Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Renata Šiklová

Oceňování opcí: diskrétní případ

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Zahradník

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2011

Ráda bych poděkovala Mgr. Petru Zahradníkovi za odborné rady a laskavou pomoc při tvorbě této bakalářské práce. Dále mé poděkování patří všem, kteří přispěli ke zvýšení kvality tohoto díla.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 28.07.2011 Renata Šiklová

Název práce: Oceňování opcí: diskrétní případ

Autor: Renata Šiklová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Petr Zahradník, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt:
V této práci se seznámíme s diskrétním oceňováním opcí. Nebude pro nás přitom podstatná typologie opcí, nýbrž modely a jejich aspekty související s finanční matematikou. Představíme široce uplatnitelnou numerickou metodu — binomický model a od jednoduché ekonomické myšlenky principu neexistence arbitráže přejdeme k rizikově neutrálnímu oceňování a k martingalovým měrám. Důsledky rizikově neutrálního oceňovaní i teorie martingalů se projeví při oceňování amerických opcí. Věnovat se budeme také trinomickému modelu a prakticky využitelným parametrizacím.

Práce bude sledovat tři cíle: konstrukci modelu oceňování opcí, jeho implementaci a seznámení se s teorií finanční matematiky. Na teorii, kterou podáme diskrétně, můžeme pohlížet jako na výchozí bod zkoumání spojitých náhodných procesů ve stochastické analýze.

Klíčová slova: opce, binomické modely, rizikově neutrální oceňování, martingal

Title: Options Valuation: The Discrete case

Author: Renata Šiklová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor:
Mgr. Petr Zahradník, Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract:
In this work we will get familiarized with a discrete valuation of options. A powerful and widely applicable numerical method known as the binomial model will be established. Starting with a basic economic idea of non-arbitrage principle we build a risk-neutral world and develop the binomial model for call options. The general binomial model is extended into a trinomial model and there are several parameterizations that are actually used in practice, provided for both of them. Great emphasis is also focused on a theoretical background. The theoretical knowledge, that will be introduced here in the discrete world, one can regard as basis for continues models. The consequences of probability theory and risk-neutral valuation appear in the valuation of American options. There are three ultimate goals of this work: construction of the model itself, its implementation and an overview of the theoretical background.

Keywords: options, binomial models, risk neutral valuation, martingale

Obsah

Úvod

Opce je termínový kontrakt, který dává svému majiteli právo koupit nebo prodat určité množství podkladového aktiva za předem dohodnutou cenu K (strike, exercise price) do vypršení smluveného termínu T (americké opce) nebo přesně v den T (evropské opce). Prodejci opce říkáme též upisovatel (writer). Majitele nazýváme kupující či držitel opce (holder, buyer). Rozlišujeme dva základní typy opcí — put a call. Put opce přináší svému majiteli právo prodat podkladové aktivum, call opce právo koupit podkladové aktivum. Za možnost odstoupit při nepříznivém vývoji na trhu od obchodu platí držitel upisovateli prémii (cena opce). Aby byla prémie spravedlivá, musí upisovateli umožnit jištění proti tržnímu riziku, které na něj držitel přenesl. Stanovení ceny opce je hlavní náplní této práce.

Až do 20. století určovala cenu opce pouze nabídka a poptávka. Během 20. století došlo k velkému rozvoji stochastické analýzy, statistiky a teorie pravděpodobnosti. Vznikly modely chování finančních trhů a ty položily půdu pro teorii oceňování opcí.

Historicky první prací využívající ke studiu financí pokročilou matematiku byla rigorózní práce Louise Bacheliera *The Theory of Speculation* z roku 1900. Zabývala se chováním akciových a opčních trhů. Pliska [1] upozorňuje na tyto převratné myšlenky obsažené v Bachelieriho díle:
1) Bachelier předpokládal, že fluktuace ceny přes malé časové intervaly jsou nezávislé na dosavadních cenových hladinách.
2) S použitím centrální limitní věty odvodil, že přírůstky ceny jsou nezávislé, normálně rozdělené. Neboli proces ceny je Brownův pohyb, jakožto difuzní limita náhodné procházky.
3) K odvození rovnice, kterou dnes známe jako Chapmanovu–Kolmogorovu, využil markovské vlastnosti ceny akcie.
4) Rozpoznal koncept arbitráže.
Bachelieriho práce se dočkala uznání až po letech. Ve 30. letech inspirovala Kolmogorova i Dooba a až v 50. letech našla následovníky na poli oceňování opcí.

V 50. letech byl již geometrický Brownův pohyb jakožto model chování cen akciového trhu obecně přijat. Téma oceňování opcí poutalo pozornost mnoha matematiků i ekonomů[1]. Přijetí obecně uznávaného modelu však bránila neshoda ve volbě diskontního faktoru, užitého při výpočtu diskontovaného očekávaného výnosu z opce. Velký pokrok přinesla práce Edwarda Thorpa *Beat the Market* [11]. Thorp, známý především díky studiu hazardních her, přišel poprvé s myšlenkou tzv. jistícího poměru (hedge ratio) a dynamického jištění. Míru zhodnocení akcií položil rovnu bezrizikové úrokové míře. Thorpova práce inspirovala i pány Fishera Blacka a Myrona Scholese, jejichž článek The Pricing of Options and Corporate Liabilities [7] představuje největší mezník v historii oceňování opcí.

Black se Scholesem použili Thorpovu myšlenku dynamického jištění a na základě jistých předpokladů odvodili parciální diferenciální rovnice, podle kterých se cena opce vyvíjí. Výsledný vzorec pro výpočet ceny evropských call a put opcí nevyplácejících dividendu obdrželi vyřešením parciálních diferenciálních rovnic. Blackova–Scholesova práce [7] byla následně vylepšena Robertem Mertonem [10]. Merton odhalil, jak využít dynamické jištění k sestavení bezrizikového portfolia, čímž zpřesnil parciální diferenciální rovnice. Výhodou uzavřené formule pro výpočet ceny opce byla především časová nenáročnost. V době svého vzniku byl model pokládán i za uspokojivě přesný. Tato domněnka byla prokazatelně vyvrácena v říjnu 1987, kdy na burzách po celém světě došlo ke krachu[2]. Předpoklad log-normálního rozdělení ceny akcie, obsažený v Blackově–Scholesově modelu, dává extrémním fluktuacím ceny akcie velmi malou pravděpodobnost, a proto je v době náhlých výkyvů na trhu v odhadování ceny opce nepřesný.

Od roku 1973, kdy Black se Scholesem publikovali [7], objem opčních kontraktů enormně vzrostl. Nárůst objemu obchodu doprovázel rozvoj finančního inženýrství a zrod řady modelů k oceňování opcí. Dva klíčové koncepty, které za těmito modely stojí, jsou rizikově neutrální oceňování a stochastická analýza. Koncept rizikově neutrálního oceňování se poprvé objevil v práci Johna Coxe, Steva Rosse a Marka Rubinsteina (CRR) Option Pricing: A Simplified Approach [9]. Cox a spol. představili jednoduchý diskrétní model, který konverguje k Blackově–Scholesově modelu a který má daleko širší uplatnění než Blackův–Scholesův model. Jejich model umožnil ocenit i ty opce, pro které neexistovala uzavřená formule[3].

Cox a spol. přišli s hypotézou, že cenu opce lze obecně spočítat s jistými preferencemi (které nazýváme pravděpodobnosti), kladenými na výnos akcie. Preference stanovili tak, aby očekávaný výnos z akcie i opce byl roven bezrizikové úrokové míře r

$$\mathbb{E}[S_T/S_t|S_t] = e^{r(T-t)}. \tag{1}$$

Rozdělení ceny akcie aproximovali binomickým rozdělením.

[1] Za všechny jmenujme Bonesse, Samuelsona a McKeana.
[2] Více viz. [13]
[3] K takovým opcím patří americké opce a některé exotické opce.

Přiblížení rozdělení ceny akcie pomocí diskrétního rozdělení je realističtější než spojitá idealizace. Cena podkladového aktiva i čas, ve kterém je aktivum obchodováno, nenabývají libovolných reálných hodnot. Diskrétní modely však nevycházejí přímo z diskrétní reality, ale diskretizují modely spojité. CRR binomický model je zkonstruován tak, aby konvergoval k Blackově–Scholesově modelu.

Matematika obsažená v [9] není složitá, Cox a spol. se soustředili na vybudování nového modelu, méně už na jeho teoretické pozadí.

Práce Coxe, Rosse a Rubinsteina [9] motivovala další matematiky, kteří v rovnici (1) a rizikově neutrálních pravděpodobnostech (preferencích) rozpoznali ekvivalentní martingalové míry, známé z teorie pravděpodobnosti. Odtud diskontovaný proces ceny musí být martingal. Oněmi matematiky byli J. Michael Harrison a David Kreps [14]. Harrison a Kreps napomohli rozšíření a aplikaci rizikově neutrálního přístupu a otevřeli vrátka využívání martingalů ve financích a stochastických integrálech.

Boyle [8] rozšířil CRR model na trinomický. Věnoval se také oceňování opcí s více podkladovými aktivy. Kamrad a Ritchken zobecnili Boylovu techniku pro multinomické stromy.

Od 80. let bylo navrženo mnoho různých aproximací spojitého oceňování. Teoretické poznatky související s diskrétním oceňováním opcí se prohloubily. Nejobsáhlejšími didaktickými publikacemi pokrývajícími to podstatné z teorie oceňování opcí jsou [4], [2], [3]. Ve své práci vycházím především z [2].

V první kapitole uvádím obecný binomický model, princip vyloučení arbitráže, rizikově neutrální oceňování a jistící poměr. Tato kapitola se volně přidržuje uspořádání 1. kapitoly [2]. Ve druhé kapitole se zabývám stromy trinomickými. Třetí se věnuje parametrizaci binomických a trinomických stromů a porovnání výsledků pro různé parametrizace. Čtvrtá kapitola mapuje základy teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů, užívané při zkoumání stochastických procesů. Tato kapitola pokrývá kapitoly 2 a 3 v [2]. Pátá si klade za cíl ozřejmit klíčové aspekty oceňování amerických opcí. Zároveň navazuje na čtvrtou kapitolu a prohlubuje teorii martingalů. Pátá kapitola čerpá ze čtvrté kapitoly [2] a z [16]. Práce je proložena příklady a grafy vytvořenými v komerčním softwaru Mathematica®. Zdrojové kódy jsou připojeny v příloze.

Kapitola 1

Binomický model oceňování opcí

1.1 Obecné předpoklady binomického modelu

Binomický model je principielně jednoduchý model určený pro oceňování opcí v diskrétním čase. Narozdíl od Blackova–Scholesova modelu nevyžaduje znalost stochastické analýzy. K jeho sestrojení postačuje princip neexistence arbitráže a elementární znalosti z teorie pravděpodobnosti. Jednoduchý základní koncept ovšem podněcuje řadu zajímavých otázek týkajících se například zobecnění na stromy multinomické či využití martingalů ve financích. Velkou výhodou binomického modelu je flexibilita a snadná modifikovatelnost pro složitější druhy finančních opcí, u kterých neexistuje uzavřená formule pro výpočet ceny a je třeba se uchýlit k různým numerickým metodám.

Model oceňování opcí binomickými stromy je založen na předpokladu, že cena podkladového aktiva je v diskrétním čase binomický proces.

Definice 1 (Binomický proces)**.** *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *je pravděpodobnostní prostor a* $N \in \mathbb{N}$*. Pak posloupnost binomicky rozdělených náhodných veličin* $(S_n)_{n=0}^{N}$ *definovaných na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *je binomický proces.*

N stanovíme na základě času do splatnosti opce T a na základě požadavků na přesnost a časovou náročnost modelu. Rozdělíme-li si T na ekvidistantní intervaly o délce Δt, bude $N = \frac{T}{\Delta t}$. Pokud nebude řečeno jinak, budeme pro jednoduchost uvažovat $\Delta t = 1$.

Náhodné procesy, které budeme na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a na prostorech s ekvivalentními martingalovými mírami pozorovat jsou adaptované[1].

Náhodný proces můžeme obecně chápat jako funkci dvou proměnných ω a n. Pro pevné n, $n = 0, 1, \ldots, N$ je $X_n = X_n(.)$ náhodná veličina definovaná na Ω. Pro pevné $\omega \in \Omega$ je $X_{(.)} = X_{(.)}(\omega)$ funkcí jen proměnné n. Této funkci říkáme trajektorie či realizace procesu.

Jelikož se binomický proces chová stejně jako házení „nespravedlivou" mincí, kde hlava (head) padne s pravděpodobností p a orel (tail) s doplňkovou pravděpodobností $q = 1 - p$, budeme stavy řetězce značit podle počtu hlav resp. orlů, které by vedly k jeho realizaci. Například $S(HHT)$ značí hlavy v časech 1, 2 a orel v čase 3.

Předpoklady, společné všem základním modelům oceňování opcí, binomický nevyjímaje[2], jsou následující:

- Podkladová aktiva i opce lze za účelem nákupu či prodeje libovolně dělit.
- Po dobu do splatnosti opce existuje na trhu jediná bezriziková úroková míra r, stejná pro investice i půjčky.
- Pořizovací a prodejní ceny aktiv jsou si rovny (nulové rozpětí mezi nabídkou a poptávkou).
- Trh je efektivní, neexistuje možnost *arbitráže*.
- Transakční náklady jsou nulové.

Rozvolněním některých příliš restriktivních a nereálných předpokladů (nulové transakční náklady, konstantní r) se zabývají až modifikace základních modelů.

Aby později nedocházelo k nedorozumění, uvedeme zde význam několika pojmů a symbolů, které budeme v práci používat:

Arbitráží rozumíme obchodní strategii takovou, že s nulovou počáteční investicí neutrpíme ztrátu a s kladnou pravděpodobností dosáhneme zisku.

Vnitřní hodnotou opce budeme, v rozporu s obvyklou terminologií[3], rozumět výnos, který by držitel hypoteticky realizoval okamžitým uplatněním opce. Výnos může být i záporný.

[1] Přesnou definici adaptovaného procesu a martingalu nalezneme ve 4. kapitole.

[2] Uvedené předpoklady byly poprvé zavedeny v [7].

[3] Obvykle je vnitřní hodnota opce definovaná tak, že nabývá pouze nezáporných hodnot.

Výplatní funkcí rozumíme nezápornou funkci výnosu z opce definovanou v čase, kdy může být opce uplatněna. Zpravidla $v(s) = \max\{K - s, 0\}$ pro put opci a $v(s) = \max\{s - K, 0\}$ pro call opci. Za s dosazujeme například S_N (evropské vanilla opce), $(S_n)_{n=0}^N$ (americké vanilla opce) či $\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N S_n$ (asijské opce).

Symbolem $\mathcal{N}$ budeme značit libovolnou podmnožinu $\mathbb{N}_0$, tj. $\mathcal{N} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$. Symbol N, $N \in \mathbb{N}$ značí počet period binomického stromu.

1.2 Jednoperiodický binomický model

Princip oceňování binomickými stromy vysvětlíme nejprve na nejjednodušším případu, kde $N = 1$ a opce je evropského typu na akcie nevyplácející dividendy.

1.2.1 Model ceny akcie

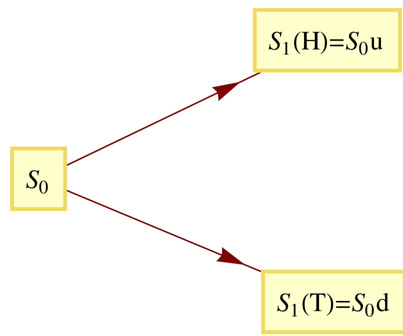
Mějme deterministický počáteční stav ceny akcie $S_0, S_0 > 0$. V čase 1 pak náhodná veličina S_1 nabývá kladných hodnot $S_1(H) = uS_0$ s pravděpodobností p a $S_1(T) = dS_0$ s pravděpodobností q. Parametry u a d hrají zásadní roli při konstrukci modelu. Odpovídají volatilitě ceny akcie a projeví se i na driftu. Pro jednoduchost nyní předpokládejme, že u a d jsou dané a strom tak máme předdefinovaný[4]. Předpokládejme, že u a d jsou konstantní[5] a $d < u$. Obvykle navíc platí $d < 1 < u$. Odtud značení u (up) a d (down). Chceme-li vyloučit arbitráž, musí u a d splňovat

$$0 < d < 1 + r < u. \tag{1.1}$$

Požadavek (1.1) je zcela legitimní. První nerovnost plyne z nezápornosti ceny akcie. Kdyby neplatila druhá nerovnost, mohli bychom si v čase 0 půjčit na nákup akcie S_0 a v čase 1 s výnosem akcie minimálně dS_0 splatit půjčku $(1+r)S_0$ a ještě realizovat arbitrážní zisk. Poslední nerovnost ospravedlňuje to, že kdyby bylo možné v čase 0 nakrátko prodat akcii za S_0 a S_0 investovat s výnosem $(1+r)$, v čase 1 bychom z investice skoro jistě zaplatili akcii a vydělali minimálně $(1 + r - u)S_0$. Opět by nastala arbitráž.

[4] O volbě u a d více v kapitole o parametrizaci

[5] V reálném světě se volatilita (u, d) i úroková míra r v čase mění. Modely, které mají u, d a r proměnné jsou však náročnější.



Obrázek 1.1: Jednoperiodický binomický model.

1.2.2 Výnos z opce

Známe-li trajektorie ceny akcie, stanovení ceny opce v listech binomického stromu, nyní v čase 1, není obtížné. V listech je cena opce funkční hodnotou své výplatní funkce. Například pro vanilla call máme $V_1 = v(S_1) = (S_1 - K)^+$ a pro vanilla put $V_1 = v(S_1) = (K - S_1)^+$. Cílem je spočítat cenu opce v čase 0 [6].

Prémie, jinak též cena opce, je pro upisovatele jediným příjmem plynoucím z kontraktu, a tak mu musí kompenzovat budoucí potencionální ztrátu, kterou utrpí v případě, že držitel opci uplatní. Dívejme se proto na cenu opce jako na počáteční kapitál jistého portfolia. Tímto portfoliem, které označíme X a budeme nazývat *replikační*, se chce upisovatel jistit. Aby byla opce pro upisovatele přijatelná, musí pro každé $\omega \in \Omega$ portfolio v čase realizace opce splňovat

$$X_1(\omega) - V_1(\omega) \geq 0.$$

Upisovatelovi náklady v čase 0 jsou nulové. Neexistence arbitráže bude zaručena, právě když $P(X_1 - V_1 > 0) = 0$. Z toho plyne:

$$X_1(\omega) = V_1(\omega) \quad \text{pro každé } \omega \in \Omega.$$

Replikační portfolio sestavíme z akcie, která je podkladovým nástrojem opce, a z investice do bezrizikového aktiva na spotovém trhu. Mějme počáteční kapitál X_0 a počet akcií Δ_0 nakoupených v čase 0 (záporná hodnota značí prodej akcií nakrátko). Potom

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0).$$

[6] Jak bude vysvětleno v poznámce na konci této podkapitoly, intuitivní přístup, ocenění diskontovanou střední hodnotou vzhledem k p, q, v případě opcí selhává.

Hledáme X_0 a Δ_0, pro která $X_1(H) = V_1(H)$ a $X_1(T) = V_1(T)$,

$$\begin{aligned} X_0 + \Delta_0\Big[\frac{1}{1+r}S_1(H) - S_0\Big] &= \frac{1}{1+r}V_1(H) \\ X_0 + \Delta_0\Big[\frac{1}{1+r}S_1(T) - S_0\Big] &= \frac{1}{1+r}V_1(T). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Jedním ze způsobů jak soustavu rovnic (1.2) vyřešit je postupná eliminace proměnných. V prvním kroku se snažíme nalézt takovou lineární kombinaci soustavy (1.2), která eliminuje neznámou Δ_0. Ve druhém kroku hledáme transformaci vylučující X_0. Ekvivalentní úpravy řešení soustavy nemění.

Sečtěme jistý $\tilde{p}$ násobek 1.rovnice (1.2) s $\tilde{q}$ násobkem 2.rovnice (1.2)

$$X_0 + \Delta_0\Big\{\frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)] - S_0\Big\} = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)]. \tag{1.3}$$

Vhodná $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, eliminující Δ_0, jsou řešením rovnice

$$S_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)]. \tag{1.4}$$

Pro jednoznačnost $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, položme navíc $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$. Tím dostáváme $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ rovna

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \qquad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}. \tag{1.5}$$

Potom rovnice (1.3) dává pro X_0 jednoduchý vzorec

$$X_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)]. \tag{1.6}$$

Ve druhém kroku, odečtením druhé rovnice (1.2) od první, obdržíme řešení Δ_0,

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}.$$

Pořízením Δ_0 akcií v čase 0 je upisovatel jištěný, tj. bez ohledu na výsledek náhodného pokusu bude hodnota jeho portfolia v čase 1 rovna V_1. Eliminovali jsme náhodu a portfolio je tak bezrizikové. Δ_0 říkáme *zajišťovací poměr*.

Pro konečné odvození V_0 použijeme následující pravidlo, vyplývající z neexistence arbitráže:

Tvrzení 1 (Zákon jedné ceny). *Jsou-li hodnoty dvou portfolií v čase N identické skoro jistě, potom jejich hodnoty musí být stejné pro každé $n = 0, \ldots, N$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem pro $N = 1$.
V případě, že $X_0 \neq V_0$ a $X_1 = V_1$, bychom mohli v čase 0 provést tyto operace:
1) Nakrátko prodat dražší aktivum.
2) Koupit levnější aktivum.
3) $|X_0 - V_0|$ investovat s úrokem r.
V čase 1 bychom uzavřeli krátkou pozici výnosem z druhé operace a třetí operace by nám zajistila arbitrážní příjem $|X_0 - V_0|(1 + r)$.

□

Proto požadujeme-li, aby $X_1 = V_1$ skoro jistě, musí i $X_0 = V_0$. Pak platí

$$V_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)]. \tag{1.7}$$

Cenu opce jsme stanovili pomocí její replikace tzv. replikačním portfoliem, obchodováním na akciovém a spotovém trhu v nespojitém čase tak, aby nedocházelo k arbitráži.

Výsledná rovnice (1.7) se nazývá *rizikově neutrální oceňovací formule* a $\tilde{p}, \tilde{q}$ dané (1.5) *rizikově neutrální pravděpodobnosti*. Název rizikově neutrální pravděpodobnosti plyne ze skutečnosti, že při (1.4) investorovy preference ohledně rizika nehrají žádnou roli a očekávaný výnos z rizikového aktiva je stejný jako výnos z investice do bezrizikového aktiva. Vlastní pravděpodobnosti p, q se nikde v algoritmu oceňování binomickými stromy neobjevují, a tak jsou irelevantní. Na čem záleží, je velikost možného pohybu nahoru a dolů (u a d).

Poznámka. Na příkladu call opce s výplatní funkcí $v(S_1) = \max\{S_1 - K, 0\}$ ozřejmíme, proč nelze použít standardní postup oceňování aktiv diskontovanou střední hodnotou. Víme, že $X_1 = V_1$. Diskontované střední hodnoty X_1 a V_1 se proto musejí při stejném r rovnat;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+r}\mathbb{E}V_1 &= \frac{1}{1+r}[pV_1(H) + qV_1(T)] \\
&= \frac{1}{1+r}[p\max\{S_1(H) - K, 0\} + q\max\{S_1(T) - K, 0\}], && (1.8) \\
\frac{1}{1+r}\mathbb{E}X_1 &= \frac{1}{1+r}\Delta_0[pS_1(H) + qS_1(T)] + X_0 - \Delta_0 S_0. && (1.9)
\end{aligned}$$

Protože $V_1 = v(S_1)$ a výplatní funkce není lineární, výrazy (1.8) a (1.9) se obecně nerovnají. V rovnici (1.3) můžeme $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ interpretovat jako pravděpodobnostní míru vzhledem ke které $\mathbb{E}V_1 = \mathbb{E}X_1$.

1.3 Multiperiodický binomický model

Předchozí algoritmus zobecníme pro libovolný počet period $N \in \mathbb{N}$.

Cena akcie i hodnota replikačního portfolia jsou dány rekurzivně:

$$S_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{1}{1+r}\Big[\tilde{p}S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)\Big]; \tag{1.10}$$

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n). \tag{1.11}$$

Předpoklady a samotný algoritmus vedoucí k rizikově neutrální oceňovací formuli shrňme do následující věty.

Věta 2 (Replikace v multiperiodickém binomickém modelu). *Uvažujme N-periodický binomický model oceňování opcí, pro který $0 < d < 1 + r < u$ a $\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$, $\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$. Nechť V_N je náhodná veličina (výnos opce v čase N) na Ω. Pomocí inverzní rekurze definujme adaptovaný náhodný proces $(V_n)_{n=0}^{N-1}$ jako*

$$V_n(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n T)].$$

Dále definujme

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n T)}, \qquad 0 \le n \le N-1.$$

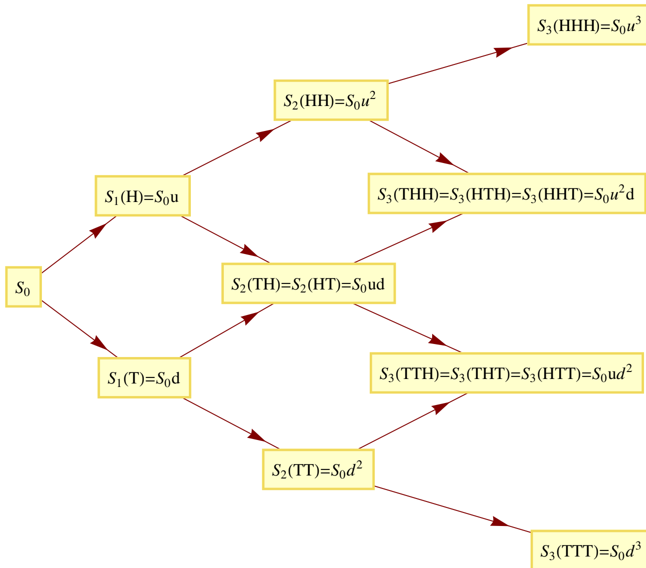
Jestliže položíme $X_0 = V_0$ a rekurzivně definujeme proces hodnoty portfolia $(X_n)_{n=1}^{N}$ podle (1.11), pak platí

$$X_N(\omega) = V_N(\omega) \qquad \textit{pro každé } \omega \in \Omega.$$

Věta 1 říká, že existuje-li jednoznačně určená rizikově neutrální míra, potom může být opce jištěna. Nositelem stejné myšlenky je tvrzení nazývané Druhý základní teorém oceňování aktiv.

Definice 2 (Kompletní model). *Řekneme, že model je kompletní, jestliže každá opce může být jištěna.*

Věta 3 (Druhý základní teorém oceňovaní aktiv). *Nechť pro model existuje rizikově neutrální míra. Model je kompletní, právě když je rizikově neutrální míra určena jednoznačně.*



Obrázek 1.2: Multiperiodický binomický model.

Důsledek 4. *Jestliže není rizikově neutrální míra určena jednoznačně, může být V_0 replikováno, pouze když (1.6) nabývá stejných hodnot pro všechna $\tilde{p}$, $\tilde{q}$.*

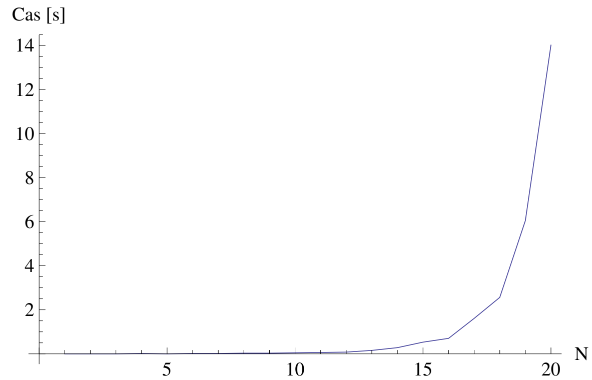
Věta 5 (První základní teorém oceňovaní aktiv)**.** *Jestliže existuje rizikově neutrální míra, potom je arbitráž vyloučena.*

Důsledek 6. *Jestliže existuje více než jedna rizikově neutrální míra a (1.6) nabývá různých hodnot, potom je arbitráž vyloučena, a přesto není cena opce pro upisovatele nebo držitele přijatelná, neumožňuje jistění.*

Větu 1 můžeme aplikovat jak na opce, u kterých výnos závisí pouze na spotové ceně podkladového aktiva v okamžiku realizace (evropská put, call), tak na tzv. *path-dependent options* (např. lookback či asijské opce).

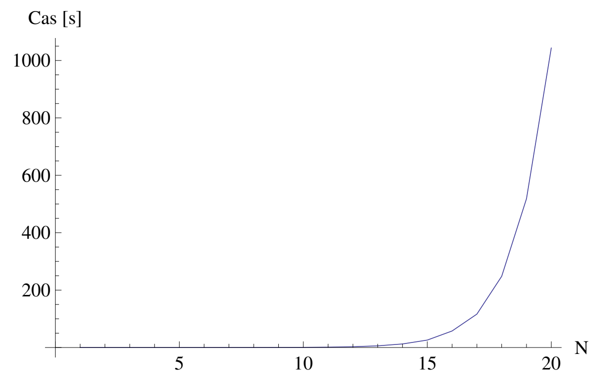
Příklad (Oceňování evropských vanilla opcí).
Cenu evropských vanilla opcí počítá program (P1). Algoritmus je primitivní, ovšem názorný.

Příklad (Oceňování asijských opcí).
Cenu asijských opcí s výplatní funkcí $\max\left\{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n - K, 0\right\}$ počítá (P2).



Obrázek 1.3: Časová náročnost algoritmu (P1).

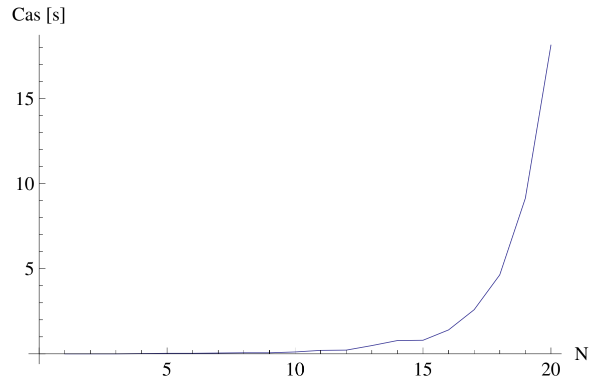
Funkce *akcie* vytváří kompletní binomický strom s 2^n uzly v n-té periodě. *For* cyklus počítá částečné součty tak, že se v každém kroku zdvojí ($\{x_1, x_2\} -> \{x_1, x_1, x_2, x_2\}$) a dosavadní částečné součty navýší o příslušný rozvoj ceny akcie.



Obrázek 1.4: Časová náročnost algoritmu (P2).

Příklad (Oceňování lookback opcí).
O poznání jednodušší algoritmus je aplikován na lookback opci s výplatní funkcí $\max\limits_{n=0,\dots,N} S_n - S_N$ v programu (P3).

Časovou náročnost algoritmů (P1), (P2) a (P3) můžeme porovnat na obrázcích 1.3, 1.4, 1.5. Uvedenými algoritmy demonstrujeme důležitost efektivní implementace. Rozdíl mezi rekurzemi v programech (P2) a (P3) je, že (P3) si již spočítané výsledky ukládá. Proto je (P3) při 20 iteracích 50 krát rychlejší než (P2).



Obrázek 1.5: Časová náročnost algoritmu (P3).

Poznámka. Chceme-li porovnávat výsledky modelu pro různá N, za jinak neměnných podmínek, musí se v proceduře odrazit proměnná délka intervalu, přes který diskontujeme. Proto se ve všech programech, uvedených v příloze, objevuje „dt“ a „$(1+r)^{dt}$“.

Kapitola 2

Trinomický model oceňování opcí

2.1 Parametry trinomického modelu

Alternativu k binomickému modelu oceňování opcí v diskrétním čase nabízejí stromy trinomické. Jejich zkonstruování a aplikace je analogická k binomickému modelu. Kromě skoků o velikosti u a d s pravděpodobnostmi p_1 resp. p_3 navíc přibývá varianta pohybu o m s pravděpodobností $p_2 = 1 - p_1 - p_3$. Parametr m může obecně nabývat libovolných hodnot na intervalu (d, u). O rozumné volbě m se zmíníme později.

Abychom určili rizikově neutrální míru, rozšíříme soustavu (1.2) o 3. rovnici:

$$X_0 + \Delta_0 \Big[\frac{1}{1+r} S_1(M) - S_0\Big] = \frac{1}{1+r} V_1(M). \tag{2.1}$$

Analogicky k (1.3) máme

$$\begin{aligned} X_0 + \Delta_0 \Big\{\frac{1}{1+r}[\tilde{p_1} S_1(H) + \tilde{p_2} S_1(M) + \tilde{p_3} S_1(T)] - S_0\Big\} \\ = \frac{1}{1+r}[\tilde{p_1} V_1(H) + \tilde{p_2} V_1(M) + \tilde{p_3} V_1(T)]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Eliminujeme Δ_0 a dostaneme

$$V_0 = X_0 = \frac{1}{1+r}[\tilde{p_1} V_1(H) + \tilde{p_2} V_1(M) + \tilde{p_3} V_1(T)].$$

Problematickou otázkou je jednoznačnost rizikově neutrální míry. V Mathematice vyřešíme soustavu rovnic, odvozenou od (2.2),

$$\begin{aligned} (1+r) S_0 &= \tilde{p_1} S_1(H) + \tilde{p_2} S_1(M) + \tilde{p_3} S_1(T) \\ 1 &= \tilde{p_1} + \tilde{p_2} + \tilde{p_3}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Parametry $\tilde{p_1}, \tilde{p_2}, \tilde{p_3}$ nejsou určeny jednoznačně:

$$\tilde{p_2} = -\frac{1-d+r}{d-m} - \frac{\tilde{p_1}(d-u)}{d-m};$$
$$\tilde{p_3} = 1 + \frac{1-d+r}{d-m} - \tilde{p_1}\Big(1 - \frac{d-u}{d-m}\Big).$$

Následující řešení problému, vyplývajícího z důsledku 5, navrhl Phelim Boyle [8].

Předpokládejme, že výnosy aktiva S mají log-normální rozdělení. Toto rozdělení aproximujeme přes malý časový interval trinomickým procesem takovým, že očekávaný výnos z aktiva je bezriziková úroková míra. Trinomické rozdělení má navíc rozptyl shodný s log-normálním rozdělením, které aproximuje. Protože délka intervalu Δt významně zasahuje do parametrizace pomocí spojitého modelu, budeme pozbytek této kapitoly a v kapitole příští uvažovat obecné Δt. Dělení intervalu $[0, T]$ je pak $\{0, \Delta t, 2\Delta t \dots, T\}$. Úročit a diskontovat budeme spojitě[1].

Místo soustavy (2.3) máme

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{p_1} + \tilde{p_2} + \tilde{p_3} \\ e^{r\Delta t} S_0 &= \tilde{p_1} S_1(H) + \tilde{p_2} S_1(M) + \tilde{p_3} S_1(T) \\ S_0^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) &= \tilde{p_1} S_1^2(H) + \tilde{p_2} S_1^2(M) + \tilde{p_3} S_1^2(T) - [\tilde{p_1} S_1(H) + \tilde{p_2} S_1(M) + \tilde{p_3} S_1(T)]^2. \end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{p_1} + \tilde{p_2} + \tilde{p_3} \\ e^{r\Delta t} &= \tilde{p_1} u + \tilde{p_2} m + \tilde{p_3} d \\ e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) &= \tilde{p_1} u^2 + \tilde{p_2} m^2 + \tilde{p_3} d^2 - (\tilde{p_1} u + \tilde{p_2} m + \tilde{p_3} d)^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Soustava je nyní úplná a Mathematica dává řešení:

$$\tilde{p_1} = \frac{e^{\Delta t(2r+\sigma^2)} - e^{r\Delta t} m + d(-e^{r\Delta t} + m)}{(d-u)(m-u)};$$
$$\tilde{p_2} = \frac{e^{\Delta t(2r+\sigma^2)} - e^{r\Delta t} u + d(-e^{r\Delta t} + u)}{(d-m)(-m+u)};$$
$$\tilde{p_3} = \frac{e^{\Delta t(2r+\sigma^2)} + mu - e^{r\Delta t}(m+u)}{(d-m)(d-u)}.$$

[1]Přechod mezi spojitým a složeným úročením je přijatelný. Platí, že pro dostatečně malé intervaly úročení je rozdíl mezi spojitým a diskrétním úročením zanedbatelný viz. Cipra, T. : *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou.* HZ, Praha 1995.

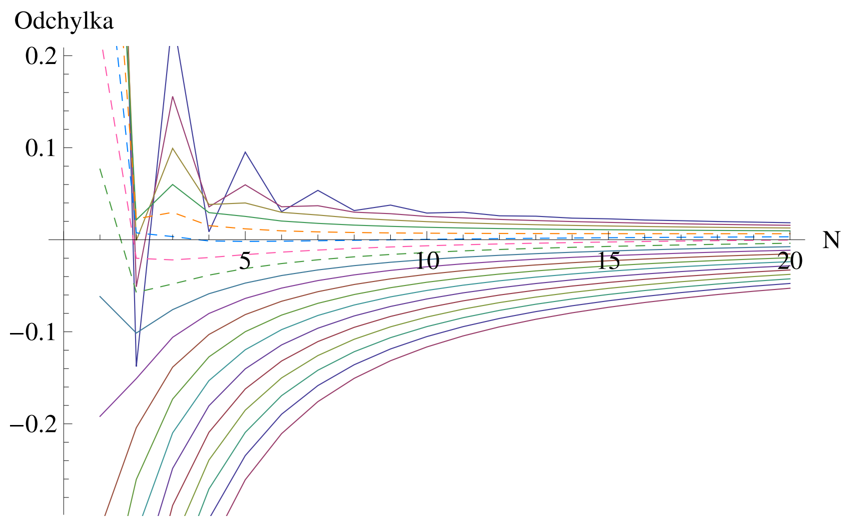
Nevýhodou Boylova postupu je, že nezaručuje kladnost parametru $\tilde{p_2}$. Například s obvyklou volbou $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $m = 1$, $d = \frac{1}{u}$ a $\sigma = 0.20, r = 0.1, T = 1$, $N = 2$ budou $\tilde{p_1} = 0.554$, $\tilde{p_2} = -0.018$ a $\tilde{p_3} = 0.464$.

Boyle tento nedostatek odstranil přidáním dalšího parametru λ, $\lambda > 1$ a u položil

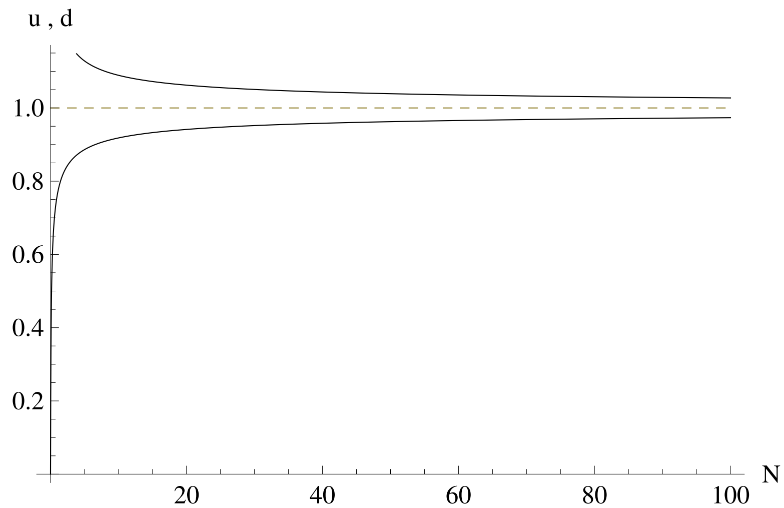
$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Optimální hodnotu λ určil na základě simulací. Graf na obrázku 2.1 zobrazuje srovnání rychlosti konvergence k Blackově–Scholesově modelu pro různá λ. Se zvolenými parametry ($\sigma = 0.20, r = 0.1, T = 1, S_0 = 40, K = 40$ a opce typu put) vycházejí nejlépe $\lambda = 1.35$ (v grafu 2.1 čárkovaně modře) a $\lambda = 1.4$ (čárkovaně růžově). Uspokojivé výsledky dává i $\lambda = 1.3$ (čárkovaně oranžově) a $\lambda = 1.45$ (čárkovaně zeleně).

Jak je vidět na obrázku 2.2, rozumnou volbou parametru m je $m = 1$. Se zjemňujícím se dělením doby do splatnosti opce konvergují $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$ i $d = \frac{1}{u}$ k 1. Potom pro každé $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ nalezneme $N \in \mathbb{N}$ takové, že $m \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$. Kód pro výpočet ceny opce trinomickým modelem s Boylovými parametry je k nahlédnutí v (P4).



Obrázek 2.1: Konvergence Boylova modelu pro $\lambda = 1.1, 1.15, \ldots, 2$.



Obrázek 2.2: Délka intervalu (d, u) pro $\lambda = 1.35, T = 1, \sigma = 0.2$.

Cestou podobnou Boylově se vydali Kamrad a Ritchken [5]. Předpokládali, že podkladové aktivum je geometrický Wienerův pohyb s driftem $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Pro $\lambda \geq 1$, $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = \frac{1}{u}$ a $m = 1$ odvodili:

$$\tilde{p_1} = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma};$$
$$\tilde{p_2} = 1 - \frac{1}{\lambda^2};$$
$$\tilde{p_3} = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}.$$

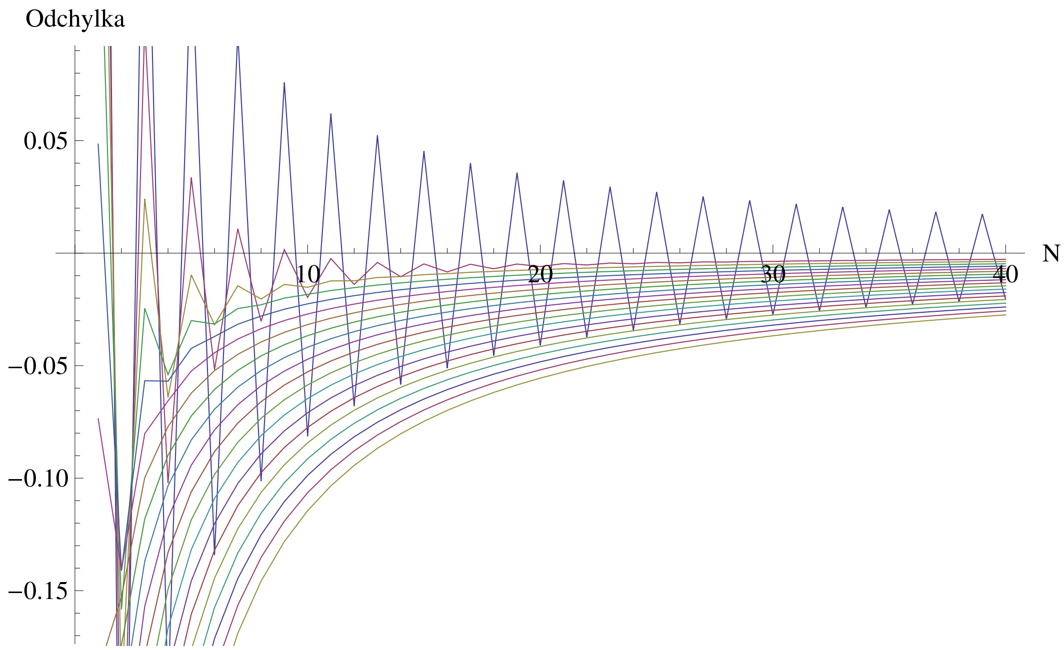
Nejlepší výsledky obdrželi pro λ takové, že $\tilde{p_2} = 1/3$. Je-li $\lambda = 1$, $\tilde{p_2} = 0$ a model degeneruje na binomický.

Na obrázku 2.3 vidíme srovnání rychlosti konvergence Kamradova–Ritchkenova modelu k Blackově–Scholesově modelu pro různá λ. Kamradovu–Ritchkenovu parametrizaci implementujeme v programu (P5).

2.2 Porovnání trinomického a binomického modelu

Pro stejný počet period je rychlost konvergence k Blackově–Scholesově modelu výrazně vyšší u trinomického modelu (obrázek 2.4). Tato výhoda nemusí být relevantní, protože trinomický model je zároveň časově náročnější.

V trinomickém modelu s N periodami máme $\sum_{i=0}^{N}(2i+1) = (N+1)^2$ uzlů, v

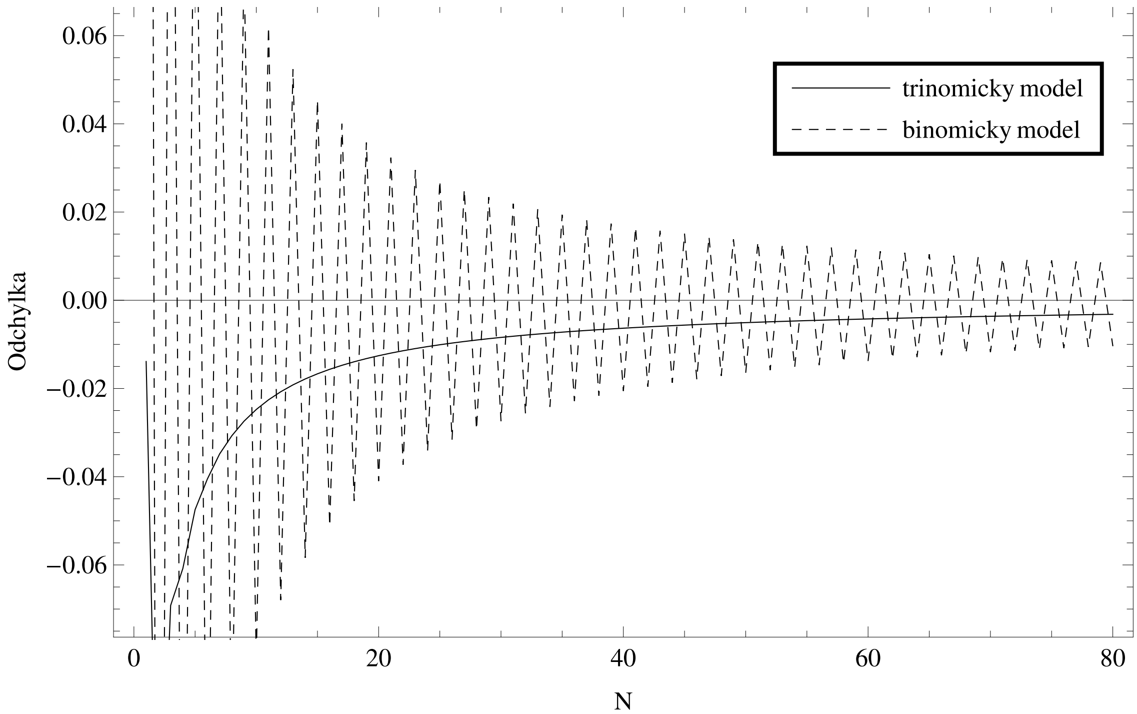


Obrázek 2.3: Konvergence Kamradova–Ritchkenova modelu pro $\lambda = 1,\ 1.05,\ \ldots,\ 1.95$.

binomickém $\sum_{i=0}^{N}(i+1) = \frac{1}{2}(1+N)(2+N)$ uzlů. S výjimkou poslední periody provádíme v každém uzlu trinomického stromu 5 operací (3 násobení + 2 sčítání), v binomickém stromu operace 3 (2 násobení + 1 sčítání). Celkem tedy provedeme $5N^2$ operací ve stromu trinomickém a $\frac{3}{2}(N^2+N)$ operací ve stromu binomickém. Binomický model s N periodami je, evidentně, časově přijatelnější než trinomický s N periodami. Pro velká N je dokonce 3x rychlejší. Víme však, že trinomický model konverguje k Blackově–Scholesově modelu mnohem rychleji[2], proto si můžeme dovolit počítat s méně periodami. Ze srovnání trinomického modelu s N periodami a binomického s $2N$ periodami vychází efektivněji trinomický. Porovnání přesnosti modelů (resp. odchylek od výsledků Blackova–Scholesova modelu) můžeme nalézt v [5].

Stojí za povšimnutí, že vynecháme-li v binomickém modelu každou lichou periodu, výsledný strom budeme moci klasifikovat jako trinomický. Ekvivalenci mezi binomickým modelem s parametry CRR a trinomickým modelem s parametry uvedenými níže předvedl Mark Rubinstein [13]. Označme parametry trinomického

[2] Graf na obrázku 2.4 ukazuje, že výsledky trinomického modelu po 10 iteracích jsou srovnatelné s výsledky binomického modelu po 40 iteracích.



Obrázek 2.4: Srovnání rychlosti konvergence binomického a trinomického modelu.

stromu velkými písmeny R,U,D a $\tilde{P}$. Potom rovnice

$$(1+r)^2 S_0 = \tilde{p}^2 S_0 uu + 2\tilde{p}(1-\tilde{p}) S_0 ud + (1-\tilde{p})^2 S_0 dd,$$
$$(1+R) S_0 = \tilde{P}_1 S_0 U + (1-\tilde{P}_1-\tilde{P}_3) S_0 + \tilde{P}_3 S_0 D$$

budou identické pro

$$R = (1+r)^2 - 1 \qquad D = d^2 \qquad U = u^2$$
$$\tilde{P}_1 = \tilde{p}^2 \qquad \tilde{P}_3 = (1-\tilde{p})^2.$$

Přirozeně požadujeme, aby při délce intervalu binomického modelu Δt byl interval trinomického modelu $2\Delta t$. Rubinstein [13] dále demonstruje vztah mezi CRR parametrizací binomického modelu a Kamradovou–Ritchkenovou parametrizací trinomického modelu.

Postup užitý při parametrizaci trinomického modelu (momentová metoda) lze zobecnit pro stromy multinomické. Multinomické stromy slouží k oceňování opcí s několika podkladovými aktivy. Pro ocenění opcí se dvěma podkladovými aktivy postačují stromy trinomické. O oceňování K-stavovými modely se můžeme dozvědět v [5] a v [8].

Kapitola 3

Parametrizace

Jak již bylo řečeno, pro stanovení rizikově neutrální ceny opce nejsou podstatné pravděpodobnosti přechodu ze stavu S do stavu uS či dS, ale velikosti skoku — u a d. Díky volnosti ve volbě parametrů u a d obecně existuje nekonečně mnoho ekvivalentních binomických stromů, reprezentujících diskrétní realitu s konstantní volatilitou. Přenásobíme-li u a d libovolnou (rozumně malou) konstantou, získáme jiný strom s jinými rizikově neutrálními pravděpodobnostmi. Pouze některé volby u a d jsou vhodné (tj. modelují volatilitu) k aproximaci cen podkladového aktiva a modelování ceny opce. Hodnoty parametrů u a d se, stejně jako rizikově neutrální pravděpodobnosti v podkapitole 2.1, odvozují od spojitého modelu. Analogicky k (2.4) máme soustavu

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} &= \tilde{p}u + (1-\tilde{p})d, \\ e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t}-1) &= \tilde{p}u^2 + (1-\tilde{p})d^2 - [\tilde{p}u + (1-\tilde{p})d]^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Druhá rovnice (3.1) se obvykle zapisuje ve tvaru

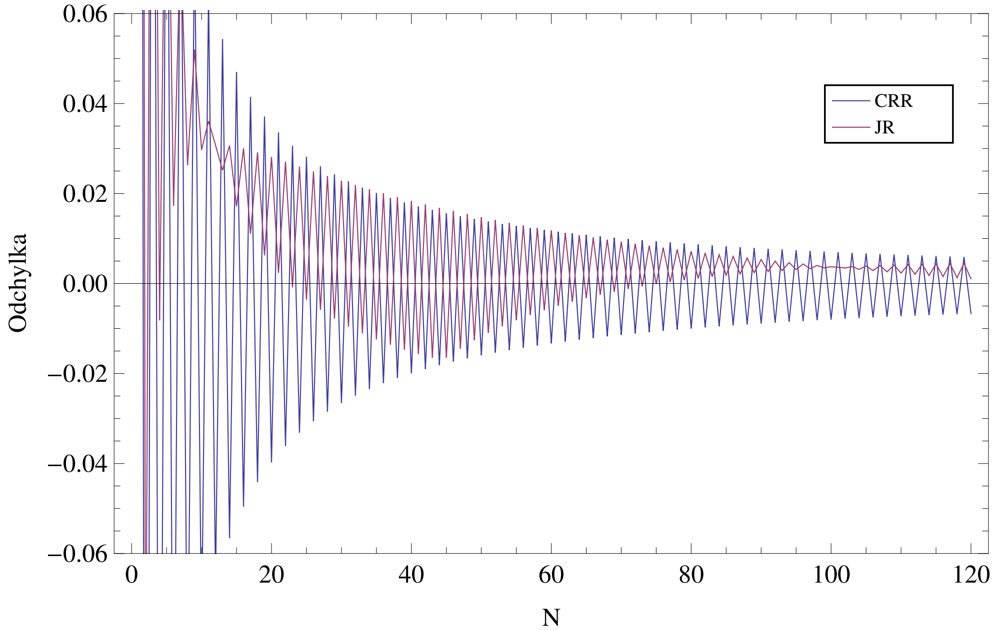
$$\tilde{p}(1-\tilde{p})(u-d)^2 = e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t}-1) \quad \text{nebo} \quad \tilde{p}u^2 + (1-\tilde{p})d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}. \tag{3.2}$$

Protože chceme určit 3 parametry u, d a $\tilde{p}$, jedinečný model zformujeme až s dodatečnou podmínkou. Nejznámější podmínky jsou Jarrowova–Ruddova (J–R) v [6] $\tilde{p} = \frac{1}{2}$ a CRR v [9] $d = \frac{1}{u}$. Jak můžeme vidět na obrázku 3.1, obě dodatečné podmínky dávají dobré výsledky. To, že se od sebe výsledky příliš neliší, pozorujeme na obrázku 3.2 a v program (P6).

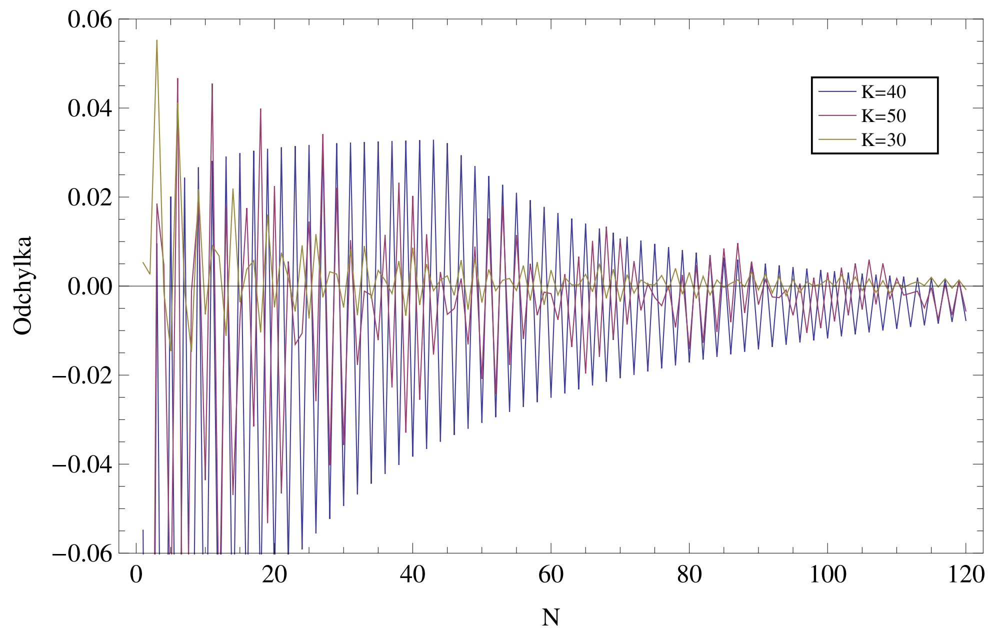
Trinomické modely přinášejí s další volitelným parametrem i větší volnost. Abychom určili $u, d, m, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ potřebujeme k (2.4) doplnit 3 další podmínky. Typické parametrizování u, d, m a pravděpodobností vidíme v tabulce 3.1. Parametrizace v prvním a druhém sloupci tabulky 3.1 vychází z faktu, že vynecháním každé druhé periody binomického stromu vznikne strom trinomický (viz. podkapitola 2.2).

Kombinace 2 kroků CRR binomického stromu.	*Kombinace 2 kroků J–R binomického stromu.*	*Strom se stejnými pravděpodobnostmi.*
$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$	$u = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\sqrt{2\Delta t}}$	$u = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\sqrt{3\frac{\Delta t}{2}}}$
$m = 1$	$m = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t}$	$m = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t}$
$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$	$d = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$	$d = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t-\sigma\sqrt{3\frac{\Delta t}{2}}}$
$\tilde{p_1} = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}-e^{r\frac{\Delta t}{2}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}-e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}}\right)^2$	$\tilde{p_1} = 1/4$	$\tilde{p_1} = 1/3$
$\tilde{p_3} = \left(\frac{e^{r\frac{\Delta t}{2}}-e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}-e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}}\right)^2$	$\tilde{p_3} = 1/4$	$\tilde{p_3} = 1/3$

Tabulka 3.1: Parametrizace trinomického modelu.



Obrázek 3.1: Konvergence CRR a J–R modelu.



Obrázek 3.2: Rozdíly v ocenění CRR a J–R modelem.

Kapitola 4

Modely chování cen opcí a podkladových aktiv

Základní principy, kterým finanční trhy podléhají, mají své základy v teorii pravděpodobnosti. Snaha ovládat náhodu a předvídat výsledky nejistých pokusů stojí i za konstrukcí modelů cen akcií a opcí.

4.1 Podmíněná střední hodnota

Definice 3 (Filtrace). *Nechť $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$. Když pro každé $n \in \mathcal{N}$ je $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ σ-algebra a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$ pokud $n < m, n, m \in \mathcal{N}$, pak budeme říkat, že $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$ je filtrace.*

Definice 4. *Nechť $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$ je filtrace. Když S_n jsou $\mathcal{F}_n$-měřitelné diskrétní náhodné veličiny pro každé $n \in \mathcal{N}$, pak budeme říkat, že $(S_n, n \in \mathcal{N})$ je $(\mathcal{F}_n,\ n \in \mathcal{N})$-**adaptovaný proces**.*

Příklad (Filtrace a σ-algebra v binomickém modelu). Mějme N-periodický binomický model náhodného procesu $(S_n)_{n=0}^N$, potom $|\Omega| = 2^N$ a $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots N\}$. Abychom mohli rozumně ilustrovat podobu filtrace a σ-algebry generované S, uvažujme $N = 3$.

Označme náhodné jevy

$$\begin{aligned}
A_H &= \{HHH, HHT, HTH, HTT\};\\
A_T &= \{THH, THT, TTH, TTT\};\\
A_{HH} &= \{HHH, HHT\};\\
A_{HT} &= \{HTH, HTT\};\\
A_{TH} &= \{THH, THT\};\\
A_{TT} &= \{TTH, TTT\}.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.
K realizaci $S_1(H)$ vedou elementární jevy z množiny $\{HHH, HHT, HTH, HTT\} = A_H$. $S_1(T)$ odpovídá $\{THH, THT, TTH, TTT\} = A_T$. Proto $\sigma(S_1) = \{A_H, A_T, \emptyset, \Omega\}$.

Realizace $S_2(HH)$ je vytvořena jevem A_{HH}, $S_2(HT) = S_2(TH)$ nastane při elementárních jevech z množiny $\{HTH, HTT, THH, THT\} = A_{HT} \cup A_{TH}$ a $S_2(TT)$ nastane při A_{TT}. Z toho důvodu bude $\sigma(S_2)$ obsahovat A_{HH}, A_{TT} a $A_{HT} \cup A_{TH}$, doplněné o komplementy, sjednocení, prázdnou množinu a Ω, tedy

$$\sigma(S_2) = \{\emptyset, \Omega, A_{HH}, A_{TT}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{HH}^C, A_{TT}^C, (A_{HT} \cup A_{TH})^C\}.$$

$\mathcal{F}_1$ je taková podmnožina $\mathcal{A}$, která obsahuje informace dostupné v čase 1, a proto $\mathcal{F}_1 = \{A_H, A_T, \emptyset, \Omega\}$. Víme, že $\mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_1$. Filtrace $\mathcal{F}_2$ navíc obsahuje náhodné jevy, založené na informacích z času 2, tj. $A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}$, jejich komplementy a sjednocení

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 = \{&\emptyset, \Omega, A_H, A_T, A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}, A_{HH}^C, A_{HT}^C, A_{TH}^C,\\
&A_{TT}^C, A_{HH} \cup A_{TH}, A_{HH} \cup A_{TT}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{HT} \cup A_{TT}\}.
\end{aligned}$$

Systém $\mathcal{F}_2$ obsahuje 16 množin. Platí, že $\mathcal{F}_3 = \mathcal{A}$. Mohutnost $\mathcal{A}$ je $2^{2^3} = 256$. Zřejmě $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Potom obecně $\sigma(S_n) \subset \mathcal{F}_n$, $n > 1$.

Definice 5 (Podmíněná střední hodnota vzhledem k filtraci)**.** *Nechť* $(\mathcal{F}_n,\ n \in \mathcal{N})$ *je filtrace a* X *náhodná veličina definovaná na* $(\Omega, \mathcal{A})$*. Pak každou náhodnou veličinu* Y*, definovanou na* $(\Omega, \mathcal{F}_n)$*, pro kterou*

$$\sum_{\omega \in F_n} Y(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in F_n} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \quad \text{pro každou množinu } F_n \in \mathcal{F}_n,$$

nazveme podmíněnou střední hodnotou náhodné veličiny X *vzhledem k* $\mathcal{F}_n$ *a budeme ji označovat* $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$*, zkráceně* $\mathbb{E}_n[X]$*. Speciálně* $\mathbb{E}_0[X] = \mathbb{E}[X]$ *a* $\mathbb{E}_N[X] = X$.

Věta 7 (Základní vlastnosti podmíněné střední hodnoty)**.** *Nechť X a Y jsou $(\mathcal{F}_n,\ n \in \mathcal{N})$-adaptované náhodné procesy. Nechť $n \in \mathcal{N}$ je libovolné pevné. Potom platí*

i) ***Linearita.*** *Pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}_n[c_1 X + c_2 Y] = c_1 \mathbb{E}_n[X] + c_2 \mathbb{E}_n[Y].$$

ii) Je-li X $\mathcal{F}_n$-měřitelná, potom

$$\mathbb{E}_n[XY] = X \mathbb{E}_n[Y].$$

iii) ***Iterace podmiňování.*** *Nechť $n, m \in \mathcal{N}, n \leq m$. Potom*

$$\mathbb{E}_n\big[\mathbb{E}_m[X]\big] = \mathbb{E}_n[X].$$

iv) ***Nezávislost.*** *Jestliže $\sigma(X)$ a $\mathcal{F}_n$ jsou nezávislé σ-algebry, potom*

$$\mathbb{E}_n[X] = \mathbb{E}[X].$$

v) ***Podmíněná Jensenova nerovnost.*** *Nechť $g(x)$ je konvexní funkce definovaná na stavové množině X, potom*

$$\mathbb{E}_n[g(X)] \leq g(\mathbb{E}_n[X]).$$

Důkaz. U dokazování i)–iv) vycházíme z [15].
i)Náhodná veličina $c_1 \mathbb{E}_n[X] + c_2 \mathbb{E}_n[Y]$ je $\mathcal{F}_n$-měřitelná a pro každé $F_n \in \mathcal{F}_n$ platí

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in F_n} (c_1 \mathbb{E}_n[X] + c_2 \mathbb{E}_n[Y])(\omega)\mathbb{P}(\omega) &= c_1 \sum_{\omega \in F_n} \mathbb{E}_n[X](\omega)\mathbb{P}(\omega) + c_2 \sum_{\omega \in F_n} \mathbb{E}_n[Y](\omega)\mathbb{P}(\omega) \\
&= c_1 \sum_{\omega \in F_n} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) + c_2 \sum_{\omega \in F_n} Y(\omega)\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in F_n} (c_1 X + c_2 Y)(\omega)\mathbb{P}(\omega).
\end{aligned}$$

ii)Náhodná veličina $X\mathbb{E}_n[Y]$ je $\mathcal{F}_n$-měřitelná a pro každé $F_n \in \mathcal{F}_n$ platí

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in F_n} \mathbb{E}_n[XY]\mathbb{P}(\omega) &= \sum_{\omega\in F_n} X(\omega)Y(\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= X\sum_{\omega\in F_n} Y(\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= X\sum_{\omega\in F_n} \mathbb{E}_n[Y](\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= \sum_{\omega\in F_n} X\mathbb{E}_n[Y](\omega)\mathbb{P}(\omega).\end{aligned}$$

iii) $\mathbb{E}_m[X]$ je náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{F}_m)$, pak $\mathbb{E}_n\big[\mathbb{E}_m[X]\big]$ je definované na $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ a pro každé $F_n \in \mathcal{F}_n$ platí

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in F_n} \mathbb{E}_n\big[\mathbb{E}_m[X]\big](\omega)\mathbb{P}(\omega) &= \sum_{\omega\in F_n} \mathbb{E}_m[X](\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= \sum_{\omega\in F_n} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= \sum_{\omega\in F_n} \mathbb{E}_n[X](\omega)\mathbb{P}(\omega).\end{aligned}$$

iv) Zřejmě $\mathbb{E}[X]$ je $\mathcal{F}_n$-měřitelné. Pak pro každé $F_n \in \mathcal{F}_n$ platí

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in F_n} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{I}_{\{F_n\}}(\omega)X(\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{F_n\}}X]\\ &= \mathbb{P}(F_n)\mathbb{E}[X]\\ &= \sum_{\omega\in F_n} \mathbb{E}[X](\omega)\mathbb{P}(\omega).\end{aligned}$$

Třetí rovnost vyplývá z několika skutečností:
1)Pro nezávislé náhodné veličiny$X$,Y, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
2)Náhodné veličiny X,Y jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$.
3)$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{F_n\}}] = \mathbb{P}(F_n)$.

v) Přehledný důkaz Jensenovy nerovnosti nalezneme v [2]. $\square$

Značení. Střední hodnotu vzhledem k rizikově neutrální pravděpodobnostní míře $\tilde{\mathbb{P}}$ budeme značit $\tilde{\mathbb{E}}X$.

Zvolili-li jsme v 1. kapitole $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ taková, že $\tilde{p}+\tilde{q}=1$, můžeme nyní pro každé n a každou posloupnost $\omega_1 \dots \omega_n$ pravou stranu rovnosti

$$S_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)]$$

interpretovat jako diskontovanou podmíněnou střední hodnotu s podmíněnými pravděpodobnostmi $\tilde{p}, \tilde{q}$ [1],

$$S_n = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}].$$

Potom nejlepší odhad ceny akcie diskontované z času $n+1$, založený na informacích z času n, je cena akcie diskontovaná z času n;

$$\frac{S_n}{(1+r)^n} = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right]. \tag{4.1}$$

Proces, který odpovídá této rovnosti, se nazývá *martingal.*

4.2 Martingal

Definice 6. *Když $(S_n, n \in \mathcal{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$-adaptovaný proces, pak říkáme, že $(S_n, n \in \mathcal{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$-**submartingal**, jestliže $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq M_n$ pro každé $n, n+1 \in \mathcal{N}$,*
*$(S_n, n \in \mathcal{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$-**supermartingal**, jestliže $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq M_n$ pro každé $n, n+1 \in \mathcal{N}$,*
*$(S_n, n \in \mathcal{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$-**martingal**, jestliže $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ pro každé $n, n+1 \in \mathcal{N}$.*

Definice 6 je vhodná pro $\mathcal{N} = \{0, 1 \dots N\}$, méně pro obecné $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$. To napravíme následující větou.

[1] Pro trinomické modely platí analogicky.

Věta 8. *Nechť* $(M_n, n \in \mathcal{N})$ *je martingal. Potom pro* $n \in \mathcal{N}$ *a* k *takové, že* $n+k \in \mathcal{N}$ *platí*

$$\mathbb{E}_n[M_{n+k}] = M_n.$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí.
Pro $k = 1$ zřejmé.
V indukčním kroku předpokládejme, že pro $k = m$ tvrzení platí a dokažme ho pro $k = m + 1$.

$$\mathbb{E}_n[M_{n+m+1}] \overset{\text{V7(iii)}}{=} E_n[E_{n+1}[M_{n+m+1}]] = E_n[M_{n+1}] = M_n.$$

□

Podle věty 8 je střední hodnota z martingalu konstantní

$$M_0 = \mathbb{E}M_n \quad n \in \mathcal{N}.$$

Na reálných trzích pozorujeme ve vývoji cen akcií růstový trend. Akcie jsou rizikovější než bezriziková aktiva, a tak je požadavek investorů na kompenzaci rizika vyšší. Na prostoru s vlastní pravděpodobnostní mírou je diskontovaná cena akcie submartingal.

Jinak je tomu s rizikově neutrální pravděpodobnostní mírou, dále též martingalovou.

Věta 9. *Mějme obecný binomický model s* $0 < d < 1 + r < u$ *a s rizikově neutrálními pravděpodobnostmi* $\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$, $\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$. *Potom je diskontovaný proces ceny akcie* $(S_n)_{n=0}^N$ *martingal vzhledem k rizikově neutrální míře.*

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] &= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_n}{(1+r)^{n+1}}\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] \\
&\overset{\text{V7(ii)}}{=} \frac{S_n}{(1+r)^n}\frac{1}{(1+r)}\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{S_n}\right] \\
&\overset{\text{V7(iv)}}{=} \frac{S_n}{(1+r)^n}\frac{\tilde{p}u+\tilde{q}d}{1+r} = \frac{S_n}{(1+r)^n}.
\end{aligned}$$

□

Z věty 9 vyplývá několik zajímavých charakteristik ceny akcie a replikačního portfolia.

- Očekávaný růst akcií je roven bezrizikové úrokové míře.
- Všechna portfolia mají stejný očekávaný růst.
- Diskontovaný proces portfolia $\left(\frac{X_n}{(1+r)^n}\right)_{n=0}^N$, kde X_n je generováno rekurzivně podle (1.11), je vzhledem k rizikově neutrální míře martingal.

Jelikož 3. bod není zcela triviální, zformulujme ho do věty a dokažme.

Věta 10. *Mějme N-periodický binomický model. Nechť* $(\Delta_n)_{n=0}^{N-1}$ *je* $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{N-1}$*-adaptovaný proces,* X_0 *je reálné číslo a proces* $(X_n)_{n=1}^N$ *je generovaný rekurzivně podle (1.11). Potom diskontovaný proces portfolia* $\left(\frac{X_n}{(1+r)^n}\right)_{n=0}^N$ *je vzhledem k rizikově neutrální míře martingal.*

Důkaz.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] &= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right] \\ &\overset{\text{V7(i),(ii)}}{=} \Delta_n \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} \\ &\overset{\text{V9}}{=} \Delta_n \frac{S_n}{(1+r)^n} + \frac{X_n - \Delta_n S_n}{(1+r)^n} = \frac{X_n}{(1+r)^n}.\end{aligned}$$

□

Martingal nemá tendenci růst ani klesat, jeho střední hodnota se s časem nemění, odtud

$$\tilde{\mathbb{E}}\frac{X_n}{(1+r)^n} = X_0, \qquad n = 0, 1, \dots N. \tag{4.2}$$

Poznámka. Věta 10 a rovnost (4.2) implikují První základní teorém oceňování aktiv, zmiňovaný v první kapitole.

Věta 10 má ve spojení s větou 2 další podstatný důsledek — výnos z opce je martingal.
Aplikací věty 2

$$\frac{X_n}{(1+r)^n} = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right].$$

Potom

$$\frac{V_n}{(1+r)^n} = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right],$$

neboli

$$V_n = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right]. \tag{4.3}$$

4.3 Markovův řetězec

Definice 7 (Markovský proces)**.** *Nechť $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathcal{N})$-adaptovaný proces. Jestliže pro každé $n, n+1 \in \mathcal{N}$ a pro každou borelovsky měřitelnou funkci f, existuje borelovsky měřitelná funkce g taková, že*

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = g(X_n), \tag{4.4}$$

potom říkáme, že $(X_n, n \in \mathcal{N})$ je Markovský proces.

Znalost charakteru stochastického procesu nám umožňuje jeho optimální řízení a zefektivnění algoritmů vytvořených pro obecný stochastický proces.

Proces ceny akcie je markovský vzhledem k vlastním míře $\mathbb{P}$ i martingalové míře $\tilde{\mathbb{P}}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_n[f(S_{n+1})] &= \tilde{p}f(uS_n) + \tilde{q}f(dS_n);\\
\tilde{\mathbb{E}}_n[f(S_{n+1})] &= g(S_n), \quad \text{kde}\\
g(x) &= \tilde{p}f(ux) + \tilde{q}f(dx).
\end{aligned}$$

Markovské vlastnosti ceny akcie využijeme při určení V_n, pro které je V_N funkcí pouze ceny akcie v čase N ($V_N = v_N(S_N)$). Dosadíme-li do (4.3) $V_N = v_N(S_N)$, dostaneme

$$V_{N-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-1}[v_N(S_N)] = v_{N-1}(S_{N-1}) \quad \text{pro jistou funkci } v_{N-1}.$$

Potom

$$V_n = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_n[v_{n+1}(S_{n+1})] = v_n(S_n) \quad \text{pro jistou funkci } v_n.$$

Funkci v_n spočítáme rekurzivně podle algoritmu

$$v_n(s) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(us) + \tilde{q}v_{n+1}(ds)]. \tag{4.5}$$

Rozdíl v algoritmu pro put a call opci je pouze v předpisu pro $v_N(s)$. Pro call máme $v_N(s) = (s-K)^+$, pro put $v_N(s) = (K-s)^+$.

Výnos *path-dependent* opcí závisí na více náhodných veličinách než jen ceně podkladového aktiva v čase N. K ceně akcie přidáváme další stavové proměnné a markovskou vlastnost ověřujeme pro vícedimenzionální proces $(X^1, \ldots, X^K)$.

Definice 8 (Multidimenzionální Markovský proces)**.** *Nechť* $\{(X_n^1, \ldots, X_n^K),\ n \in \mathcal{N}\}$ *je K-dimenzionální adaptovaný proces. Jestliže pro každé* $n, n+1 \in \mathcal{N}$ *a každou borelovsky měřitelnou funkci* f *existuje borelovsky měřitelná funkce* g *taková, že*

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}^1, \ldots, X_{n+1}^K)|\mathcal{F}_n] = g(X_n^1, \ldots, X_n^K), \tag{4.6}$$

potom říkáme, že $\{(X_n^1, \ldots, X_n^K), n \in \mathcal{N}\}$ *je K-dimenzionální Markovský proces.*

Věta 11. *Nechť* $\{(X_n^1, \ldots, X_n^K), n \in \mathcal{N}\}$ *je K-dimenzionální Markovský proces. Potom pro každou borelovsky měřitelnou funkci* h *existuje borelovsky měřitelná funkce* g *taková, že*

$$\mathbb{E}_n[h(X_m^1, \ldots, X_m^K)] = g(X_n^1, \ldots, X_n^K), \quad n, m \in \mathcal{N}, n \leq m. \tag{4.7}$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí.
Pro $m = n+1$ zřejmé.
Předpokládejme, že pro $m = l+n$, $l > 1$ tvrzení platí. Funkci naplňující pro jisté h a $n+1$ (4.7) označme f.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n[h(X_{n+l+1}^1, \ldots, X_{n+l+1}^K)] &\overset{\text{V7(iii)}}{=} \mathbb{E}_n[\mathbb{E}_{n+1}h(X_{n+l+1}^1, \ldots, X_{n+l+1}^K)]] \\ &= \mathbb{E}_n[f(X_{n+1}^1, \ldots, X_{n+1}^K)] = g(X_n^1, \ldots, X_n^K).\end{aligned}$$

$\square$

Pro opce, jejichž výnos je v čase N funkcí stavů markovského procesu v čase N ($V_N = v_N(X_N)$), máme

$$V_n = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right] = v_n(X_n) \quad \text{pro jistou funkci } v_n.$$

Rekurzivní výpočet v_n závisí na Markovském procesu.

Příklad.

i) Martingal, který není markovský proces.

V (4.3) jsme dokázali, že diskontovaný proces ceny opce $(V_n)_{n=0}^N$ je martingal vzhledem k $\approx\sqsupset<\mathbb{P}$ bez ohledu na typ opce (samozřejmě stále uvažujeme pouze evropské opce). Jak jsme již jednou zmínili, pro *path-dependent* opce není $(V_n)_{n=0}^N$ jednorozměrný markovský proces. Například pro lookback opce, kde M_N značí $\max\limits_{n=0,\dots,N} S_n$,

$$V_{N-1} = \frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{N-1}[v_N(S_N, M_N)] \neq v_{N-1}(S_{N-1}) \quad \text{pro každou funkci } v_{N-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+.$$

ii) Markovský proces, který není martingal.

Nechť $(S_n)_{n=0}^N$ je markovský proces s martingalovou vlastností. Nechť g je borelovsky měřitelná konvexní funkce. Potom $(g(S_n))_{n=0}^N$ je markovkoský proces, ne martingal. Markovská vlastnost je zřejmá z definice. Martingalovou vlastnost vylučuje Jensenova nerovnost V7(v):

$$\mathbb{E}_n[g(S_{n+1})] \overset{\text{V7(v)}}{\geq} g(\mathbb{E}_n[S_{n+1}]) = g(S_n).$$

Příklad.

Iterace algoritmu (4.5) umožňuje vyjádřit V_0 jako lineární kombinaci v_N. Funkce V_N se bude ve vzorci pro výpočet V_0 vyskytovat 2^N krát. Navzájem různých cen podkladového aktiva v čase N máme pouze $N+1$. Určíme-li správně koeficient, můžeme i výskyt v_N ve vzorci pro výpočet V_0 omezit na $N+1$. Správné koeficenty dává kombinační číslo. Tento proces znatelně urychlí výpočet ceny opce. Pro srovnání, (P1) trvá 20 iterací $9.844s$, (P6) počítá rychlostí 70 iterací za $0.359s$, (P8) dokáže 1000 iterací za $0.438s$. Kód přikládáme v (P8).

Příklad.

Abychom zjednodušili výpočet ceny exotických opcí, potřebujeme k odvození koeficintů složitější úvahu. V případě lookback opcí se odkážeme na [17]. Algoritmus výpočtu ceny lookback opce, odvozený od [17] přikládáme jako (P9). Rychlosti výpočtu jsou (P3) 80 iterací za $75.34s$, (P9) 80 iterací za $0.266s$.

4.4 State price

V modelech oceňování opcí se setkáváme se dvěma pravděpodobnostními mírami, skutečnou $\mathbb{P}$ a rizikově neutrální $\tilde{\mathbb{P}}$. Uvažujeme konečný prostor Ω a předpokládáme, že obě míry dávají každému $\omega \in \Omega$ kladnou pravděpodobnost. Vztah mezi $\mathbb{P}$ a $\tilde{\mathbb{P}}$ je na základě Radonovy–Nikodýmovy věty[2] určen kvocientem

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Není těžké dokázat, že Z je kladná náhodná veličina s $\mathbb{E}Z = 1$ a že pro každou náhodnou veličinu Y platí

$$\tilde{\mathbb{E}}Y = \mathbb{E}[ZY]. \tag{4.8}$$

Definice 9. *V N-periodickém binomickém modelu s mírami $\mathbb{P}$, $\tilde{\mathbb{P}}$ a Radonovou–Nikodýmovou derivací $\tilde{\mathbb{P}}$ vzhledem k $\mathbb{P}$ Z definujeme hustotu stavové ceny rovnicí*

$$\zeta(\omega) = \frac{Z(\omega)}{(1+r)^N}.$$

$\zeta(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ *nazýváme hustota ceny odpovídající jevu ω.*

$\zeta(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ interpretujeme jako cenu kontraktu, který v čase N vyplácí 1, právě když nastane jev ω a 0 jinak.

Mějme jisté $\overline{\omega}$ a

$$V_N(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega = \overline{\omega} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí

$$V_0 = \tilde{\mathbb{E}}\frac{V_N}{(1+r)^N} = \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\overline{\omega})}{(1+r)^N} = \frac{Z(\overline{\omega})\mathbb{P}(\overline{\omega})}{(1+r)^N} = \zeta(\overline{\omega})\mathbb{P}(\overline{\omega}).$$

Zápis V_0 součinem $\zeta(\overline{\omega})\mathbb{P}(\overline{\omega})$ více odpovídá intuitivní představě o ceně opce. Do ceny se promítne skutečná pravděpodobnost ziskového jevu $\overline{\omega}$, časová hodnota peněz a riziko. Rizikovou složkou je $Z(\omega)$. V praxi obvykle kontrakty přináší zisk (který není nutně roven 1) pro více trajektorií. Obecný kontrakt posuzujeme jako portfolio kontraktů, jejichž zisk je hustota ceny,

$$V_0 = \mathbb{E}[\zeta V_N] = \sum_{\omega \in \Omega} V_N(\omega)\zeta(\omega)\mathbb{P}(\omega).$$

[2]Předpoklady věty jsou splněny. Míry $\mathbb{P}$, $\tilde{\mathbb{P}}$ jsou pravděpodobnostní, tedy konečné, a ekvivalentní, tedy zřejmě $\tilde{\mathbb{P}} << \mathbb{P}$.

Je-li náhodná veličina Y $\mathcal{F}_n$-měřitelná, můžeme (4.8) pomocí procesu Radonovy–Nikodýmovy derivace, definovaného jako $Z_n = \tilde{\mathbb{E}}_n[Z]$, přepsat na

$$\tilde{\mathbb{E}}Y = \tilde{\mathbb{E}}[Z_n Y]. \tag{4.9}$$

Rovnost (4.9) využijeme u kontraktů, které jsou v čase N ziskové pro více trajektorií, majicí společné $\overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_m$

$$V_N(\omega_1 \dots \omega_N) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega_1 \dots \omega_m = \overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_m \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom

$$V_0 = \tilde{\mathbb{E}} \frac{V_N}{(1+r)^N} = \frac{1}{(1+r)^N} Z_m(\overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_m) p^{\#H(\overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_m)} q^{\#T(\overline{\omega}_1 \dots \overline{\omega}_m)}.$$

U $\mathcal{F}_m$-měřitelných V_N, $0 \leq n \leq m \leq N$, nemusíme $\omega_{m+1} \dots \omega_N$ při počítání podmíněné střední hodnoty v čase n uvažovat. Navíc platí

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}[Y] &= \sum_{\omega_{n+1} \dots \omega_m} Y(\omega_1 \dots \omega_m) \tilde{p}^{\#H(\omega_{n+1} \dots \omega_m)} \tilde{q}^{\#T(\omega_{n+1} \dots \omega_m)} \\
&= \left(\frac{p}{\tilde{p}}\right)^{\#H(\omega_1 \dots \omega_n)} \left(\frac{q}{\tilde{q}}\right)^{\#T(\omega_1 \dots \omega_n)} \sum_{\omega_{n+1} \dots \omega_m} Y(\omega_1 \dots \omega_m) \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_1 \dots \omega_m)} \times \\
&\quad \times \left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_1 \dots \omega_m)} p^{\#H(\omega_{n+1} \dots \omega_m)} q^{\#T(\omega_{n+1} \dots \omega_m)} = \frac{1}{Z_n} \mathbb{E}_n[Z_m Y].
\end{aligned}$$

Potom

$$V_n = \tilde{\mathbb{E}}_n \frac{V_N}{(1+r)^{N-n}} = \frac{(1+r)^n}{Z_n} \mathbb{E}_n \frac{Z_N V_N}{(1+r)^N} = \frac{1}{\zeta_n} \mathbb{E}_n[\zeta_N V_N]. \tag{4.10}$$

Kapitola 5

Americké opce

5.1 Cena americké opce

Držitel americké opce má nad držitelem opce evropské jednu výhodu, opci může uplatnit kdykoli do doby expirace. To nám dává o ceně americké opce dvě informace. Bude alespoň tak vysoká jako cena opce evropské; v každém čase do splatnosti musí být alespoň tak vysoká jako její vnitřní hodnota.

Čas uplatnění opce je náhodná veličina závislá na vývoji podkladového aktiva. Abychom mohli čas uplatnění a optimální čas uplatnění[1] modelovat, zavedeme si další pojmy související s teorií martingalů.

Markovským časem (*stopping time*) budeme rozumět zobrazení $\tau : \Omega \to \mathcal{N} \cup \infty$ takové, že $[\tau \leq n] \in \mathcal{F}_n$, $n \in \mathcal{N}$. V případě spočetné množiny $\mathcal{N}$ platí, že τ je markovský čas, právě když $[\tau = n] \in \mathcal{F}_n$, $n \in \mathcal{N}$. Proces $(S_n, n \in \mathcal{N})$ *zastavený v čase* τ definujeme jako $(S_{n\wedge\tau}, n \in \mathcal{N})$, kde $\wedge$ značí minimum. Následující věta, zachycující podmínku zachování supermartingalové (resp. martingalové, submartingalové) vlastnosti, bude užitečná při dalším zkoumání vlastností ceny americké opce.

Věta 12. *Nechť je markovský čas τ shora omezený. Potom supermartingal (resp. martingal, submartingal) zastavený v markovském čase je supermartingal (resp. martingal, submartingal). Navíc jestliže X_n, $n \in \mathcal{N}$ je supermartingal, potom $\mathbb{E}X_{n\wedge\tau} \geq \mathbb{E}X_n$, je-li submartingal $\mathbb{E}X_{n\wedge\tau} \leq \mathbb{E}X_n$, pro martingal $\mathbb{E}X_{n\wedge\tau} = \mathbb{E}X_n$.*

[1] Optimální z pohledu držitele opce.

Důkaz. Důkaz je možné nalézt v kapitole Optional Sampling Theorem a Optional Stopping Theorem [16], kde je speciálním případem důkazů komplexnějších problémů. □

Čas uplatnění opce splňuje definici markovského času. $\tau = \infty$ označme případ, kdy opce expiruje bez uplatnění[2]. Při stanovení ceny opce se řídíme obecně platným pravidlem, že držitel chce opci uplatnit v optimálním čase, kdy bude jeho zisk, tj. vnitřní hodnota opce, maximální. Očekávané výnosy z jednotlivých časů porovnává s ohledem na časovou hodnotu peněz. Označme $\mathcal{S}_n$ množinu všech $\tau(\omega) \in \{n, n+1, \ldots, N, \infty\}$ a $(G_n)_{n=0}^N$ proces vnitřní hodnoty opce, potom je cena opce v čase n dána vzorcem

$$V_n = \max_{\tau \in \mathcal{S}_n} \tilde{\mathbb{E}}_n \left[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau - n}} G_\tau \right], \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{5.1}$$

speciálně $V_N = \max\{G_N, 0\}$.

Algoritmus výpočtu ceny opce odvodíme na základě vlastností V_n určeného (5.1).

Věta 13 (Vlastnosti ceny americké opce)**.** *Nechť je cena opce dána* (5.1). *Potom pro všechna n,* $n = 0, 1, \ldots, N$ *platí*
i) $V_n \geq \max\{G_n, 0\}$*;*
ii) $\frac{1}{(1+r)^n} V_n$ *je supermartingal;*
iii) V_n *je nejmenší proces splňující i), ii).*

Důkaz. i) Mějme $n \in \{0, 1 \ldots, N\}$. Nalezněme $\hat{\tau}, \bar{\tau} \in \mathcal{S}_n$ taková, že

$$\tilde{\mathbb{E}}_n \left[\mathbb{I}_{\{\hat{\tau} \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\hat{\tau} - n}} G_{\hat{\tau}} \right] = G_n;$$
$$\tilde{\mathbb{E}}_n \left[\mathbb{I}_{\{\bar{\tau} \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\bar{\tau} - n}} G_{\bar{\tau}} \right] = 0.$$

V_n je maximum uvedeného výrazu přes všechna $\tau \in \mathcal{S}_n$, a proto $V_n \geq G_n$ a zároveň $V_n \geq 0$.

[2] „∞“ používáme v tomto kontextu čistě symbolicky. Kdybychom pro expiraci bez uplatnění položili $\tau = N + 1$, význam by byl stejný. Čas uplatnění je tedy omezený.

ii) Předpokládejme, že (5.1) nabývá hodnoty V_{n+1} v $\tau^\star$. Protože $\tau^\star \in \mathcal{S}_{n+1} \subset \mathcal{S}_n$, platí

$$\begin{aligned}
V_n &\geq \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau^\star \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^\star - n}} G_{\tau^\star}\right] \\
&\overset{\text{V7(iii)}}{=} \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_{n+1}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^\star \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^\star - n-1}} G_{\tau^\star}\right]\right] \\
&= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r} V_{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Odtud

$$\frac{1}{(1+r)^n} V_n \geq \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{n+1}} V_{n+1}\right].$$

iii) Nechť Y_n splňuje i) a ii) a $\tau \in \mathcal{S}_n$. Potom

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} G_\tau &\leq \mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \max\{G_\tau, 0\} \leq \mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \max\{G_{N\wedge\tau}, 0\} + \mathbb{I}_{\{\tau = \infty\}} \max\{G_{N\wedge\tau}, 0\} \\
&= \max\{G_{N\wedge\tau}, 0\} \leq Y_{N\wedge\tau}.
\end{aligned}$$

Nyní použijeme bod ii) a větu 12.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} G_\tau\right] &= \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} G_\tau\right] \leq \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}} Y_{N\wedge\tau}\right] \\
&\leq \frac{1}{(1+r)^{n\wedge\tau}} Y_{n\wedge\tau} = \frac{1}{(1+r)^n} Y_n, \quad \text{proto} \\
\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} G_\tau\right] &\leq Y_n \quad \text{pro každé } \tau \in \mathcal{S}_n.
\end{aligned}$$

□

Není těžké ověřit, že následující algoritmus pro rekurzivní výpočet V_n vlastnosti i) – iii) splňuje.

$$\begin{aligned}
V_N(\omega_1 \dots \omega_N) &= \max\{G_N(\omega_1 \dots \omega_N), 0\}; \\
V_n(\omega_1 \dots \omega_n) &= \max\{G_n(\omega_1 \dots \omega_n), \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)]\}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Abychom naplnili podstatu rizikově neutrálního oceňování, zbývá dokázat, že cena určená (5.2) umožňuje sestavit jistící portfolio. Postup je stejný jako v 1. kapitole. Replikační portfolio obsahuje kromě akcií a bezrizikových aktiv ještě náhodnou veličinu C_n,

$$C_n(\omega_1 \dots \omega_n) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n) - \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)],$$

představující upisovatelův dodatečný zisk. Tento zisk vznikne, jestliže držitel promešká příležitost optimálního uplatnění opce, cena opce klesne a upisovateli pak stačí k jištění portfolia nižší finanční prostředky. Replikační portfolio je dáno rekurzivně

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{5.3}$$

Místo důkazu replikační funkce (5.3), který není nijak pozoruhodný, se budeme zabývat otázkou optimálního uplatnění americké opce.

5.2 Optimální uplatnění

Ukažme, že americkou opci je optimální uplatnit v čase $\tau^\star = \min\{n; V_n = G_n\}$. Důkaz, že $\tau^\star = \min\{n; V_n = G_n\}$ je časem optimálního uplatnění, provedeme ve dvou krocích. Začneme s důkazem martingalové vlastnosti diskontovaného procesu ceny opce zastaveného v čase $\tau^\star$ a z martingalové vlastnosti následně odvodíme optimalitu $\tau^\star$.

Mějme libovolné $n = 0, 1, \dots, N$ a rozlišme dva případy.
Je-li $n < \tau^\star$, potom $V_n(\omega_1 \dots \omega_n) > G_n(\omega_1 \dots \omega_n)$ a platí

$$\begin{aligned} V_{n\wedge\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_n) &= V_n(\omega_1 \dots \omega_n) \\ &= \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)] \\ &= \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{(n+1)\wedge\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{(n+1)\wedge\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_n T)]. \end{aligned}$$

Je-li $n \geq \tau^\star$, pak platí

$$\begin{aligned} V_{n\wedge\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_n) &= V_{\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_{\tau^\star}) \\ &= \tilde{p}V_{\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_{\tau^\star}) + (1-\tilde{p})V_{\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_{\tau^\star}) \\ &= \tilde{p}V_{(n+1)\wedge\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{(n+1)\wedge\tau^\star}(\omega_1 \dots \omega_n T)]. \end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali, že $\frac{1}{(1+r)^{n\wedge\tau^\star}}V_{n\wedge\tau^\star}$ je martingal.

Martingalová vlastnost implikuje

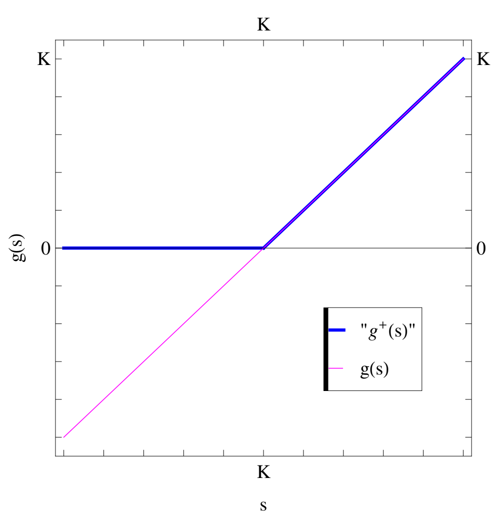
$$V_0 = \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau^\star}}V_{N\wedge\tau^\star}\right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^\star\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^\star}}V_{\tau^\star}\right] + \tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^\star=\infty\}}\frac{1}{(1+r)^{N}}V_{N}\right]. \tag{5.4}$$

V případě, že $\tau^\star = \infty$, musí být $V_n > G_n$ pro každé $n = 0, 1\ldots, N$. Dle (5.2) $V_N > G_N$ nastane, pouze když $G_N < 0$. Potom $V_N = 0$, druhý sčítanec v (5.4) je nulový a cena opce v čase 0 je

$$V_0 = \tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^\star\le N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^\star}}G_{\tau^\star}\right]. \tag{5.5}$$

V $\tau^\star$, $\tau^\star \in S_0$ nabývá pravá strana (5.1) svého maxima.

Stavová množina náhodné veličiny $\tau^\star$ nemusí nutně být $\{0, \ldots, N, \infty\}$. Dokážeme, že $\tau^\star$ amerických call opcí (nevyplácejících dividendu) nabývá pouze hodnot z množiny $\{N, \infty\}$. Navíc, cena amerických call (V_0^A) se rovná ceně evropských call (V_0^E).



Obrázek 5.1: Funkce vnitřní hodnoty a výplatní funkce call opce.

Mějme americkou opci s konvexní funkcí vnitřní hodnoty $g(s)$ takovou, že $g(0) \leq 0$. Výplatní funkci $\max\{g(s), 0\}$ označme $g^+(s)$. Funkce $g^+(s)$ je také konvexní, pro $\lambda \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned} g^+(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2) &= \max\{0, g(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)\} \leq \max\{0, \lambda g(s_1) + (1-\lambda)g(s_2)\} \\ &\leq \max\{0, \lambda g^+(s_1) + (1-\lambda)g^+(s_2)\} \leq \lambda g^+(s_1) + (1-\lambda)g^+(s_2). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Víme, že $\frac{1}{(1+r)^n} S_n$ je vzhledem k rizikově neutrálním pravděpodobnostem martingal, proto

$$g^+(S_n) = g^+\Big(\tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{1}{1+r}S_{n+1}\Big]\Big) \overset{\text{V7(v)}}{\leq} \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[g^+\Big(\frac{1}{1+r}S_{n+1}\Big)\Big]. \tag{5.7}$$

Zvolíme-li v (5.6) $s_1 = s$, $s_2 = 0$ a $\lambda = \frac{1}{1+r}$ je patrné, že

$$\tilde{\mathbb{E}}_n\Big[g^+\Big(\frac{1}{1+r}S_{n+1}\Big)\Big] \leq \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{1}{1+r}g^+(S_{n+1})\Big] \tag{5.8}$$

$$\text{a} \quad \frac{1}{(1+r)^n}g^+(S_n) \leq \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{1}{(1+r)^{n+1}}g^+(S_{n+1})\Big]. \tag{5.9}$$

Diskontovaný proces výplatní funkce call opce je submartingal. Věta 12 implikuje

$$\tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}g^+(S_{N\wedge\tau})\Big] \leq \tilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{(1+r)^N}g^+(S_N)\Big] = V_0^E.$$

Pro každé $\tau \in S_0$ platí $\mathbb{I}_{\{\tau\leq N\}}\frac{1}{(1+r)^\tau}g^+(S_\tau) \leq \frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}g^+(S_{N\wedge\tau})$ a závěr již vyplývá

$$V_0^A = \max_{\tau\in\mathcal{S}_0}\tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\mathbb{I}_{\{\tau\leq N\}}\frac{1}{(1+r)^\tau}g(S_\tau)\Big] \leq V_0^E. \tag{5.10}$$

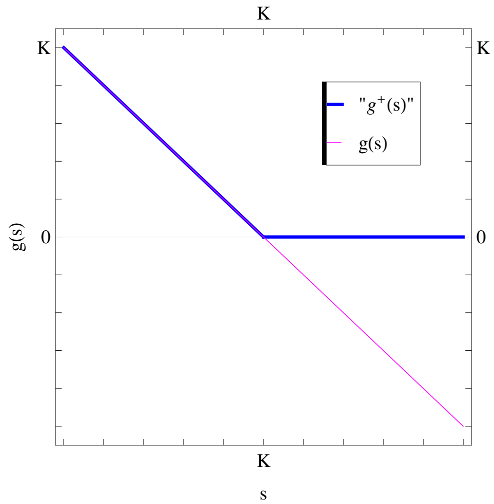
Dokázali jsme, že očekávaný zisk americké call opce má tendenci růst (je submartingal), proto $V_n^A = \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{Vn+1}{1+r}\Big] = V_n^E$ pro každé $n = 0, \dots, N-1$ a $\tau^\star \in \{N, \infty\}$. Do ceny se nepromítne možnost opci předčasně uplatnit.

Poznámka. Pro americkou put (5.10) neplatí. Je pravda, že její funkce vnitřní hodnoty je konvexní, ale $g(0) \nleq 0$. Na obrázku 5.2[3] vidíme, že $g(0) = K$. Zatímco nerovnost (5.7) zůstává v platnosti, místo (5.9) máme

$$\tilde{\mathbb{E}}_n\Big[g^+\Big(\frac{1}{1+r}S_{n+1}\Big)\Big] \leq \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{1}{1+r}g^+(S_{n+1}) + \Big(1 - \frac{1}{1+r}\Big)K\Big] \tag{5.11}$$

$$\text{a} \quad g^+(S_n) \leq \tilde{\mathbb{E}}_n\Big[\frac{1}{1+r}g^+(S_{n+1})\Big] + \frac{r}{r+1}K. \tag{5.12}$$

[3] Srovnejme s obrázkem 5.1.



Obrázek 5.2: Funkce vnitřní hodnoty a výplatní funkce put opce.

U diskontovaného procesu výplatní funkce americké put nelze na submartingalovou vlastnost usuzovat a má smysl se zabývat optimálním uplatněním.

Závěr

Rychlé a přesné numerické algoritmy se staly esenciálním nástrojem oceňování opcí i jiných finančních derivátů. Tato práce představila numerickou metodu oceňování binomickými stromy. Při výstavbě binomického modelu jsme se seznámili s fundamentálním konceptem oceňování opcí — rizikově neutrálním oceňováním i s pokročilejšími tématy martingalů, markovských procesů či state price. Dokázali jsme, že proces diskontované ceny evropské opce je vzhledem k rizikově neutrální pravděpodobnostní míře martingal. Markovská vlastnost procesu nám umožnila zefektivnění dosavadních algoritmů.

I když tato pokročilejší látka nebyla k implementaci binomického modelu nezbytně nutná, zasadila jej do kontextu spojitých modelů, jejichž je aproximací. Při parametrizaci faktorů určujících volatilitu binomického modelu jsme vycházeli právě ze spojitého modelu chování trhu — geometrického Wienerova procesu a související log-normality ceny akcie. U zobecnění na stromy trinomické zasahoval spojitý model i do parametrizace rizikově neutrálních pravděpodobností. Ilustrovali jsme, ale nedokazovali, že modely se všemi zmiňovanými parametrizacemi konvergují k Blackově–Scholesově modelu. Přesnost modelů jsme potom posuzovali podle odchylek v ocenění od Blackova–Scholesova modelu, efektivitu podle rychlosti konvergence a časové náročnosti. Jako optimální nejprve vyšel trinomický model s Kamradovou–Ritchkenovou parametrizací. Poté, co jsme pro binomické stromy odvodili velmi rychlé algoritmy (P8),(P9), počítající pouze s poslední periodou stromu, převaha trinomického modelu se vytratila. Na amerických opcích jsme výsledky jednotlivých parametrizací netestovali, s pomocí martingalů jsme ovšem ukázali, že cena amerických call opcí nevyplácejících dividendu musí být stejná jako cena evropských opcí. Pro americké put opce jsme odvodili dobu optimálního uplatnění a dokázali, že zastavením diskontovaného procesu ceny opce v optimálním čase zamezíme poklesu její očekávané hodnoty, tj. místo supermartingalové vlastnosti zaručíme vlastnost martingalovou.

Přinos práce spočívá v přístupu vyvažujícím matematický popis finanční reality a praktické využití modelu při oceňování opcí.

Literatura

[1] Pliska, S. R.: *A History of Options: From the Middle Ages to Harrison and Kreps* [online]. c2010. [cit.2011-07-05]. Dostupné z: http://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/09-10/finance/courses/pliska1.pdf.

[2] Shreve, S. E.: *Stochastic Calculus for Finance I : The Binomial Asset Pricing Model*. First edition. Springer (2005).

[3] Shreve, S. E.: *Stochastic Calculus for Finance II : Continuous-Time Models*. First edition. Springer (2005).

[4] Hull, J. C.: *Option, Futures and Other Derivatives*. Sixth edition. Prentice Hall (2004).

[5] Kamrad, B.; Ritchken P.: Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables. *Management Science 3*, s. 1640–1652 (1991).

[6] Jarrow, R.; Rudd A.: *Option Pricing*. Homewood, IL: Dow Jones-Irwin Publishing 1983.

[7] Black, F.; Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy 81*, May-June 1973, No. 3, s. 637 659.

[8] Boyle, P. P.: A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables.*Journal of Financial and Quantitative Analysis 23*, 1988, s. 1–12.

[9] Cox, J. C.; Ross, S.; Rubinstein, M.: Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics 7*,1979, s. 229–264 .

[10] Merton, R.C.: *The Theory of Rational Option Pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science 4, Spring 1973, No. 1, s. 141-183.

[11] Thorp, E. O.: *Beat the Market: A Scientific Stock Market System*. New York: Random House, Inc. 1967, ISBN 0-394-42439-5.

[12] Bachelier, L.; Davis, M.; Etheridge A.: *Bachelier's Theory of Speculation: The origins of modern finance*. Princeton University Press 2006, ISBN 0-691-11752-7.

[13] Rubinstein, M.: Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, July 1994, vol. 49, no.3, s.771-818.

[14] Harrison, J.M.; Kreps, D.M: Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets.*Journal of Economic Theory 20*, July 1979, no. 3, s. 381-408.

[15] Lachout, P. :*Teorie pravděpodobnosti*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Nakladatelství Karolinum 2004, ISBN 80-246-0872-3

[16] Lachout, P. :*Diskrétní martingaly* [online]. c2007. [cit.2011-07-05] Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/̃lachout/Vyuka/tp2/TP2.html.

[17] Kelly, M : *A New Binomial Model for Discrete Lookback Options using Mathematica*[online]. c2006. [cit.2011-07-05] Dostupné z: http://library.wolfram.com/infocenter/Conferences/6479/.