohách se často minimalizuje ztrátová funkce $Z_t(Q)$. V našem případě lze ztrátu v čase t zapsat:

$$z_{t,t+1} = -g_{t,t+1} \quad (3.8)$$

Pro celkovou ztrátu od času $t \leq T$ do času T platí:

$$Z_t(Q) = -G_t(Q) \quad (3.9)$$

Hledání optimální strategie $(R_t^o)_{t \in t^*}$ je zatížené neurčitostí, která plyne:
i) z neznámého budoucího chování systému, např. y_τ , pro $\tau > t$, $\tau < T$,
ii) z neznalosti vnitřních veličin systému (odhadujeme parametry modelu,

který používáme k předpovídání y_τ , $\tau > t$). Vzhledem k této neurčitosti optimální strategie $(R_t^o)_{t \in t^*}$ nemůže minimalizovat neznámou ztrátu, ale „pouze“ očekávanou ztrátu $E[Z_t(Q)]$.

Optimální strategie se skládá z optimálních rozhodovacích pravidel $(R_t^o)_{t \in t^*}$. Principem dynamického programování [1] je rozdělení celkového optimalizačního problému na více jednodušších problémů se stejnou strukturou, například řešení optimalizační úlohy opakovaným hledáním optimálního rozhodovacího pravidla.

Věta 1 *Optimální rozhodovací pravidlo R_t^o , pracující se znalostí P_t v čase t a minimalizující danou očekávanou ztrátou funkci $E[Z_t(Q)]$, může být zkonstruováno následovně:*

Ke každému $P_t \in P_t^$ přiřadíme argument minima*

$$\min_{u_t \in u_t^*} E[Z_t(Q) \mid P_t, u_t] \quad (3.10)$$

Dosažené minimum má hodnotu:

$$\min_{R_t: P_t^* \rightarrow u_t^*} E[Z_t(Q)] = E\left(\min_{u_t \in u_t^*} E[Z_t(Q) \mid P_t, u_t]\right) \quad (3.11)$$

Důkaz lze nalézt v [7].

Tato základní optimalizační věta prakticky převádí minimalizaci přes jednotlivé obchodovací časy na jednoduchou minimalizaci (3.11). Následující věta nám ukáže, jakým způsobem lze dynamicky navrhovat optimální strategie.

Věta 2 (Stochastické dynamické programování) *Optimální strategie $(R_t^o : P_t^* \rightarrow u_t^*)_{t \in t^*}$, $t^* = \{0, \dots, T\}$ pracující s nezmenšující se znalostí $(P_t)_{t \in t^*}$ a minimalizující očekávanou ztrátu $E[Z_t(Q)]$ může být zkonstruována následovně rekurzivně proti směru nárůstu znalosti:*

V každém čase $t \in t^$ vybereme minimalizující argument $u_t^o(P_t)$ v rovnici:*

$$\mathcal{V}(P_t) = \min_{u_t \in u_t^*} E[\mathcal{V}(P_{t+1}) \mid u_t, P_t], \forall t \in t^* \quad (3.12)$$

Rekurzivní vzorec má počáteční podmínku:

$$\mathcal{V}(P_T) = E[Z(Q) \mid P_{T+1}] \quad (3.13)$$

Přičemž dosažené minimum má hodnotu:

$$\mathcal{V}(P_0) = \min_{\{R_t: P_t^* \rightarrow u_t^*\}_{t \leq T}} E[Z(Q)] \quad (3.14)$$

Důkaz lze nalézt v [7].

Bellmanova funkce $\mathcal{V}(\cdot)$ (3.12), pojmenovaná po Richardu Bellmanovi, popisuje nejmenší očekávanou ztrátu vzniklou posloupností optimálních akcí na intervalu $[t + 1, T]$. Optimální strategii tedy podle těchto vět lze získat rekurzí s počátkem v okamžiku ukončení obchodování.

Poznámka 4 *Obecně Bellmanova funkce závisí na čase. Tato věta popisuje optimalizaci pro stacionární verzi Bellmanovy funkce $\mathcal{V}(\cdot)$, kdy $\mathcal{V}(\cdot)$ na čase t nezávisí, což platí pro naši úlohu, viz [15].*

Vzhledem k aditivitě ztrátové funkce (3.7),(3.9) můžeme Bellmanovu rovnici upravit na tvar minimalizace střední hodnoty součtu parciálních ztrát:

$$E\left(Z(Q)\right) = E\left(\sum_{t \in t^*} z_{t,t+1}\right) \quad (3.15)$$

$$u_t^o = \arg \min_{u_t \in u_t^*} E[z_{t,t+1} + \mathcal{V}(P_{t+1}) \mid u_t, P_t] \quad (3.16)$$

Pro (3.15) vypadá analogie k rovnici (3.12) následovně:

$$\mathcal{V}(P_t) = \min_{u_t \in u_t^*} E[z_{t,t+1} + \mathcal{V}(P_{t+1}) \mid u_t, P_t] \quad (3.17)$$

S počáteční podmínkou:

$$\mathcal{V}(P_T) = 0 \quad (3.18)$$

Věta 3 (Bang bang) *Nechť $\{u_t^o\}_{t \in t^*}$ je posloupnost optimálních akcí maximalizující zisk, potom pokud je u_l^o nenulové pro nějaké $l \in t^*$, pak posloupnost $\{y_t\}_{t \in t^*}$ nabývá v l lokální extrém. Maximální zisk $E(G_1)$ (3.7) úlohy s omezeným kapitálem vzniká, pokud hodnoty nenulových akcí nabývají střídavě hranic $\{\underline{x}, \bar{x}\}$.*

Tato zřejmá a praktická věta z [4] zužuje možnosti $u_t \in u_t^*$, ze kterých máme na výběr. Ze zadání úlohy tedy plyne, že za účelem maximalizace zisku máme v každém čase t pomocí rozhodovacího pravidla vybrat jednu ze dvou možností u_t^o tak, že

$$u_t^o + x_{t-1}^o = x_t^o \in \{\underline{x}, \bar{x}\}, t \in \{t^*\} \setminus \{T\} \quad (3.19)$$

a

$$u_t^o + x_{t-1}^o = x_t^o = 0, t = T \quad (3.20)$$

Vlastně jsme převedli předchozí rozhodování „jak obchodovat“ na otázku „jestli obchodovat“ a rozdělili jsme obchodovací okamžiky na časy nulových a nenulových akcí. Se vzdálenostmi okamžiků nenulových akcí se dále pracuje v [4].

Kapitola 4

Bayesovská statistika a model vývoje cen

Pro řešení Bellmanovy rovnice pro aditivní ztrátovou funkci (3.17) zřejmě budeme potřebovat prediktivní hustotu pravděpodobnosti:

$$\{f(y_{t+1} \mid P_t, u_t)\}_{t \in t^*} \quad (4.1)$$

Tento model ale není možné zvolit přímo. Proto volíme parametrickou třídu modelů:

$$\{f(y_{t+1} \mid P_t, u_t, \Theta)\}_{t \in t^*} \quad (4.2)$$

a použijeme bayesovskou statistiku na získání prediktivní hustoty (4.1). Protože budeme používat bayesův vzorec, předpokládáme, že všechny uvažované veličiny mají absolutně spojitě rozdělení.

4.1 Bayesovská předpověď a odhad parametrů

Tvorbu prediktivní hustoty na základě třídy parametrických modelů řeší bayesovská statistika za následujících podmínek:

- Závislost inovace y_{t+1} na P_t a u_t lze vyjádřit pomocí parametrického modelu

$$\{f(y_{t+1} \mid P_t, u_t, \Theta)\}_{t \in t^*} \quad (4.3)$$

Toto vyjádření se volí se před samotným zpracováním dat.

- Neznámé parametry $\Theta \in \Theta^*$ jsou popsány apriorní hustotou pravděpodobnosti

$$f(\Theta) = f(\Theta | P_1) \quad (4.4)$$

Dále přidáme předpoklad běžně používaný v bayesovském odhadování:

- Podmíněná hustota Θ nezávisí na rozhodnutí u_t , pokud známe pouze P_t , tj. neznáme y_{t+1}

$$f(\Theta | P_t, u_t) = f(\Theta | P_t) \quad (4.5)$$

Požadavek (4.5) se nazývá přirozená podmínka řízení [8] a dle Bayesovy věty je ekvivalentní s rovnicí:

$$f(u_t | \Theta, P_t) = f(u_t | P_t) \quad (4.6)$$

V okamžiku rozšíření znalosti dochází k zahrnutí nové informace. Je třeba najít způsob, jak nám nová data o systému změni náhled na parametry Θ .

Použitím Bayesova vzorce a předchozích předpokladů získáme následující rovnice:

$$f(y_{t+1} | P_t, u_t) = \int_{\Theta^*} f(y_{t+1} | P_t, u_t, \Theta) f(\Theta | P_t) d\Theta, \quad (4.7)$$

kde

$$f(\Theta | P_{t+1}) = \frac{f(y_{t+1} | P_t, u_t, \Theta) f(\Theta | P_t)}{f(y_{t+1} | P_t, u_t)} = \frac{f(y_{t+1} | P_t, u_t, \Theta) f(\Theta | P_t)}{\int_{\Theta^*} f(y_{t+1} | P_t, u_t, \Theta) f(\Theta | P_t) d\Theta} \quad (4.8)$$

Rovnice (4.8) popisuje, jak probíhá vývoj parametrů při rozšíření znalosti. Pokud použijeme rekurzivní vyjádření t -krát, řetězovým pravidlem získáme:

$$f(\Theta | P_{t+1}) = \frac{\prod_{\tau=1}^t f(y_{\tau+1} | P_{\tau}, u_{\tau}, \Theta) f(\Theta)}{\int_{\Theta^*} \prod_{\tau=1}^t f(y_{\tau+1} | P_{\tau}, u_{\tau}, \Theta) f(\Theta) d\Theta} \quad (4.9)$$

Apriorní hustota $f(\Theta) = f(\Theta | P_1)$ se většinou volí tak, aby celkové vyjádření mělo pokud možno jednoduchý tvar a aby se s tímto rozdělením snadno počítalo.

Pro lepší přehlednost označíme

$$L_t(P_{t+1}, \Theta) = \prod_{\tau=1}^t f(y_{\tau+1} | P_{\tau}, u_{\tau}, \Theta) \quad (4.10)$$

$L(\cdot)$ se nazývá věrohodnostní funkce (likelihood function). Potom

$$f(\Theta | P_{t+1}) = \frac{L_t(P_{t+1}, \Theta)f(\Theta)}{\int_{\Theta^*} \prod_{\tau=1}^t L_t(P_{t+1}, \Theta)f(\Theta)d\Theta} \quad (4.11)$$

Následně po dosazení do (4.7) a vytknutí jmenovatele před integrál vyjde:

$$f(y_{t+1} | P_t, u_t) = \frac{\int_{\Theta^*} f(y_{t+1} | P_t, u_t, \Theta)L_{t-1}(P_t, \Theta)f(\Theta)d\Theta}{\int_{\Theta^*} L_{t-1}(P_t, \Theta)f(\Theta)d\Theta} \quad (4.12)$$

Tím dostáváme vyjádření podmíněného rozdělení inovace pouze pomocí parametrického modelu, apriorního rozdělení parametru Θ a pozorovaných dat. Obě rozdělení již závisí na naší volbě.

4.2 Normální autoregresní model

Volba parametrického modelu cenového vývoje je složitý úkol nemající jednoznačné řešení, neboť často neexistuje racionální zdůvodnění, proč by se měl systém chovat právě takto. V modelování časových řad se ve financích používají různé modely vývoje cen nebo například úrokových měr. Zmínit můžeme zobecněný Brownův pohyb a jeho obecnější verzi - Itoův proces [3]. My použijeme normální autoregresní model, u kterého můžeme poměrně snadno odhadovat neznámé parametry a zároveň můžeme předpokládat, že tento model předpovídá i okamžiky, kdy dochází ke změně orientace vývoje časové řady („ohýbání“).

Normální autoregresní model pracuje s analýzou časových řad s těmito předpoklady:

- cenový vývoj v čase t je modelován na základě minulých dat (y_1, \dots, y_{t-1}) . To znamená, že ani naše akce nemají vliv na chování trhu. Tento model uvažuje tedy spíše „menší“ obchodníky.
- vliv nejnovějších dat $(y_{t-m}, \dots, y_{t-1})$ na cenový vývoj y_t dominuje, $m \in \mathbf{N}$ je délka dat ovlivňujících y_t - řád modelu,
- podmíněná střední hodnota $E[y_t | y_{t-m}, \dots, y_{t-1}]$ závisí lineárně na vektoru $\varphi_t = (y_{t-m}, \dots, y_{t-1})$:

$$y_t = \phi\varphi_t^T + e_t \quad (4.13)$$

kde

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \quad (4.14)$$

jsou koeficienty autoregresního modelu a

$$e_t \sim N(0, \delta^2), t \in t^* \quad (4.15)$$

je posloupnost nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem δ^2 . Parametry autoregresního modelu značíme:

$$\Theta = (\phi, \delta^2) = (\phi_1, \dots, \phi_m, \delta^2) \quad (4.16)$$

- y_t má podmíněné normální rozdělení se střední hodnotou $\phi\varphi_t^T$ a rozptylem δ^2

$$f(y_t | y_{t-m}, \dots, y_{t-1}, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left\{-\frac{(y_t - \phi\varphi_t^T)^2}{2\delta^2}\right\} \quad (4.17)$$

Poznámka 5 Dále připomeneme předpoklad, že parametry $(\phi_1, \dots, \phi_m)^T$ a δ^2 se s časem nemění nebo se mění velmi pomalu.

Poznámka 6 Při předpovídání ceny kontraktu s danou dobou splatnosti se předpoklad normality predikce často aplikuje na transformovanou posloupnost y_t/y_{t-1} . Zdůvodnění pro tuto volbu je následovné:

Pokud vstupujeme do dlouhé pozice, částka, kterou jsme ochotni přislíbit za dodání podkladového aktiva, by měla být současnou hodnotou ceny podkladového aktiva S_t diskontovanou očekávaným výnosem r . Při spojitěmu diskontování získáme:

$$y_t = S_t e^{-r(T-t)} \quad (4.18)$$

kde T je doba splatnosti. y_t tedy při stálé ceně podkladového aktiva s časem roste. Změny v ceně podkladového aktiva nepůsobí přímo na y_t jako spíše na poměr y_{t+1}/y_t , jenž je jinak konstantní pro každé $t \leq T$.

Při této transformaci se pak například v případě zobecněného Brownova pohybu u oceňování derivátů přechází od normálního k logaritmicko-normálnímu rozdělení v predikci vývoje cen ([3]). U normálního autoregresního modelu tento efekt není stejný, například kvůli tomu, že autoregresní model řádu většího jak jedna na rozdíl od předchozích modelů vykazuje ohýbání.

4.3 Bayesovské odhadování autoregresního modelu

Množina parametrizujících veličin $\Theta = (\phi_1, \dots, \phi_m, \delta^2)$ popisuje model následovně:

$$f(y_{t+1} | P_t, u_t, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left\{-\frac{(y_{t+1} - \phi\varphi_{\tau+1}^T)^2}{2\delta^2}\right\} \quad (4.19)$$

Průslušná podmíněná věrohodnostní funkce (4.10) má tvar:

$$L_t(P_{t+1}, \Theta) = (2\pi)^{-\frac{t-1}{2}} \delta^{-(t-1)} \exp\left\{\frac{1}{2\delta^2} \sum_{\tau=1}^t (y_{\tau+1} - \phi\varphi_{\tau+1}^T)^2\right\} \quad (4.20)$$

Přepsáním výrazu v exponentu do maticového součinu a algebraickými úpravami (kompletní odvození najdeme v [8]) se dostaneme až k Gauss-Wisshartově pravděpodobnostní hustotě:

$$f(\Theta | P_{t+1}) = \alpha_{t+1} \delta^{-\nu_{t+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\delta^2} (-1, \phi) V_{t+1} (-1, \phi)^T\right\} \quad (4.21)$$

kde α_{t+1} je normalizační konstanta zajišťující jednotkový integrál. Dále

$$\nu_{t+1} = \nu_t + 1 \quad (4.22)$$

$$V_{t+1} = V_t + d_{t+1} d_{t+1}^T \quad (4.23)$$

$$d_{t+1} = (y_{t+1}, \varphi_{t+1}) \quad (4.24)$$

Apriorní hustota $f(\Theta | P_m)$ pro model řádu m pak obsahuje zvolené konstanty:

$$V_m = V \quad (4.25)$$

$$\nu_m = \nu \quad (4.26)$$

Kapitola 5

Aproximace optimálního řešení

Nalezení optimálního řešení je spojeno s nalezením Bellmanovy funkce. Celý tento problém není jen otázkou predikcí cenového vývoje až do času konce obchodování T , ale hlavně určení střední hodnoty funkce, jejíž tvar je nám neznámý. Analytické či numerické nalezení řešení optimalizační rovnice je prakticky nemožné. Nezbyvá než ustoupit od hledání optimálního řešení a snažit se k optimálnímu řešení přiblížit.

5.1 Úprava Bellmanovy rovnice

Bellmanovu rovnici (3.15) pro aditivní ztrátovou funkci (3.9) upravíme na tvar:

$$\mathcal{V}(P_t) = \min_{u_t \in u_t^*, \dots, u_{t+p} \in u_{t+p}^*} E[Z_{t,t+p} + \mathcal{V}(P_{t+p}) \mid u_t, \dots, u_{t+p}, P_t], \quad (5.1)$$

kde $p \in \mathbf{N}$ pro nás bude představovat délku předpovědi cenového vývoje. Ústupek optimalitě (5.1) by se dal popsat takto: „je možné, že budeme více maximalizovat zisk teď na úkor budoucnosti“. Tato úprava nám díky aditivitě střední hodnoty umožní následující zápis:

$$\mathcal{V}(P_t) = \min_{u_t \in u_t^*, \dots, u_{t+p} \in u_{t+p}^*} (E[Z_{t,t+p} \mid u_t, \dots, u_{t+p}, P_t] + E[\mathcal{V}(P_{t+p}) \mid u_t, \dots, u_{t+p}, P_t]) \quad (5.2)$$

První z minimalizovaných středních hodnot můžeme dále podle (3.15) rozepsat:

$$E[Z_{t,t+p} \mid u_t, \dots, u_{t+p}, P_t] = E[-(\sum_{t=k}^{k+p-1} g_{t,t+1} - c|u_{t+p}|) \mid u_t, \dots, u_{t+p}, P_t] = \quad (5.3)$$

$$= E[-\sum_{t=k}^{k+p-1} [x_t(y_{t+1} - y_t) - c|u_t|] + c|u_{t+p}| \mid u_t, \dots, u_{t+p}, P_t] \quad (5.4)$$

Jelikož $x_t = \sum_{\tau=1}^t u_\tau$ a všechna u_τ až do $\tau = t+p$ se nacházejí v podmínce střední hodnoty, můžeme dále upravit:

$$= -\sum_{t=k}^{k+p-1} [x_t(E(y_{t+1}) - E(y_t)) - c|u_t|] + c|u_{t+p}| \mid u_t, \dots, u_{t+p}, P_t] \quad (5.5)$$

Uřídíme tedy rozhodovací pravidlo na základě vektoru $(E(y_{t+1}), \dots, E(y_{t+p}))$. Na těchto hodnotách budeme minimalizovat $Z_{t,t+p}$, přes všechna přípustná rozhodnutí (u_t, \dots, u_{t+p}) .

5.2 Optimální zisk a zisk aproximovaného optimálního řešení

Při hledání rozdílu zisků aproximovaného a optimálního postupu budeme k problému přistupovat, jako bychom v čase $t+p$ měli ukončit obchodování. Tento předpoklad použijeme pouze v této části, neboť díky němu dokážeme (rekurzivně) spočítat zisk za toto období. Pokud tedy označíme

$$x_m^{o,t+p} = x_m^o \quad (5.6)$$

pro $m \neq t+p$, $m \in \{t, \dots, T\}$,

$$x_m^{o,t+p} = 0 \quad (5.7)$$

pro $m = t+p$,

pak se optimální zisk od času t a celkový zisk přes akce $x_m^{o,t+p}$, $m \in \{t, \dots, T\}$ liší následovně:

$$G_t^o - G_t^{o,t+p} = g_t^o + g_{t+1}^o - g_t^{o,t+p} - g_{t+1}^{o,t+p} = \quad (5.8)$$

$$= x_{t+p}^o (y_{t+p+1} - y_{t+p}) - c|x_{t+p}^o - x_{t+p-1}^o| - c|x_{t+p+1}^o - x_{t+p}^o| + c|x_{t+p-1}^o| + c|x_{t+p+1}^o| \quad (5.9)$$

V práci ([4], kap. 4.4) nalezneme doporučení, jak volit délku okna, aby byl tento rozdíl co nejmenší. Je například zřejmé, že pokud hodnoty y_{t+p} a y_{t+p+1} nebudou lokálními extrémy posloupnosti $\{y_k, k \in t^*\}$, pak tedy časy $t+p$ a $t+p+1$ nebudou obchodovacími okamžiky a rozdíl optimálního a aproximovaného zisku (5.9) se zjednoduší. V našem případě bychom sice mohli pracovat s odhady středních hodnot těchto cen, ale vzhledem k nepřilíh kvalitním odhadům cenového vývoje zvolíme předem pevně délku okna p a na ní budeme minimalizovat součet parciálních ztrát.

5.3 Rozdělení ztrátové funkce při známých akcích a parametrech

Předpokládejme, že jsme v čase $t \in t^*$ na základě znalosti P_t bodově odhadli parametry $\Theta = (\phi_1, \dots, \phi_m, \delta^2)$. Z (4.17) a nezávislosti e_t plyne:

$$y_{t+1} = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T (y_{t-m+1}, \dots, y_t) + e_{t+1} = \hat{y}_{t+1} + e_{t+1} \sim N(\hat{y}_{t+1}, \delta^2) \quad (5.10)$$

$$y_{t+2} = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T (y_{t-m+2}, \dots, y_{t+1}) + e_{t+2} = \quad (5.11)$$

$$= (\phi_1, \dots, \phi_{m-1})^T (y_{t-m+2}, \dots, y_t) + \phi_m y_{t+1} + e_{t+2} \sim N(\hat{y}_{t+2}, \delta^2(1 + \phi_m^2)) \quad (5.12)$$

kde

$$\hat{y}_{t+2} = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T (y_{t-m+2}, \dots, \hat{y}_{t+1}) \quad (5.13)$$

Opakováním postupu budeme získávat lineární kombinace nezávislých normálně rozdělených náhodných veličin. Výsledkem tedy bude normální rozdělení se zvětšujícím se rozptylem s rostoucí neurčitostí.

Dále předpokládejme, že se nám z upravené Bellmanovy rovnice (5.1) podařilo získat odhad optimálních akcí (u_t, \dots, u_{t+p}) a z nich plynoucí doporučené stavy (x_t, \dots, x_{t+p}) . Tento vektor je tedy vektorem konstant. Tvar součtu parciálních ztrát na tomto okně

$$Z_{t,t+p} = -\left(\sum_{k=t}^{t+p-1} g_{k,k+1} - c|u_{k+p}|\right) = -\sum_{k=t}^{t+p-1} [x_k(y_{k+1} - y_k) - c|x_k - x_{k-1}|] + c|x_{k+p} - x_{k+p-1}| \quad (5.14)$$

bude mít vzhledem k nezávislosti předpovědí $(\hat{y}_{t+1}, \dots, \hat{y}_{t+h})$ opět normální tvar. Tímto postupem můžeme analyticky získat různé statistiky funkce $Z_{t,t+p}$ pro zvolenou množinu rozhodnutí (u_t, \dots, u_{t+p}) . Hodnoty těchto statistik se pokusíme zahrnout do zohlednění rizika investice.

Kapitola 6

Riziko a neurčitost

Dosud jediná „míra opatrnosti“ byla obsažena ve volbě hranic (\underline{x}, \bar{x}) . V této části se pokusíme upravit rozhodovací pravidlo tak, aby se tyto hranice s časem měnily podle aktuální rizikovosti investice. Teoreticky by aplikace tohoto pravidla mohla zisk snížit, ale zároveň by měla zabránit velkým ztrátám. Toto opatření by mělo zohlednit existenci nepozorovaných a těžko předpověditelných faktorů, které nejsou implementovatelné do algoritmu a které ovlivňují systém. V případě většího vlivu těchto faktorů je vhodné „stáhnout“ hranice (\underline{x}, \bar{x}) blíže k nule.

Pro hodnocení spolehlivosti odhadnuté optimální akce a určení aktuální rizikovosti investice můžeme použít několik kritérií. V algoritmu pracujeme s rozptylem ztrátové funkce a hodnotami VaR (Value at Risk)[13] a CVaR (Conditional Value at Risk, někdy též nazýván Mean Excess Loss, nebo Tail VaR)[13] a nakonec použijeme anticipativní porovnání úspěšnosti rozhodovacího pravidla s maximálním možným ziskem za posledních několik obchodovacích okamžiků.

6.1 Rozptyl ztrátové funkce

Rozptyl ztrátové funkce je ovlivněn rozptylem cenového vývoje. Pokud si povedeme statistiku předchozích rozptylů ztrátové funkce a tato data budeme porovnávat s rozptylem ztrátové funkce v aktuálním čase, získáme představu o momentální rizikovosti investice. Stejně budeme postupovat i u zbylých dvou statistik.

6.2 VaR a CVaR

Hodnota VaR nám odpovídá na otázku: jaká je maximální ztráta na dané pravděpodobnostní hladině? U rozdělení odhadnuté ztrátové funkce tedy budeme hledat $(100-\alpha)\%$ ní výběrový kvantil, kde α je námi zvolená hladina.

CVaR udává hodnotu průměrné ztráty pro dané procento nejhorších případů. Hodnota CVaR ztrátové funkce tedy bude na stejné hladině vyšší než VaR. CVaR měl by lépe ohodnotit riziko u náhodných veličin, které mohou s malou pravděpodobností nabývat výrazně vychýlených hodnot („heavy-tailed distributions“).

Poznámka 7 *Abychom zajistili, že hodnoty rozptylu, VaR a CVaR jsou aktuální, tzn. závisí na kolísavosti nedávného cenového vývoje, můžeme zanedbat při odhadech parametrů starší data (metoda zapomínání), popřípadě použít váhové vektory, které dají větší důraz na data novější.*

6.3 Porovnávací funkce

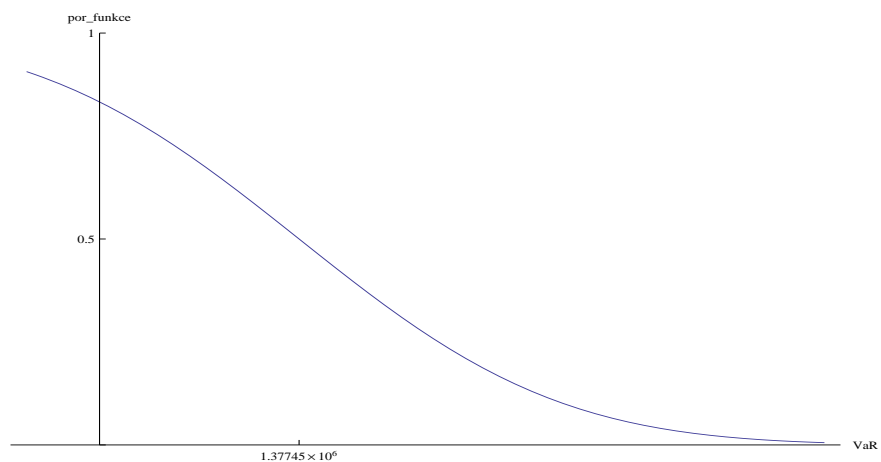
Po výpočtu aktuálního rozptylu, VaRu nebo CVaRu ztrátové funkce je třeba tuto hodnotu nějakým způsobem porovnat s předchozími výsledky. Hledáme porovnávací funkci, od které vyžadujeme, aby menším hodnotám ztráty přiřazovala lepší ohodnocení a naopak. Jde tedy o nerostoucí funkci, která bude nabývat hodnot v intervalu $(0,1)$, abychom její hodnotou mohli vynásobit stav, který jsme získali minimalizací ztrátové funkce. Od této funkce zároveň vyžadujeme, aby její hodnoty s časem příliš nekolísaly (nízká volatilita), neboť příliš častá změna stavu u_t zvyšuje transakční náklady, a tedy snižuje zisk.

Nejdříve byla jako porovnávací funkce testována upravená distribuční funkce normálního rozdělení:

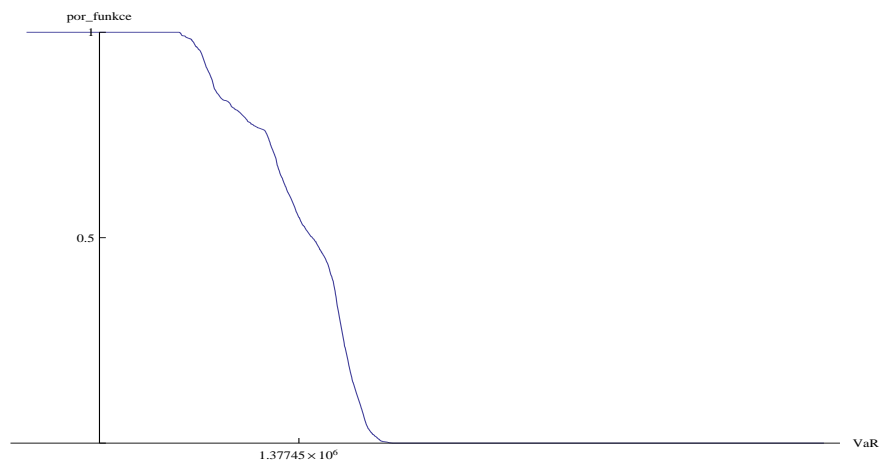
$$Q_1(x) = 1 - F(x) = 1 - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Omega} \exp\left\{-\frac{(u - \eta)^2}{2\Omega^2}\right\} du \quad (6.1)$$

kde η je průměr předchozích statistik a Ω jejich výběrový rozptyl.

Na obrázku 6.1 vidíme příklad takové funkce pro hodnoty VaR se střední hodnotou $1.37 \cdot 10^6$. Bohužel tato funkce vzhledem k velkému rozptylu napozorovaných hodnot neposkytovala potřebnou informaci o riziku (viz Kapitola 8) a po určitém množství obchodovacích dnů už nabývala pouze jedné hodnoty a to $\frac{1}{2}$.



Obrázek 6.1: Porovnávací funkce odvozená od normální distribuční funkce



Obrázek 6.2: Porovnávací funkce odvozená od empirické distribuční funkce

Druhá testovaná porovnávací funkce je založena na empirické distribuční funkci [16] získané z předchozích hodnot rizikových ukazatelů. Pokud tuto empirickou distribuční funkci označíme $F^e(x)$, výslednou porovnávací funkci $Q_2(x)$ získáme opět předpisem:

$$Q_2(x) = 1 - F^e(x) \tag{6.2}$$

Tato funkce s časem nabývala více hodnot než $Q_1(x)$, včetně $\{0, 1\}$.

Poznámka 8 *Za zamýšlení stojí i možnost nenásobit rizikovým ukazatelem optimální stav, ale doporučenou optimální akci. Tento přístup by se dal popsat jako „pokud je větší riziko ztráty, naše akce na trhu budou menší“. V tomto případě by již ale neplatil předpoklad ze začátku této kapitoly, že se při větším riziku zmenší interval (\underline{x}, \bar{x}) .*

6.4 Míra rizika založená na aktuální úspěšnosti algoritmu

Hlavním měřítkem úspěšnosti obchodování je celkový zisk. Pokud ji hodnotíme zpětně, první informace, která nás zajímá, je, zda byl náš zisk kladný (popř. jestli výnos překročil bezrizikovou úrokovou míru). Dále zkoumáme, jakého zisku jsme mohli dosáhnout a jak jsme se k této optimální hodnotě přiblížili. To se nazývá anticipativní přístup - známe cenový vývoj a hledáme optimální akce. Pokud považujeme obchodování za ukončené, dá se optimální řešení najít jednoduše pomocí lineárního programování. V případě, že stále obchodujeme, nelze hodnotu optimálního zisku určit zcela přesně, neboť na něj má vliv i budoucí cenový vývoj. Můžeme ale spočítat parciální zisk za dané období.

Poměr našeho zisku $G_{t-o,t}$ na okně (y_{t-o}, \dots, y_t) délky $(o + 1)$, $o \in \mathbf{N}$ a příslušného optimálního zisku $G_{t-o,t}^o$ označíme

$$q_{t-o,t} = G_{t-o,t} / G_{t-o,t}^o \quad (6.3)$$

Tato hodnota je pro nás informací, jak se nám momentálně daří a jak moc můžeme věřit našemu algoritmu, a tedy kolik můžeme investovat.

Nejjednodušeji lze poměru $q_{t-o,t}$ užít tak, že akci u_t získáme vynásobením $q_{t-o,t}$ a příslušnou horní nebo dolní hranicí \underline{x}, \bar{x} pro $q_{t-o,t}$ kladné a stanovením $u_t = 0$ pro $q_{t-o,t} \leq 0$. Jenomže pokud bychom se při záporném $G_{t-o,t}$ rozhodli neobchodovat, nemuseli bychom už nikdy vykázat kladné $G_{t-o,t}$ a veškeré akce by už byly nulové. Zároveň by tento postup naznačoval, že pokud zvolíme nulovou akci, nic tím nezkažíme, což není pravda. Dále je třeba zmínit, že jelikož s velkou pravděpodobností budeme stále dosahovat pouze zlomku optimálního zisku, přibližovaly by se akce u_t s časem opět k nule.

Zde uvádím svůj postup, jak by mohlo rozhodovací pravidlo na principu aktuální úspěšnosti pracovat:

- Zvolíme velikost okna $o + 1$ a hodnotu koeficientu κ určující minimální velikost nenulové akce. Ten použijeme, pokud $G_{t-o,t}$ je záporný nebo pokud poměr $q_{t-o,t}$ (6.3) nepřesáhne právě hodnotu κ . Tím zajistíme, že naše budoucí akce nezůstanou natrvalo nulové.
- Vedeme si statistiku předchozích modifikovaných hranic získaných naším postupem $((\underline{x}_0^{mod}, \bar{x}_0^{mod}), \dots, (\underline{x}_t^{mod}, \bar{x}_t^{mod}))$.
- Spočítáme průměrnou spodní a horní modifikovanou hranici na okně délky o .
- Pomocí lineárního programování spočítáme optimální zisk na těchto průměrných hranicích.
- Vypočteme poměr našeho zisku a optimálního zisku na průměrných hranicích $q_{t-o,t}^{mod}$ (6.3).
- Výslednou akci, ve které bude zohledněno riziko, získáme vynásobením akce, kterou jsme získali minimalizací ztrátové funkce za podmínky $x_t \in (\underline{x}, \bar{x})$, a hodnoty $\max(q_{t-o,t}^{mod}, \kappa)$.

Kapitola 7

Popis algoritmů

Použité algoritmy se skládají ze čtyř kroků:

- estimace - odhad parametrů Θ ,
- predikce budoucího cenového vývoje,
- optimalizace - hledání optimálních akcí,
- výpočet rizikového ukazatele.

7.1 Přímý přístup pomocí bodových odhadů

- V první metodě parametry $\Theta = (\phi_1, \dots, \phi_m, \delta^2)$ odhadneme bodově. Matlab nabízí zabudované funkce, které parametry autoregresního modelu odhadují pomocí metody nejmenších čtverců (Burgova metoda) [6] a dále kovarianční nebo Yule-Walkerovou metodou.
- Na základě těchto bodových odhadů podle předpisu (5.11) určíme bodové předpovědi $(\hat{y}_{t+1}, \dots, \hat{y}_{t+p})$.
- Z (3.19) vyplývá, že při hledání nejlepších možných akcí vybíráme z konečné množiny vektorů $(u_t^*, \dots, u_{t+p}^*)$. Z této množiny vybereme řešení, které minimalizuje $Z_{t,t+p}$ a získáme odhad optimálních akcí.
- Z Kapitoly 5 víme, že funkce $Z_{t,t+p}$ má normální rozdělení, v této části tedy analyticky určíme parametry rozdělení:

Nejprve vyjádříme střední hodnotu a rozptyl predikcí cenového vývoje. Stríšku nad předpověďmi, která symbolizovala, že se jedná o bodový odhad, můžeme zapsat i nad již napozorované hodnoty. Potom

$$\hat{y}_{t+k} = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T (\hat{y}_{t+k-m}, \dots, \hat{y}_{t+k-1}), \quad (7.1)$$

kde $1 \leq k \leq p$.

Rozptyl predikce y_{t+k} označíme δ_{t+k}^2 . Je zřejmé, že má rekurzivní vyjádření:

$$\delta_{t+k}^2 = \phi_{m-k+2}^2 \delta_{t+1}^2 + \dots + \phi_m^2 \delta_{t+k-1}^2 + \delta^2 = \sum_{l=\max(1, k-m)}^{k-1} \phi_{m-(k-l)+1}^2 \delta_{t+l}^2 + \delta^2 \quad (7.2)$$

Již víme, že počáteční podmínka má tvar:

$$\delta_{t+1}^2 = \delta^2 \quad (7.3)$$

Tato rozdělení dosadíme do (5.14) a získáme opět normální rozdělení se střední hodnotou

$$\mathcal{Z} = E[Z_{t,t+p}] = - \sum_{k=t}^{t+p-1} [x_k(\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_k) - c|x_k - x_{k-1}|] + c|x_{k+p} - x_{k+p-1}| \quad (7.4)$$

a rozptylem

$$\sigma^2 = \sum_{k=t}^{t+p-1} [x_k^2(\delta_{k+1}^2 + \delta_k^2)] \quad (7.5)$$

Tím jsme získali pravděpodobnostní hustotu upravené ztrátové funkce. Rozptyl je tedy známý, k výpočtu VaR se používá inverzní distribuční funkce tak, aby pro hladinu h platilo:

$$\int_{-\infty}^{VaR} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(z - \mathcal{Z})^2}{2\sigma^2}\right\} dz = 1 - h \quad (7.6)$$

Pro hodnotu CVaR pak platí:

$$CVaR = \frac{1}{h} \int_{VaR}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(z - \mathcal{Z})^2}{2\sigma^2}\right\} dz \quad (7.7)$$

7.2 Algoritmus s bayesovským odhadem parametrů

- V bayesovském přístupu použijeme metodu Monte Carlo [2]. Monte Carlo je stochastická metoda, která pracuje na principu opakování simulace události s náhodným charakterem pomocí generovaných pseudo-náhodných čísel. Používá se v případě, kdy modelováním chceme získat přehled o chování náhodné veličiny a kdy k této informaci nemůžeme dospět analyticky. V našem případě budeme generovat v každém čase parametry $\Theta = (\phi_1, \dots, \phi_m, \delta^2)$ z Gauss-Wishartova rozdělení odvozeného v sekci 4.3.
- Ke každému vektoru vygenerovaných parametrů určíme předpověď cenového vývoje.

$$\begin{aligned} \Theta_1 &\rightarrow (\hat{y}_{1,t+1}, \dots, \hat{y}_{1,t+p}); \\ \dots &\quad \dots \\ \dots &\quad \dots \\ \Theta_r &\rightarrow (\hat{y}_{r,t+1}, \dots, \hat{y}_{r,t+p}); \end{aligned}$$

- Na základě těchto r předpovědí, kde r je rozsah vygenerovaného výběru, chceme zvolit akce (u_t, \dots, u_{t+p}) . K tomu použijeme zprůměrované hodnoty těchto předpovědí, se kterými pracujeme stejně jako v předchozím postupu (7.1).

$$(\hat{y}_{t+1}, \dots, \hat{y}_{t+p}) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (\hat{y}_{k,t+1}, \dots, \hat{y}_{k,t+p}) \rightarrow (u_t, \dots, u_{t+p}) \quad (7.8)$$

- Získaný vektor akcí (u_t, \dots, u_{t+p}) přiřadíme ke každé predikci $(\hat{y}_{k,t+1}, \dots, \hat{y}_{k,t+p})$, $k \in \{1, \dots, r\}$, a tím získáme r normálních rozdělení s pravděpodobnostními hustotami

$$z_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left\{-\frac{(z - \mathcal{Z})^2}{2\sigma_k^2}\right\}, k \in \{1, \dots, r\}, x \in R, \quad (7.9)$$

kde \mathcal{Z} je k -tá střední hodnota a σ_k^2 je příslušný k -tý rozptyl, $k \in \{1, \dots, r\}$.

Na těchto rozděleních se opět pokusíme založit analýzu rizikovosti investice. Nejjednodušeji bychom mohli například zprůměrovat střední hodnoty a rozptyly a jako výsledné rozdělení použít opět normální rozdělení s těmito hodnotami. My ale chceme hodnoty VaR a CVaR otestovat na více „nepravidelném“ rozdělení. Proto jako rozdělení celkové ztrátové funkce použijeme funkci, která bude průměrem funkcí $z_k(x)$.

$$z(x) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r z_k(x), x \in \mathbf{R} \quad (7.10)$$

Z rovnice (7.10) plyne, že funkce $z(x)$ má vlastnosti hustoty spojité náhodné veličiny. Pro rozptyl $D[Z_{t,t+p}]$ tedy platí:

$$D[Z_{t,t+p}] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 z(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x z(x) dx \right)^2 \quad (7.11)$$

Po dosazení z (7.10) získáme:

$$D[Z_{t,t+p}] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} x^2 z_k(x) dx - \left(\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \mathcal{Z}_k \right)^2 = \quad (7.12)$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 z_k(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x z_k(x) dx \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} x z_k(x) dx \right)^2 \right] - \left(\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \mathcal{Z}_k \right)^2 = \quad (7.13)$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (\sigma_k^2 + \mathcal{Z}_k^2) - \left(\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \mathcal{Z}_k \right)^2, \quad (7.14)$$

Výpočet hodnoty VaR se provádí numerickou metodou s podmínkou, že výsledná hodnota musí ležet v intervalu ohraničeném minimální a maximální hodnotou VaR jednotlivých normálních rozdělení. Hodnotu CVaR lze díky aditivitě integrálu spočítat:

$$CVaR = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \frac{1}{h} \int_{VaR}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left\{-\frac{(z - \mathcal{Z}_k)^2}{2\sigma_k^2}\right\} dz \quad (7.15)$$

7.3 Volba parametrů

Parametry úlohy byly zvoleny následovně:

- řád modelu byl na základě předchozích experimentů[14] zvolen $m = 2$, (model s tímto řádem poskytoval nejvyšší predikce)
- délka predikce $p = 5$ (větší délka predikce neposkytovala lepší výsledky),
- hranice $(\underline{x}, \bar{x}) = (-10, 10)$,
- rizikový ukazatel úspěšnosti (Sekce 6.4) testujeme pro hodnoty $\kappa = \{0.1, 0.25, 0.5\}$, na okně dlouhém $o = 20$,
- transakční náklady jsou skutečné hodnoty z jednotlivých trhů navýšené o tzv. *slippage*, které představují rozdíl mezi očekávanou a opravdovou výší nákladů,
- rozsah dat z jednotlivých trhů je v průměru 3600 dnů, prvních padesát dnů se získává odhad parametrů a následujících 450 dnů se obchoduje „nanečisto“,
- rozsah vzorků parametrů $(\phi_{1,1}, \phi_{1,2}, \delta_1^2, \dots, \phi_{r,1}, \phi_{r,2}, \delta_r^2)_t$ generovaných v každém čase $t \in t^*$ metodou Monte Carlo byl předem zvolen $r = 100$.

Poznámka 9 *Rozsah generovaných parametrů nemusí být určen pouze konstantou, např. lze generovat další vzorky, dokud nové hodnoty budou měnit celkový výsledek, tzn. dokud se výsledek neustálí. Hodnota 100 byla zvolena vzhledem k časové náročnosti integrování v případě výpočtu statistik ztrátové funkce (7.10).*

Kapitola 8

Výsledky, závěr

Algoritmy byly otestovány na datech z pěti trhů, které reprezentují významné kategorie kontraktů. Jedná se o trh s kakaem (CC), lehkou ropou (CL), pětiletými americkými dluhopisy (FV2), japonským jenem (JY) a pšenicí (W).

8.1 Výsledky porovnávací funkce $Q_1(x)$

Jak bylo zmíněno, porovnávací funkce $Q_1(x)$ (6.1) po určitém čase, kdy máme k dispozici větší množství rizikových ukazatelů k porovnání, nabývá pouze hodnoty $\frac{1}{2}$. Z tabulky 8.1 jsou poloviční hodnoty zisku jasně vidět. Metody Monte Carlo (Tabulka 8.2) pracují s jinými hodnotami rizikových ukazatelů a zároveň obsahují náhodný prvek, proto tento jev není z výsledků zřejmý.

Bodové odhady	CC	CL	FV2	JY	W	celkem
Prům. cena kontraktu	19.3	43.1	83.5	136.4	30.6	312.9
Bez zohlednění rizika	-40.3	-247.3	215.9	386.7	109.5	424.5
Rozptyl	-20.2	-123.3	107.5	190.0	54.7	208.7
VaR	-20.2	-123.7	108.0	193.4	54.7	212.2
CVaR	-20.2	-124.0	107.9	193.4	54.7	211.8

Tabulka 8.1: Výsledky metody s bodovými odhady a funkcí $Q_1(x)$ v tisících dollarech

Monte Carlo	CC	CL	FV2	JY	W	celkem
Prům. cena kontraktu	19.3	43.1	83.5	136.4	30.6	312.9
Bez zohlednění rizika	-8.3	-45.7	298.8	390.0	25.6	660.4
Rozptyl	-70.3	89.6	47.7	165.9	14.9	247.8
VaR	-19.9	-11.5	120.8	132.3	35.1	256.8
CVaR	-20.6	17.0	148.9	177.9	36.1	359.3

Tabulka 8.2: Výsledky metody Monte Carlo s funkcí $Q_1(x)$ v tisících dolarech

8.2 Výsledky porovnávací funkce $Q_2(x)$

Porovnávací funkce $Q_2(x)$ již nabývala více hodnot (Příloha, Obrázky 9.2, 9.3) než funkce $Q_1(x)$. Bohužel tento jev způsobil mnohem častější nenulové akce a tím snížení zisku o transakční náklady. Výrazný byl tento efekt hlavně u metod Monte Carlo (Tabulka 8.4).

Bodové odhady	CC	CL	FV2	JY	W	celkem
Prům. cena kontraktu	19.3	43.1	83.5	136.4	30.6	312.9
Bez zohlednění rizika	-40.3	-247.3	215.9	386.7	109.5	424.5
Rozptyl	48.4	-42.4	-30.3	48.9	-4.2	20.4
VaR	49.3	-40.8	-34.9	-121.7	-2.1	-150.2
CVaR	49.3	-32.6	-32.3	-276.1	-2.4	-294.1

Tabulka 8.3: Výsledky metody s bodovými odhady a funkcí $Q_2(x)$ v tisících dolarech

Monte Carlo	CC	CL	FV2	JY	W	celkem
Prům. cena kontraktu	19.3	43.1	83.5	136.4	30.6	312.9
Bez zohlednění rizika	-8.3	-45.7	298.8	390.0	25.6	660.4
Rozptyl	-195.1	-104.1	-398.4	-170.4	-302.0	-1170
VaR	-2.7	-52.4	-302.8	-312.3	-62.9	-733.1
CVaR	-37.1	-18.1	-340.1	-1610	-105.8	-2111

Tabulka 8.4: Výsledky metody Monte Carlo s funkcí $Q_2(x)$ v tisících dolarech

8.3 Výsledky algoritmů založených na aktuální úspěšnosti

Algoritmy založené na úspěšnosti nedosahovaly požadovaných výsledků. To bylo způsobeno stejně jako u metod Monte Carlo s porovnávací funkcí $Q_2(x)$ výrazně častějšími nenulovými operacemi, díky kterým vysoké transakční náklady navýšené o slippage výrazně snižovaly zisk. To by bylo možné omezit zvětšením délky okna o , na kterém porovnáваме nabytý a nejlepší možný zisk. Tímto řešením ale naopak ubereme atributu aktuálnosti rizika.

Bodové odhady	CC	CL	FV2	JY	W	celkem
Prům. cena kontraktu	19.3	43.1	83.5	136.4	30.6	312.9
Míra úsp., $\kappa = 0.1$	-92.9	-112.8	-103.4	30.3	-65.0	-343.8
Míra úsp., $\kappa = 0.25$	-66.3	-126.6	-21.1	99.2	-23.1	-137.9
Míra úsp., $\kappa = 0.5$	-46.2	-145.3	58.3	177.4	9.0	53.2
Monte Carlo						
Míra úsp., $\kappa = 0.1$	-88.9	-105.8	-107.0	1.7	-71.2	-371.2
Míra úsp., $\kappa = 0.25$	-98.8	-7.0	-47.4	62.0	-44.5	-135.7
Míra úsp., $\kappa = 0.5$	-32.3	-53.7	96.6	139.3	-33.0	116.9

Tabulka 8.5: Výsledky algoritmu založeném na aktuální úspěšnosti v tisících dollarech

8.4 Závěr

V této práci jsme se seznámili s obchodováním s futures kontrakty, s metodami přibližného dynamického programování a bayesovské statistiky. Určili jsme tvar aproximované ztrátové funkce, získané jak pomocí více krokových bodových odhadů, tak pomocí metod Monte Carlo. Pro tuto funkci jsme odvodili výpočet rozptylu a hodnot VaR a CVaR a zavedli jsme dvě porovnávací funkce, které s těmito hodnotami pracovaly. Zavedení aspektu rizika do rozhodovacího pravidla přineslo požadovaný efekt držení různého množství kontraktů v čase. Bohužel tato metoda nezlepšila úspěšnost obchodní strategie.

Neúspěšnost je způsobena příliš častým obchodováním. Celková částka za transakční náklady a slippage výrazně přesahuje ztrátu, tzn. že samotný

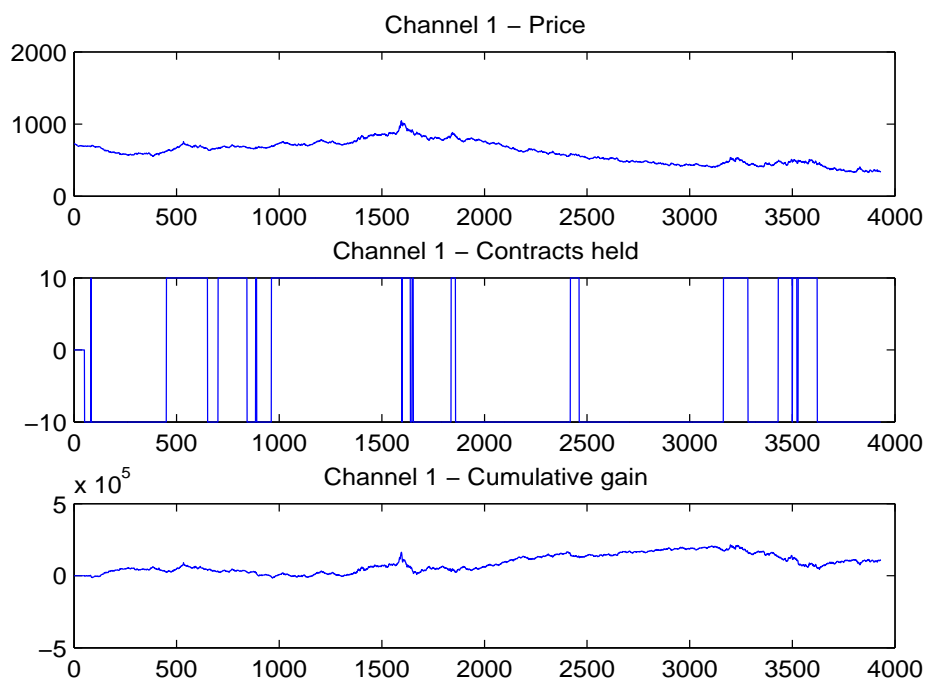
odhad růstu nebo poklesu ceny je kvalitní. Přesto je vidět, že se model nechová podle autoregresního modelu - řešení bez rizika založené na průměru předpovědí (Tabulka 8.2) je lepší než to, které je založené na středních hodnotách (Tabulka 8.1).

Hledání účinnější porovnávací funkce a snaha o snížení celkových transakčních nákladů může být předmětem další práce.

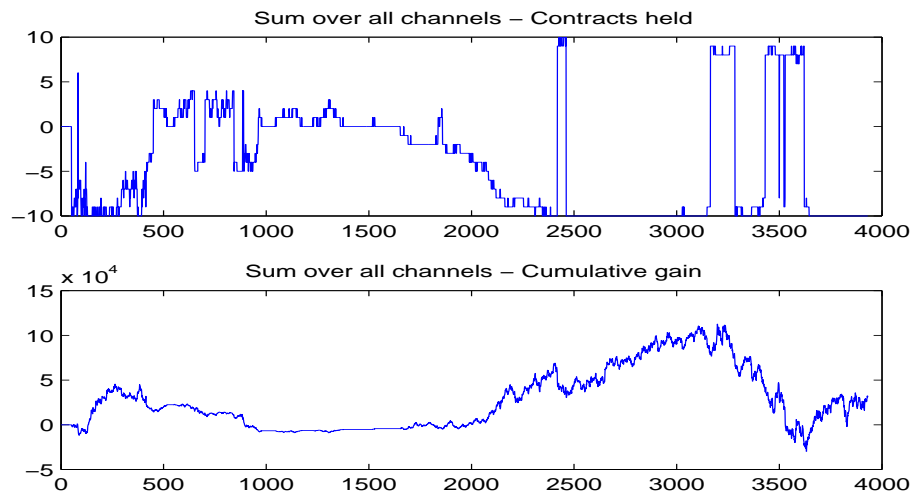
Kapitola 9

Příloha

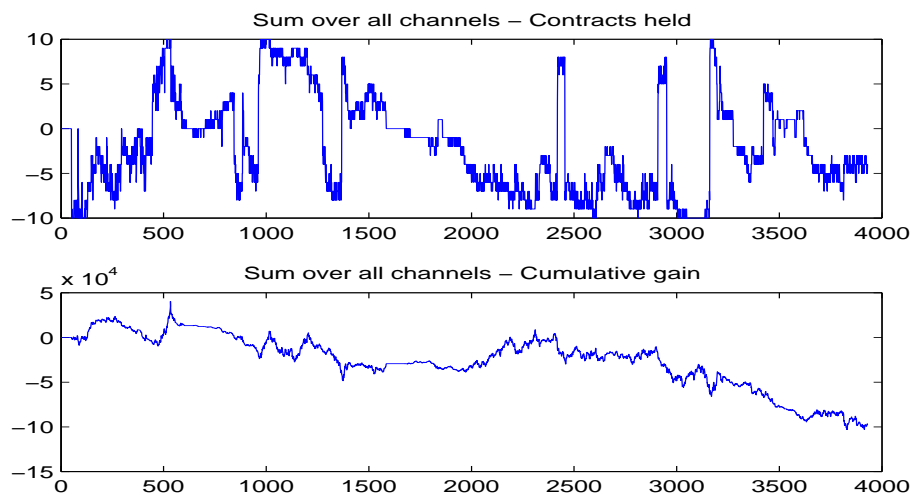
9.1 Ukázky obchodování



Obrázek 9.1: Ukázka obchodování bez zohlednění rizika



Obrázek 9.2: Ukázka obchodování pomocí bodových odhadů předpovědí cen zohledňující rozptyl ztrátové funkce



Obrázek 9.3: Ukázka obchodování pomocí metod Monte Carlo a hodnoty CVaR ztrátové funkce

Literatura

- [1] Bellman R.: *Dynamic Programming*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1957
- [2] Hammersley J. M., Handscomb D. C.: *Monte Carlo Methods*, Chapman and Hall, London New York, 1964
- [3] Hull J.: *Options, futures and other derivatives*, 6th edition, Prentice hall, New Jersey, 2006
- [4] Kárný M., Šindelář J, Pírko Š., Zeman J. : *Adaptively Optimized Trading with Futures*, technical report, ÚTIA AV ČR, 2011
- [5] Kárný M.: *Optimized Bayesian Dynamic Advising: Theory and Algorithms*, Springer, London, 2006
- [6] Lawson C. L., Hanson R. J.: *Solving Least Squares Problems*, Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1974
- [7] Nagy I., Pavelková L., Suzdaleva E., Homolová J, Kárný M.: *Bayesian decision making, theory and examples*, ÚTIA AV ČR, 2005.
- [8] Peterka V.: *Bayesian approach to system identification*, Pergamon Press, Oxford, 1981.
- [9] Prášková Z.: *Základy náhodných procesů II.*, Karolinum, 2007
- [10] Slimáček V.: *Bakalářská práce: Dynamické rozhodování pomocí přibližného dynamického programování*, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT, 2008
- [11] Šindelář J, Křivánek O. : *Dynamické rozhodování s použitím strategie založené na rozložení iterací v čase*, ÚTIA AV ČR, (Praha 2008) Research Report 2228 (2008)

- [12] Šindelář J., Kárný M.: *Adaptive Control Applied to Financial Market Data* , Advanced Mathematical Methods for Finance 2007, Vienna Austria 2007
- [13] Uryasev S.P: *Probabilistic constrained optimization : methodology and applications*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000
- [14] Zeman J.: *Futures Trading: Design of a Strategy*, Proceedings of the International Conference on Operations Research and Financial Engineering 2009, ICORFE 2009, Italy
- [15] Zeman J: *Estimating of Bellman function via suboptimal strategies* , IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics Istanbul, 2010
- [16] Zvára K., Štěpán J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress, Praha, 2002.
Použité programy:
- [17] Nedoma P., Kárný M., Guy T. V., Nagy I., Bohm J. *Mixtools* , ÚTIA AV ČR, Praha 2003
- [18] Zeman J, Kopecký M.: *Bayes Job*, ÚTIA Praha 2009