Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Konstruovatelnost pravítkem a kružítkem

Construability with ruler and compass

Autor bakalářské práce: Markéta Chrenčíková

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Ph.D.

Praha 2011

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Prof. RNDr. Ladislava Kvasze, Ph.D. a že jsem uvedla všechny použité informační zdroje a literaturu. Tato práce ani její podstatná část nebyla předložena k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

V Praze dne 24. června 2011 ______________________.

Markéta Chrenčíková

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, Prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, Ph.D., za velkou trpělivost a ochotu i za cenné rady a připomínky, které mi pomohly při zpracování bakalářské práce.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se věnuje problematice konstrukcí pravítkem a kružítkem. Jejím cílem je představení důkazů nemožnosti duplikace krychle, trisekce úhlu a konstrukce pravidelného sedmiúhelníku za použití pouze pravítka a kružítka v jazyce, který by byl srozumitelný i středoškolským studentům. Práce se skládá ze čtyř částí. V první jsou popsány souvislosti vývoje této problematiky s vývojem geometrie a algebry. Ve druhé jsou shrnuty konstrukce, jejichž řešení jsou známá už od starověku. Ve třetí části se popisuje princip analytické geometrie a způsob převedení geometrických problémů do rovnic. Ve čtvrté části se kompletně charakterizují konstruovatelné problémy a dokazuje se, že výše uvedené problémy do této kategorie nepatří.

Abstract

This Bachelor Thesis is focused on the problem of constructions with ruler and compass. Its aim is to introduce the proves of impossibility of doubling the cube, trisecting the angle and construction of regular heptagon with ruler and compass alone, in the language which could be understood by high-school student. The work consists of four parts. The first part presents historical context of the progress of the construability problem with the development of geometry and algebra. The second part summarize constructions, whose solution has been known since antiquity. The third part describes the principle of analytic geometry and the method of using equations in solving geometrical problems. In the fourth part are completely characterized constructible problems and it is proved that the problems mentioned above do not fall into this category.

Obsah

Úvod

Pravítkem a kružítkem se dá provést mnoho konstrukcí. Například je možné rozpůlit úhel nebo úsečku, sestrojit kolmici nebo rovnoběžku k dané přímce procházející daným bodem, vepsat do kružnice pravidelný šestiúhelník a mnoho dalšího. Zajímavá je konstrukce pravidelného mnohoúhelníku s n stranami. Pro některé hodnoty n, např. $n = 3, 4, 5, 6$ je řešení známé už od starověku, ale ukázalo se, že konstrukce pravidelného sedmiúhelníku je nemožná. Další tři klasické řecké problémy, jejichž řešení s použitím pouze pravítka a kružítka se hledalo marně, jsou trisekce libovolného úhlu (tj. rozdělení daného úhlu na tři shodné části), duplikace krychle (tj. nalezení hrany krychle, jejíž objem je dvojnásobkem dané krychle) a kvadratura kruhu (tj. sestrojení čtverce, který má stejný obsah jako má zadaný kruh).

Tradiční omezení konstrukčních prostředků na pravítko a kružítko pochází ze starověkého Řecka, ačkoli sami Řekové zprvu neváhali používat jiné nástroje k rýsování křivek, které by mohly vést k řešení úloh nezvládnutelných pravítkem a kružítkem. Pravítko se smělo používat pouze ke spojování dvou bodů, nebo k prodlužování úseček, ale nedaly se s ním odměřovat vzdálenosti; kružítkem bylo dovoleno pouze opsat kružnici s daným středem procházející daným bodem, ale nesměly se s ním přenášet délky. Konstrukcím pravítkem a kružítkem dnes říkáme „eukleidovské konstrukce".

Tři klasické řecké problémy byly vyřešeny teprve v novověku, kdy se ukázalo, že jejich konstrukce pouze pravítkem a kružítkem nejsou možné. Klíčem k důkladnějšímu porozumění geometrickým konstrukcím je přeložení geometrického problému do jazyka algebry. Kompletním algebraickým charakterizováním všech konstruovatelných problémů se ukáže, že výše uvedené problémy do této kategorie nepatří a je tedy možné dokázat nemožnost trisekce úhlu, duplikace krychle a konstrukce pravidelného sedmiúhelníku za použití pouze pravítka a kružítka.

Konstrukcemi pravítkem a kružítkem se zabývám, protože jsou důležitou součástí výuky matematiky na základní škole a učitel by jim tedy měl porozumět i z širší perspektivy. Problém nekonstruovatelnosti je matematicky velmi zajímavý, ale jako standartní učivo se neprobírá, pouze se okrajově zmiňuje. Cílem mojí práce je představit důkazy nekonstruovatelnosti tak, aby jim učitel mohl porozumět a případně je použít jako rozšiřující učivo na střední škole.

Práci jsem rozdělila do čtyř kapitol. V první je stručná historie vývoje geometrie a algebry, protože problém eukleidovských konstrukcí se vyvíjel přes dva tisíce let a tento vývoj byl pochopitelně závislý na aktuálních matematických prostředcích. V tomto přehledu jsem se zaměřila na konkrétní výsledky, které ovlivnily rozvoj algebry a jejího vztahu s geometrií, nejedná se tedy o úplný výčet všech důležitých matematiků a jejich výsledků. Hlavními mezníky v tomto vývoji byla vydání Eukleidových *Základů* (cca 300 př. n. l) a Descartovy *Geometrie* (1637 n. l.), proto se jim oběma věnuji v samostatných kapitolách.

Ve druhé kapitole nejdříve popisuji výstavbu Eukleidových *Základů*, které jasně vymezily požadavky na geometrické konstrukce, a následně uvádím geometrické konstrukce pravidelných mnohoúhelníků, které Eukleides v *Základech* systematicky popsal. Hlavní údaje jsem čerpala přímo ze *Základů*, k upřesnění problematických částí jsem čerpala především z komentářů Petra Vopěnky a z *Dějin matematiky ve starověku*.

Třetí kapitola pojednává o Descartově přínosu k vývoji algebraické symboliky a analytické geometrie, jejímž prostřednictvím se začal utvářet nový pohled na eukleidovské konstrukce a řešení geometrických úloh. Zdrojem informací k této kapitole mi byla především Descartova *Geometrie*. Nejdříve jsem využívala anglický překlad, protože český překlad vyšel až na konci února tohoto roku (přestože v knize je uvedeno vydání roku 2010), ale dodatečně jsem si podle českého překladu vyjasnila některé části, kterým jsem původně neporozuměla, a také jsem z něho převzala citace.

Ve čtvrté kapitole je nejprve vysvětlena algebraická interpretace eukleidovských konstrukcí. Pak se ukáže, že eukleidovskými konstrukcemi získáváme čísla stejného typu a navíc, že jiné hodnoty těmito konstrukcemi ani získat nemůžeme. Nakonec jsou tyto poznatky předvedeny na důkazech nemožnosti eukleidovské duplikace krychle, trisekce úhlu a konstrukce pravidelného sedmiúhelníku. Pro úplnost je zde naznačen i směr důkazu nemožnosti eukleidovské kvadratury kruhu, který je ale mnohem komplikovanější a proto už se k případnému rozšíření středoškolského učiva nehodí. V této kapitole jsem čerpala především z knihy *What is Mathematics?*, v případě jazykových nejasností jsem nahlížela do skript *Syntetická geometrie*, kde jsou sice také uvedeny důkazy nemožnosti eukleidovské konstrukce některých úloh, ale kromě hlavní myšlenky se v nich používají jiné metody.

Popis konstrukcí pravidelných mnohoúhelníků ve druhé kapitole a geometrické vyjádření racionálních operací a řešení kvadratických rovnic v kapitole třetí jsem doplnila obrázky, které jsem podle originálních ilustrací v *Základech* a v *Geometrii* vytvořila v programu Cabri II Plus.

1 Historické pozadí problematiky eukleidovských konstrukcí

Teoretická matematika se začala vyvíjet v 6. století př. n. l., kdy se postupně přetvářela z návodů na řešení různých praktických problémů na nauku, v níž se začala uplatňovat určitá pevná základní pravidla odvozování a potvrzování výsledků. Prvním matematikem, který logicky dokázal jednoduché geometrické poznatky, byl Thales z Milétu (cca 600 př. n. l.). Uspořádal některé geometrické poznatky o kružnicích a trojúhelnících a naznačil možnost odvozovat další tvrzení rozumovou úvahou. Další výrazný krok k vytvoření teoretické matematiky vykonal Pythagoras ze Samu (cca 570 – 500 př. n. l.), který studoval vlastnosti přirozených čísel a usiloval o získávání matematických vět pomocí čistě logického myšlení. Pythagorejské učení, podle kterého lze všechno na světě vyjádřit pomocí (přirozených) čísel nebo jejich poměrů, vedlo k objevu nesouměřitelných úseček. Nemožnost vyjádřit poměr libovolných dvou úseček poměrem nějakých dvou (přirozených) čísel vyřešili řečtí matematici důsledným geometrickým vyjadřováním všech úvah týkajících se veličin. Teoretický základ k antické geometrizaci matematiky dal Eudoxos z Knidu (cca 408 – 355 př. n. l.), jehož teorie proporcí spojila aritmetiku racionálních čísel s počítáním s geometrickými úsečkami. Úsečka představovala naše reálné číslo pojaté jako délka, šířka či výška útvaru, součinem dvou úseček byl obdélník, součinem tří úseček kvádr. Dál už se nedalo pokračovat, protože součinu čtyř úseček už nic geometricky neodpovídalo. Pro provádění běžných aritmetických operací bylo nutno zachovávat homogenitu veličin vstupujících v operace, nepřevýšení trojrozměrnosti výsledku a zachování kladného výsledku. Tento způsob vyjadřování v jazyce geometrické algebry byl v teoretické matematice užíván až do 15. století n. l.

Do začátku 3. století př. n. l. již Řekové nashromáždili velké množství geometrických poznatků a jejich důkazů, o jejichž vyložení a uspořádání se pokoušelo několik řeckých matematiků té doby. Jejich výsledky se však nedochovaly nebo byly zastíněny Eukleidovými *Základy*, které jsou prvními čistě matematickými texty dochovanými z řecké antiky.

V antickém Řecku se samozřejmě vyskytovali i mnozí další významní matematici, z bezprostředních Eukleidových následovníků to byli zejména Archimédes ze Syrakus (cca 287 – 212 př. n. l.) a Apollonios z Pergy (cca 262 – 200 př. n. l.). Archimédes se věnoval mimo jiné výpočtům obsahů rovinných útvarů a objemů prostorových těles, Apollonios se zabýval kuželosečkami a známými úlohami o konstrukci kružnic dotýkajících se tří daných kružnic, resp. přímek nebo bodů. U Apollonia se poprvé vyskytuje náznak souřadnicového systému a také výslovný požadavek, aby se při geometrických konstrukcích používalo pouze pravítko a kružítko.

V období římské nadvlády nedošlo k novým podstatným výsledkům v geometrii, ale na konci 3. století n. l. ovlivnilo matematiku Diofantovo dílo *Aritmetika*, ve kterém jsou položeny základy algebraické symboliky. *Aritmetika* se zabývala problematikou řešení rovnic, která se zde dostává z oblasti logistiky mezi matematické teorie. Diofantova symbolika vychází ze zkracování slov, vyskytuje se zde symbol pro neznámou, pro její mocniny a převrácenou hodnotu a pro odečítání. Objevují se zde mocniny až do šestého stupně, což v geometrické algebře nebylo možné a nemělo to ani smysl, ale ve vlastních výpočtech se užívá opět jen rovnic do třetího stupně. V tomto období se věda rozvíjela ve směsici helénistických a orientálních prvků, stále více se zásadní formou vědy stávaly kompilace a komentáře. Poslední z velkých starověkých matematických pojednání napsal koncem 3. století n. l. Pappos. Jeho *Sbírka* byla příručkou ke studiu řecké geometrie s historickými poznámkami, zlepšeními a s obměnami existujících vět a důkazů. Mnohé výsledky starověkých autorů jsou známy jen ve formě, v jaké je tlumočil Pappos; jsou mezi nimi i problémy týkající se kvadratury kruhu, zdvojení krychle a trisekce úhlu.

Středověk znamenal dlouhou intelektuální stagnaci, postupně s pronikáním křesťanství byl podlomen rozvoj vědeckých center a přestala se rozvíjet teoretická část matematiky. Evropská středověká matematika se ocitla opět na úrovni praktické matematiky nutné k hospodářskému životu, v geometrii na úrovni řemeslných praktik. Úpadek římského impéria vedl k odchodu mnoha učenců do orientálních zemí, kde nacházeli zájem o antické poznatky. Mnohé staré sbírky přetrvaly léta v Konstantinopolu, protože komentátoři se snažili i nadále udržet v paměti řecky psanou vědu a filozofii. Ve školách arabských učenců se pěstovala řecká tradice, překládala se zde díla Apollonia, Archiméda, Eukleida, Diofanta aj. do arabštiny. Mezi islámskými matematiky byla oblíbená i problematika rovnoběžek a důkazu Eukleidova postulátu o rovnoběžkách. Zabývali se také konstrukcemi s omezenými prostředky, Abú – l – Wafa (940 – 998) na konci 10. století používal kružítko s pouhým konstantním rozevřením, což se v Evropě systematicky objevuje až v 18. století u Mascheroniho. Současně se v arabské vědě projevovaly vlivy orientální. V orientálních zemích se matematika nerozvíjela směrem k teorii, rozvíjela se spíše aritmeticko – algebraická počtářská stránka. Docházelo zde k velmi rozvinutým metodám a postupům, ale ne k jejich zobecnění a ucelenému výkladu. Přesto v některých výsledcích předešla orientální matematika evropskou. Byl to především rozvoj řešení algebraických rovnic v Číně a desetinná poziční numerace v Indii. V Číně byly algebraické problémy chápány zcela nezávisle na své geometrické interpretaci. Tak zde například zobecňovali metody vedoucí k řešení kvadratických a kubických rovnic na rovnice libovolných vyšších stupňů, i když se v praktických úlohách k takovým matematickým problémům nedocházelo.

Islámské práce v exaktních vědách dosáhly svého vrcholu kolem roku 825, kdy Muhamad ibn Músá al – Chvarizmí (780 – 850) napsal několik knih o matematice a astronomii. Ve své aritmetice vyložil indický poziční systém, v algebře se věnoval lineárním a kvadratickým rovnicím, ale bez jakéhokoli algebraického symbolismu. Jeho geometrické dílo je spíše souborem měřičských pravidel, je v něm patrný malý zájem o eukleidovskou tradici. Al – Chvarizmího dílo bylo jedním z hlavních pramenů, kterým do západní Evropy pronikly indické číslice a arabská algebra.

Po překonání středověké stagnace začala evropská matematika v nových podmínkách renezančního myšlení znovu stavět na výsledcích antické vědy. Tradice vyšší antické vzdělanosti se zvolna oživovala v italských městech, která obchodovala s islámskými zeměmi. Od 11. století se překládaly matematické spisy z arabštiny do latiny, byly ovšem rozšířené o tvůrčí přepracování arabskými matematiky a obohacené výsledky z Dálného východu. Vynález knihtisku (1448) podnítil novou etapu překladatelské činnosti, tiskem vyšly Eukleidovy *Základy* a spisy Apollonia, Archimeda a Diofanta, které vzbudily značný ohlas a snahu rozvíjet jejich metody. V 15. a 16. století se začaly množit také práce věnované klasickým problémům antické geometrie, zejména trisekci úhlu a kvadratuře kruhu, oblíbené byly také Apolloniovy úlohy. Jedním z prvních výsledků, které výrazně překročily úroveň antické matematiky, byl objev metod řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně, které vyložil Girolamo Cardano (1501 – 1576) ve své knize o algebře *Ars magna*, uveřejněné roku 1545. Podstatný pokrok přinášelo postupné šíření desítkové poziční soustavy a rozvoj symboliky. Dosavadní geometrický jazyk algebry přestával vyhovovat, protože komplikoval práci s algebraickými rovnicemi a vedl k příliš složitému vyjadřování závislostí proměnných veličin. Matematická symbolika se začala výrazně rozvíjet ve druhé polovině 15. století, kdy se začaly používat různé symboly pro sčítání a odčítání (např. *p :*, *m :*, ale i dnešní + a -), umocňování (např. gotická písmena) a odmocňování (mj. symbol √), neznámá a její mocniny se značily slovy nebo slovními zkratkami (např. *cosa, co., censo, ce.)*. Terminologie a symbolika jednotlivých matematiků nebyla zdaleka jednotná, ale navzájem se prolínala a ovlivňovala.

Ke zdokonalení symboliky a teorie rovnic výrazně přispěl francouzský právník a matematik François Viète (1540 – 1603), který zavedl symbolické označování písmeny nejen neznámých ale také koeficientů v rovnicích. Díky tomu bylo poprvé možno vyjadřovat řešení rovnic obecnými formulemi. Viètova symbolika nebyla zaměřena k řešení jednotlivých konkrétních úloh, ale byla vybudována a využívána k hledání obecných zákonitostí. Neznámé veličiny označoval samohláskami A, E, I, O, U, Y; známé veličiny označoval souhláskami: B, C, D, …, užíval symboly +, -, zlomkovou čáru, místo závorek dělal čáru nad celým výrazem, místo znaku pro násobení používal slovo *in*, místo znaku rovnosti psal *aequatur.* Rozlišoval značení mocnin známých a neznámých veličin; druhou a třetí mocninu neznámé zapisoval *A quadratum, A cubus,* druhou a třetí mocninu známých veličin značil *B plano, B solido.* Výrazy pro vyšší mocniny utvářel pomocí nižších, např. devátou mocninu zapisoval *A cubo-cubo-cubus*, resp. *B solido-solido-solidum.* Viète důsledně dbal na dodržování zákona homogenity, podle něhož se součin dvou úseček chápal jako plocha; mohly se proto sčítat jen úsečky s úsečkami, plochy s plochami a objemy s objemy. Viète měl dokonce pochybnosti, zda mají rovnice vyššího než třetího stupně smysl, když by se daly znázornit jen ve čtyřech rozměrech, což nebylo v tehdejší době srozumitelné. Přestože Viètova symbolika nedoznala velkého rozšíření, byla výraznou inspirací a mocným podnětem pro další pokrok.

Přednosti této metody si plně uvědomili až René Descartes (1596 – 1650) a Pierre de Fermat (1601 – 1665) ve třicátých letech 17. století. Descartes systematicky zavedl matematickou symboliku téměř v takové podobě, v jaké se používá dodnes, výrazným způsobem přispěl k vývoji algebry a považuje se za zakladatele analytické geometrie. Nepoužíval sice kartézské souřadnice, ani neodvozoval rovnice přímek nebo kuželoseček, ale jako první začal popisovat geometrické úlohy algebraickými rovnicemi a na základě řešení těchto rovnic získával řešení uvažovaných geometrických úloh. Jeho matematické výsledky jsou prezentovány v jeho knize *Geometrie.* Fermat sice došel v analytické geometrii dále, například používal kartézské souřadnice i rovnice kuželoseček, ale jeho dílo nemělo výraznější vliv, protože vyšlo později než Descartova *Geometrie* a používal v něm nešikovnou Viètovu symboliku.

V 17. a v 18. století věnovali matematikové pozornost především analytické geometrii, algebře a nově vznikajícímu diferenciálnímu a integrálnímu počtu, ale v problematice eukleidovských konstrukcí k významným objevům nedošlo. Zájem o konstrukce pravítkem a kružítkem oživil až Gaussův objev konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníku (1796). Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) byl německý matematik a fyzik. Zabýval se mimo jiné geometrií, matematickou analýzou a teorií čísel. Na základě geometrické interpretace všech n-tých odmocnin z jedné jako vrcholů pravidelného n-úhelníku odvodil nutné podmínky pro počet stran pravidelného mnohoúhelníku, který lze sestrojit pravítkem a kružítkem.

V první polovině 19. století mělo pro geometrii velký přínos studium řešitelnosti obecných rovnic stupně $n > 4$ pomocí racionálních operací a nejvýše n-tých odmocnin. Roku 1837 vypracoval francouzský matematik Pierre Laurent Wantzel (1814 – 1848) základy teorie, která umožnila rozhodnout, zda je možno vyjádřit kořeny rovnice vzorcem, ve kterém jsou užity jen její koeficienty, racionální operace a odmocňování. Na základě toho prokázal neřešitelnost duplikace krychle a trisekce úhlu pomocí pouze pravítka a kružítka. Eukleidovskou neřešitelnost kvadratury kruhu dokázal až roku 1882 německý matematik Ferdinand Lindemann (1852 – 1939).

2 Geometrické konstrukce v Eukleidových *Základech*

Eukleides byl řecký matematik, který žil kolem roku 300 př. n. l. Jeho nejvýznamnějším dílem jsou *Základy*, vedle nichž se mu připisují i další spisy, např. *O dělení obrazců* a *Kuželosečky*.

Základy se skládají ze třinácti knih, jejichž obsahem je studium planimetrie, geometrické algebry, aritmetiky a stereometrie. Eukleides pravděpodobně není autorem všech těchto knih, ale zřejmě sjednotil, doplnil a systematizoval práci mnoha dřívějších matematiků a filozofů. Originál *Základů* se nedochoval, nejstarší rukopis je z 9. století. K jeho uchování přispěla řada opisů přetvořených různým způsobem komentátory.
První český překlad vyšel roku 1907, pořídil ho profesor českého Gymnázia vinohradského František Servít (1848 – 1923).

Eukleidův výklad spočívá v přísně logické dedukci vět ze soustavy definic, postulátů a axiomů. Uspořádání výkladu v jednotlivých knihách postupuje od nejjednodušších pojmů ke složitějším, věty jsou uspořádány v posloupnosti, kde je každá dokazována (či vyvozována) z toho, co bylo buď dříve postulováno, nebo dokázáno. Algebraické úvahy jsou zcela skryty do geometrické podoby. Výraz $\sqrt{A}$ je zaváděn jako strana čtverce o ploše A, součin ab jako plocha obdélníku o stranách a a b.

2. 1 Eukleidovy definice

Definice jsou postupně uvedeny na začátku téměř každé knihy a snaží se charakterizovat objekty, které budou v dalším výkladu použity, na základě popisu jejich vlastností a jejich vytváření z objektů jednodušších. Eukleidovy definice jsou pozoruhodné, protože se často pokoušejí definovat primitivní pojmy teorie, což nasvědčuje skutečnosti, že jejich význam byl jiný, než je význam definic v dnešní matematice. Ve všech třinácti knihách je celkem 120 definic, jako příklad uvedu následujících patnáct definic pojmů, které budu používat v dalším textu (cituji Eukleides 1907; definice z I. Knihy str. 1-2; definice ze III. Knihy str. 34; definice ze IV. knihy str. 56).

1. I.) *Bod jest, co nemá dílu.*

4. I.) *Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.*

8. I.) *Rovinný úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce.*

10. I.) *Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, jeden i druhý z těch stejných úhlů jest pravý, a přímka postavená zove se kolmicí té, na níž jest postavena.*

15. I.) *Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu uvnitř útvaru vedené přímky všechny sobě rovny jsou.*

16. I.) *Středem pak kruhu zove se ten bod.*

17. I.) *Průměrem kruhu jest přímka některá vedená středem a končící se na obou stranách obvodem kruhu, jež také rozděluje kruh na polovice.*

19. I.) *Útvary přímkové jsou, které jsou přímkami omezovány, třístranné třemi, čtyřstranné čtyřmi, mnohostranné více než čtyřmi přímkami omezené.*

20. I.) *Z třístranných útvarů jest trojúhelník stejnostranný, který má tři strany stejné, rovnoramenný pak, která má jen dvě strany stejné* (…)

22. I.) *Ze čtyřstranných útvarů je čtverec, který jest stejnostranný a pravoúhlý* (…)

23. I.) *Rovnoběžky jsou přímky, které jsouce v téže rovině a prodlouženy jsouce na obě strany do nekonečna nikde se nesbíhají.*

2. III.) *Říká se, že přímka kruhu se dotýká, která kruh zasahuje a prodloužena jsouc kruhu neprotíná.*

6. III.) *Úsečí kruhu jest útvar omezený přímkou (tětivou) a obloukem kruhu.*

8. III.) *Když se na oblouku úseče vezme nějaký bod a z něho k mezným bodům přímky, která je základnou úseče (tětivou), vedou spojnice, jest ten úhel, jejž svírají ty spojnice, úhlem v úseči (obvodovým).*

3. IV.) *Pravíme, že obrazec přímkový do kruhu vpisujeme, když každý úhel vpisovaného dotýká se obvodu kruhu.*

2. 2 Eukleidovy axiomy a postuláty

Kromě definic je na začátku celého díla v první knize uvedeno ještě devět axiomů a pět postulátů. Axiomy jsou spíše aritmetického charakteru a vymezují vlastnosti veličin, se kterými se v *Základech* pracuje. Vyjadřují obecně přijatá tvrzení nevyžadující důkaz, naopak se o ně následující důkazy opírají. Axiomy jsou vyjádřeny slovně, uvažuje se zde o geometrických veličinách (úsečkách, plochách a tělesech), nikoli o abstraktních číslech. Pro příklad uvedu dva axiomy, které Eukleides využívá při důkazech konstrukcí pravidelných mnohoúhelníků (cit. Eukleides 1907, str. 2).

1) Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.

6) Polovičky téhož vespolek rovny jsou.

Postuláty vyjadřují požadavky kladené na konstrukci některých jednodušších útvarů. Vymezují geometrické konstrukce, kterým se později začalo říkat „eukleidovské konstrukce“, čímž se rozumělo omezení geometrických prostředků pouze na kružítko a pravítko (cit. Eukleides 1907, str. 2).

1) Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vést přímku.

2) A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužit.

3) A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovat kruh.

4) A že všechny pravé úhly sobě rovny jsou.

5) A když přímka protínající dvě přímky, tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

Přímka se chápe jako úsečka (přímka omezená), dvěma úhly se rozumí součet dvou úhlů, prodloužením do nekonečna se myslí dostatečně daleko.

K povaze postulátů patří jednoznačnost. To znamená, že

1) dva dané body lze spojit jedinou úsečkou,

2) danou úsečku na její dané straně můžeme sice prodloužit o různé délky, avšak dvě taková prodloužení se nemohou rozbíhat, to znamená, že vždy jedno z nich musí být prodloužením druhého,

3) kolem daného středu lze opsat jedinou kružnici procházející daným bodem.

Tyto vlastnosti přímo ze znění postulátů neplynou, proto bývají v některých vydáních *Základů* různě zdůrazňovány a ošetřovány. (Např. přidáním desátého axiomu: *„Dvě samotné úsečky žádné místo neohraničují.“)*

2. 3 Konstrukce pravidelných mnohoúhelníků u Eukleida

Eukleides popisuje v *Základech* konstrukce rovnostranného trojúhelníku a čtverce (I. kniha) a pravidelného pětiúhelníku, šestiúhelníku a patnáctiúhelníku (IV. kniha), o ostatních pravidelných mnohoúhelnících se nezmiňuje.

V následujícím textu cituji tyto konstrukce a jejich důkazy ze Servítova překladu *Základů* (ty jsou psány kurzívou) a zároveň je popisuji vlastními slovy, protože Servítův překlad je velmi archaický a místy těžko srozumitelný. Uvádění obou popisů konstrukcí umožní čtenáři utvořit si představu o Eukleidově výstavbě geometrických vět. Ty se skládají, pokud jsou úplné, ze šesti částí:
1) obecné vyjádření,
2) konkrétní vyjádření problému podle daných fakt,
3) vymezení nebo vysvětlení, v němž se poukazem na konkrétní daná fakta ukazuje, co se má udělat nebo dokázat,
4) konstrukce, k níž patří i dodatky, které se musí k útvaru udělat, aby se mohl provést důkaz,
5) vlastní důkaz,
6) závěr, který se vrací k formulaci, a stejně jako ona je obecný.

Ve vlastním popisu konstrukcí jsem v matematickém jazyce nahradila výrazy „omezená přímka, kruh, stejnostranný trojúhelník“ výrazy „úsečka, kružnice, rovnostranný trojúhelník“ a místo označení kružnice pomocí bodů na jejím obvodu jsem použila písmena *k*, *l*.

Symboly „=, +, R, $\frac{2R}{3}$“ jsem převzala ze Servítova překladu, ačkoli Eukleides je vyjadřuje slovně.

V popisech konstrukcí i v důkazech jejich správnosti se využívají konstrukce a tvrzení, která jsou všechna v *Základech* dokázána, já zde ale tyto důkazy neuvádím, protože by to nepřiměřeně zvětšilo rozsah práce.

2. 3. 1 Konstrukce rovnostranného trojúhelníku

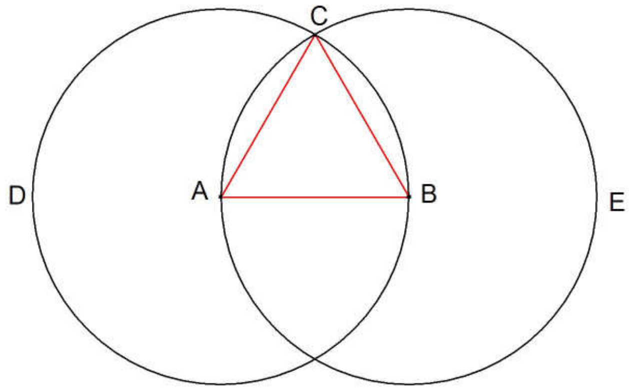
Na dané přímce omezené postav trojúhelník rovnostranný.

Danou přímkou omezenou buď AB. Má se tedy na přímce AB postaviti trojúhelník rovnostranný.

Ze středu A poloměrem AB buď narýsován kruh BCD a opět ze středu B poloměrem BA buď narýsován kruh ACE, a od bodu C, v němž kruhy se protínají, k bodům A, B buďte vedeny spojnice AC, CB.

A ježto bod A je středem kruhu CDB, AC je stejné s AB; ježto dále bod B je středem kruhu CAE, jest BC stejné s BA. Bylo pak dokázáno, že i CA je stejné s AB; tedy jedna i druhá z CA, CB je stejná s AB. Veličiny však témuž rovné i navzájem rovny jsou; tedy též CA jest rovna CB; ty tři tedy, CA, AB, BC jsou si rovny.

Je tedy trojúhelník ABC rovnostranný a postaven jest na dané přímce omezené AB; což bylo právě vykonati. (Eukleides 1907, str. 3)



Obr. 1 Konstrukce pravidelného trojúhelníku

Na dané úsečce *AB* se má sestrojit rovnostranný trojúhelník:

Nejdříve se sestrojí kružnice *k* se středem *A* a poloměrem *AB*, pak kružnice *l* se středem *B* a poloměrem *BA*. Z jejich průsečíku *C* se vedou spojnice k bodům *A*, *B*. Úsečky *AB*, *AC* jsou stejně dlouhé, protože *A* je středem kružnice *k* a oba body *B*, *C* leží na kružnici *k*. Podobně úsečky *BA*, *BC* jsou stejně douhé, protože *B* je středem kružnice *l* a oba body *A*, *C* leží na kružnici *l*. Z prvního axiomu plyne, že *AB* = *BC* = *CA*, tedy body *ABC* tvoří rovnostranný trojúhelník.

2. 3. 2 Konstrukce čtverce

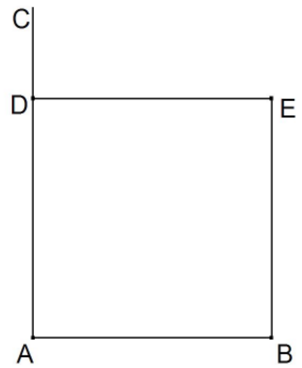
Na dané přímce narýsuj čtverec.

Danou přímkou buď AB; má se tedy na přímce AB narýsovati čtverec.

Veďme k přímce AB z bodu na ní A kolmici AC, a buď AD = AB; a z bodu D veďme DE rovnoběžnou s AB, z bodu pak B veďme BE rovnoběžnou s AD. Tedy ADEB jest rovnoběžník; tedy AB = DE, AD = BE; ale AB = AD; tedy všechny čtyři, BA, AD, DE, EB jsou si rovny; pročež rovnoběžník ADEB je stejnostranný. Pravím ovšem, že též poravoúhlý. Neboť ježto rovnoběžky AB, DE proťala přímka AD, tedy součet úhlů BAD + ADE = 2R. Avšak BAD jest pravý, tedy jest pravý též ADE. V rovnoběžnících pak protější strany i úhly jsou si navzájem rovny, tedy též oba protější úhly ABE, BED jsou pravé. Tedy obrazec ADEB jest pravoúhlý. Dokázáno však bylo, že též stejnostranný.

Jest to tedy čtverec a jest narýsován na přímce AB; co právě bylo vykonati.

(Eukleides 1907, str. 24)



Obr. 2 Konstrukce čtverce

Na dané úsečce *AB* se má sestrojit čtverec:

Bodem *A* se vede kolmice *AC*; na ní se sestrojí bod *D* tak, že úsečka *AD* je stejně dlouhá jako *AB*. Z bodu *D* se vede rovnoběžka k úsečce *AB* a z bodu *B* se vede rovnoběžka k úsečce *AD*. Tyto dvě úsečky se protnou v bodě *E*, takže body *ABED* tvoří vrcholy rovnoběžníku. Protože rovnoběžníky mají protější strany i úhly navzájem rovné, platí *AD* = *BE* a *AB* = *ED*. Z rovnosti *AD* = *AB* plyne *AB* = *BE* = *ED* = *AD*. Navíc úhel *ADE* je pravý, protože úsečky *AB* a *DE* jsou protnuté úsečkou *AD*, tedy součet úhlů *BAD* + *ADE* = *2R*, a když je úhel *BAD* pravý, tak musí být pravý i úhel *ADE*. Opět z rovnosti protějších úhlů v rovnoběžníku plyne, že i úhly *ABE* a *BED* jsou pravé a tedy vytvořený rovnoběžník *ABED* je čtverec.

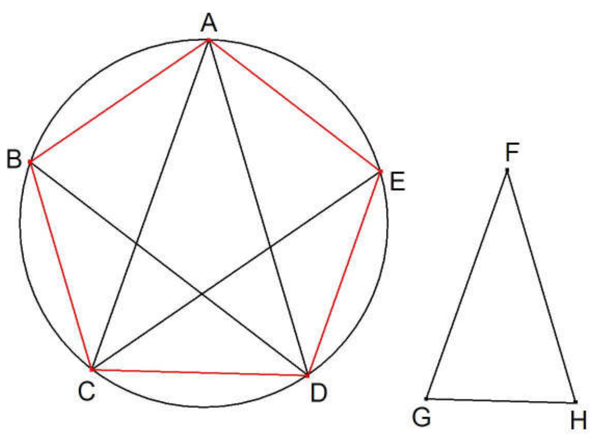
2. 3. 3 Konstrukce pravidelného pětiúhelníku

Vpiš do kruhu daného pětiúhelník stejnostranný a stejnoúhlý.

Daným kruhem buď ABCDE; má se tedy do kruhu ABCDE vepsati pětiúhelník stejnostranný a stejnoúhlý.

Vedle buď trojúhelník rovnoramenný FGH mající úhly při G, H jednotlivě dvakrát větší úhlu při F a vpišme do kruhu ABCDE trojúhelník ACD s trojúhelníkem FGH stejnoúhlý, tak aby úhel při F byl roven úhlu CAD a úhly při G, H byly stejné s úhly ACD, CDA; tedy též úhly ACD, CDA jsou jednotlivě dvakrát větší než úhel CAD. Tož úhly ACD, CDA rozpulme přímkami CE, DB a veďme spojnice AB, BC, DE, EA.

Ježto tedy úhly ACD, CDA jsou jednotlivě dvakrát větší než úhel CAD a jsou přímkami CE, DB rozpůleny, jest tedy pět úhlů DAC, ACE, ECD, CDB, BDA navzájem sobě rovných. Stejně však úhly (zde všechny obvodové) stojí na stejných obloucích; tedy oblouky AB, BC, CD, DE, EA jsou si rovny. Stejným však obloukům náleží stejné tětivy; tedy tětivy AB, BC, CD, DE, EA, jsou si rovny; pročež pětiúhelník ABCDE je stejnostranný. Pravím ovšem, že též stejnoúhlý. Neboť ježto oblouk AB = DE, společným buď oblouk BCD; tedy celý oblouk ABCD = EDCB a na oblouku ABCD stojí úhel AED, na oblouku EDCB úhel BAE; tedy též úhel BAE = AED. Z téže příčiny ovšem též každý z úhlů ABC, BCD, CDE rovná se kterémukoli z úhlů BAE, AED; tedy pětiúhelník ABCDE je stejnoúhlý. Dokázáno pak bylo, že též stejnostranný, tedy do kruhu daného vepsán jest pětiúhelník stejnostranný a stejnoúhlý. (Eukleides 1907, str. 62)



Obr. 3 Konstrukce pravidelného pětiúhelníku

Do dané kružnice se má vepsat pětiúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny úhly stejně velké:

Nejprve se do dané kružnice vepíše rovnoramenný trojúhelník *ADC*, který má úhly při základně dvakrát větší než úhel u hlavního vrcholu. Úhly *ACD* a *CDA* se rozpůlí úsečkami *CE*, *DB*, přičemž body *E* a *B* leží na zadané kružnici, a vedou se spojnice *AB*, *BC*, *DE*, *EA*. Úhly *DAC*, *ACE*, *ECD*, *CDB*, *BDA* jsou všechny stejně velké, protože úhly *ACD*, *CDA* jsou každý dvakrát větší než úhel *CAD* a jsou úsečkami *CE*, *DB* rozpůleny. Navíc jsou stejně dlouhé i oblouky *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*, protože stejné úhly (zde všechny obvodové) stojí na stejných obloucích. A protože stejným obloukům náleží stejné tětivy, jsou všechny strany *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* stejně dlouhé. Pětiúhelník *ABCDE* je navíc stejnoúhlý, protože oblouky *AEB* a *DBE* jsou stejně dlouhé a mají společný oblouk *BCD*, tedy celý oblouk *ABCD* = *EDCB*, a na oblouku *ABCD* stojí úhel *AED*, na oblouku *EDCB* stojí úhel *BAE* a proto *BAE* = *AED*. Ze stejného důvodu se každý z úhlů *ABC*, *BCD*, *CDE* rovná kterémukoli z úhlů *BAE*, *AED*; tedy pětiúhelník je stejnoúhlý.

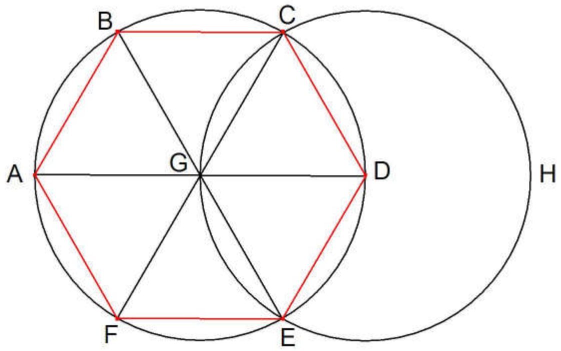
2. 3. 4 Konstrukce pravidelného šestiúhelníku

Do daného kruhu vpiš šestiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.

Daným kruhem buď ABCDEF; má se tedy do kruhu ABCDEF vepsati šestiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.

Veďme v kruhu ABCDEF průměr AD a vezměme za střed kruhu G a ze středu D rozpětím DG narýsujme kruh EGCH a spojnice EG, CG prodlužme do bodů B, F a veďme spojnice AB, BC, CD, DE, EF, FA; pravím, že ABCDEF je šestiúhelmník stejnostranný i stejnoúhlý.

Neboť ježto bod G je středem kruhu ABCDEF, GE = GD. Dále, ježto bod D je středem kruhu GCH, DE = DG. Avšak dokázáno, že GE = GD; tedy též GE = ED; tedy trojúhelník EGD je stejnostranný; pročež také tři úhly jeho EGD, GDE, DEG jsou navzájem rovny, poněvadž v trojúhelnících rovnoramenných úhly při základně jsou stejné; a tři úhly v trojúhelníku rovnají se dvěma pravým; tedy úhel EGD = $\frac{2R}{3}$ *. Podobně ovšem dokážeme, že též úhel DGC =* $\frac{2R}{3}$*. A ježto CG na EB postavena jsouc, činí úhly stýkavé EGC + CGB = 2R, tedy též zbývající úhel CGB =* $\frac{2R}{3}$ *; tedy úhly EGD, DCG, CGB jsou si rovny; pročež také příslušné vrcholové úhly BGA, AGF, FGE jsou stejné. Tedy EGD = DGC = CGB = BGA = AGF = FGE. Stejné však úhly (středové) stojí na stejných obloucích; tedy oblouky AB, BC, CD, DE, EF, FA jsou stejné. Na stejných však obloucích jsou stejné tětivy; tedy šestiúhelník ABCDEF je stejnostranný. Pravím ovšem, že též stejnoúhlý. Neboť je oblouk FA = ED, společným přičemž oblouk ABCD; tedy celý FABCD = EDCBA; a na oblouku FABCD stojí úhel FED (obvodový) a na oblouku EDCBA úhel AFE; tedy úhel AFE = DEF. Podobně ovšem dokážeme, že též ostatní úhly šestiúhelníku ABCDEF jednotlivě stejné jsou s AFE i s FED; tedy šestiúhelník ABCDEF je stejnoúhlý. Dokázáno však bylo, že také stejnostranný; i jest vepsán do kruhu ABCDEF. Tedy do daného kruhu vepsán šestiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.* (Eukleides 1907, str. 65)



Obr. 4 Konstrukce pravidelného šestiúhelníku

Do dané kružnice se má vepsat šestiúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny úhly stejně velké:

Na průměru *AD* dané kružnice *k* se středem *G* se sestrojí kružnice se středem *D* a s poloměrem *DG*. Protnutím těchto dvou kružnic se setrojí body *C* a *E*. Spojnice *EG* a *CG* se prodlouží tak, že protnou kružnici *k* v bodech *F* a *B*. Spojením *AB, BC, CD, DE, EF, FA* vznikne šestiúhelník *ABCDEF*.

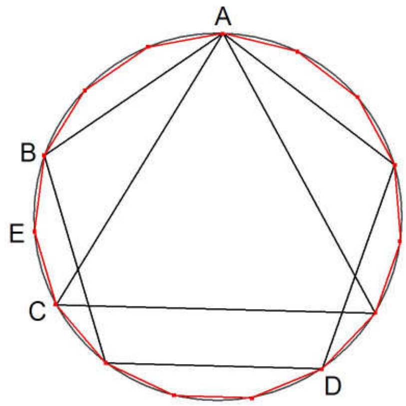
Úsečky *GD* a *GE* jsou stejně dlouhé, protože body *D* a *E* leží na stejné kružnici se středem *G*; podobně jsou stejně dlouhé i úsečky *DE* a *DG*, protože body *E* a *G* leží na stejné kružnici se středem *D*. Z toho plyne, že i $GE = DE$ a trojúhelník *EGD* je rovnostranný; tedy jeho úhly *EGD, GDE, DEG* jsou stejně velké, protože v rovnoramenných trojúhelnících jsou úhly při základně stejné. Protože součet úhlů v trojúhelníku je roven dvěma pravým, je úhel $EGD = \frac{2R}{3}$. Stejným způsobem se dokáže, že i úhel $DGC = \frac{2R}{3}$. Protože součet vedlejších úhlů je roven dvěma úhlům pravým, je součet úhlů $EGC + CGB = 2\mathrm{R}$, tedy $CGB = \frac{2R}{3}$ a také příslušné vrcholové úhly *EGF, FGA, AGB* jsou stejně velké. Tedy $AGB = BGC = CGD = DGE = EGF = FGA$ a protože stejné úhly (zde všechny středové) stojí na stejných obloucích, jsou oblouky *AB, BC, CD, DE, EF, FA* stejně dlouhé. Z tvrzení, že na stejných obloucích jsou stejné tětivy, vyplývá, že šestiúhelník *ABCDEF* je stejnostranný. Šestiúhelník *ABCDEF* je navíc stejnoúhlý, protože oblouky *FEA* a *EFD* jsou stejně dlouhé a mají společný oblouk *ABCD*, tedy celý oblouk $FABCD = EDCBA$, a na oblouku *FABCD* stojí úhel *FED*, na oblouku *EDCBA* stojí úhel *AFE* a proto $AFE = DEF$. Stejným způsobem se dokáže, že i ostatní úhly v šestiúhelníku *ABCDEF* jsou stejné s *AFE* i s *FED* a tedy šestiúhelník je stejnoúhlý.

2. 3. 5 Konstrukce pravidelného patnáctiúhelníku

Do daného kruhu vpiš patnáctiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.

Daným kruhem buď ABCD; má se tedy do kruhu ABCD vepsati patnáctiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý.

Vpišme do kruhu ABCD stranu AC trojúhelníku stejnostranného do kruhu vpisovaného, stranu pak AB pětiúhelníku stejnostranného; jakých tedy úsečí má kruh ABCD patnáct, takových oblouk ABC, jsa třetinou kruhu, bude míti pět a oblouk AB, jsa pětinou kruhu, bude míti tři, tedy zbývající BC stejných dvě. Rozpulme BC v E, tedy oblouk EE i CE jest patnáctinou kruhu ABCD. Když tedy spojíce B, E a E, C zapustíme nepřetržitě přímky jim rovné do kruhu ABCD, bude do něho vepsán patnáctiúhelník stejnostranný i stejnoúhlý, což právě bylo vykonati. (Eukleides 1907, str. 66)



Obr. 5 Konstrukce pravidelného patnáctiúhelníku

Do dané kružnice se má vepsat patnáctiúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny úhly stejně velké:

Do kružnice se nejdříve vepíše strana *AC* rovnostranného trojúhelníku a strana *AB* pravidelného pětiúhelníku. Oblouk *ABC* je třetinou kružnice, a proto v něm bude pět stejných úsečí, jakých bude v celé kružnici patnáct. Takové úseče budou v oblouku *AB* tři, protože tento oblouk je pětinou kružnice a tedy v oblouku *BC* budou dvě. Rozpůlením oblouku *BC* se získá bod *E* v jeho středu a oblouky *BE* a *EC* jsou oba patnáctinou zadané kružnice. Spojením bodů *B, E* a *E, C* vzniknou dvě úsečky o délkách strany pravidelného patnáctiúhelníku, protože ve stejných kruzích proti stejným obloukům leží stejné tětivy. Nepřetržitým zapuštěním úseček s touto délkou do zadané kružnice se sestrojí patnáctiúhelník se všemi stranami stejně dlouhými. Navíc, protože úhly ve stejných kruzích, stojící na stejných obloucích, jsou si navzájem rovny, má tento patnáctiúhelník všechny úhly stejné a je tedy pravidelný.

2. 4 Problematické aspekty Eukleidových *Základů*

Ačkoli *Základy* spojily starší teoretické matematické výsledky, shrnuly do jednoho výkladu mnohé tehdy nejnovější matematické teorie a staly se velkým vzorem pro matematická pojednání na mnoho dalších století, nezahrnuly všechny tehdejší poznatky z matematiky, dokonce do této práce nejsou zařazeny ani některé vlastní Eukleidovy výsledky.

Omezení konstrukčních prostředků na pravítko a kružítko patrně zavinilo, že v *Základech* nebyly zahrnuty geometrické teorie, které vyžadovaly buď metodu „vkládání“, nebo využití čar jiných, než je přímka a kružnice. Zejména proto se v nich nevykládala teorie kuželoseček, ačkoliv byla již tehdy dostatečně rozpracována. Do *Základů* nebyla začleněna ani logistika, tj. nauka o praktickém počítání, protože se pokládala spíše za řemeslo než za vědu. Beze zmínky zůstaly také ještě otevřené problematiky trisekce úhlu, kvadratury kruhu a konstrukce dalších pravidelných mnohoúhelníků (např. sedmiúhelníku).

V *Základech* se také vyskytují logické nedostatky jak v definicích, tak v soustavě postulátů a axiomů. Těmi jsou například definování primitivních pojmů, jako je bod a přímka, či neúplnost výčtu axiomů a používání předpokladů, které nebyly ani dokázány ani položeny do axiomatických základů teorie (např. existence průsečíku dvou kružnic při konstrukci rovnostranného trojúhelníku). Navíc se ukázalo, že čtvrtý postulát je v soustavě postulátů nadbytečný, protože k němu byl nalezen důkaz. K podobnému závěru chtěli matematici po Eukleidovi dospět i u pátého postulátu. V 19. století vedly tyto pokusy k objevu nových, tzv. neeukleidovských geometrií.

3 Algebraizace geometrie u Descarta

René Descartes byl francouzský filozof, matematik a fyzik, který žil v letech 1596 – 1650. Významným způsobem ovlivnil vývoj algebry i analytické geometrie novými myšlenkami, které sepsal zejména ve své knize *Geometrie.* Ta vyšla roku 1637 jako jeden ze tří esejů doprovázejících filozofické dílo *Rozprava o metodě*, dalšími byly *Dioptrika* (nauka o lomu světla) a *Meteory* (pojednávající o meteorologických jevech). Celé dílo mělo mít původně název *Plán všeobecné vědy schopné povznést naši povahu na nejvyšší stupeň dokonalosti*, což vystihuje záměr najít univerzální metodu použitelnou ve všech oborech, která by mohla usnadnit zkoumání a rozeznání vědecké pravdy. Doprovodné eseje byly zamýšleny především jako ukázky účinnosti této metody. *Rozprava* má šest částí, kde Descartes podal stručný výklad své metody poznávání pravdy, koncept celé své filozofie a náčrt nové vědy. Descartovy myšlenky byly postupně rozvíjeny, jeho *Geometrie* výrazným způsobem ovlivnila vývoj matematického myšlení v 17. a 18. století.

3. 1 Rozprava o metodě

Descartovým vědeckým cílem byla naprostá jistota dosaženého poznání, která musí být spojena s porozuměním. Tuto jistotu viděl v matematice a v jejím principu dedukce. Na základě svých matematických a fyzikálních zkoumání odvodil metodu, která *„mající přednosti těchto tří* (logiky, geometrické analýzy a algebry), *byla by prosta jejich chyb"*. Tato metoda se skládá z následujících čtyř pravidel:

„První bylo, nepřijímat nikdy žádnou věc za pravdivou, jiţ bych s evidencí jako pravdivou nebyl poznal: tj. vyhnout se pečlivě ukvapenosti a zaujatosti; a nezahrnovat nic víc do svých soudů než to, co by se objevilo tak jasně a zřeteně mému duchu, abych neměl žádnou možnost pochybovat o tom.

Druhé, rozdělit každou z otázek, jež bych prozkoumával, na tolik částí, jak je jen možno a žádoucno, aby byly lépe rozřešeny.

Třetí, vyvozovat v náležitém pořadí své myšlenky, počínaje předměty nejjednoduššími a nejsnáze poznatelnými, stoupaje povlovně jakoby se stupně na stupeň až k znalosti nejsložitější, a předpokládaje dokonce řád i mezi těmi, jež přirozeně po sobě nenásledují.

A poslední, činit všude tak úplné výčty a tak obecné přehledy, abych byl bezpečen, že jsem nic neopominul." (Descartes 1947, str. 17)

Tuto metodu Descartes zavedl v celé filozofii a ve všech oborech vědění, ale největších úspěchů s ní dosáhl právě v matematice: „*A vskutku se odvažuji říci, že přesné zachovávání toho mála pravidel, jež jsem si zvolil, mi tolik usnadnilo řešení všech otázek, jež tyto dvě vědy* (geometrická analýza a algebra) *zabírají, že jsem ve dvou nebo třech měsících, v nichž jsem je zkoumal, počav od nejjednodušších a nejvšeobecnějších věcí a používaje každé pravdy, kterou jsem nalezl, jako pravidla, jež mi pak pomáhalo nalézat pravdy další, nejen dovedl řešit mnohé otázky, které jsem kdysi pokládal za velice nesnadné, nýbrž že se mi nadto dokonce zdálo, že dokážu určit dokonce i u těch, jejichž řešení neznám, jakými prostředky a do jaké míry je možno je rozluštit.*“ (Descartes 1947, str. 18-19)

3. 2 *Geometrie*

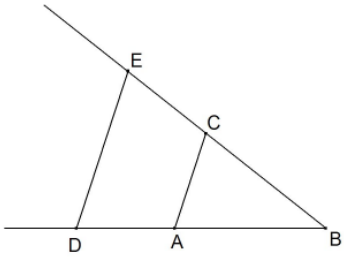
Descartova *Geometrie* měla být příkladem jeho obecné sjednocující metody, v tomto případě sjednocující algebru a geometrii. Má tři části, v první je prezentována základní myšlenka analytické geometrie, tj. vyjádření geometrických problémů algebraickými rovnicemi, je zde zavedena nová symbolika, odstraněn zákon homogenity a předvedena souvislost mezi křivkami v rovině a algebraickými rovnicemi o dvou neznámých. Druhá část je věnována klasifikaci křivek a algebraické metodě popisu tečen a normál ke křivkám. Třetí část se věnuje teorii algebraických rovnic a metodám jejich řešení geometrickými konstrukcemi, je zde formulována *základní věta algebry* (bez důkazu) i Descartovo pravidlo znaménkových změn.

Z hlediska konstruovatelnosti pravítkem a kružítkem je nejdůležitější převedení geometrických problémů do rovnic, k čemuž Descartes využil zjednodušující symboliku a odstranění zákona homogenity.

3. 2. 1 Symbolika a homogenita

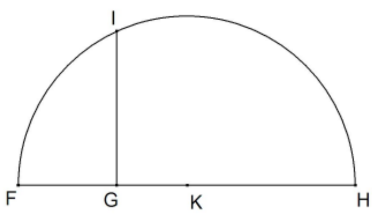
Descartes ukázal, že zadání geometrické úlohy lze popsat délkami určitých úseček a příslušné vztahy je možno vyjádřit algebraickými rovnicemi, jejichž řešením lze získat i řešení uvažované geometrické úlohy. K nalezení požadované úsečky je nutné pouze přičíst nebo odečíst jiné úsečky, nebo pokud zvolíme jednu úsečku, kterou nazveme jednotkou (a vybrat ji můžeme libovolně), můžeme z dalších dvou zadaných úseček sestrojit jejich násobek nebo podíl geometricky pomocí poměrů. Druhou odmocninu libovolné úsečky (resp. její délky) můžeme s využitím jednotkové úsečky sestrojit pomocí Eukleidovy věty o výšce.

Násobení popisuje Descartes takto: *„Nechť například AB je jednotka a nechť je třeba násobit úsečku BD úsečkou BC; stačí spojit body A a C, vést DE rovnoběžně s CA; pak BE je výsledek tohoto násobení.“*
(Tedy z podobnosti trojúhelníků platí: $BC : AB = BE : DB$; $AB = 1$ => BE = BD · BC.)



Obr. 6 Násobení a dělení

Následuje dělení: *„Je-li třeba dělit úsečku BE úsečkou BD, spojím body E a D, vedu AC rovnoběžně s DE a BC je výsledek tohoto dělení.“*
(Ze stejné rovnosti $BC : AB = BE : DB$; $AB = 1$ plyne BE : BD = BC.)
A nakonec popisuje druhou odmocninu: *„Je-li třeba zjistit druhou odmocninu GH, přidám k této úsečce úsečku FG, která je jednotkou, a rozdělím FH v bodě K na dvě stejné části, ze středu K nakreslím kružnici FIH; pak vztyčím v bodě G úsečku až do bodu I, svírající pravé úhly s FH; pak je GI hledanou odmocninou.“* (Descartes 2010, str. 2)
(To vyplývá z podobnosti trojúhelníků *FGI* a *IGH*, $FG : GI = GI : GH$ => $GH = GI^2$.)



Obr. 7 Druhá odmocnina

Následně popisuje, jak lze v geometrii používat značky; délky označuje malými písmeny, známé veličiny písmeny ze začátku abecedy, neznámé od jejího konce. Pro sčítání a odčítání používá znaménka + a - , násobení značí *ab*, podíl $\frac{a}{b}$, pro zápis mocnin zavádí exponenty a^2 (někdy *aa*), a^3, a^4 atd., pro odmocňování znak $\sqrt{a}$ a pro rovnost používá symbol podobný ležaté osmičce. Výrazy a^2, b^3 atd. rozumí úsečky, přestože je nazývá čtverci, krychlemi atd.

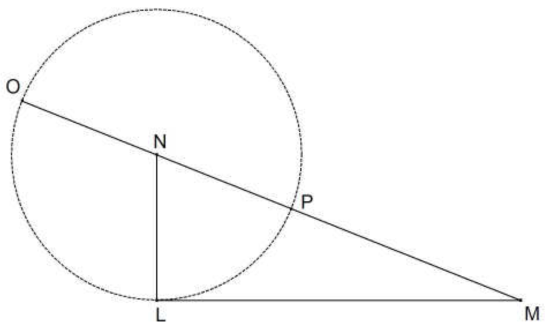
Původně se součinem dvou délkových veličin *a*, *b* rozuměla plošná veličina a podíl $\frac{a}{b}$ nebylo možno utvořit, protože nemá žádný rozměr. Délky se směly porovnávat pouze s délkami, plochy s plochami a tělesa s tělesy, algebraické výrazy mohly obsahovat pouze členy stejného rozměru. Navíc nebylo jasné, co si představit např. při vynásobení obdélníku čtvercem a dalšími veličinami vyšších rozměrů. Descartes tento problém vyřešil zavedením jednotky a všude, kde bylo příliš mnoho nebo příliš málo rozměrů, tyto veličiny jednotkou vydělil nebo vynásobil. Tak například místo součinu *ab* uvažoval podíl $\frac{ab}{1}$, místo podílu $\frac{a}{b}$ podíl $\frac{a \cdot 1}{b}$ a místo odmocniny $\sqrt{a}$ odmocninu $\sqrt{a \cdot 1}$, čímž získal opět délkové veličiny. Potom už mohl pracovat s délkami úseček jako s čísly a přepsat původně slovně formulované úlohy do rovnic.

3. 2. 2 Algebraické vyjádření geometrických konstrukcí

Základními prostředky řecké matematiky byly analýza a syntéza. Při analýze se předpokládá, že je dáno to, co se hledá, a vyvozují se z toho důsledky, až se dojde k něčemu známému. Při syntéze se předpokládá, že je dáno to, co se v analýze objeví až nakonec, uspořádají se důsledky v přirozeném pořadí a nakonec se sestrojí hledaný objekt. Tento postup ale bývá často spojen s konstrukcí velkého množství pomocných čar a výsledek může být značně nepřehledný. Proto Descartes uplatnil výše uvedené značení geometrických veličin a postupnými algebraickými úpravami výrazy zjednodušil. Tento postup popisuje slovy: *„Chceme-li řešit nějakou úlohu, pak předpokládáme, že už je vyřešena, a pojmenujeme všechny úsečky, které se zdají být nutné k sestrojení této úlohy, a to jak ty, které jsou neznámé, tak ostatní. Pak, aniž bychom hleděli na nějaké rozdíly mezi těmito známými a neznámými úsečkami, je třeba se vypořádat s potíží podle toho řádu, který ukazuje nejpřirozeněji, jakým způsobem vzájemně závisejí jedny na druhých, až nalezneme způsob vyjádření jedné a téže veličiny dvěma způsoby: to je to, co se nazývá rovnicí, neboť členy získané jedním z těchto dvou způsobů jsou rovny členům získaným způsobem druhým. A je třeba najít tolik takových rovnic, kolik je neznámých.“* (Descartes 2010, str. 3-4)

Následně vysvětluje, že pokud je možno úlohu vyřešit pouze pomocí pravítka a kružítka, pak uvedený postup vede ke kvadratické rovnici a každou kvadratickou rovnici lze vyřešit pomocí pravítka a kružítka. Geometrické řešení kvadratické rovnice Descartes popisuje na třech příkladech:

„Mám-li například $z^2 = az + b^2$, udělám pravoúhlý trojúhelník NLM, jehož strana LM se rovná b, druhé odmocnině známé veličiny b^2, a druhá, LN, je $\frac{1}{2}a$, tj. polovina jiné známé veličiny násobené z, kterou pokládáme za neznámou úsečku. Pak prodloužím-li MN, tj. přeponu tohoto trojúhelníku, až k O tak, aby se NO rovnalo NL, je celá OM hledanou úsečkou z. A to se vyjádří tímto způsobem: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.

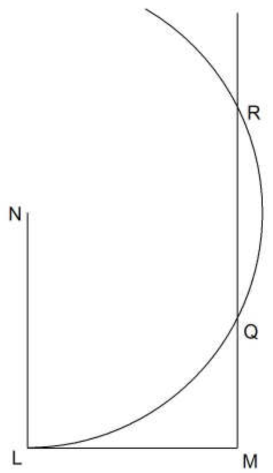


Obr. 8 Geometrické řešení kvadratické rovnice

Mám-li $y^2 = -ay + b^2$ a jestliže y je veličina, kterou je třeba nalézt, a udělám-li týž pravoúhlý trojúhelník NLM a od jeho přepony MN odeberu NP rovné NL, pak je zbytek PM hledaný kořen y. Takovým způsobem mám $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.

Nakonec mám-li $z^2 = az - b^2$, položím stejně jako předtím NL rovno $\frac{1}{2}a$ a *LM rovno b; pak místo toho, abych spojil body M a N, vedu MQR rovnoběžně s LN a ze středu N opíši kružnici procházející L, která protíná MQR v bodech Q a R; pak se hledaná úsečka rovná MQ nebo MR, neboť se vyjadřuje dvěma způsoby, totiž*

$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ a $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.



Obr. 9 Geometrické řešení kvadratické rovnice

A jestliže kružnice se středem v bodě N a procházející bodem L neprotíná přímku MQR a ani se jí nedotýká, nemá rovnice žádný kořen, takže se lze ujistit, že konstrukce předloženého problému není možná.“ (Descartes 2010, str. 6-7)

Zbývající případ, tedy rovnici $z^2 = - az – b^2$, Descartes neuvažuje, protože tato rovnice nemá kladný kořen. U Descarta vyjadřují veličiny délky úseček, a jsou tudíž kladné, což platí i pro veličiny jako a, které se vždy předpokládají kladné, takže – a je záporné.

Na základě svých zkušeností s algebraickými rovnicemi byl Descartes přesvědčen, že klasické problémy zdvojení krychle a trisekce úhlu nejsou pravítkem a kružítkem řešitelné, avšak neřešitelnost těchto problémů nedokázal. Uvědomoval si, že tyto úlohy vedou na kubické rovnice, které nemusí mít racionální kořeny, zatímco eukleidovské konstrukce pravítkem a kružítkem odpovídají postupnému řešení rovnic lineárních a kvadratických.

4 Neřešitelnost některých klasických problémů

Vzhledem k nové možnosti řešit geometrické problémy pomocí algebraických rovnic a ke značnému rozvoji moderní algebry se v 19. století podařilo definitivně zodpovědět otázku konstruovatelnosti pravítkem a kružítkem. Roku 1837 dokázal Pierre Laurent Wantzel nemožnost eukleidovské trisekce úhlu a duplikace krychle, neřešitelnost kvadratury kruhu dokázal na základě transcendentnosti čísla π roku 1882 Ferdinand Lindemann.

Společným rysem všech těchto důkazů bylo vyjádření konstrukční úlohy rovnicí, jejíž koeficienty patří do určitého konečného souboru čísel, pak se sepsaly operace, které se mají s prvky souboru provádět, a hledalo se kritérium, jak o libovolném čísle rozhodnout, zda patří mezi výsledky dosažitelné konečným počtem těchto operací.

Konstruovatelnost pravidelných mnohoúhelníků vyřešil Carl Fridrich Gauss, který už roku 1796 objevil eukleidovskou konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku. Následně dokázal, že pravidelný n-úhelník ($n > 2$) lze zkonstruovat pravítkem a kružítkem právě tehdy, když je počet jeho vrcholů roven číslu

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

kde $p_1, \ldots p_s$ jsou navzájem různá Fermatova prvočísla.
Fermatova čísla jsou tvaru $2^q + 1$, $q = 2^m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, přičemž pouze prvních pět z nich jsou prvočísla a dodnes nebyla nalezena žádná další.

4. 1 Pojem eukleidovské konstrukce

Eukleidovskou konstrukcí rozumíme takovou geometrickou konstrukci, jejíž jednotlivé kroky se provádí pouze podle pokynů uvedených v Eukleidových postulátech. Dají se provést pravítkem, které se užívá jen ke spojování dvou bodů nebo k prodloužení úsečky, a kružítkem, kterým je dovoleno jen opsat kružnici z daného bodu procházející daným bodem. O pravítku se předpokládá, že má nekonečnou délku, jen jednu hranu a žádné značky pro měření; o kružítku se předpokládá, že může nakreslit jakkoli velikou kružnici. Kružítkem ani pravítkem není dovoleno přenášet délky.

Každá Eukleidovská konstrukce se skládá z opakování pěti základních kroků s pomocí bodů, úseček a kružnic, které byly vytvořeny již v předchozích krocích. Kromě toho musí mít každá Eukleidovská konstrukce svůj přesně stanovený konečný počet kroků.

Těmito kroky jsou
1) sestrojení úsečky procházející dvěma body,
2) sestrojení kružnice se středem v jednom bodě tak, aby procházela druhým bodem,
3) sestrojení bodu, který leží v průsečíku dvou protínajících se úseček,
4) sestrojení jednoho nebo dvou bodů ležících v průsečíku kružnice a úsečky (pokud se protínají),
5) sestrojení jednoho nebo dvou bodů ležících v průsečíku dvou kružnic (pokud se protínají).

Toto vymezení se mírně odchyluje od původního Eukleidova pojetí, protože Eukleides nikde explicitně nemluví o protínání kružnic a existenci průsečíků vyvozuje z geometrického názoru.

4. 2 Algebraický pohled na Eukleidovské konstrukce

Každý geometrický konstrukční problém je typu: jsou zadány nějaké délky $a, b, c\dots$ a má se najít jedna nebo více délek $x, y\dots$ Geometrická konstrukce pak zahrnuje řešení algebraického problému: nejdřív se musí najít vztah (rovnice) mezi zadanými a neznámými hodnotami, pak je třeba rovnici vyřešit a nakonec se musí rozhodnout, zda lze řešení vyjádřit algebraickými metodami odpovídajícími konstrukci pravítkem a kružítkem.

Základním geometrickým konstrukcím odpovídají nejjednodušší algebraické operace, tzn. sčítání, odčítání, násobení a dělení. Jsou-li zadány délky a, b a jednotka, pak se dají snadno zkonstruovat délky $a + b, a – b, r \cdot a$ (r je libovolné racionální číslo), $a/b, a \cdot b$. Z toho vyplývá, že racionální algebraické operace (tzn. sčítání, odčítání, násobení a dělení) je možno provést geometrickými konstrukcemi pravítkem a kružítkem, a tedy z jakýchkoli zadaných délek, vyjadřujících reálná čísla $a, b, c\dots$, můžeme opakovaným použitím těchto základních konstrukcí zkonstruovat hodnotu, kterou lze pomocí $a, b, c\dots$ vyjádřit opakovaným sčítáním, odčítáním, násobením a dělením. Všechny hodnoty, které lze tímto způsobem ze zadaných hodnot získat, tvoří číselné těleso. Rozhodující operace, kterou se dají získat nové hodnoty, jež do daného tělesa nepatří, je odmocňování, přičemž i druhou odmocninu zadané hodnoty lze snadno zkonstruovat pravítkem a kružítkem.

Pro teoretickou analýzu je výhodné převést konstrukci do kartézské soustavy souřadnic. Prvek se považuje za známý, pokud byl zadán, nebo byl sestrojen v nějakém předešlém kroku. Pokud se má použít libovolný prvek, je výhodné ho zvolit tak, aby byl racionální; tzn. aby bod měl racionální souřadnice, přímka $ax + by + c = 0$ aby měla racionální koeficienty a kružnice aby měla racionální poloměr a souřadnice středu. Pro zjednodušení můžeme předpokládat, že je zadaný jen jeden prvek, který zvolíme za jednotkovou délku. Pak můžeme pravítkem a kružítkem zkonstruovat všechny hodnoty, které se dají z jednotky získat sčítáním, odčítáním, násobením a dělením, tj. všechna racionální čísla tvaru *r/s,* kde *r, s* jsou celá čísla. To jsou všechny body roviny s oběma racionálními souřadnicemi. Systém racionálních čísel je uzavřený na racionální operace, tzn. že součet, rozdíl, součin a podíl libovolných dvou racionálních čísel, kromě dělení nulou, je opět racionální číslo, a tedy tvoří číselné těleso.

Nová, iracionální, čísla získáme použitím kružítka, například sestrojením $\sqrt{2}$. Odtud můžeme racionálními konstrukcemi najít všechna čísla tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde a, b jsou racionální a tedy konstruovatelná. Stejně můžeme sestrojit všechna čísla tvaru

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \ , \ (a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) \ , \ (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) \ , \ \frac{(a + b\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})} \ ,$$

(kde a, b, c, d jsou racionální) a všechna lze zapsat ve tvaru $p + q\sqrt{2}$, kde p, q jsou racionální. Tedy všechna čísla, která získáme konstrukcí $\sqrt{2}$ tvoří číselné těleso.

Pojmenujme těleso racionálních čísel F_0 a nové těleso čísel tvaru $a + b\sqrt{2}$ pojmenujme F_1. I to můžeme rozšířit, když z něho vybereme libovolné číslo k a vytvoříme jeho druhou odmocninu, čímž získáme konstruovatelné číslo $\sqrt{k} = \sqrt{a + b\sqrt{2}}$ a z něho můžeme vytvořit těleso čísel tvaru $p + q\sqrt{k}$, kde p, q, k jsou libovolná čísla z tělesa F_1, tzn. tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde $a, b \in F_0$. Toto nové těleso lze také stejným způsobem rozšiřovat.

Pokud umíme zkonstruovat všechna čísla z nějakého tělesa F, pak z nich pouze s použitím pravítka nikdy nemůžeme sestrojit čísla, která do tohoto tělesa nepatří. To lze dokázat vyjádřením rovnice přímky procházející dvěma body a vyjádřením souřadnic průsečíku dvou přímek. Rovnice přímky určené dvěma body, jejichž souřadnice $a_1, b_1, a_2, b_2 \in F$, má tvar $(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$. Její koeficienty jsou racionálním vyjádřením čísel z tělesa *F*, a proto jsou také prvky tělesa *F*. Pokud máme dvě přímky $\alpha x + \beta y - \gamma = 0$, $\alpha' x + \beta' y - \gamma' = 0$, jejichž koeficienty jsou z tělesa *F*, pak souřadnice jejich průsečíku jsou $x = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$, $y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$. Protože jsou to také racionální vyjádření čísel z tělesa *F*, je zřejmé, že pouze použitím pravítka nemůžeme sestrojit čísla mimo toto těleso.

To je možné pouze při použití kružítka. Za tímto účelem vybereme libovolný prvek $k \in F$, pro který platí $\sqrt{k} \notin F$. Pak sestrojíme $\sqrt{k}$ a následně všechna čísla tvaru $a + b\sqrt{k}$, kde $a, b \in F$. Jejich součet, rozdíl, součin i podíl jsou opět tvaru $p + q\sqrt{k}$, kde $p, q \in F$. Tedy množina čísel tvaru $a + b\sqrt{k}$ tvoří těleso *F´*, které je rozšířením tělesa *F*. Žádná další čísla ale s použitím kružítka získat nemůžeme, protože při konstrukci kružítkem dostáváme pouze body jako průsečíky kružnice s přímkou nebo s jinou kružnicí, jejichž souřadnice mají vždy tvar $a + b\sqrt{k}$. Kružnice se středem [s_1, s_2] a poloměrem *r* má rovnici $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$ a pokud $s_1, s_2, r \in F$, tak lze rovnici kružnice zapsat ve tvaru $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in F$. Přímka $ax + by + c = 0$ spojující libovolné dva body se souřadnicemi z tělesa *F* má také koeficienty z *F*. Ze soustavy těchto dvou rovnic dostaneme souřadnice průsečíků kružnice a přímky $x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, $y_{1,2} = \frac{-2Ac + aB \mp a\sqrt{B^2 - 4AC}}{2Ab}$, kde $A = a^2 + b^2$, $B = 2(ac + b^2\alpha - ab\beta)$, $C = c^2 - 2bc\beta + b^2\gamma$, které jsou ve tvaru $p + q\sqrt{k}$; $p, q, k \in F$.

Souřadnice průsečíků dvou kružnic se získají ze soustavy rovnic $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$, $x^2 + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma' = 0$. Odečtením druhé rovnice od první dostaneme lineární rovnici tvaru $2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma') = 0$, která určuje přímku procházející průsečíky těch dvou kružnic. Jejich souřadnice tedy získáme stejným způsobem, jako u průsečíků přímky a kružnice, a opět jsou ve tvaru $p + q\sqrt{k}$, kde $p, q, k \in F$.

Obecně tedy umíme z libovolného tělesa F konstruovatelných čísel obsahujícího číslo k pomocí pravítka a kružítka zkonstruovat $\sqrt{k}$ a následně všechna čísla tvaru $a+b\sqrt{k}$, kde a, b jsou prvky F. Každým krokem geometrické konstrukce (narýsování přímky procházející dvěma zadanými body, narýsování kružnice se zadaným středem a poloměrem, nebo sestrojení průsečíků dvou zadaných kružnic nebo přímek) získáme buď další hodnoty patřící do tělesa konstruovatelných čísel, nebo konstrukcí druhé odmocniny vytvoříme nové rozšíření tělesa konstruovatelných čísel. Konstruovatelná čísla jsou tedy taková, která se získají postupným rozšiřováním tělesa generovaného zadanými hodnotami o druhou odmocninu. Pokud je počáteční těleso F_0 těleso racionálních čísel generované jednotkou, pak všechna konstruovatelná čísla jsou čísla algebraická, tzn. všechna čísla, která jsou řešením algebraických rovnic s racionálními koeficienty. Čísla z tělesa F_1 jsou kořeny kvadratických rovnic, čísla z tělesa F_2 jsou kořeny rovnic čtvrtého stupně a obecně čísla z tělesa F_k jsou kořeny rovnic stupně 2^k s racionálními koeficienty.

4. 3 Důkazy neřešitelnosti některých řeckých problémů

Problémy duplikace krychle, trisekce úhlu a konstrukce pravidelného sedmiúhelníku algebraicky závisí na kubických rovnicích. K důkazu jejich neřešitelnosti je potřeba použít následující dvě věty:

Uvažujme kubickou rovnici

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0,$$

jejíž koeficienty a, b, c jsou racionální čísla.

Věta 1: *Pokud jsou x, y, u kořeny této rovnice, pak platí:*

$$x + y + u = -a.$$

Pro důkaz stačí polynom $z^3 + az^2 + bz + c$ rozložit na součin $(z-x)\cdot(y-y)\cdot(y-u)$, který je po roznásobení roven $z^3 - (x+y+u)z^2 + (xy+xu+yu)z - xyu$. Porovnáním koeficientů u kvadratického členu dostáváme $x + y + u = -a$.

Věta 2: *Jestliže kubická rovnice s racionálními koeficienty nemá žádný racionální kořen, pak žádný její kořen nelze zkonstruovat posloupností kvadratických rozšíření tělesa F_0 = Q.*

Pro důkaz předpokládejme, že x je konstruovatelný kořen rovnice $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Potom musí ležet v posledním tělese F_k nějaké posloupnosti rozšířených těles $F_0, F_1, \ldots, F_k$. Zvolme k jako nejmenší přirozené číslo takové, že $x \in F_k$.

k zřejmě musí být větší než nula, protože žádný kořen není racionální.
Pak lze x zapsat ve tvaru $x = p + q\sqrt{w}$, kde p, q, w jsou prvky předchozího tělesa F_{k-1}, ale $\sqrt{w}$ už v něm neleží.

Číslo $y = p - q\sqrt{w}$ musí být také kořenem rovnice $z^3 + az^2 + bz + c = 0$,

protože pokud kořen x je prvkem F_k, tak je jím i jeho druhá a třetí mocnina a také součet $x^3 + ax^2 + bx + c$, který se dá vyjádřit jako $A + B\sqrt{w}$, kde $A, B, w \in F_{k-1}$ a $\sqrt{w} \in F_k$.

Dosazením $z = p + q\sqrt{w}$ do rovnice $z^3 + az^2 + bz + c = A + B\sqrt{w}$ se vyjádří A a B. Protože $y = p - q\sqrt{w}$ má být také kořen, tak lze stejným způsobem vyjádřit C a D z rovnice $z^3 + az^2 + bz + c = C + D\sqrt{w}$, kde $z = p - q\sqrt{w}$ a ukáže se, že $C = A$ a $D = -B$.

Protože $A + B\sqrt{w} = z^3 + az^2 + bz + c = 0$, musí být $B = 0$ (kdyby $B \neq 0$, tak by platilo $\sqrt{w} = -\dfrac{A}{B} \in F_{k-1}$), a proto je také $A = 0$, a tedy i $A - B\sqrt{w} = 0$ a $y = p - q\sqrt{w}$ je také kořen.

Navíc platí, že $x \neq y$, tzn. $x - y \neq 0$, protože $x - y = 2q\sqrt{w}$, což může být nula pouze, když $q = 0$, ale v tom případě by $x = p$ bylo prvkem tělesa F_{k-1}, což je spor s předpokladem, že x je prvkem F_k. Tedy $x = p + q\sqrt{w}$ a $y = p - q\sqrt{w}$ jsou dva různé kořeny rovnice $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

Ze vztahu $x + y + u = -a$ platí pro třetí kořen $u = -a - x - y$.

Protože platí $x + y = 2p$, tak $u = -a - 2p$ a tedy $u \in F_{k-1}$. To je ale spor s předpokladem, že k je nejmenší přirozené číslo takové, že F_k obsahuje nějaký kořen rovnice $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

Proto žádný kořen nemůže být prvkem takového tělesa F_k a konstrukce pravítkem a kružítkem není možná, pokud algebraické vyjádření problému je řešením kubické rovnice, která nemá žádný racionální kořen.

4. 3. 1 Duplikace krychle

Je-li zadaná krychle s jednotkovou hranou délky, jejíž objem je kubická jednotka, má se najít hodnota *x*, která by byla délkou hrany krychle s dvojnásobným objemem. Hledaná hodnota x je řešením kubické rovnice

$$x^3 = 2, \text{ tedy } x^3 - 2 = 0.$$

Předpokládejme, že konstrukce takové hodnoty *x* je možná. To znamená, že *x* je prvkem nějakého tělesa F_k, získaného postupným kvadratickým rozšiřováním tělesa racionálních čísel. Je zřejmé, že *x* není prvkem racionálního tělesa F_0, protože $\sqrt[3]{2}$ je iracionální číslo. Proto *x* musí být prvkem nějakého rozšířeného tělesa F_k, kde k je přirozené číslo. Můžeme také předpokládat, že k je nejmenší přirozené číslo takové, že $x \in F_k$.

Z toho plyne, že x lze zapsat ve tvaru $x = p + q\sqrt{w}$, kde $p, q, w \in F_{k-1}$, ale $\sqrt{w} \notin F_{k-1}$.

Číslo $y = p - q\sqrt{w}$ musí být také kořenem rovnice $x^3 - 2 = 0$, a protože $q \neq 0$ (kdyby $q = 0 \rightarrow x = p \rightarrow x \in F_{k-1}$), tak $x \neq y$.

Protože ale existuje pouze jedno reálné číslo, které je třetí odmocninou ze dvou (další dva kořeny jsou komplexní), tak nemohou být kořeny dvě různá čísla $x = p + q\sqrt{w}$ a $y = p - q\sqrt{w}$ (která jsou obě reálná, protože $p, q, \sqrt{w}$ jsou reálná čísla). Proto řešení rovnice $x^3 - 2 = 0$ nemůže být prvkem tělesa F_k, a tedy duplikace krychle pouze pravítkem a kružítkem není možná.

4. 3. 2 Trisekce úhlu

Samozřejmě existují úhly, jako např. 90° a 180°, které se dají rozdělit na třetiny pravítkem a kružítkem, ale obecně platná metoda na trisekci libovolného úhlu neexistuje. Pro důkaz stačí najít jeden úhel, který nelze roztřetit. Je výhodné zvolit úhel α = 60° a vyjádřit ho jeho kosinem: $\cos\alpha = g$. Pak hledáme hodnotu $x = \cos\frac{\alpha}{3}$.

Ze vztahu

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

vyplývá rovnice

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3} = g .$$

Tedy problém trisekce úhlu α zahrnuje konstrukci řešení kubické rovnice

$$4z^3 - 3z - g = 0, \text{ kde } g = \cos\alpha .$$

Pro úhel $\alpha = 60°$ platí, že $g = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Dosazením této hodnoty do rovnice $4z^3 - 3z - g = 0$ dostáváme kubickou rovnici

$$8z^3 - 6z = 1$$

s racionálními koeficienty a už jen stačí dokázat, že nemá žádný racionální kořen.
Substitucí $v = 2z$ dostáváme

$$v^3 - 3v = 1.$$

Pokud by existovalo racionální číslo $v = \frac{r}{s}$ (kde *r, s* jsou nesoudělná celá čísla), které by bylo řešením této rovnice, dala by se pak vyjádřit tvarem $r^3 - 3s^2r = s^3$.
Z toho vyplývá, že $s^3 = r(r^2 - 3s^2)$, tedy $r \mid s$, pokud $r \neq \pm 1$, stejně tak s^2 je dělitelem $r^3 = s^2(s + 3r)$, tedy $s \mid r$, pokud $s \neq \pm 1$. Protože jsme ale předpokládali, že *r* a *s* nemají žádné společné dělitele, tak jediná racionální čísla, která mohou vyhovovat rovnici $v^3 - 3v = 1$ jsou + 1 a – 1. Po dosazení do této rovnice je ale zřejmé, že jí žádná z těchto hodnot neřeší.

Proto nemá rovnice $v^3 - 3v = 1$ ani rovnice $8z^3 - 6z = 1$ žádné racionální kořeny, tedy žádný z jejích kořenů není zkonstruovatelný a proto úhel 60° nelze roztřetit pouze s použitím pravítka a kružítka. Tím je dokázána nemožnost trisekce úhlu pravítkem a kružítkem, protože obecná metoda by musela fungovat pro každý úhel, tedy i pro úhel 60°.

4. 3. 3 Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku

Hledáme stranu délky *x* pravidelného sedmiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice. Vrcholy takového sedmiúhelníku jsou určeny rovnicí

$$z^7 - 1 = 0\,,$$

jejichž souřadnice [*x*,*y*] jsou vyjádřeny reálnou a imaginární částí komplexních čísel $z = x + yi$, které jsou kořeny této rovnice.

Protože jedním kořenem je $z = 1$, je možno rovnici $z^7 - 1 = 0$ převést na tvar

$$(z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0\,.$$

Vydělením rovnice $(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$ členem z^3 se získá rovnice

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0\ ,$$

kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$(z + \frac{1}{z})^3 - 3(z + \frac{1}{z}) + (z + \frac{1}{z})^2 - 2 + (z + \frac{1}{z}) + 1 = 0$$

a substitucí $y = z + \frac{1}{z}$ převést na kubickou rovnici

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0\,.$$

Protože $z = \sqrt[7]{1}$ lze vyjádřit vzorcem $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ a platí $\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$,

kde $\varphi = \frac{360°}{7}$ je úhel s vrcholem ve středu jednotkové kružnice a s rameny procházejícími dvěma sousedními vrcholy pravidelného sedmiúhelníku, platí, že

$$y = z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi\,.$$

Tedy pravidelný sedmiúhelník je možno zkonstruovat právě, když lze zkonstruovat *y*.

Kdyby měla rovnice $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ racionální kořen $\frac{r}{s}$ (kde *r*, *s* jsou nesoudělná celá čísla), dala by se vyjádřit ve tvaru $r^3 + r^2 s - 2rs^2 - s^3 = 0$. Pak platí, že $r \mid s^3$ a $s \mid r^3$ a protože *r*, *s* jsou nesoudělná celá čísla, musí být obě rovna buď 1 nebo – 1, tedy $y = \pm 1$. Žádná z těchto hodnot ale po dosazení rovnici $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ neřeší, tedy *y* není racionální kořen, a proto žádný z jejích kořenů nelze zkonstruovat pravítkem a kružítkem, z čehož vyplývá, že eukleidovská konstrukce pravidelného sedmiúhelníku není možná.

4. 3. 4 Kvadratura kruhu

Pokud má kruh poloměr *r*, je jeho obsah roven $\pi \cdot r^2$ a pro konstrukci čtverce se stejným obsahem je potřeba zkonstruovat úsečku délky $\sqrt{\pi}$. Tato úsečka by byla konstruovatelná, pouze pokud by byla konstruovatelná úsečka délky π. Protože všechna konstruovatelná čísla jsou algebraická, muselo by i číslo π být algebraické. Roku 1882 ale Ferdinand Lindemann dokázal, že π je transcendentní, tedy není algebraické, a tím dokázal i nemožnost eukleidovské konstrukce kvadratury kruhu.

Závěr

Konstrukční problémy byly vždy oblíbeným předmětem geometrie. V této práci jsem se pokusila shrnout především problém nekonstruovatelnosti, a to v jeho závislosti na vývoji geometrie. Mohlo by působit paradoxně, že ke konečnému řešení nedošlo na poli geometrickém, ale že bylo podmíněno rozvojem moderní algebry. Avšak nekonstruovatelnost je algebraický pojem, který se v geometrii nedá dokázat ani přesně vymezit. Proto mohlo k řešení tohoto problému dojít až prostřednictvím jeho vyjádření v jazyce algebry. Důkazy nemožnosti eukleidovské konstrukce některých problémů se dají zobecnit prostřednictvím teorie grup, ale na důkazech uvedených v této práci mi přijde nejzajímavější, že v podstatě využívají pouze znalosti z elementární matematiky. Pokročilého středoškolského studenta by mohlo zarazit nanejvýš zavedení pojmu rozšiřování těles, o to větší výzvou by ale mohlo být pro učitele hledání metod, jak tento pojem studentovi přiblížit. Proto si myslím, že cíle vytyčeného v úvodu, tedy představit důkazy nekonstruovatelnosti tak, aby se daly použít jako rozšiřující učivo na střední škole, se mi podařilo dosáhnout.

Tato práce by se dala rozšiřovat různými směry. Mohly by se zkoumat další typy omezení konstrukčních prostředků, jako je například zmíněné používání kružítka s konstantním rozevřením, nebo také konstrukce pouze pravítkem nebo pouze kružítkem. Naopak by se mohly také zpracovat různé typy přibližných řešení klasických úloh pomocí jiných konstrukčních prostředků, například kuželosečkami. Zajímavá je také souvislost s problematikou řešitelnosti algebraických rovnic a teorií grup.

Literatura

Bečvář, J. (1998). *René Descartes : milovník rozumu*. Prometheus, Praha.

Bečvář, J. (1999). Algebra v 16. a 17. Století. In: Bečvář J., Fuchs E. (eds.): *Matematika v 16. a 17. století*. Prometheus, Praha, str. 161-235.

Courant, R.; Robbins, H. (1958). *What is Mathematics?*. Oxford University Press, London.

Descartes, R. (1947). *Rozprava o metodě*. Nakladatelství svoboda, Praha.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes*. Dover publications, New York.

Descartes, R. (2010). *Geometrie*. OIKOYMENH, Praha.

Eukleides (1907). *Základy : překlad Františka Servíta*. Jednota českých matematiků, Praha.

Eukleides (2007). *Základy : knihy I-IV komentované Petrem Vopěnkou*. OPS, Nymburk.

Fiala, J. (1998). Descartesova Geometrie: od geometrické algebry k algebraické geometrii. In: *Filosofické dílo rené descartesa*. Filosofia, Praha, str. 199-211.

Folta, J. (2004). *Dějiny matematiky I*. Národní technické muzeum v Praze, Praha.

Kolman, A. (1968). *Dějiny matematiky ve starověku*. Akademia, Praha.

Lávička, M. (2007). *Syntetická geometrie* [online]. Plzeň, [cit. 2011-05-23]. Dostupné z WWW: <http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg_text.pdf>.

Sekanina, Milan, et al. (1988). *Geometrie II*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.

Stewart, I. (2004). *Galois Theory*. Chapman and Hall, New York.

Struik, D. (1963). *Dějiny matematiky*. Orbis, Praha.

Vopěnka, P. (1989) *Rozpravy s geometrií*. Panorama, Praha.