Posudek diplomové práce

Název práce: Nerozhodnutelnost struktury racionálních čísel

Autor práce: David Jurenka

Obsahem diplomové práce *Nerozhodnutelnost struktury racionálních čísel* pana *Davida Jurenky* je prezentace důkazu J. Robinsonové, že struktura přirozených čísel je definovatelná ve struktuře racionálních čísel ("nerozhodnutelnost" zdůrazněná v názvu práce je toho snadným důsledkem).

Původní důkaz používá fakta z teorie čísel, která jsou sice základní a elementární pro studenty tohoto oboru, ale nikoliv pro studenty logiky či jiných matematických oborů. Pan Jurenka proto v několika kapitolách vysvětluje potřebné pojmy z teorie čísel a dokazuje některé jejich elementární vlastnosti. Tyto kapitoly, ve kterých se autor nechává rozumně vést známou učebnicí Davenporta ([Dav52] v textu), jsou napsány velmi jasně a srozumitelně.

Pan Jurenka kladl zvláštní důraz na použití co nejelementárnějších metod. Nezdá se být možné se zcela obejít bez některých pokročilejších pojmů (jako p-adická čísla a jejich vlastnosti). Panu Jurenkovy se ale podařilo vhodně strukturovat důkaz tak, aby byla zřetelně izolována místa konstrukce, kde jsou tyto nástroje potřeba, od těch částí argumetu, kde elementární znalost teorie čísel postačuje.

Myslím, že práce by mohla velmi dobře sloužit k didaktickým účelům a zpřístupnit důkaz zmíněné věty Robinsonové budoucím studentům logiky. Nemám významných připomínek k vlastnímu matematickému textu, ale pro eventuelní budoucí didaktické využití práce bych doporučil v úvodu více pojednat další relevantní kontext matematické logiky, a zformulovat některé důsledky předložené analýzy původního důkazu. Tím myslím zejména dvě věci: Formalizovatelnost důkazu v nějaké teorii (např. Peanově aritmetice či jejích podteoriích či v některém ze systémů Friedmanovy hierarchie tzv. "reversní matematiky") a logickou složitost sestrojené interpretace.

Formalizace této konstrukce zavisí do jisté míry na dokazatelnosti některých fakt o distribuci prvočísel (viz kap.8). Zde by mohla být užitečná doktorská disertace *A. Woodse* (*Some problems in logic and number theory and their* *connections*, PhD thesis, University of Manchester, 1981) v níž je několik takových tvrzení dokázáno ve slabé podteorii Peanovy aritmetiky.

Připojím ještě krátký komentář ke druhému tématu. Jeden z nejdůležitějších otevřených problémů v této (širší) oblasti je Hilbertův 10. problém pro racionální čísla. Je lehké pozorování, že kdyby existovala definice přirozených čísel v tělese racionálních čísel existenční formulí, tak tato varianta 10. Hilbertova problému má negativní řešení (z Matijasevičovy věty). Definice Robinsonové (jak je prezentována v práci) není existenční nýbrž $\forall\exists\forall$, ale bylo by zajímavé prozkoumat, není-li možné část konstrukce upravit a tuto složitost trochu snížit. Nevěřím, že by bylo možné elementárními manipulacemi docílit optimální složitosti (jsou známé hlubší souvislosti s algebraickou geometrií, viz tzv. Mazurova hypotéza), ale bylo by dobré jasně porozumět tomu, proč je tato otázka obtížná.

Dle mého názoru se jedná o pěknou diplomovou práci a doporučuji, aby ji pan Jurenka úspěšně obhájil.

prof. RNDr. Jan Krajíček, DrSc.
krajicek@math.cas.cz

P.S.

Drobnosti:

- str.3: Eliminace kvantifikátorů pro reálná čísla vyžaduje i uspořádání v jazyce (jazyk teorie uspořádaných okruhů).
- str.5: Rovnost = by měla být explicitně povolena v jazyce. Dále, "definovatelnost" většinou znamená s parametry. (Stačí poznamenat, že u zkoumané struktury na tom nezáleží).

11. 9. 2006
Oxford