Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

Katedra informačních technologií a technické výchovy

Soubor didaktických materiálů pro podporu výuky matematiky

Autor: Petr Hanzal

Vedoucí práce: PaedDr. Eva Battistová

Praha 2011

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra informačních technologií a technické výchovy

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

akademický rok 2009/2010

Jméno a příjmení studenta: **Petr Hanzal**

Studijní program: **B7507 Specializace v pedagogice**

Studijní obor: **Technická a informační výchova se zaměřením na vzdělávání**

Název tématu práce v českém jazyce:

Soubor didaktických materiálů pro podporu výuky matematiky

Název tématu práce v anglickém jazyce:

File of educational materials to support the teaching of mathematics

Pokyny pro vypracování:

- analyzujte dostupné materiály ke zvolené disciplíně matematiky;
- vyberte základní poznatky z výuky jedné oblasti matematiky pro zvolenou skupinu uživatelů;
- navrhněte a vytvořte soubor modelových příkladů z dané disciplíny matematiky s postupem řešení;
- vytvořte ke každému vzorovému příkladu soubor cvičných a aplikačních úloh v různých stupních obtížnosti s uvedením správných postupů;
- ověřte vytvořený soubor modelových příkladů u cílové skupiny uživatelů, získejte zpětnou vazbu z pilotního nasazení;
- navrhněte ze závěrů ověřování případné úpravy souboru modelových příkladů.

Vedoucí bakalářské práce: PaedDr. Eva Battistová

Předpokládaný rozsah bakalářské práce[1]: 40 stran

Datum zadání práce: 19.3.2010

Předběžný termín odevzdání práce: 4/2011

Práce se odevzdává ve dvou knihařsky svázaných exemplářích v pevných deskách. Současně se odevzdává jeden její stejnopis na nepřepisovatelném nosiči dat (CD, DVD).

V Praze dne: 12.4.2010

....
doc. PhDr. Vladimír Rambousek, CSc.
vedoucí katedry

[1] Minimální rozsah bakalářské práce činí standardně 40 normostran (72 000 znaků vč. mezer) vlastního textu.

Prohlašuji, že jsem zadanou bakalářskou práci zpracoval samostatně s přispěním vedoucího práce a použil jsem pouze literaturu v práci uvedenou. Dále prohlašuji, že nemám námitek proti půjčování nebo zveřejňování mé bakalářské práce nebo její části se souhlasem katedry.

Datum:

Podpis

Poděkování

Děkuji PaedDr. Evě Battistové za vedení bakalářské práce a za rady a připomínky, které mi při zpracování této práce poskytla.

NÁZEV:

Soubor didaktických materiálů pro podporu výuky matematiky

ABSTRAKT:

Cílem této bakalářské práce je navrhnout a vytvořit soubor řešených příkladů z matematiky na téma kvadratické rovnice, rovnice s absolutní hodnotou a s neznámou pod odmocninou. Je určen pro studenty 5. ročníků osmiletého studia na gymnáziu a 1. ročníků čtyřletého studia na gymnáziu a SŠ. Pomocí řešených příkladů umožňuje studentům hlouběji se seznámit s použitím metod pro řešení daných typů rovnic.

KLÍČOVÁ SLOVA:

Rovnice, absolutní hodnota, odmocnina, diskriminant, metody řešení

TITLE:

The collection of materials for the support during the lecture of mathematic

ABSTRACT:

The aim of this bachelor thesis is to suggest and create the collection of solved exercises from mathematic on a theme quadratic, absolute-value equations and equations involving square roots. It is intended for the students of the fifth grade of the eight-year grammar school and for the students of the first grade of the four-year grammar school or secondary school. Thanks to the solved exercises it is possible for students to get to know the methods for solving given types of quadratics more deeply.

KEY WORDS:

Quadratics, absolute value, root, methods of solution

Úvod

Základním cílem práce s názvem „Soubor didaktických materiálů pro podporu výuky matematiky“ je především vytvoření takového souboru řešených úloh, který studentům při řešení daných typů rovnic pomůže při rozhodování, jakou metodu pro toto řešení zvolí. Vzhledem k vlastním zkušenostem s výukou matematiky na středních školách, ale i vzhledem k nedobrým výsledkům státních maturitních zkoušek z matematiky v porovnání s ostatními předměty lze předpokládat, že by podobný přístup k matematice a řešení příkladů mohl situaci v budoucnu zlepšit.

Rovnice, jako vybraná oblast matematiky, byly pro tuto práci zvoleny proto, že jsou jakýmsi základním kamenem využití matematiky v technických oborech. Také však proto, že řada studentů neumí především některé typy rovnic správně vyřešit. Veliké obtíže činí studentům právě řešení rovnic s absolutní hodnotou a s neznámou pod odmocninou. Vysvětlení problematiky kvadratických rovnic je v práci zahrnuto proto, že spolu se dvěma zmiňovanými typy rovnic velmi úzce souvisí.

Forma řešených příkladů byla zvolena především proto, že pro autora práce byly vždy modelové příklady dobrou pomocí pro řešení dané problematiky v matematice. Také však proto, že pro řadu studentů je předvedení dostatku řešených příkladů klíčem k pochopení používaných postupů a jejich následnému správnému použití.

První kapitola této práce je zaměřena na stanovení cíle práce a úkolů, nezbytných pro jeho dosažení. Ve druhé kapitole je možné nalézt analýzu dostupných tištěných i elektronických zdrojů, věnujících se této problematice.

Kapitoly 3 - 6 jsou věnovány objasnění některých pojmů a postupů nezbytných pro řešení daných typů rovnic. Obsahují také vysvětlení základních metod pro řešení těchto rovnic. Po vysvětlení nějaké metody vždy následuje řešený příklad, na kterém je metoda demonstrována. Poté následuje soubor detailně vyřešených příkladů, pokud je to možné a vhodné, tak je jeden příklad řešen více metodami. Na závěr určitých typů příkladů je vždy provedeno shrnutí, kde je popsáno, která metoda se na tyto příklady hodí a především proč. V závěru jednotlivých podkapitol věnovaných řešení konkrétních typů rovnic je soubor neřešených cvičných příkladů s uvedenými výsledky.

V závěrečných částech této práce jsou uvedeny výsledky a závěry výzkumu, získané při ověřování vytvořeného materiálu ve výuce na Gymnáziu Opatov. Ověření proběhlo v hodině matematiky studentů 5. ročníku osmiletého studia. Závěry byly učiněny podle testu a dotazníku, který studenti na konci hodiny vypracovali a z poznatků vyučující Mgr. Markéty Ničové.

1 Cíle a úkoly práce

Základním cílem mé práce je ukázat metody, kterými se řeší dané typy rovnic na příkladech a také ukázat, kdy je vhodné kterou metodu použít a proč. Současně je cílem i prezentace těchto metod na internetu.

K dosažení tohoto cíle jsem si určil následující úkoly:

- Analýza dostupných tištěných i elektronických materiálů
- Výběr základních poznatků nutných pro řešení daných typů rovnic
- Popis jednotlivých metod pro řešení daných typů rovnic
- Nalezení vhodných modelových příkladů, jejichž řešením bude znázorněno využití jednotlivých metod
- Vytvoření souboru cvičných příkladů na procvičení získaných dovedností
- Vytvoření webových stránek se zaměřením na různé způsoby řešení daných typů rovnic
- Výběr experimentální skupiny pro ověření vytvořených materiálů
- Vyvození závěrů z ověření vytvořených materiálů
- Zhodnocení závěrů a návrh případných úprav vytvořeného souboru příkladů

2 Analýza informačních zdrojů

Tato kapitola je zaměřena na analýzu tištěných a elektronických zdrojů, které jsou momentálně dostupné a v této oblasti matematiky jsou nebo byly používané na gymnáziích či středních školách. Tyto zdroje jsou rozděleny do dvou podkapitol, přičemž obsahuje rozbor tištěných materiálů (učebnic a sbírek příkladů), závěr kapitoly je věnován elektronickým zdrojům dostupným na internetu.

2.1 Tištěné materiály

Matematika pro gymnázia. Rovnice a nerovnice

Tato učebnice [6] se celá zabývá rovnicemi, předpokládá ovšem určité předchozí znalosti z této oblasti matematiky. Vysvětluje základy pro řešení lineárních rovnic a nerovnic a dále vysvětluje, jak tyto znalosti využívat při řešení rovnic složitějších (převoditelných na rovnice a nerovnice lineární). Dále se zabývá řešením soustav lineárních rovnic a nerovnic a mnoho prostoru věnuje i řešení rovnic a nerovnic kvadratických a těch, které lze na kvadratické (nebo lineární) převést a nakonec rovnicemi a nerovnicemi s parametrem.

Pro tuto práci byly nejdůležitější právě kapitoly o kvadratických rovnicích a těch, které lze na kvadratické (či lineární) převést. Tyto kapitoly obsahují vždy nejprve vysvětlení všech nových pojmů, následně postupy řešení rovnic a ukázky na příkladech. Je zde také vysvětleno odvození některých důležitých vzorců (například vzorce pro výpočet diskriminantu).

Na příkladech se autoři také snaží ukázat, které metody jsou pro které příklady vhodnější a které ne. Z toho důvodu jsou některé příklady řešeny za použití několika různých metod.

Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl

Publikace [10] se zabývá především základy řešení rovnic. V první kapitole připomíná, jak se pracuje s výrazy a poté se zabývá vysvětlením základních pojmů důležitých pro řešení rovnic. Vysvětluje, co jsou ekvivalentní úpravy, definuje levou a pravou stranu rovnice a postupy řešení lineárních rovnic.

V další kapitole se zabývá řešením slovních úloh pomocí lineárních rovnic a ve čtvrté kapitole zavádí základní pojmy statistiky. Zbylé kapitoly obsahují souhrnná cvičení.

Učivo, kterému je věnována tato práce je zahrnuto jen velmi okrajově a to především v jednoduchých rovnicích s absolutní hodnotou, které se převádějí na rovnice lineární.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií. Rovnice a jejich soustavy

Učebnice [5] předpokládá základní znalosti z oblasti řešení rovnic a to především rovnic lineárních, ale i kvadratických, které se převedou na rovnici lineární. Celé toto učivo zrychleně opakuje a přidává kapitoly o řešení kvadratické rovnice.

U té vysvětluje možný počet kořenů pro jednotlivé typy kvadratických rovnic a jejich hledání. Nejprve učí žáky používat Viètovy vzorce a následně řešit libovolnou kvadratickou rovnici pomocí diskriminantu (uvádí ale pouze vzorec, nikoliv způsob, jak k němu dojít). V řešených příkladech žákům ukazuje, že výsledkem kvadratické rovnice nemusí být vždy racionální číslo.

Hlavním přínosem pro tuto práci je kapitola o rozkládání mnohočlenů druhého stupně pomocí Viètových vzorců, které je vysvětleno velmi podrobně.

MATEMATIKA pro učitele základních škol, III. díl

Jedná se o příručku [13] pro učitele. Proto jsou jednotlivé pasáže o mnoho odbornější než u ostatních publikací. Příručka předpokládá hlubší znalosti matematiky a snaží se vysvětlit nejen principy řešení rovnic, ale i způsoby, jak lze tyto principy odvodit. Kromě rovnic a nerovnic se zabývá definováním a vysvětlením pojmů relace, zobrazení a hodně se věnuje i funkcím.

V této práci byla nejvíce využita kapitola, rozebírající, pro které rovnice se hodí použití ekvivalentních metod.

MATEMATIKA pro I. ročník gymnázií

Jde o učebnici [12] která předkládá matematiku složitější formou, než dnes používané učebnice. Zabývá se nejprve definováním základních pojmů v matematice (výrok, proměnná, množina aj.). Dále se věnuje teorii čísel a číselným oborům od přirozených, až po reálná čísla.

Vysvětluje také základy geometrie a geometrických zobrazení v rovině. V posledních třech kapitolách se zabývá algebraickými výrazy a řešením rovnic a nerovnic a jejich soustav.

K řešení rovnic s absolutní hodnotou autoři učebnice přistupují jinak, než dnes (nové učebnice prakticky vždy řeší tyto rovnice pomocí tabulky, která je přehledná, na čas ovšem náročnější), a to pomocí metody nulových bodů, kdy ovšem řada úvah není v řešených příkladech zapsána. V kapitole o rovnicích s absolutní hodnotou se vyskytuje několik typů příkladů a každý z nich je řešen jednou metodou. Autoři učebnice se tedy nesnaží poukázat na různé složitosti při užití různých metod.

Kvadratickým rovnicím se učebnice věnuje oproti ostatním učebnicím mnohem více. Vysvětluje řešení těchto rovnic pomocí diskriminantu. Viètovy vzorce řeší v samostatné kapitole. V této učebnici se také objevují některé typové příklady, obsažené právě v kapitolách o kvadratických rovnicích.

Samostatnou kapitolou se učebnice rovnicemi s neznámou pod odmocninou nezabývá. Několik řešených i neřešených rovnic s neznámou pod odmocninou se vyskytuje v kapitole 7.8.

ROVNICE A NEROVNICE pro I. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku

Tato publikace [9] řeší v rovnicích mnoho látky, která se dnes již vyučuje na VŠ. Z vysokoškolské látky se věnuje například diofantovským rovnicím, determinantům či lineárním optimalizačním úlohám.

Pro zpracování tématu práce jsou nejdůležitější kapitoly o rovnicích s absolutní hodnotou. Ty jsou řešeny vždy metodou nulových bodů, přičemž u složitějších rovnic s více absolutními hodnotami by zřejmě bylo lepší použít tabulku (jsou řešeny pomocí konjunkcí a disjunkcí různých výrokových forem).

Obecně je učebnice psána stejně, jako současná VŠ skripta (tedy vše je ve formě dokázaných vět a poznámek), ale i složité příklady jsou dostatečně podrobně vysvětlené.

V kapitole pojednávající o řešení kvadratických rovnic je i graficky popsán algoritmus, jak tyto rovnice řešit pomocí diskriminantu. Učebnice se ale vůbec nezabývá Viètovými vzorci a na řešení kvadratických rovnic neobsahuje žádný neobecný řešený příklad.

Rovnice s neznámou pod odmocninou jsou v samostatné kapitole 12, Řešení rovnic úpravou na kvadratickou rovnici (6, s. 102) Tato kapitola obsahuje pouze řešené příklady na tento typ rovnic. Oproti ostatním publikacím, které se této problematice věnují, chybí v této vysvětlení metod na nejjednodušších typových rovnicích s neznámou pod odmocninou.

Naopak se ale zabývá příklady, které jsou složitější, než v ostatních publikacích. Přínosem pro tuto práci jsou právě těžší rovnice, které se v jiných učebnicích nevyskytují.

ROVNICE A NEROVNOSTI

Nejstarší učebnice [1], která byla analyzována, je navíc psána slovensky. Kniha obsahuje vždy věty a důkazy jednotlivých tvrzení. Bohužel neobsahuje mnoho řešených příkladů.

Pokud se jedná o rovnice s absolutní hodnotou, tak na ně není příklad žádný. Publikace pouze popisuje metodu, jak absolutní hodnoty postupně odstranit (pomocí metody nulových bodů).

Zajímavá je ovšem kapitola o řešení kvadratických rovnic. Kde se používá místo naučeného vzorce pro diskriminant jeho odvození. Tato metoda se v žádné jiné zkoumané publikaci neobjevuje.

Rovnice s neznámou pod odmocninou se v této publikaci řeší zjištěním oboru platnosti výrazu a následným umocněním. Tady je patrný rozdíl od většiny publikací vydaných v poslední době, které volí nejprve umocnění a potom kontrolu řešení pomocí zkoušky.

Pro tuto práci je právě způsob řešení rovnic s neznámou pod odmocninou velmi důležitým přínosem.

Matematika. Průvodce učivem pro základní a střední školy

Učebnice [7] se snaží pojmout všechno učivo probírané na ZŠ i SŠ. Občas zabíhá dokonce do problematiky, která se dnes ani na většině SŠ nevyučuje (například řešení soustav rovnic pomocí determinantů a matic). Učivo popisuje pomocí vzorců a především na řešených příkladech (přesto, že jich není mnoho).

U rovnic s absolutní hodnotou ukazuje metodu nulových bodů na jediném, avšak velmi podrobně řešeném příkladu. Zbytek této kapitoly věnovali autoři nerovnicím s absolutní hodnotou.

Kvadratické rovnice jsou řešeny pouze pomocí diskriminantu. Řešení je opět předvedeno pouze na jediném příkladu.

Rovnicím s neznámou pod odmocninou se tato publikace nevěnuje vůbec.

Celkově je patrné, že jde spíše o přehled učiva pro někoho, kdo se ho již jednou naučil a při čtení této učebnice si ho pouze opakuje. Přínos pro tuto práci byl tedy velmi malý.

Odmaturuj z matematiky

Je obecný a stručný přehled učiva [2] většiny SŠ a gymnázií. I přes úsporné pojetí většiny kapitol, obsahuje poměrně značné množství řešených příkladů a často jsou tyto příklady řešeny více způsoby.

V kapitole, věnující se rovnicím s absolutní hodnotou je popsána jen metoda nulových bodů, která je postupně demonstrována na čtyřech příkladech. U těchto příkladů se postupně zvyšuje obtížnost. Je poněkud zarážející, že v jednom z příkladů autoři tuto metodu aplikují automaticky, aniž by se předtím pokusili tuto rovnici nějak upravit a tím si celkově řešení zjednodušit. Na druhou stranu je metoda popsána velmi přehledně a každý, kdo si příklady prohlédne by se ji měl snadno naučit používat.

Kapitola, která se zabývá řešením kvadratických rovnic, obsahuje jak metodu řešení pomocí diskriminantu, tak i pomocí Vièteových vzorců. Obsahuje pouze dvě řešené obecné kvadratické rovnice (ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$) a obě se řeší pomocí diskriminantu. Na tomto přehledu je zajímavé, že i ve chvíli, kdy lze rovnici velmi jednoduše vyřešit pomocí Viètových vzorců, je řešena pomocí diskriminantu. Viètovy vzorce používají autoři pouze na příklad, kde je úkolem sestavit kvadratickou rovnici, známe-li vztah mezi kořeny.

Oproti ostatním analyzovaným učebnicím tato věnuje více prostoru rovnicím s neznámou pod odmocninou. Hned na počátku uvádí ale čtenáře a řešitele trochu v omyl: „Rovnice s neznámou se řeší umocňováním, což není ekvivalentní úprava, proto je nutnou součástí řešení zkouška.“ (9, s. 54). Tato věta platí pouze, pokud neurčíme před umocněním obor platnosti rovnice. V případě, že ho určíme, je i umocnění ekvivalentní úpravou a není nezbytné provádět zkoušku, jak bylo zjištěno i z analýzy učebnice ROVNICE A NEROVNOSTI [1].

Na druhou stranu jsou u jiných příkladů uvedena dvě různá řešení, kde autoři ukazují, že zamyšlení se nad příkladem napomáhá jeho rychlejšímu a snazšímu vyřešení. A to i v případě, že se použije stejná metoda, jen se předtím rovnice nějak upraví. Tyto příklady, kde autoři podporují zamyšlení se nad příkladem, než se použije nacvičená metoda, jsou hlavním přínosem této publikace pro tuto práci.

MATEMATIKA V KOSTCE

Publikace [14] se snaží shrnout poznatky z matematiky, probírané na SŠ a gymnáziích. Neobsahuje příliš textových partií, autor se zřejmě snažil, aby učebnice připomínala zápisky z hodin.

Poznatky k této práci byly čerpány především z kapitoly 4 (Algebraické rovnice a nerovnice) a tady se jako první ze tří sledovaných oblastí probírají rovnice kvadratické. Autor ukazuje jejich řešení pomocí diskriminantu na třech příkladech (kdy má rovnice vždy jiný počet řešení, v závislosti na diskriminantu). Na konci kapitoly věnované kvadratickým rovnicím jsou popsány i vztahy mezi kořeny (Viètovy vzorce), ovšem dále se s těmito vztahy nepracuje a chybí i vysvětlení jejich použití.

Další kapitola se zabývá rovnicemi s neznámou pod odmocninou a stejně jako Odmaturuj z matematiky [9] klade důraz na zkoušku, jako nutnou součást řešení. Metoda je předvedena na čtyřech řešených modelových příkladech a po jejich vyřešení by řešitel neměl mít problém ji aplikovat i na jiné příklady.

Jako jediná z analyzovaných publikací, se až jako poslední z trojice rovnic kterými se zabývá tato práce, věnuje rovnicím s absolutní hodnotou. Tato kapitola obsahuje jeden vyřešený příklad, na kterém je demonstrována metoda nulových bodů (které jsou nazývány „kritickými body“).

ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKA

Tato publikace [4] je určena VŠ studentům na Pedf UK, obsahuje učivo na hranici SŠ a VŠ studia, spíše se však věnuje látce probírané na SŠ.

Kvadratickým rovnicím se věnuje kapitola 1.2 Kvadratické rovnice (11, s. 9). Je v ní pouze stručně vysvětleno, jak řešit kvadratické rovnice pomocí Viètových vzorců, na něž je v celé kapitole kladen důraz.

Rovnice s neznámou pod odmocninou, které se v této publikaci vyskytují jsou pro studenty 1. ročníku SŠ a gymnázií příliš složité (řeší metody odstraňování stupňovitých odmocnin)

Kapitola zaměřená na absolutní hodnotu nevybočuje ze středoškolského učiva. Autoři v ní ukazují na různých příkladech tři způsoby řešení (grafický, užití definice a užití geometrického významu absolutní hodnoty), na konci kapitoly je pak řada úloh na procvičení.

Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy

Sbírka [3] úloh, která je určená především pro žáky ZŠ. Obsahuje pouze neřešené úlohy o číslech, příklady na úpravu výrazů, hodně se věnuje slovním úlohám a geometrii v rovině a vlastnostem jednotlivých rovinných útvarů (trojúhelníku, čtyřúhelníku, kružnice aj.). Snaží se předkládat zajímavé matematické úlohy, najdeme v ní proto různé rébusy, či zajímavé slovní úlohy.

Sbírka obsahuje poměrně značné množství kvadratických rovnic. Z nichž některé typy příkladů byly v této práci použity.

Rovnice s absolutní hodnotou, které jsou v ní obsaženy jsou maximálně s jednou absolutní hodnotou a tedy spíše lehké. Je to zřejmě tím, že je sbírka určena pro žáky ZŠ.

Rovnice s neznámou pod odmocninou nejsou ze stejného důvodu zastoupeny vůbec.

Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU, 1. část

Publikace [8] obsahuje příklady na procvičení učiva ZŠ a navazuje na něj příklady o výrazech a jejich upravování. Dále se věnuje příkladům na zobrazení a základní útvary v rovině. V dalších kapitolách procvičuje funkce a rovnice (lineární i kvadratické), v závěrečných kapitolách obsahuje goniometrické a trigonometrické úlohy a výpočty povrchů a objemů těles.

Tato sbírka neobsahuje pouze neřešené příklady, ale na začátku každé kapitoly je shrnutí potřebných pojmů, vzorců, definic a také několik řešených příkladů. U rovnic s absolutní hodnotou ukazuje na jednom příkladu metodu nulových bodů a na druhém využití geometrické interpretace absolutní hodnoty. Příklady, které jsou na rovnice s absolutní hodnotou postupují od nejlehčích po těžší. I nejtěžší příklady ale obsahují maximálně dvě absolutní hodnoty. Zajímavé jsou úlohy, kde se řeší dané rovnice v daných intervalech, podobné příklady se v jiných sbírkách ani učebnicích nevyskytují.

V kapitole o kvadratických rovnicích je vysvětleno a na několika příkladech předvedeno použití diskriminantu pro řešení kvadratických rovnic. Krátká zmínka je i o Viètových vzorcích, jejich použití v praxi ale není předvedeno a na většinu příkladů tuto metodu použít ani nelze. Kvadratických rovnic k procvičení obsahuje sbírka opravdu hodně a někdy jsou to i opravdu obtížné kvadratické rovnice.

Rovnicím s neznámou pod odmocninou se tato sbírka nevěnuje vůbec.

Pro tuto práci byla přínosem především kapitola o kvadratických rovnicích, kde je velké množství různých typů příkladů.

Sbírka úloh z matematiky. ROVNICE A NEROVNICE I.

Sbírka [15] úloh obsahuje velké množství příkladů na mnohočleny, lomené výrazy, lineární i kvadratické rovnice, rovnice s neznámou pod odmocninou, s absolutní hodnotou i s parametrem. Obsahuje také řadu příkladů na soustavy rovnic o dvou či třech neznámých a v poslední kapitole se věnuje slovním úlohám. Vzhledem k tomu, že je to sbírka určená pro učitele, obsahuje každý příklad řešení, někdy i zdůvodnění nebo náznak postupu, jak lze daný příklad řešit.

Kvadratickým rovnicím se sbírka věnuje velmi podrobně. Začíná jednoduchými příklady na základní pojmy, na něž navazuje kapitola věnovaná řešení jednoduchých kvadratických rovnic (většinou v součinovém tvaru) V následující kapitole o kvadratických rovnicích je na vzorovém příkladu ukázána metoda úplného čtverce, určená k řešení některých typů kvadratických rovnic.

Dále sbírka obsahuje soubor složitějších kvadratických rovnic. Některé požaduje řešit pomocí Viètových vzorců, některé pomocí diskriminantu a u některých nechává na řešiteli, jakou metodu zvolí. Obsahuje i příklady, kde je omezený interval nebo číselný obor, v jakém se daná rovnice řeší. Hodně se zabývá i vztahy mezi kořeny rovnice a jejími koeficienty. Celkově obsahuje sbírka nejméně dvojnásobné množství příkladů věnujících se kvadratickým rovnicím.

Kapitola věnovaná rovnicím s neznámou pod odmocninou opět začíná od jednoduchých příkladů, kde se například určuje, zda jsou dva výrazy pod odmocninou ekvivalentní. U těchto rovnic autor podporuje úvahy o tom, kdy je a kdy není nutné provádět zkoušku. Příkladů na rovnice s neznámou pod odmocninou je opět v porovnání s jinými sbírkami několikanásobně více.

Další kapitola se věnuje rovnicím s absolutní hodnotou. Stejně jako v předchozích kapitolách je nejprve velké množství jednoduchých příkladů a poté následují složitější. Sbírka také jako jediná ze všech učebnic nebo sbírek, které byly analyzovány vyžaduje u některých příkladů metodu umocnění obou stran. Ke konci kapitoly už sbírka obsahuje i velmi náročné rovnice s absolutní hodnotou.

Při zpracování tématu práce byla prostudování této sbírky velmi důležité. Obsahuje totiž na všechny tři typy rovnic velké množství příkladů a také prakticky všechny typové úlohy, se kterými se lze setkat ve všech učebnicích či sbírkách ostatních.

MATEMATIKA – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy

Sbírka [11] úloh se věnuje všem oblastem matematiky, které se v současné době vyučují na SŠ. Nalezneme v ní příklady týkající se základních poznatků matematiky, příklady z oblasti rovnic a nerovnic a funkcí. Dále obsahuje kapitoly věnované posloupnostem a řadám, geometrii v rovině i prostoru, vektorovému počtu, analytické geometrii, komplexním číslům, kombinatorice a diferenciálnímu a integrálnímu počtu. V závěrečných kapitolách se vyskytují příklady písemných zkoušek z matematiky na některé VŠ.

V kapitole věnované kvadratickým rovnicím se objevuje několik jednodušších příkladů, převážná většina příkladů je ale obtížnější. Kromě příkladů, kde je výsledkem řešení kvadratické rovnice, jsou zastoupeny i příklady, kde je úkolem rozložit kvadratický trojčlen na součin nebo sestavit kvadratickou rovnici se zadanými kořeny.

Rovnic s neznámou pod odmocninou a rovnic s absolutní hodnotou sbírka obsahuje spíše méně, přesto jsou v několika příkladech zastoupeny jak příklady lehké, tak i velmi těžké.

Pro vypracování práce se ukázaly z této sbírky jako nejzajímavější typové rovnice s neznámou pod odmocninou. Sbírka obsahuje více typů těchto rovnic, než ostatní analyzované materiály.

2.1.1 Celkové shrnutí analýzy tištěných materiálů

Celkově z analýzy učebnic vyplývá, že čím novější učebnice, tím méně učiva obsahuje a zabývá se tématem méně do hloubky, zato však srozumitelněji popisuje jednotlivé postupy řešení. Nejstarší učebnice, kterým jsem se věnoval [1] a [13], věnují méně prostoru vysvětlování jednotlivých postupů na řešených příkladech a naopak více se věnují důkazům jednotlivých tvrzení a vzorců.

Naproti tomu nejnovější učebnice [5] a [6] nevěnují důkazům mnoho prostoru a také obsahují méně učiva. Vysvětlují ale různé typové příklady od nejjednodušších po složitější na řešených modelových příkladech. To je hlavní přínos této práci, kde se ale chci zaměřit více i na různé způsoby řešení jednoho příkladu a porovnání těchto způsobů.

Při srovnání sbírek byla jednoznačně nejobsáhlejší [15], na které je vidět, že je vytvořena jako pomůcka pro učitele, aby nemusel všechny příklady vytvářet sám a také, že se věnuje pouze tématu rovnic a nerovnic. Ostatní sbírky se věnují mnohem většímu objemu učiva a tedy je v nich na rovnice méně prostoru.

2.2 Elektronické zdroje dostupné z internetu

Analýza elektronických zdrojů je věnována čtyřem webovým stránkám. Podobných stránek je na internetu ještě celá řada, ale oproti těmto analyzovaným neobsahuje většina z nich žádné jiné poznatky.

e-MATEMATIKA.cz

Tato webová stránka [17] se zabývá prakticky celým spektrem matematiky. Obsahuje vysvětlení učiva ZŠ, SŠ, ale i VŠ. Kromě vysvětlení učiva obsahuje i rozsáhlou sbírku příkladů. Bohužel jsou zdarma dostupné jen ukázky některých příkladů, které sbírka obsahuje.

Stránka obsahuje také písemné práce pro jednotlivé obory matematiky, které jsou dostupné zdarma, chybí pouze podrobné řešení.

Pro zpracování tématu práce jsou podstatné právě písemné práce a testy, kde se objevují i testy týkající se řešení rovnic s absolutní hodnotou. Při srovnání s tištěnými materiály jsou tyto testy spíše náročnější.

Matematika polopatě

Tato stránka [18] se věnuje matematice všech úrovní. Obsahuje řadu článků, které jsou zaměřené na vysvětlení učiva co nejjednodušším způsobem. Na stránce lze nalézt i řešené příklady jednotlivých oblastí matematiky, zřejmě nejzásadnější částí je ale matematické fórum.

Matematické fórum funguje na principu pomoci zdatnějších matematiků těm méně zdatným. Po registraci tam uživatel může vložit příspěvek s dotazem na řešení nebo část řešení nějakého příkladu, který nemůže vyřešit a naopak sám může pomoci s řešením příkladů jiným uživatelům.

Při zpracování této práce byly využité poznatky z oblasti kvadratických rovnic, které jsou na této stránce stručně a přehledně vysvětleny.

Matematika pro každého

Stránka [19], která se zabývá především SŠ učivem. Zabývá se geometrií v rovině i prostoru, rovnicemi a nerovnicemi, funkcemi, komplexními čísly, analytickou geometrií a mnoha dalšími okruhy matematiky.

Nejzajímavější součástí této stránky je kalkulačka online. Lze na ní počítat kořeny kvadratických rovnic, ale i determinanty, umí převádět čísla mezi různými soustavami nebo převádět komplexní číslo z goniometrického tvaru na algebraický a naopak.

Přínosem pro tuto práci je především soubor řešených příkladů na rovnice s absolutní hodnotou, s neznámou pod odmocninou a rovnice kvadratické. Řešení každého příkladu je podrobně popsané, srozumitelné a velmi snadno pochopitelné.

Výuka rovnic a nerovnic

Webová stránka [16], která je věnována pouze řešení rovnic a nerovnic. Obsahuje postupy pro řešení lineárních, kvadratických a iracionálních rovnic a nerovnic, věnuje se i rovnicím s absolutní hodnotou, soustavám rovnic a rovnicím vyšších řádů.

Autor stránky se vždy snaží přehledně na příkladech vysvětlit postup řešení dané rovnice nebo nerovnice. Na stránce je také řada cvičných úloh s nápovědou a čtyři testy na rovnice a nerovnice.

Pro zpracování této práce byla tato stránka přínosná především svým pojetím výuky rovnic a nerovnic, kdy se autor snaží nabídnout více alternativ a ukázat, kdy má smysl kterou metodu použít.

2.2.1 Celkové shrnutí analýzy elektronických zdrojů dostupných z internetu

Celkově je po analýze těchto zdrojů patrné, že webové stránky nemají na rozdíl od tištěných materiálů nějaká omezení co do množství textu. Proto je řada z nich věnována prakticky celému spektru matematiky od nejjednodušších matematických příkladů a pojmů z prvních ročníků ZŠ, až po složité matematické věty a důkazy na VŠ.

Oproti tištěným materiálům obsahují ale webové stránky obecně více chyb a obsažené učivo je méně propojené. Na mnoha stránkách je matematika představována pomocí jednotlivých článků psaných různými autory a ty některé oblasti nepostihnou nebo nevysvětlí dostatečně.

Kvadratickým rovnicím, rovnicím s absolutní hodnotou a s neznámou pod odmocninou se ale většina stránek věnuje dostatečně a s množstvím řešených příkladů. Bohužel většinou řešených pouze jedním způsobem a ne vždy tím nejjednodušším a nejrychlejším.

3 Teoretická část

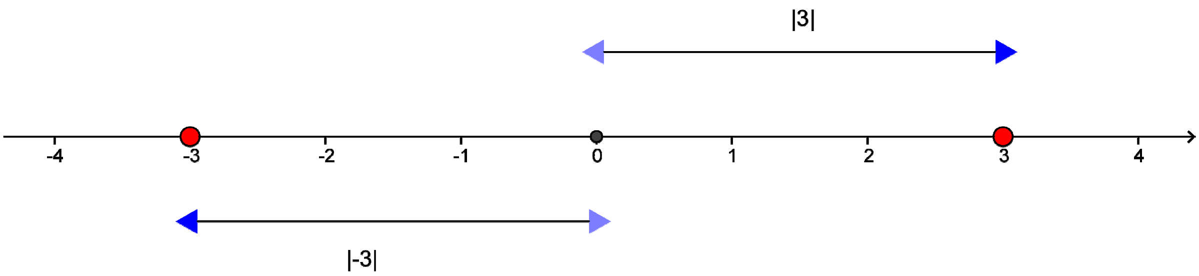
Tato kapitola je věnována základním poznatkům, jež jsou předpokladem pro pochopení a zvládnutí celé vysvětlované problematiky řešení daných typů rovnic. Obsahuje pouze vybrané pojmy, vztahy a definice, které se vztahují k obsahu práce.

3.1 Absolutní hodnota

Existuje více ekvivalentních definic absolutní hodnoty. Asi nejznámější a nejužívanější je tato:

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall a \geq 0 : |a| = a \\ \forall a < 0 : |a| = -a\end{array}}$$

Druhá definice pracuje s geometrickým pojetím absolutní hodnoty. Říká, že *absolutní hodnota je vzdálenost obrazu čísla zobrazeného na ose x*. Pro ilustraci je tato definice doplněna obrázkem. Je vidět, že jak číslo 3, tak číslo -3 mají od počátku stejnou vzdálenost 3. Jak platí i podle uvedené definice.



Zároveň platí pro všechna *a*, *b* z oboru reálných čísel několik vzorců:

$$\boxed{\begin{array}{l}|a| \geq 0 \\ |a| = |-a| \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ |a - b| = |b - a|\end{array}}$$

Práci s absolutní hodnotou a její odstraňování si ukážeme na příkladu.

Příklad

$$\left|1-5+\left|2\cdot 8-17\right|\right|-\left|5-9\cdot 2+2\cdot\left|5+2\right|\right|=?$$

Řešení

$$\left|1-5+\left|-1\right|\right|-\left|5-9\cdot 2+2\cdot\left|7\right|\right|=?$$

Absolutní hodnoty odstraňujeme stejně, jako závorky. Tedy nejdříve ty uvnitř a potom ty venku. Vždy tedy nejdříve spočteme číslo uvnitř absolutní hodnoty.

$$\left|-1\right|=1 \text{ a } \left|7\right|=7$$

$$\left|1-5+1\right|-\left|5-9\cdot 2+2\cdot 7\right|=?$$

$$\left|-3\right|-\left|1\right|=?$$

Nyní můžeme vnitřní absolutní hodnoty odstranit a poté spočítat výrazy uvnitř absolutních hodnot.

$$\left|-3\right|=3 \text{ a } \left|1\right|=1$$

$$3-1=2$$

Nakonec stejným způsobem, jako na začátku odstraníme absolutní hodnoty a následně sečteme.

3.2 Druhá odmocnina

V oboru reálných čísel je definována pouze pro nezáporná reálná čísla. Je to takové číslo *y*, pro které platí: $x^2 = y$. Druhou odmocninu zapisujeme $\sqrt{y} = x$.

Stejně jako pro absolutní hodnotu, platí pro práci s odmocninou několik vzorců. Uvádím jejich stručný přehled:

$$\forall a, b \in R_0^+$$
$$\sqrt{a^2} = |a|$$
$$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$
$$a\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a^2\cdot b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0$$

Zápis R_0^+ označuje množinu nezáporných reálných čísel.

Práci s některými vzorci procvičíme na dvou jednoduchých příkladech.

Příklad

Převeďte na tvar $n\sqrt{m}$ kde n i m jsou nezáporná celá čísla:

a) $\sqrt{20}$

Řešení

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5}$

Nejprve si číslo pod odmocninou upravíme jako součin prvočísel.

$\sqrt{2^2 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt{5}$

Nakonec ta prvočísla, jež jsou pod odmocninou umocněna na sudou mocninu vytkneme před odmocninu podle vzorce $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$.

b) $\sqrt{21} \cdot \sqrt{24}$

Řešení

$\sqrt{21} = \sqrt{3 \cdot 7}$

$\sqrt{24} = \sqrt{3 \cdot 8} = \sqrt{3 \cdot 2^3}$

Nejdříve si odmocniny upravíme jako v předchozím příkladu.

$\sqrt{3 \cdot 7} \cdot \sqrt{3 \cdot 2^3} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2^3}$

Poté odmocniny upravíme podle vzorce: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2^3} = 3 \cdot 2\sqrt{7 \cdot 2} = 6\sqrt{14}$

Pak již jen vytkneme před odmocninu, stejně jako v předchozím příkladu.

3.3 Úpravy při řešení rovnic

Řešení rovnice spočívá v nalezení všech čísel, která je možné dosadit za neznámou tak, aby platila rovnost. Každé takové číslo je tedy řešením rovnice, (jejím kořenem). Při hledání kořenů rovnice obvykle postupujeme tak, že místo dané rovnice píšeme nové tak, aby množina všech kořenů byla totožná. Úpravy, které toto splňují, se nazývají ekvivalentní.

Mezi ekvivalentní úpravy patří:

- přičtení stejného výrazu obsahujícího neznámou (definovaného pro všechny hodnoty neznámé z množiny čísel, v níž rovnici řešíme) k oběma stranám rovnice (1, s. 22)
- vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem
- ekvivalentní úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice (1, s. 18)

Jsou však i případy, kdy může být výhodné převést rovnici na jinou, která obsahuje kromě kořenů původní rovnice i nějaké další. Taková úprava se nazývá úpravou důsledkovou. Pro řešení rovnic, které tato práce obsahuje je nutno znát jedinou důsledkovou úpravu:

- umocnění obou stran rovnice na druhou

3.4 Definiční obor výrazu

S řešením rovnic úzce souvisí i pojem definiční obor jednotlivých výrazů, které jsou v rovnici obsaženy. *Definiční obor je množina čísel, pro která má daný výraz smysl* (dělení nulou, druhá odmocnina ze záporného čísla).

4 Řešení rovnic

V této kapitole se budeme věnovat postupům, jakými se řeší kvadratické rovnice, rovnice s absolutní hodnotou a rovnice s neznámou pod odmocninou. Každá podkapitola bude obsahovat jak vysvětlení důležitých pojmů, tak i metody, jakými se daný typ rovnice řeší a především množství řešených i cvičných příkladů.

4.1 Kvadratické rovnice

Nejprve se zaměříme na kvadratické rovnice a to především proto, že jejich řešení budeme využívat i v obou dalších typech rovnic.

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R, a \neq 0$, se nazývá kvadratická rovnice (s neznámou *x*); ax^2 je její kvadratický člen, bx její lineární člen, c její absolutní člen (1, s. 118).

4.1.1 Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Je taková rovnice, která je ve tvaru $ax^2 + bx = 0$ nebo taková, která lze na tento tvar převést. Kvadratickou rovnici tohoto typu řešíme vytknutím ax, kdy rovnici převedeme na tvar $ax \cdot (x + \frac{b}{a}) = 0$, kde $x_1 = 0$ je jedním kořenem a druhým je $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Řešení jedné takové rovnice si ukážeme na příkladu.

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$5x^2 + 6x = 0$

Řešení

$5x(x + \frac{6}{5}) = 0$ — Vytkneme $5x$.

$x_1 = 0$

$x_2 = -\frac{6}{5}$ — A stanovíme výsledky.

.

4.1.2 Ryze kvadratická rovnice

Je kvadratická rovnice, která je ve tvaru $ax^2 + c = 0$ nebo kterou lze na tento tvar převést. Tento typ rovnice řešíme převedením na tvar $x^2 = \frac{-c}{a}$ a následným odmocněním obou stran (Pozor na to, že $\sqrt{x^2} = |x|$!) v případě, že $\frac{-c}{a} \geq 0$. V opačném případě rovnice nemá řešení.

Opět si uvedeme jeden řešený příklad na tento typ kvadratické rovnice.

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$4x^2 - 36 = 0$

Řešení

$x^2 = \frac{36}{4}$	Převedeme absolutní člen na levou stranu a vydělíme 4.
$x^2 = 9$	
$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$	Odmocníme obě strany rovnice.
$\|x\| = 3$	
$x_1 = -3$	Spočítáme oba kořeny.
$x_2 = 3$	

.

4.1.3 Obecná kvadratická rovnice

Obecná kvadratická rovnice má tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in R$ a zároveň platí $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Obecnou kvadratickou rovnici lze řešit dvěma způsoby. Pomocí diskriminantu, což je metoda univerzální a lze ji tedy použít vždy a pomocí Viètových vzorců, které vždy použít nelze, ale většinou je jejich užití rychlejší.

Řešení pomocí diskriminantu

Pokud máme rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, pak pro výpočet diskriminantu D platí $D = b^2 - 4ac$, kde a, b, c jsou koeficienty z obecné kvadratické rovnice. Existují dvě možnosti. Buď $D < 0$, pak kvadratická rovnice nemá v oboru Reálných čísel žádné řešení.

Nebo $D \geq 0$, pak má rovnice dvě řešení (pro $D = 0$ má jeden dvojnásobný kořen). Pro kořeny této rovnice platí: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Opět si předvedeme na příkladu.

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$x^2 - 5x + 4 = 0$

Řešení

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$

$D = 25 - 16 = 9$

Spočítáme diskriminant.

$x_{1,2} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2}$

Vyjádříme podle vzorce oba kořeny.

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$

$x_1 = \dfrac{8}{2} = 4$

Vypočítáme oba kořeny.

$x_2 = \dfrac{2}{2} = 1$

.

Řešení pomocí Viètových vzorců

Máme-li rovnici upravenou na tvar $x^2 + bx + c = 0$, pak pro kořeny rovnice (pokud existují) platí: $x_1 + x_2 = -b$ a $x_1 \cdot x_2 = c$

Tyto vztahy se nazývají Viètovými vzorci.

Práci s těmito vzorci si předvedeme pro porovnání s předchozí metodou na stejném příkladu.

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$x^2 - 5x + 4 = 0$

Řešení

$5 = x_1 + x_2$

$4 = x_1 x_2$

Hledáme tedy taková dvě čísla x_1, x_2, která když sečteme, získáme číslo 5 a když je vynásobíme, získáme číslo 4.

$5 = 1 + 4$

$4 = 1 \cdot 4$

Není těžké uhádnout, že jde o čísla 1 a 4.

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$

Máme tedy kořeny.

4.2 Řešené příklady na kvadratické rovnice

Nyní si předvedeme, jak využít diskriminantu a Viètových vzorců pro řešení jednotlivých typů příkladů. Pokud to bude možné, budeme se snažit používat Viètovy vzorce, jejichž použití je rychlejší.

Příklad 1

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$x^2 + 9x - 10 = 0$

Řešení

Pomocí Viètových vzorců

$-9 = x_1 + x_2$

$-10 = x_1 x_2$

Je vidět, že taková čísla jsou -10 a 1.

$-9 = -10 + 1$

$-10 = (-10) \cdot 1$

$x_1 = -10$

$x_2 = 1$

Nakonec jen zapíšeme výsledky.

Příklad 2

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$2x^2 + 12x + 18 = 0$

Řešení

Pomocí Viètových vzorců

$x^2 + 6x + 9 = 0$

Nejprve vydělíme rovnici číslem 2, abychom před kvadratickým členem měli koeficient 1.

$-6 = (-3) + (-3)$

$9 = (-3) \cdot (-3)$

$x_1 = x_2 = -3$

Opět snadno uhodneme oba kořeny (tentokrát jde o jeden dvojnásobný kořen).

Příklad 3

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

Řešení

Pomocí Viètových vzorců

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1$$

Aby nedošlo k mylné interpretaci toho, kdy lze použít Viètovy vzorce, je uveden i příklad řešení kvadratické rovnice, kde $a \neq 1$, aby bylo vidět, že i tyto příklady lze řešit Viètovými vzorci. Ovšem pouze v případech, kdy jsme schopni uhodnout kořeny. Nejprve je ale potřeba vždy vydělit rovnici *a.* V tomto případě $a = 2$.

(Tento postup je uveden jen proto, aby bylo zřejmé, že je možný. Nadále nebude pro podobné typy používán, neboť je k němu nutné rovnici upravovat a často to nepřinese žádné zjednodušení.)

Příklad 4

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$6x^2 + x - 2 = 0$

Řešení

Pomocí diskriminantu

$$D = (1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)$$

$$D = 1 + 48 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{6 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

$$x_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$$

Příklad 5

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$x^2 + 4x + 2 = 0$

Řešení

Pomocí diskriminantu

$$2 = x_1 \cdot x_2$$

$$-4 = x_1 + x_2$$

Vzhledem k tomu, že pomocí Viètových vzorců nelze snadno uhodnout kořeny, je nutné použít výpočet pomocí determinantu.

$$D = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$D = 16 - 8 = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Provedeme částečné odmocnění a zlomek zjednodušíme (z čitatele se vytkne číslo 2 a zkrátí se s jmenovatelem).

$$x_1 = -2 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{2}$$

Příklad 6

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$x^2 + x + 5 = 0$

Řešení

Pomocí diskriminantu

$D = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$

$D = 1 - 20 = -19$

Pokud je $D < 0$, rovnice nemá řešení.

$x \in \phi$

Shrnutí

Z uvedených příkladů plyne, že použití Viètových vzorců je v případě, že jsme schopni uhodnout kořeny, nejrychlejší metodou. Obecně se doporučuje tuto metodu zkoušet jen v případě, že $a = 1$, ale mohou nastat i případy, kdy $a \neq 1$ a přesto lze rovnici vyřešit pomocí těchto vzorců.

Také je z uvedených příkladů patrné, že výsledky kvadratických rovnic nemusejí ani při celočíselných koeficientech *a, b, c* dávat výsledky $x_1, x_2 \in Q$.

Příklad 7

Nalezněte všechny kvadratické rovnice s kořeny $x_1 = -1, x_2 = 2$:

Řešení

$a(x - (-1))(x - 2) = 0$

$a(x + 1)(x - 2) = 0, a \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Každou kvadratickou rovnici, která má dva kořeny, lze zapsat ve tvaru: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, stačí tedy takto kořeny zapsat a pak pokud platí $a \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, máme všechny kvadratické rovnice s danými kořeny. $a \neq 0$, protože v opačném případě by se nejednalo o kvadratickou rovnici.

Příklad 8

Pro jaké e má rovnice $x^2 + ex - 6 = 0$ kořen $x_1 = -1$?

Řešení

Použijeme Viètovy vzorce, nejprve pro zjištění druhého kořenu.

$$-6 = x_1 x_2$$
$$-6 = -x_2$$
$$x_2 = 6$$

Nyní použijeme ještě jednou tyto vzorce, pro zjištění koeficientu e.

$$-e = x_1 + x_2$$
$$-e = -1 + 6$$
$$e = -5$$

Příklad 9

Pro jaké f nemá rovnice $2x^2 + fx + 1 = 0$ řešení?

Řešení

Použijeme diskriminant, jelikož víme, že pokud $D < 0$, pak rovnice nemá řešení.

$$D = f^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$
$$D = f^2 - 8$$
$$D = \left(f - \sqrt{8}\right) \cdot \left(f + \sqrt{8}\right)$$
$$D = \left(f - 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(f + 2\sqrt{2}\right)$$
$$D < 0$$

Pokud chceme, aby po násobení dvou výrazů byl výsledek záporný, musí být jeden záporný a druhý kladný. Projdeme tedy obě možnosti a výsledkem bude sjednocení intervalů

a) $\left(\left(f - 2\sqrt{2}\right) < 0\right) \wedge \left(0 < \left(f + 2\sqrt{2}\right)\right)$
$f \in \left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$

$-1 \in \left(-\infty, 1\right\rangle$

b) $\left(\left(f + 2\sqrt{2}\right) < 0\right) \wedge \left(0 < \left(f - 2\sqrt{2}\right)\right)$
$f \in \phi$

$$f \in \left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$$

Shrnutí

Uvedené příklady ukazují, jak se dají využít Viètovy vzorce i diskriminant jinak než při řešení kvadratické rovnice. Diskriminant se používá, když chceme zajistit určitý počet řešení kvadratické rovnice. Naproti tomu Viètovy vzorce se používají spíše pro vytváření příkladů obsahujících kvadratické rovnice.

4.3 Příklady na procvičení

4-1

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $x^2 = 4$
b) $x^2 + 7 = 0$
c) $3x^2 - 4 = 0$
d) $x^2 - 3x = 0$
e) $4x^2 + x = 0$
f) $-2x^2 - \sqrt{5}x = 0$
g) $(x-2)^2 = 0$
h) $-\left(3x + \dfrac{2}{11}\right)^2 = \sqrt{2}$
i) $(x+3)^2 = 16$

4-2

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$
b) $3x^2 - 21x + 36 = 0$
c) $2x^2 + x + 8 = 0$
d) $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$
e) $x^2 - 3x + 1 = 0$
f) $4x^2 - 4x - 3 = 0$
g) $-2x^2 + x + 1 = 0$
h) $x^2 + \left(\sqrt{3} - 6\right)x - 3\sqrt{3} - \dfrac{5}{2} = 0$

4-3

Určete:

a) Pro jaké *f* má rovnice $x^2 + 3x + f = 0$ kořen $x_1 = 5$?
b) Pro jaké *g* má rovnice $x^2 - (g-5)x + 12 = 0$ kořen $x_1 = 3$?
c) Pro jaké *h* má rovnice $x^2 + (h-1)x - h = 0$ kořen $x_2 = -4$?

Výsledky:

4-1 a) $x_1 = -2,\ x_2 = 2$ b) Nemá řešení c) $x_1 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $x_1 = 0,\ x_2 = 3$
e) $x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{1}{4}$ f) $x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ g) $x = 2$ h) $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \dfrac{13-\sqrt{3}}{2}$
i) $x_1 = -7,\ x_2 = 1$
4-2 a) $x_1 = -5,\ x_2 = 1$ b) $x_1 = 3,\ x_2 = 4$ c) Nemá řešení d) $x = 2$
e) $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ f) $x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = \dfrac{3}{2}$ g) $x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = 1$ h) $x = 2 - \sqrt{3}$
4-3 a) $f = -10$ b) $f = 12$ c) $h = 4$

5 Rovnice s absolutní hodnotou

Rovnice s absolutní hodnotou, lze řešit třemi způsoby: Metodou nulových bodů, využitím geometrické představy a umocněním.

5.1 Metoda nulových bodů

Při řešení touto metodou se postupuje tak, že se naleznou kořeny všech výrazů v absolutní hodnotě, které se v rovnici vyskytují. Tyto kořeny se nazývají nulové body. Poté rozdělíme interval, ve kterém jsme rovnici řešili původně, na několik vzájemně disjunktních intervalů, ohraničených získanými nulovými body a původními hranicemi intervalů tak, že při sjednocení všech intervalů dostaneme interval původní. Hranice (nulové body) vždy budou patřit do jednoho ze dvou intervalů, který určují.

Následně jen vyřešíme pro každý interval zvlášť a to tak, že odstraníme absolutní hodnoty (pokud jsme nulové body určili správně, můžeme vždy jednoznačně určit, zda je výraz v absolutní hodnotě kladný či záporný a díky tomu odstranit absolutní hodnotu). Na závěr vždy zkontrolujeme, zda výsledek, který jsme dostali, skutečně patří do intervalu, v němž jsme ho řešili. Množina všech takových výsledků je pak řešením rovnice.

Ukážeme si tuto metodu zvlášť na jednoduchém příkladu.

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$|1-x| = 2$

Řešení

$1-x=0$

$x=1$

Nalezneme všechny nulové body (kdy jsou výrazy v absolutních hodnotách rovny 0).

$(-\infty,1\rangle, (1,+\infty)$

Získali jsme tedy dva intervaly, ve kterých budeme rovnici řešit.

a) $x \in (-\infty,1\rangle$

$1-x=2$

$x=-1$

Jelikož je v tomto intervalu výraz uvnitř absolutní hodnoty kladný, pouze ji odstraníme a vyřešíme získanou lineární rovnici.

$-1 \in (-\infty,1\rangle$

Nakonec zkontrolujeme, zda výsledek patří do intervalu, ve kterém řešíme.

b) $x \in (1, +\infty)$

$-1 + x = 2$

$x = 3$

$3 \in (1, +\infty)$

Pro druhý interval vyřešíme rovnici analogicky, tentokrát je výraz v absolutní hodnotě záporný a proto změníme znaménko a vyřešíme lineární rovnici. Opět je nutné zkontrolovat, zda výsledek patří do intervalu.

$x_1 = -1$

$x_2 = 3$

Na závěr jen zapíšeme všechna řešení dané rovnice.

5.2 Využití geometrické představy

Při použití této metody se využívá toho, že vztah $|a - b| = c$ znamená, že obraz čísla *a* je na číselné ose vzdálen od obrazu čísla *b* vzdálenost *c*.

Tento způsob řešení rovnic s absolutní hodnotou se hodí jen pro rovnice ve tvaru $|a + bx| = c$, kde $a, b, c \in R$. Nejlépe je to vidět na příkladu (pro srovnání použijeme stejný jako u předchozí metody).

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$|1 - x| = 2$

Řešení

$|1 - x| = 2$

Víme tedy, že obraz čísla *x* je od obrazu 1 vzdáleno 2.

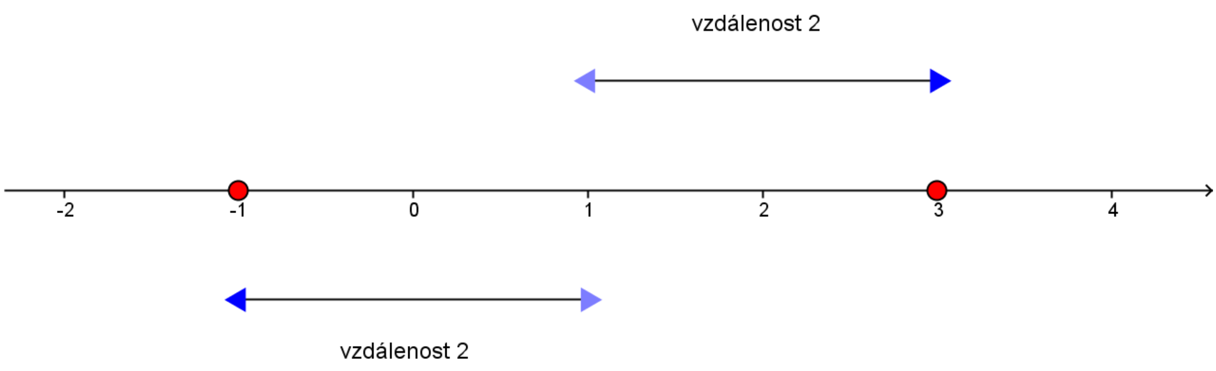
$x_1 = -1$

$x_2 = 3$

Taková čísla jsou dvě, jedno napravo od 1 a druhé nalevo.

.

Pro lepší představu si to ukážeme ještě na obrázku:



5.3 Metoda umocnění rovnice

Tato metoda využívá především toho, že absolutní hodnota z libovolného výrazu je vždy nezáporná. V případě, že jsou obě strany nezáporné, můžeme je umocnit na druhou a poté řešit jako kvadratickou rovnici.

Nejlépe lze tato úprava použít v rovnicích, které je možné převést na tvar $|ax+b| = |cx+d|$, kde $a,b,c,d \in R$ a to především, pokud platí $a = c$, jelikož se odečte kvadratický člen a zbude lineární rovnice o jedné neznámé. Pro takové rovnice je tento způsob výpočtu asi nejrychlejší. Je možné ji rovněž použít pro jiné typy rovnic s absolutní hodnotou, tam je ale rychlost výpočtu srovnatelná s metodou nulových bodů.

Ještě jednou si ukážeme, jak vyřešit rovnici $|1-x| = 2$, tentokrát za použití umocnění rovnice.

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$|1-x| = 2$

Řešení

Zkontrolujeme, zda jsou obě strany rovnice nenulové (pokud ne, nelze tato metoda použít!) a pokud ano, umocníme je na druhou.

$$|1-x|^2 = 2^2$$

Roznásobíme a vyřešíme kvadratickou rovnici.

$$1-2x+x^2 = 4$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x-3)\cdot(x+1) = 0$$
$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 3$$

5.4 Řešené rovnice s absolutní hodnotou

V této kapitole si ukážeme, jak řešit rovnice pomocí tří popsaných metod. Srovnáme si také, která metoda se na který typ příkladu hodí více a která méně. Metodou, která bude na řešení daného příkladu zcela nevhodná, se nebudeme zabývat vůbec. V závěru kapitoly bude ještě několik příkladů na procvičení řešení rovnic těmito metodami.

Příklad 1

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$|5x-2| = 3$

Řešení

1) Metoda nulových bodů

$5x - 2 = 0$

$x = \frac{2}{5}$

Zjistíme intervaly.

a) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right\rangle$

$-5x + 2 = 3$

$x_1 = -\frac{1}{5} \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right\rangle$

Rozdělíme na dva případy a oba vyřešíme. (Nakonec musíme vždy zkontrolovat, zda výsledek patří do intervalu!)

b) $x \in \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$

$5x - 2 = 3$

$5x = 5$

$x_2 = 1 \in \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$

2) Využití geometrické představy

$|5x-2| = 3$

$5\left|x - \frac{2}{5}\right| = 3$

$\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{3}{5}$

Nejprve musíme rovnici upravit, abychom měli vzdálenost bodu od *x*, nikoliv od *5x*.

$x_1 = -\frac{1}{5}$

$x_2 = 1$

Taková *x* jsou dvě.

3) Metoda umocnění

$$(5x-2)^2 = 3^2$$

Umocníme.

$$25x^2 - 20x + 4 = 9$$

$$25x^2 - 20x - 5 = 0$$

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

Upravíme si kvadratickou rovnici na obecný tvar a zkrátíme *5*

$$D = (-4)^2 - 4\cdot 5\cdot(-1)$$

$$D = 16 - 4\cdot 5\cdot(-1)$$

$$D = 36$$

Vypočítáme diskriminant

$$x_{1,2} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 5}$$

$$x_{1,2} = \frac{4\pm 6}{10} = \frac{2\pm 3}{5}$$

$$x_1 = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = 1$$

Nakonec vypočteme kořeny.

Shrnutí

Je dobře vidět, že na řešení rovnic, které mají tvar $|a+bx| = c$, se hodí nejvíce využití geometrické představy. Obě zbylé metody zaberou oproti této metodě mnohem více času.

Příklad 2

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$|x+3| = |3-x|$

Řešení

1) Metoda nulových bodů

$x+3=0$

$x' = -3$

$x-3=0$

$x'' = 3$

Nejprve zjistíme oba (podle počtu absolutních hodnot) nulové body.

Rozdělíme na tři případy.

a) $x \in (-\infty, -3\rangle$

$-x-3 = 3-x$

$3 \neq -3$

V tomto intervalu nemá rovnice řešení.

b) $x \in (-3, 3\rangle$

$x+3 = 3-x$

$2x = 0$

$x = 0 \in (-3, 3\rangle$

$x = 0$ je v tomto intervalu řešením rovnice, neboť výsledek patří do intervalu, ve kterém řešíme.

c) $x \in (3, +\infty)$

$x+3 = x-3$

$3 \neq -3$

$x = 0$

Jediný výsledek je tedy $x = 0$.

2) Metoda umocnění

$|x+3| = |3-x|$

$(x+3)^2 = (3-x)^2$

$x^2 + 6x + 9 = 9 - 6x + x^2$

$12x = 0$

$x = 0$

Umocníme obě strany rovnice.

Následně vyřešíme lineární rovnici, kterou jsme získali.

Shrnutí

Na rovnice, které se dají upravit na tvar $|ax+b| = |cx+d|$, kde $a = c$ je nejvhodnější použít metodu umocnění. Je velmi vhodná především proto, že neumožňuje zařadit kořen, který nepatří do intervalu (pokud se před umocněním zkontroluje, zda jsou obě strany nezáporné). Využití geometrické představy je pro složitější rovnice nepoužitelné, proto jsme se jím u tohoto příkladu nezabývali a ani u dalších se této metodě již věnovat nebudeme.

Příklad 3

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$|3x+2| = |6-x|$

Řešení

1) Metoda nulových bodů

$3x+2=0$

$x' = -\dfrac{2}{3}$

$6-x=0$

$x'' = 6$

a) $x \in \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right\rangle$

$-3x-2 = 6-x$

$-2x = 8$

$x_1 = -4 \in \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right\rangle$

b) $\left(-\dfrac{2}{3}, 6\right\rangle$

$3x+2 = 6-x$

$4x = 4$

$x_2 = 1 \in \left(-\dfrac{2}{3}, 6\right\rangle$

c) $x \in (6, +\infty)$

$3x+2 = -6+x$

$2x = -8$

$x = -4 \notin (6, +\infty)$

$x_1 = -4$

$x_2 = 1$

2) Metoda umocnění

$(3x+2)^2 = (6-x)^2$

$9x^2 + 12x + 4 = x^2 - 12x + 36$

$8x^2 + 24x - 32 = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x+4)\cdot(x-1) = 0$

$x_1 = -4$

$x_2 = 1$

Shrnutí

Na řešení rovnic, které lze upravit na tvar $|ax+b| = |cx+d|$ a neplatí u nich $a=c$, nelze jednoznačně říci, která metoda je vhodnější. Je to především proto, že je-li nutné počítat kořeny kvadratické rovnice pomocí diskriminantu, doba řešení se prodlužuje. Pokud stačí použít Viètovy vzorce, je umocnění bezpochyby jednodušší a rychlejší metodou.

Příklad 4

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$|x+5| = 2x-3$

Řešení

Metoda nulových bodů

$x+5=0$

$x' = -5$

$2x-3=0$

$x'' = \frac{3}{2}$

I když není na jedné straně rovnice výraz v absolutní hodnotě, stejně vyšetříme nulový bod tohoto výrazu.

a) $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2} \right\rangle$

$x \in \phi$

Interval, ve kterém je levá strana nezáporná a pravá strana záporná určitě neobsahuje kořen a můžeme ho proto vyloučit.

b) $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$

Počítáme tedy jen pro interval, kde má rovnice smysl (levá i pravá strana jsou nezáporné).

$x+5 = 2x-3$

$8 = x$

$x = 8 \in \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$

Příklad 5

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$|3x-5| = x+1$

Řešení

Metoda nulových bodů

$3x-5=0$

$x' = \frac{5}{3}$

$x+1=0$

$x'' = -1$

a) $x \in (-\infty, -1)$

$x \in \phi$

b) $x \in \left\langle -1, \frac{5}{3} \right)$

$5-3x = x+1$

$4 = 4x$

$x_1 = 1 \in \left\langle -1, \frac{5}{3} \right)$

c) $x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right)$

$3x-5 = x+1$

$2x = 6$

$x_2 = 3 \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right)$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

Shrnutí

Pro příklady, které jsou typově stejné jako příklady 4 a 5 se hodí pouze metoda nulových bodů. Kdybychom chtěli použít umocnění, šlo by o neekvivalentní úpravu a museli bychom buď provádět zkoušku, nebo si nejprve určit, za jakých podmínek lze obě strany umocnit. I to je samozřejmě možné, ale časově o mnoho náročnější.

Příklad 6

Řešte rovnici s neznámou

$x \in R : \left| |x| + 3 \right| = |x - 2|$

Řešení

1) Metoda nulových bodů

$|x| + 3 = |x - 2|$

Nejprve si povšimněme, že na levé straně lze vnější absolutní hodnotu odstranit, jelikož je výraz uvnitř vždy kladný.

$x' = 0$

$x - 2 = 0$

$x'' = 2$

Poté určíme nulové body

Nyní rozdělíme na případy podle intervalů a pro každý zjistíme výsledky.

a) $x \in (-\infty, 0\rangle$

$|x| + 3 = |x - 2|$

$-x + 3 = -x + 2$

$3 \neq 2 \Rightarrow x \in \phi$

b) $x \in (0, 2\rangle$

$|x + 3| = -x + 2$

$x + 3 = -x + 2$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2} \notin (0, 2\rangle$

c) $x \in (2, +\infty)$

$|x + 3| = x - 2$

$x + 3 = x - 2$

$3 \neq -2 \Rightarrow x \in \phi$

$x \in \phi$

2) Metoda Umocnění

$$||x|+3| = |x-2|$$

$$(|x|+3)^2 = (x-2)^2$$

$$x^2 + 6|x| + 9 = x^2 - 4x + 4$$

$$6|x| = -4x - 5$$

Nesmíme zapomenout, že ve výrazu na levé straně nám absolutní hodnota po umocnění zůstane.

$$x' = 0$$

$$-4x - 5 = 0$$

$$-5 = 4x$$

$$x'' = -\frac{5}{4}$$

Nyní na získanou rovnici použijeme ještě metodu nulových bodů. Díky umocnění ale nebudeme potřebovat rozdělení na tolik intervalů. Nakonec jen dva.

a) $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right\rangle$

$$-6x = -4x - 5$$

$$-2x = -5$$

$$x = \frac{5}{2} \notin \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right\rangle$$

b) $x \in \left(-\frac{5}{4}, +\infty\right)$

$$x \in \phi$$

Rovnice nemá v tomto intervalu smysl (levá strana je vždy kladná, pravá je záporná).

Příklad 7

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$|4x-6| = |3-2x| + |2x+5|$$

Řešení

Metoda Umocnění

$$2 \cdot |2x-3| = |2x-3| + |2x+5|$$

$$|2x-3| = |2x+5|$$

$$(2x-3)^2 = (2x+5)^2$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$-16 = 32x$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Normálně bychom na příklad, kde se vyskytují tři výrazy v absolutní hodnotě, použili metodu nulových bodů. V tomto příkladu lze ale vytknout z výrazu na levé straně číslo 2. Když ještě upravíme $|3-2x|$ na $|2x-3|$, podle vzorce $|a-b| = |b-a|$, tak můžeme výraz v absolutní hodnotě na pravé straně odečíst od výrazu na straně pravé a zbude rovnice, která se umocněním řeší nejjednodušeji.

Příklad 8

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$|3x+2| + |-2x-1| = |3-x|$$

Řešení

Metoda nulových bodů

$$3x+2=0$$
$$x' = -\frac{2}{3}$$
$$-2x-1=0$$
$$x'' = -\frac{1}{2}$$
$$3-x=0$$
$$x''' = 3$$

a) $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right\rangle$

$$-3x-2-2x-1=3-x$$
$$-5x-3=3-x$$
$$-6=4x$$
$$x_1 = -\frac{3}{2} \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right\rangle$$

b) $x \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right\rangle$

$$3x+2-2x-1=3-x$$
$$x+1=3-x$$
$$2x=2$$
$$x=1 \notin \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

c) $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right\rangle$

$$3x+2+2x+1=3-x$$
$$6x=0$$
$$x_2 = 0 \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right\rangle$$

d) $x \in (3, +\infty)$

$$3x+2+2x+1=-3+x$$
$$4x=-6$$
$$x=-\frac{3}{2} \notin (3, +\infty)$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}$$
$$x_2 = 0$$

Shrnutí

Na příkladu 8 je vidět, že metoda nulových bodů je sice velmi zdlouhavá a pracná, nicméně při větším množství absolutních hodnot v rovnici je jediná použitelná. Naproti tomu, jak dokládají i příklady 6 a 7, je často možné si příklad zjednodušit pomocí umocnění a potom teprve použít metodu nulových bodů.

5.5 Příklady na procvičení

5-1

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $|x| = 5$

b) $|x| = -2$

c) $2 \cdot |x| = 8$

d) $|-2x| = 3$

e) $|3 - x| = 2$

f) $|x - 7| = 4$

g) $|5 - 2x| = 3$

h) $|6x + 3| = 9$

i) $|-8 - 3x| = 6$

5-2

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $|x + 1| = |x - 1|$

b) $|-2 + x| = |-x + 6|$

c) $|-x - 3| = |x + 3|$

d) $|5 - x| = -|x - 5|$

e) $|3x - 2| = |5 + 3x|$

f) $|-2x + 7| = |3x + 2|$

g) $|x + 9| = |4x + 6|$

h) $|5x + 3| = |-4x - 3|$

i) $|4 - x| = 4 + x$

j) $|2x - 3| = 5 - x$

k) $|-3x| = x + 1$

l) $|4x + 2| = 6 - 2x$

5-3

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $|x - 1| + |x - 2| - |x - 3| = 0$

b) $|6 + 3x| = |x + 1| - |4x + 2|$

c) $|2x - 1| - |x + 7| = |-x - 6|$

d) $-|x| = -|5x + 3| + |3x + 4|$

e) $||-2x| + 2| = |3x|$

f) $||2 - x| + 3| = |4 - 3x|$

g) $||x + 2| - |2x + 1|| = 3x$

h) $-|2 - 3x| = ||x - 3| + |4x - 1||$

Výsledky:

5-1 a) $x_1 = -5,\ x_2 = 5$ b) Nemá řešení c) $x_1 = -4,\ x_2 = 4$ d) $x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = \frac{3}{2}$

e) $x_1 = 1,\ x_2 = 5$ f) $x_1 = 3,\ x_2 = 11$ g) $x_1 = 1,\ x_2 = 4$ h) $x_1 = -2,\ x_2 = 1$ i) $x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = \frac{14}{3}$

5-2 a) $x = 0$ b) $x = 4$ c) $x \in R$ d) $x = 5$ e) $x = -\frac{1}{2}$ f) $x_1 = -9,\ x_2 = 1$ g) $x_1 = -3,\ x_2 = 1$

h) $x_1 = \frac{-2}{3},\ x_2 = 0$ i) $x = 0$ j) $x_1 = -2,\ x_2 = \frac{8}{3}$ k) $x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2}$ l) $x_1 = -4,\ x_2 = \frac{2}{3}$

5-3 a) $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ b) Nemá řešení c) $x = -3$ d) $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ e) $x_1 = -2,\ x_2 = 2$

f) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{5}{2}$ g) $x = \frac{1}{4}$ h) Nemá řešení

6 Rovnice s neznámou pod odmocninou

Tento typ rovnic se téměř vždy řeší umocněním obou stran rovnice na druhou. Umocnění obou stran na druhou je důsledková úprava ve chvíli, kdy nevíme, zda jsou obě strany nezáporné. Máme tedy dvě možnosti. Buď nejprve určit, kdy jsou obě strany nezáporné (a tedy je umocnění ekvivalentní úpravou) nebo umocnit obě strany a následně provést zkoušku.

Obě metody jsou na čas podobně náročné a proto záleží spíše na řešiteli, která mu více vyhovuje.

6.1 Metoda umocnění s následným provedením zkoušky

Při řešení touto metodou rovnici obvykle nejdříve upravíme na takový tvar, abychom měli na jedné straně jeden výraz s neznámou pod odmocninou a na druhé straně vše ostatní (v případě, že je v příkladu více odmocnin, nedají se někdy odstranit všechny jedním umocněním). Následně umocníme obě strany na druhou, rovnici vyřešíme a provedeme zkoušku.

Tuto metodu si předvedeme na příkladu.

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$\sqrt{2x} = 2$

Řešení

Rovnici máme v požadovaném tvaru, proto můžeme rovnou umocnit.

$\sqrt{(2x)}^2 = 2^2$

$2x = 4$

$x = 2$

Získali jsme tedy výsledek $x = 2$, musíme ale zkontrolovat, zda je skutečně řešením rovnice a to pomocí zkoušky.

$L = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$

$P = 2$

$L = P$

Levá strana se rovná pravé a proto $x = 2$ je řešením zadané rovnice.

6.2 Metoda umocnění s určením definičního oboru

Pokud řešíme rovnici touto metodou, musíme si před umocněním zjistit, v jakém oboru jsou výrazy na obou stranách definovány. Jen drobné připomenutí: $\sqrt{ax+b}$ má smysl, pokud $ax+b \geq 0$. Pokud si určíme definiční obor, ve kterém celou rovnici řešíme, budeme při umocňování zaručeně umocňovat nezáporné číslo a tedy půjde o úpravu ekvivalentní. Zkouška pak není nezbytná.

Předvedeme si použití této metody na stejném příkladu.

Příklad

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\sqrt{2x} = 2$$

Řešení

$$\sqrt{2x} = 2$$

$$2x \geq 0$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x \in \langle 0, +\infty)$$

Nejprve určíme pro která *x* má výraz pod odmocninou smysl (pro nezáporná *x*).

$$\sqrt{(2x)}^2 = 2^2$$

$$2x = 4$$

$$x = 2 \in \langle 0, +\infty)$$

Nyní je umocnění ekvivalentní úpravou (na levé straně jsme zajistili, aby byla nezáporná a na pravé je číslo 2, které je evidentně kladné). Jen je nutné zkontrolovat, zda výsledek do intervalu skutečně patří.

6.3 Řešené rovnice s absolutní hodnotou

Ukážeme si dva příklady řešené oběma metodami, předvedenými vedle sebe. Jednotlivé kroky by měly být zřejmé i bez doplňujících komentářů. Dále budou následovat složitější rovnice, na kterých bude předvedena metoda autorovi bližší (tedy ta, kde se neprovádí umocnění, aniž bychom věděli, zda umocňujeme nezáporné číslo).

Příklad 1

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\sqrt{x-8} = 5$$

Řešení

1) Metoda s následnou zkouškou

$$\left(\sqrt{x-8}\right)^2 = 5^2$$
$$x-8 = 25$$
$$x = 33$$
$$L = \sqrt{33-8} = 5$$
$$P = 5$$
$$L = P \Rightarrow x = 33$$

2) Metoda s určením definičního oboru

$$x-8 \geq 0$$
$$x \geq 8 \Rightarrow x \in \langle 8, +\infty)$$
$$\left(\sqrt{x-8}\right)^2 = 5^2$$
$$x-8 = 25$$
$$x = 33 \in \langle 8, +\infty)$$

Příklad 2

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{5-x}$$

Řešení

1) Metoda s následnou zkouškou

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(\sqrt{5-x}\right)^2$$
$$x-3 = 5-x$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$
$$L = \sqrt{4-3} = 1$$
$$P = \sqrt{5-4} = 1$$
$$L = P \Rightarrow x = 4$$

2) Metoda s určením definičního oboru

$$(x-3 \geq 0) \wedge (5-x \geq 0)$$
$$(x \geq 3) \wedge (x \leq 5) \Rightarrow x \in \langle 3,5 \rangle$$
$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(\sqrt{5-x}\right)^2$$
$$x-3 = 5-x$$
$$2x = 8$$
$$x = 4 \in \langle 3,5 \rangle$$

Příklad 3

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\sqrt{8x+9} = \sqrt{4x+1} + 4$$

Řešení

Metoda s určením definičního oboru

$(8x+9 \geq 0) \wedge (4x+1 \geq 0)$

$\left(x \geq -\frac{9}{8}\right) \wedge \left(x \geq -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow x \in \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty \right)$

$\left(\sqrt{8x+9}\right)^2 = \left(\left(\sqrt{4x+1}\right) + 4\right)^2$

$8x+9 = 4x+1+8\sqrt{4x+1}+16$

$4x-8 = 8\sqrt{4x+1}$

$x-2 = 2\sqrt{4x+1} \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in \langle 2, \infty)$

$(x-2)^2 = \left(2\sqrt{4x+1}\right)^2$

$x^2 - 4x + 4 = 16x + 4$

$x^2 - 20x = 0$

$x(x-20) = 0$

$x_1 = 0 \notin \langle 2, +\infty)$

$x_2 = 20 \in \langle 2, +\infty)$

$x = 20$

Nejprve určíme průnik definičních oborů jednotlivých výrazů pod odmocninami.

Poté umocníme (zbavíme se tak alespoň jedné odmocniny).

Převedeme vše kromě výrazu pod odmocninou na levou stranu rovnice a upravíme (vydělíme obě strany číslem 4)

Znovu určíme, definiční obor, pro který má smysl rovnici řešit a poté umocníme, abychom se zbavili i druhého výrazu s odmocninou.

Řešíme kvadratickou rovnici pomocí diskriminantu.

Po zkontrolování kořenů, nám zbyl jeden, který patří do intervalu, v němž jsme rovnici řešili a tedy je řešením zadané rovnice.

Příklad 4

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\sqrt{x+9} = 1 - \sqrt{x+2}$$

Řešení

Metoda s určením definičního oboru

$(x+9 \geq 0) \wedge (x+2 \geq 0)$

$(x \geq -9) \wedge (x \geq -2) \Rightarrow x \in \langle -2, +\infty)$

$\left(\sqrt{x+9}\right)^2 = \left(1 - \left(\sqrt{x+2}\right)\right)^2$

$x+9 = 1 - 2\sqrt{x+2} + x + 2$

$6 = -2\sqrt{x+2}$

$\sqrt{x+2} = -3 \Rightarrow x \in \phi$

Opět určíme průnik obou definičních oborů.

Umocníme.

Převedeme vše kromě výrazu pod odmocninou na levou stranu rovnice.

Vydělíme rovnici číslem (-2) a vidíme, že výraz v odmocnině (platí, že $\sqrt{a} \geq 0$) by se měl rovnat číslu -3, což ale není možné a rovnice tedy nemá řešení.

Příklad 5

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\sqrt{x+7} = 2 + \sqrt{13-x}$$

Řešení

Metoda s určením definičního oboru

Určíme průnik definičních oborů.

$$(x+7 \geq 0) \wedge (13-x \geq 0)$$

$$(x \geq -7) \wedge (x \leq 13) \Rightarrow x \in \langle -7{,}13 \rangle$$

Umocníme.

$$\left(\sqrt{x+7}\right)^2 = \left(2 + \left(\sqrt{13-x}\right)\right)^2$$

Převedeme vše kromě výrazu pod odmocninou na levou stranu rovnice.

$$x+7 = 4 + 4\sqrt{13-x} + 13 - x$$

$$2x - 10 = +4\sqrt{13-x}$$

Znovu určíme definiční obor (to, co jsme již určili musí platit zároveň s tím, co nám vyjde po umocnění).

$$x - 5 = 2\sqrt{13-x} \Rightarrow x - 5 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \langle 5{,}13 \rangle$$

Znovu umocníme.

$$(x-5)^2 = \left(2\sqrt{13-x}\right)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = 4 \cdot (13-x)$$

$$x^2 - 10x + 25 = 52 - 4x$$

Převedeme vše na levou stranu.

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

Zjistíme kořeny pomocí Viètových vzorců.

$$(x-9) \cdot (x+3) = 0$$

Zkontrolujeme, které kořeny patří do definičního oboru a získáme výsledek.

$$x_1 = 9 \in \langle 5{,}13 \rangle$$

$$x_2 = -3 \notin \langle 5{,}13 \rangle$$

$$x = 9$$

Shrnutí

Na pěti příkladech jsme si ukázali, jak se řeší rovnice s neznámou pod odmocninou. Z uvedených příkladů vyplývá, že příklady typově podobné příkladům 1 a 2 stačí umocnit jednou. U příkladů typově podobným příkladům 3, 4 a 5 je třeba většinou umocnit dvakrát a nakonec vyřešit kvadratickou rovnici. Jde tedy o rovnice, kde je nutné umět řešit i kvadratické rovnice.

Dále je na uvedených řešených příkladech vidět, že pokud si vždy nejprve určíme definiční obory, může nám dříve vyplynout, že příklad nemá řešení, než kdybychom to zjistili až při zkoušce. U příkladů, které mají alespoň jedno řešení jsou obě metody vzhledem k času strávenému řešením srovnatelné (jak již bylo naznačeno).

6.4 Příklady na procvičení

6-1

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $0 = 5 - \sqrt{x - 3}$

b) $\sqrt{36x + 9} = 21$

c) $\sqrt{-x + 1} = -\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{3x + 2} = \sqrt{x - 2}$

e) $\sqrt{133 - 2x} = \sqrt{3x - 17}$

f) $2\sqrt{15 - 3x} = \sqrt{6x - 6}$

6-2

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $\sqrt{4x} - 18 = -2\sqrt{9 + x}$

b) $\sqrt{4x - 5} = \sqrt{8 - 2x} + 2$

c) $\sqrt{x - 3} + 4 = \sqrt{2x + 1}$

d) $\sqrt{7 - 2x} - 3 = -\sqrt{1 - 2x}$

e) $3\sqrt{3x + 1} = 2\sqrt{12x - 27} - 6$

f) $\sqrt{x + 7} + 8 = \sqrt{6 - 3x}$

Výsledky:

6-1 a) $x = 28$ b) $x = 12$ c) Nemá řešení d) Nemá řešení e) $x = 30$ f) $x = \frac{11}{3}$

6-2 a) $x = 16$ b) $x = \frac{7}{2}$ c) $x = 84$ d) $x = \frac{3}{8}$ e) $x = 21$ f) Nemá řešení

7 Tvorba webových stránek

Pro tuto práci byly vytvořeny webové stránky dostupné na adrese http://kraken.pedf.cuni.cz/~hanzp6am/. Tyto stránky byly vytvořeny pomocí PSPad editoru v jazyce PHP a s použitím frameworku jQuery.

Na stránkách lze nalézt prakticky všechny příklady obsažené i v této práci s tím, že řešené příklady obsahují někdy více způsobů řešení. V hlavním menu lze nalézt šest položek. Úvod nastiňuje co lze na stránkách nalézt a jaký je cíl těchto stránek. V položce Základní poznatky můžeme nalézt připomenutí některých definic či poznatků matematiky, které jsou potřebné pro zvládnutí řešení příkladů uvedených na stránkách.

Další tři položky menu i s podpoložkami obsahují vysvětlení daných typů rovnic a návody na řešení těchto typů rovnic. Každý typ rovnic je zvlášť vysvětlen a také obsahuje množství řešených i neřešených příkladů.

Poslední položka v menu nabízí ke stažení zatím pouze dva testy, které byly vytvořené jako shrnutí celé látky, která je na stránkách vysvětlena.

Stránky mají ukázat, že často je několik způsobů, jak některé typy rovnic řešit a každý způsob se hodí pro nějaké modelové příklady více a nebo naopak méně. Z analýzy elektronických zdrojů vyplynulo, že podobně k tématu rovnic nepřistupuje žádná nalezená webová stránka.

8 Pilotní nasazení

Celý soubor řešených příkladů byl navržen pro podporu výuky zvoleného oboru matematiky. Měl by sloužit učitelům, jako modelové příklady pro prezentaci jednotlivých metod řešení daných rovnic před studenty, ale také právě studentům, kteří by díky němu měli snáze pochopit, kdy použít kterou metodu či úpravu.

Část tohoto souboru (konkrétně metoda řešení rovnic s absolutní hodnotou pomocí umocnění) byla prezentována před skupinou studentů s cílem ověřit, zda studenti pochopí použití metody a zda jsou dané modelové příklady vhodné.

8.1 Cíle výzkumu úspěšnosti pilotního nasazení

- Zjistit, zda studenti prezentovanou metodu pochopili
- Ověřit, jestli studenti byli schopni danou metodu použít v praxi
- Ověřit, zda studenti dovedou rozlišit příklady, kdy je vhodné danou metodu použít a kdy to naopak vhodné není
- Získat zpětnou vazbu na náročnost testu, který studenti řešili
- Utvořit závěry a případně navrhnout úpravy souboru modelových příkladů

8.2 Charakteristika a popis výběrového souboru a metody ověřování

Zkoumaným vzorkem bylo 29 studentů 5. ročníku osmiletého studia na Gymnáziu Opatov. Z možných metod byla zvolena metoda dotazníkového šetření. Dotazníkové šetření proběhlo formou testu a přiloženého dotazníku.

Hodina se studenty byla rozdělena na dva zhruba stejně dlouhé úseky trvající asi 20 minut. V první části hodiny proběhlo vysvětlení metody, ukázka na příkladu vyřešeném na tabuli, slovním zhodnocením toho, kdy je metodu vhodné použít a kdy ne. Následně řešili náhodně vybraní studenti 4 příklady na tabuli. Tyto příklady byly řešeny za asistence autora výzkumu. Cílem bylo zjistit, jak studenti pochopili metodu a zda ji zvládnou použít. Případně také k vysvětlení některých nejasností a úskalí metody.

V úvodu druhého úseku hodiny byl představen výzkum a jeho cíle. Dále bylo studentům podrobně vysvětleno, jak mají dotazník i test vyplnit a kolik mají času na jeho vypracování.

8.3 Vyhodnocení testu a dotazníku

V této kapitole jsou popsány získané výsledky, které z testu a dotazníku vyplynuly. Test obsahoval čtyři příklady, z nichž čtvrtý příklad měl být vyřešen dvěma metodami a také měli studenti porovnat, kterou metodou se řešil lépe.

Po opravení testové části byla stanovena u každého příkladu dvě nebo tři kritéria bodového hodnocení daného příkladu, každé kritérium je hodnoceno uspěl (1 bod) nebo neuspěl (0 bodů). Výjimečně byla udělena hodnota 0,5 bodů a to v případě, že nebylo zcela jasné, jak k danému výsledku student dospěl. Kritéria byla stanovena na základě chyb, kterých se studenti dopouštěli, aby následně mohly být tyto chyby analyzovány a stanoveny předpokládané důvody, jejich vzniku.

Vyhodnocení dotazníku je provedeno pouze slovně v kapitole věnované shrnutí výsledků, jelikož hodně dotazníků bylo zcela nevyplněných nebo vyplněných se zřetelným nezájmem.

V následujících tabulkách jsou u každého příkladu uvedené bodové zisky studentů v jednotlivých kritériích a také celkově (Suma).U každého studenta a příkladu je také uvedeno, jakou použil metodu pro řešení daného příkladu a jeho vlastní hodnocení obtížnosti příkladu (studenti hodnotili 1-5, kde 0 znamená, že student nic nenapsal, 1 značí příliš lehký příklad a 5 příliš těžký). V druhé tabulce je jen 4. příklad, který se měl řešit dvěma metodami a kde A (resp. B) značí vyhodnocení pro použitou metodu. Pokud se v sloupci *Použitá metoda* objevuje hodnota 0, značí to, že u příkladu nebyla buď jasná metoda, kterou student použil nebo příklad vůbec neřešil.

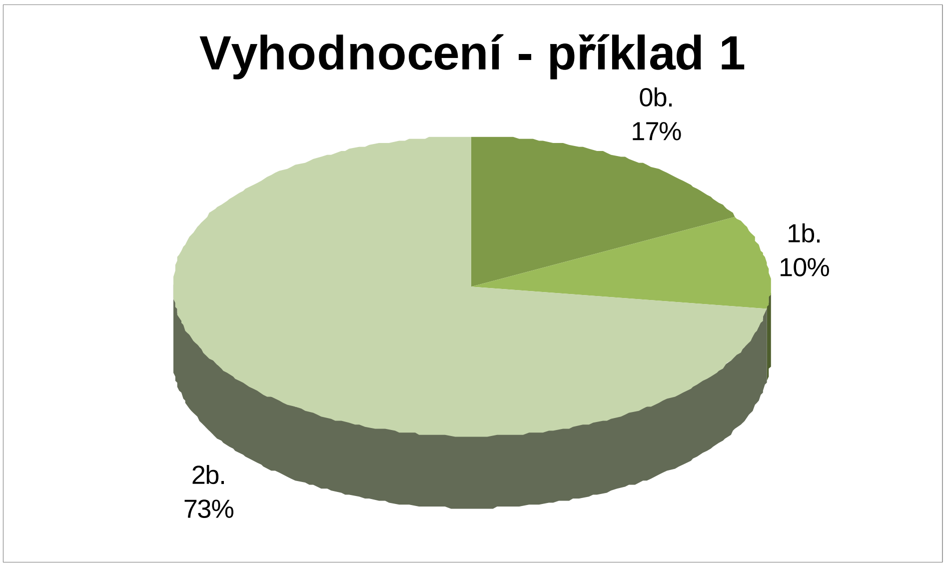
	Příklad 1					Příklad 2					Příklad 3					
	Úprava výsledku	Výsl.	Použitá metoda	Suma	Hodn.	Úprava výsledku	Výsl.	Použitá metoda	Suma	Hodn.	ekvivalence úprav	Výsl.	Závěr	Použitá metoda	Suma	Hodn.
žák 1	1	1	umocnění	2	0	0	1	umocnění	1	0	0	1	0	0	1	0
žák 2	1	1	umocnění	2	2	1	1	umocnění	2	1	1	1	1	nulové body	3	3
žák 3	1	1	nulové body	2	2	0	1	umocnění	1	1	0	1	0	0	1	1
žák 4	0	1	umocnění	1	1	0	1	umocnění	1	1	0,5	1	0,5	myšlenka	2	0
žák 5	0	0	umocnění	0	0	0	1	umocnění	1	0	0	1	0	umocnění	1	0
žák 6	1	1	umocnění	2	0	0	0	umocnění	0	0	0	0	0	umocnění	0	0
žák 7	1	0	umocnění	1	2	0	0	umocnění	0	3	0	0	0	nelze vyřešit	0	5
žák 8	1	1	umocnění	2	3	0	1	umocnění	1	2	1	0	1	nulové body	2	2
žák 9	0	0	umocnění	0	4	0	1	umocnění	1	2	0	1	0	umocnění	1	3
žák 10	0	1	umocnění	1	2	0	1	umocnění	1	1	0	0	0	0	0	5
žák 11	0	0	0	0	0	0	0	umocnění	0	0	0	1	0	0	1	0
žák 12	0	0	umocnění	0	5	0	0	umocnění	0	5	0	0	0	umocnění	0	5
žák 13	1	1	nulové body	2	2	0	1	umocnění	1	3	1	1	1	nulové body	3	3
žák 14	1	1	nulové body	2	3	0	1	umocnění	1	1	1	1	1	nulové body	3	2
žák 15	1	1	nulové body	2	3	0	1	umocnění	1	3	1	1	1	nulové body	3	4
žák 16	1	1	umocnění	2	2	0	1	umocnění	1	1	1	1	1	nulové body	3	4
žák 17	1	1	umocnění	2	1	0	1	umocnění	1	1	0	1	0	umocnění	1	1
žák 18	1	1	umocnění	2	2	0	1	umocnění	1	1	0	1	0	umocnění	1	2
žák 19	1	1	nulové body	2	2	0	1	umocnění	1	2	0	1	0	umocnění	1	2
žák 20	1	1	umocnění	2	2	0	1	umocnění	1	1	0	1	0	umocnění	1	2
žák 21	1	1	umocnění	2	1	0	1	umocnění	1	3	0	1	0	umocnění	1	2
žák 22	1	1	umocnění	2	1	0	1	umocnění	1	2	0	1	0	umocnění	1	1
žák 23	0	0	umocnění	0	2	0	1	umocnění	1	5	0	1	0	umocnění	1	5
žák 24	1	1	umocnění	2	1	1	1	umocnění	2	1	1	0	1	nulové body	2	2
žák 25	1	1	umocnění	2	1	0	1	umocnění	1	2	1	1	1	nulové body	3	3
žák 26	1	1	umocnění	2	2	0	1	umocnění	1	1	1	1	1	nulové body	3	3
žák 27	1	1	nulové body	2	2	0	1	umocnění	1	1	1	1	1	nulové body	3	1
žák 28	1	1	umocnění	2	1	0	1	umocnění	1	1	0	1	0	umocnění	1	4
žák 29	1	1	umocnění	2	1	0	1	umocnění	1	2	1	1	1	nulové body	3	2

Tabulka č. 1a

	Příklad 4										
	ekvivalence úprav A	ekvivalence úprav B	Výsl. A	Výsl. B	Závěr A	Závěr B	Použitá metoda	Použitá metoda	Suma A	Suma B	Hodn.
žák 1	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	0
žák 2	1	1	1	0	1	0	umocnění	nulové body	3	1	4
žák 3	1	1	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	2	1
žák 4	1	1	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	2	1
žák 5	1	0	0	0	0	0	umocnění	0	1	0	0
žák 6	1	0	0	0	0	0	umocnění	0	1	0	0
žák 7	1	0	1	0	1	0	umocnění	nulové body	3	0	2
žák 8	1	0	1	0	1	0	umocnění	0	3	0	
žák 9	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	1
žák 10	1	1	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	2	1
žák 11	1	1	0	0	0	0	umocnění	nulové body	1	1	0
žák 12	1	0	1	0	1	0	umocnění	0	3	0	5
žák 13	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	4
žák 14	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	1
žák 15	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	5
žák 16	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	1
žák 17	1	1	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	2	1
žák 18	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	1
žák 19	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	2
žák 20	1	1	1	1	1	1	umocnění	umocnění	3	3	1
žák 21	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	1
žák 22	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	2
žák 23	1	1	1	1	1	1	umocnění	nulové body	3	3	2
žák 24	1	0	1	0	1	0	umocnění	0	3	0	2
žák 25	1	0	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	1	3
žák 26	1	1	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	2	1
žák 27	1	1	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	2	2
žák 28	1	0	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	1	3
žák 29	1	1	1	1	1	0	umocnění	nulové body	3	2	1

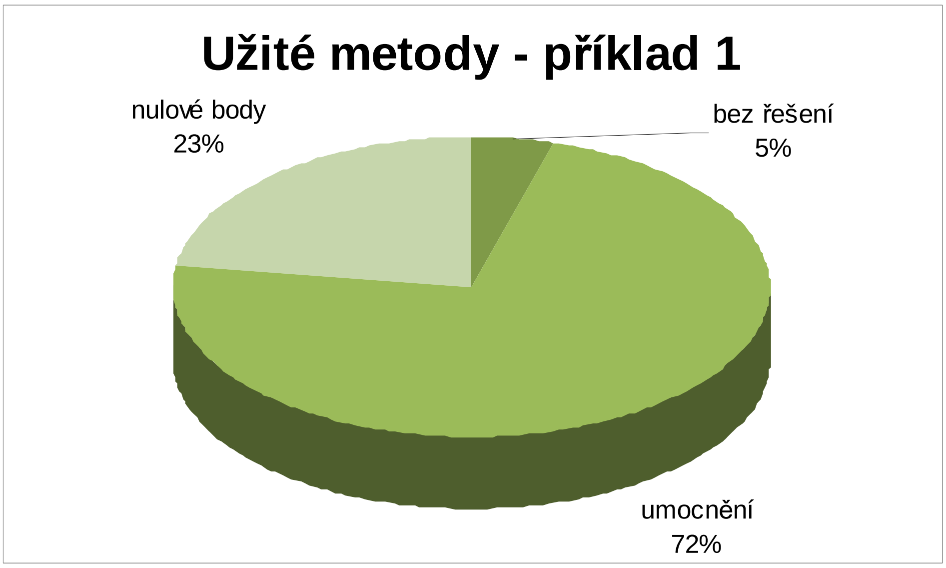
Tabulka č. 1b

8.3.1 Grafy úspěšnosti v jednotlivých příkladech



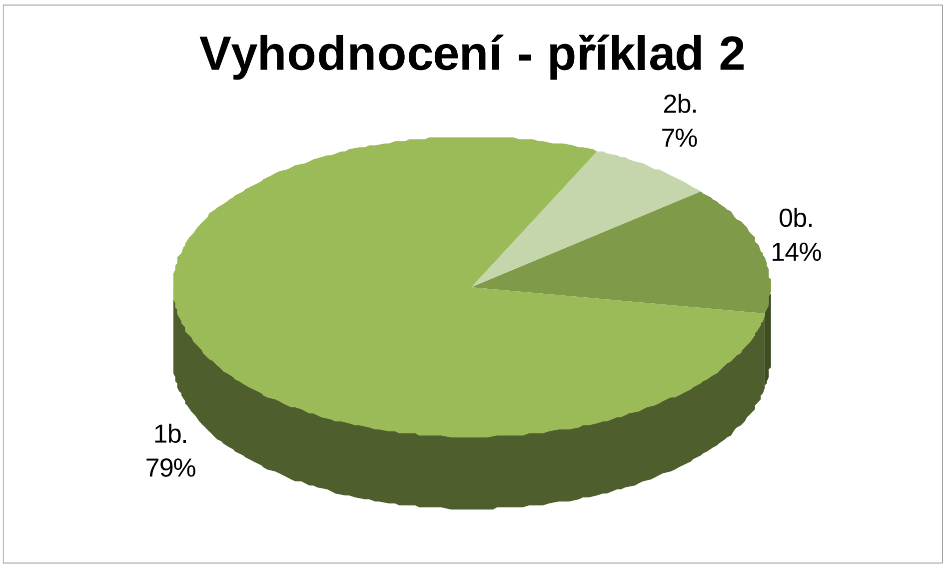
Graf č. 1

Za úspěšně splněný je brán příklad ohodnocený dvěma body. U tohoto příkladu byla hodnocena dvě kritéria. Úprava výsledku, který vyšel ve zlomku, do jeho základního tvaru a také to, zda student došel ke správnému výsledku. Plného počtu dosáhlo 73% studentů (viz graf č. 1), což by se dalo považovat za úspěch. (jak vyplývá z tabulky č. 1a, mnoho studentů kteří mají jeden bod, dospělo k správnému výsledku, ale neupravili zlomek na základní tvar)



Graf č. 1

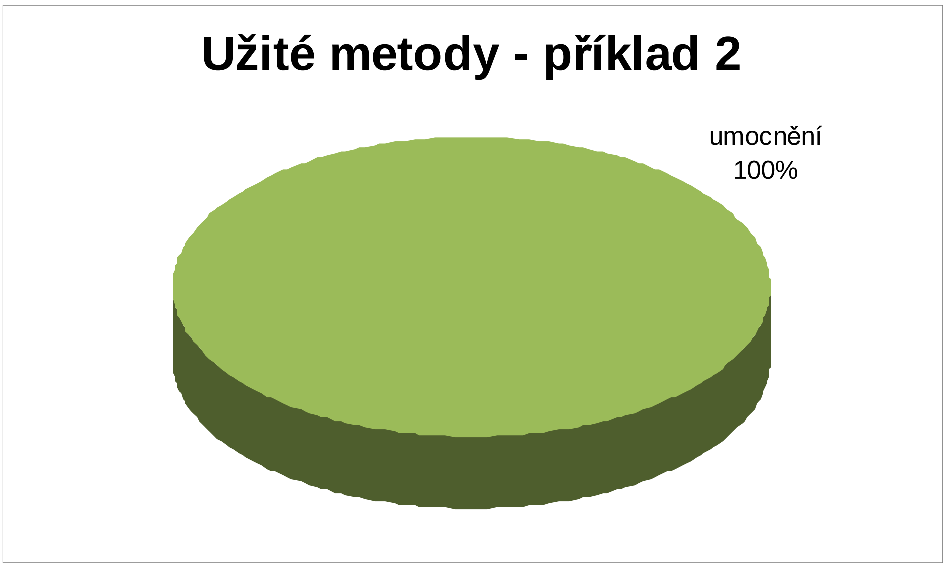
Jak je vidět při porovnání obou grafů (viz graf č. 2 a graf č. 1) téměř stejná procenta jsou u studentů, kteří měli první příklad zcela správně, jako u studentů, kteří použili metodu umocnění. Bohužel je tento fakt (viz tabulka č. 1a) zcela náhodný, neboť při pohledu do tabulky není vidět žádná souvislost.



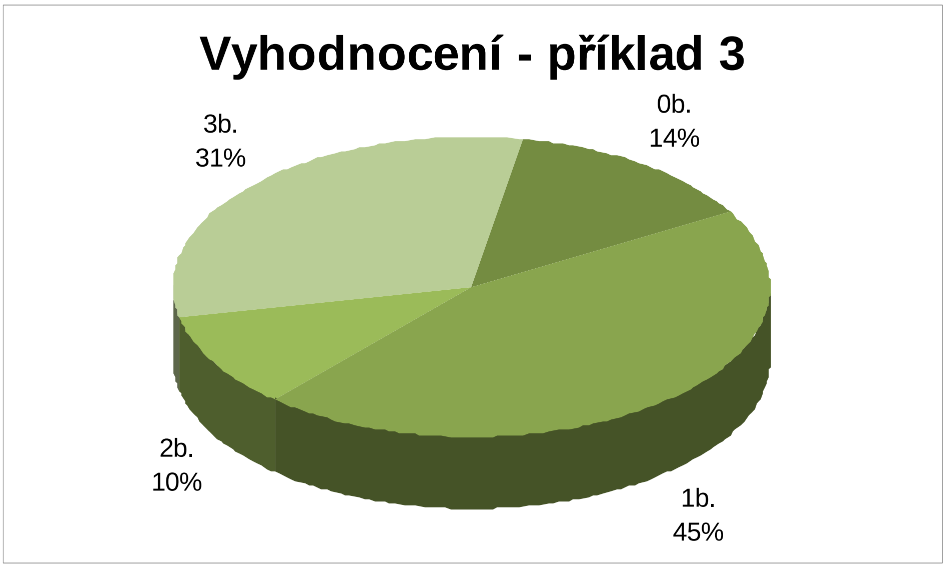
Graf č. 3

Druhý příklad dopadl špatně (viz graf č. 3). Jak vyplývá z tabulky (viz tabulka č. 1a), naprostá většina studentů v tomto případě neupravila zlomek na základní tvar. Druhé kritérium (správný výsledek) splnilo v tomto příkladu 86% studentů, kteří zvládli použít metodu umocnění a získat správný výsledek.

Tento příklad byl typově stejný, na jaký se hodí předváděná metoda. Na druhém grafu, který se váže k tomuto příkladu (viz graf č. 4), je vidět, že studenti se předvedenou metodu minimálně pokusili aplikovat.



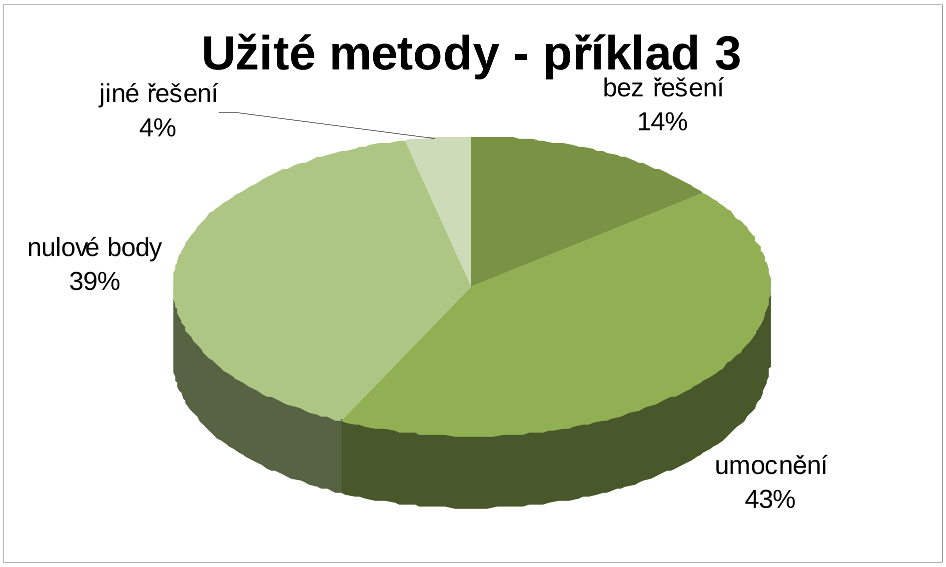
Graf č. 4



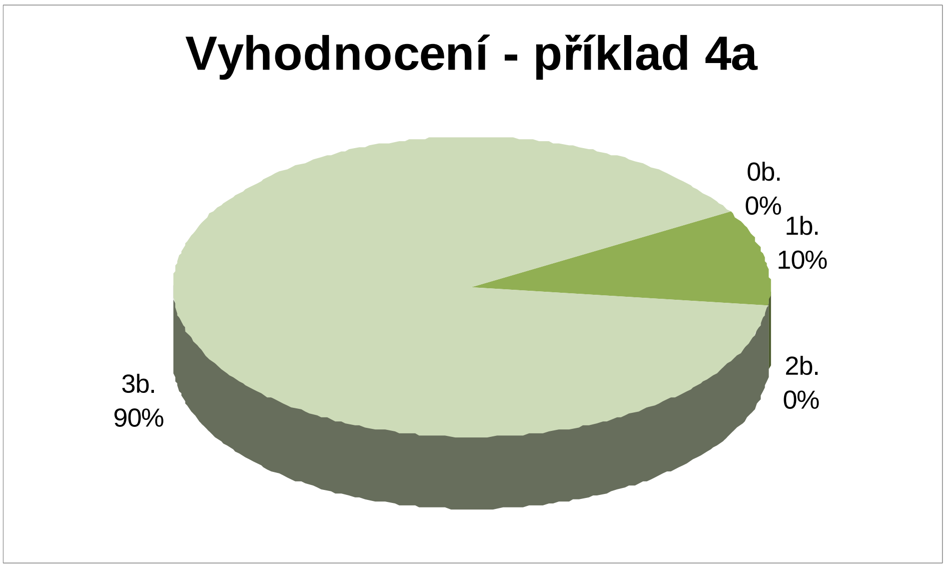
Graf č. 5

U třetího příkladu byla hodnocena tři kritéria. Zda student použil ekvivalentní úpravy (nebo reagoval na to, že použil neekvivalentní), zda došel ke správným výsledkům a také zda z dílčích výsledků vyvodil správné závěry. Z tabulky (viz tabulka č. 1a) je velmi dobře patrné, že ke správnému výsledku dospěla naprostá většina studentů. Avšak za použití neekvivalentních úprav a špatných závěrů z výsledku, který jim vyšel.

Tento příklad by měl být pro zadavatele testu velkým ponaučením, neboť byla zcela určitě chyba, že se v testu objevil příklad, u nějž se použitím předvedené metody náhodou dojde ke správnému výsledku. U tohoto příkladu dopadlo velmi špatně i určení metody, pro jeho vypracování (viz graf č. 6). Metoda umocnění se na tento příklad nehodila a přesto ji použila většina studentů, kteří alespoň nějakou metodu zkusili.



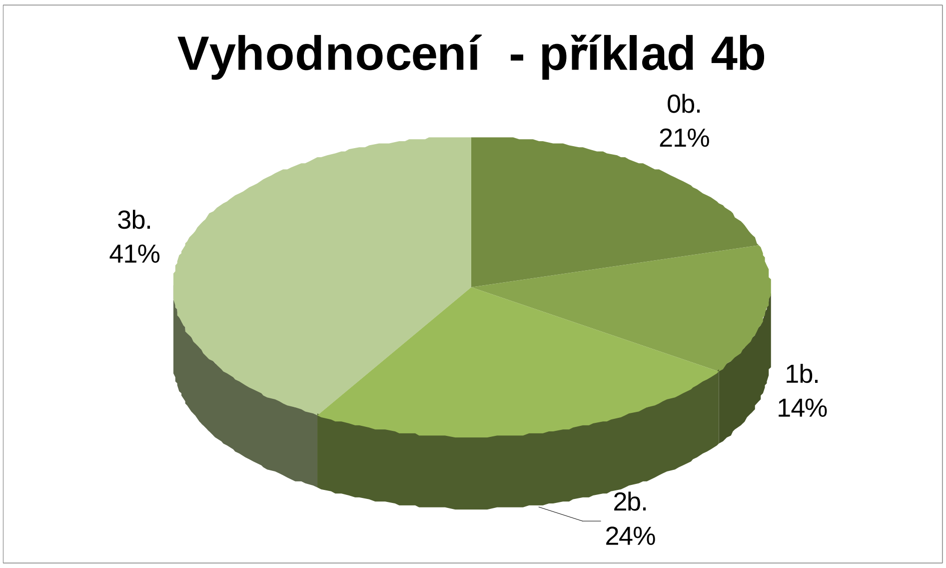
Graf č. 6



Graf č. 7

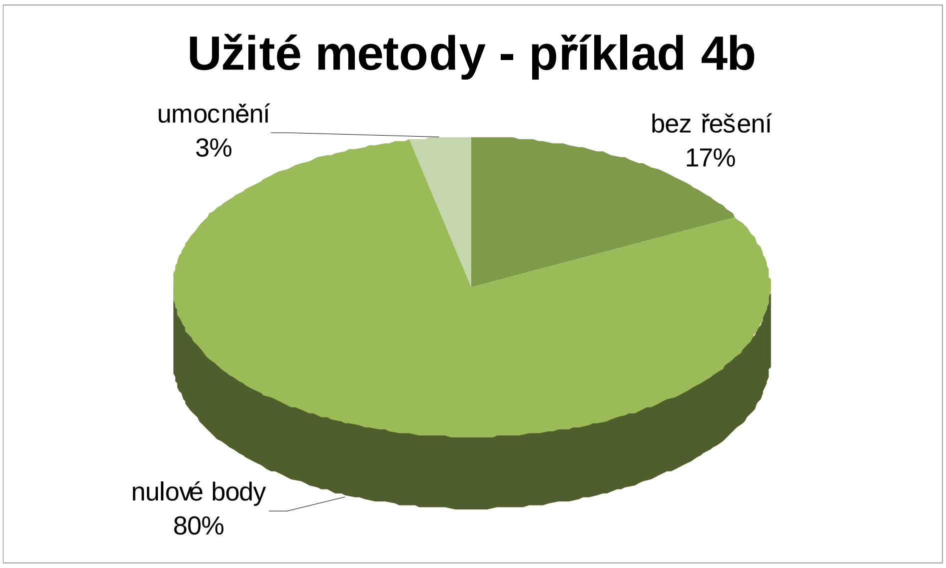
Ač měl být tento příklad nejtěžší ze všech, prvnímu způsobu řešení (úkolem bylo řešit tento příklad dvěma způsoby) nebylo takřka u všech studentů co vytknout. Jako první metodu zvolili tentokrát všichni metodu umocnění (viz graf č. 8). Tento příklad měla správně i řada studentů, kteří nezískali téměř žádný bod z předchozích příkladů.

Graf č. 8

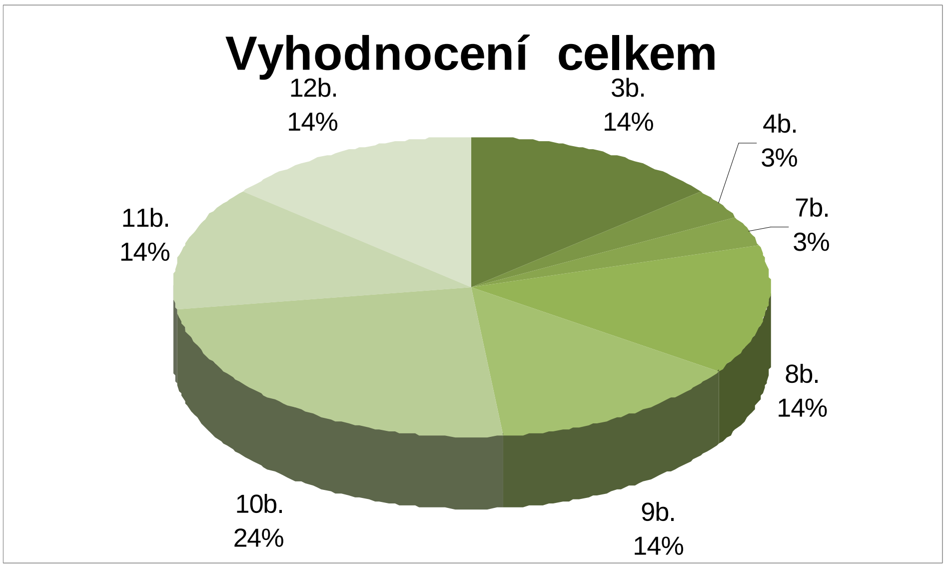


Graf č. 9

Velmi odlišně od prvního (viz graf. č.9), dopadlo druhé řešení čtvrtého příkladu. V něm už méně než tři body získala více než polovina studentů (59%). Většina (viz tabulka č. 1b) z těch, kteří ztratili nějaký bod, nedokázala správně vyhodnotit závěry z obdrženého výsledku. Studenti často uváděli jako řešení kořen, který získali v intervalu, do nějž tento kořen nepatřil. Několika studentům dokonce vyšel jiný výsledek, než při prvním způsobu řešením, což je velmi zarážející.



Graf č. 10



Graf č. 11

Graf č. 11 ukazuje celkový součet bodů a procenta, kolik studentů na takový bodový počet dosáhlo. Celkem bylo možné získat 13 bodů. Této hranice nedosáhl nikdo (především kvůli druhému příkladu), celkem ale nejméně 10 b. získala nadpoloviční většina studentů, tedy u těchto je předpoklad, že metodu pochopili, dokázali využít, ale naopak ji nepoužili tam, kde to nebylo vhodné.

8.3.2 Shrnutí výsledků výzkumu

Jak již bylo naznačeno, výsledky testu jsou hodnoceny spíše kladně a je předpoklad, že by nasazení modelových příkladů z této sbírky mohlo pomoci studentům lépe se v této oblasti matematiky orientovat. Výzkum ale proběhl na příliš malé skupině studentů a navíc není známo, jaké by byly výsledky těchto (nebo jiných v podobné situaci) studentů před vysvětlením dané metody.

Naproti tomu výzkum napověděl, že je nutné více informovat a upozorňovat na úskalí vysvětlovaných metod. Jinak hrozí, že se sice metodu studenti naučí, ale nebudou schopni rozlišit, kdy je skutečně vhodné ji použít. Což se v průběhu testu i stalo.

Zhodnocení dotazníku je vzhledem k tomu, že dotazník alespoň vyplnila méně než polovina studentů, pouze slovní. Reflektuje autorův osobní pohled. Někteří studenti v něm výukovou část chválili, kriticky se vyjadřovali především k obtížnosti příkladů v testu (byly moc lehké).

Závěr

Ve své práci jsem se pokusil vytvořit soubor řešených modelových příkladů pro studenty 1. ročníku čtyřletého či 5. ročníku osmiletého gymnázia. Tento soubor by měl sloužit jak studentům pro lepší pochopení metod, jak řešit kvadratické rovnice, rovnice s absolutní hodnotou a s neznámou pod odmocninou, tak případně i učitelům, kteří v něm mohou nalézt dostatečně velký soubor modelových příkladů na jednotlivé typy rovnic a příklady na procvičení dané látky.

Ověření daných příkladů proběhlo v hodině matematiky na Gymnáziu Opatov. Z výzkumu vyplývá, že studenti během výuky dobře pochopili provedení představované metody. Přesto většina z nich nezvládla odlišit, na které příklady se ji vyplatí použít.

Většina úkolů stanovených pro splnění základního cíle (ukázat metody, kterými se řeší dané typy rovnic na příkladech a také ukázat, kdy je vhodné kterou metodu použít a proč), byla splněna. Výzkum by bylo lepší provést na více experimentálních skupinách, aby se tím zamezilo některým náhodným výsledkům (například pokud studenti danou látku dobře ovládali už předtím, než přišel tento experiment, mohou z něj být vyvozeny špatné závěry).

Určitě by pro lepší zadání příkladů v testu pomohla diskuze se studenty, které příklady jim přišly těžké a proč. Forma dotazníku se v tomto příliš neosvědčila (možná to bylo chybně zadanými otázkami) a proto by bylo zřejmě lepší zvolit skupinovou diskuzi se všemi studenty, či strukturovaný rozhovor s užším vzorkem.

Seznam použité literatury

Tištěné materiály

1. BOSÁK, J. *ROVNICE A NEROVNOSTI*. Prvé vydanie. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1963. 168 s. ISBN 67-078-63.

2. ČERMÁK, P.; ČERVINKOVÁ, P. *Odmaturuj z matematiky*. Vydání první. Brno : DIDAKTIS, 2002. 208 s. ISBN 80-86285-38-3.

3. FRÝZEK, M.; MÜLLEROVÁ, J. *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy*. První vydání. Praha : FORTUNA, 1992. 151 s. ISBN 80-85298-51-1.

4. HEJNÝ, M.; STEHLÍKOVÁ, N. *ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKA : rovnice, teorie čísel, kombinatorika, planimetrie*. druhé. Praha : Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. 79 s. ISBN 80-7290-014-5.

5. HERMAN, J., et al. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií Rovnice a jejich soustavy*. 1. vydání. Praha : Prometheus, 1999. 141 s. ISBN 80-7196-137-X.

6. CHARVÁT, J.; ZHOUF, J.; BOČEK, L. *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice*. Dotisk 3. vydání. Praha : Prometheus, 2002. 223 s. ISBN 80-7196-154-X.

7. JANUROVÁ, E.; JANURA, M. *Matematika : průvodce učivem základní a střední školy*. První vydání. Olomouc : Rubico, 1999. 307 s. ISBN 80-85839-31-8.

8. JIRÁSEK, F., et al. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU, 1. část*. 4. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 368 s. ISBN 80-04-24895-0.

9. LIEBL, P. *ROVNICE A NEROVNICE pro I.ročník gymnázií se zaměřením na matematiku*. 3. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989. 116 s. ISBN 80-04-24145-X.

10. ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl : Lineární rovnice Základy statistiky*. 1. vydání. Praha : Prometheus, 1999. 71 s. ISBN 80-7196-167-1.

11. PETÁKOVÁ, J. *MATEMATIKA – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Dotisk 1. vydání. Praha : Prometheus, 2002. 303 s. ISBN 80-7196-099-3.

12. SMIDA, J., et al. *MATEMATIKA pro I. Ročník gymnázií*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989. 288 s. ISBN 80-04-24433-5.

13. ŠINDELÁŘ, K. *MATEMATIKA pro učitele základních škol, III. díl*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1984. 68 s. ISBN 14-610-84.

14. VORŠICKÝ, Z. *Matematika v kostce*. 1. vydání. Havlíčkův Brod : FRAGMENT, 1996. 124 s. ISBN 80-7200-012-8.

15. ZÁMEK, D. *Sbírka úloh z matematiky ROVNICE A NEROVNICE I. : Pracovní kniha pro učitele*. 1. vydání. Praha : ARCTUROS, 1992. 200 s.

Elektronické zdroje dostupné z internetu

16. GLOC, J. *Výuka rovnic a nerovnic* [online]. 2008 [cit. 2011-06-23]. Výuka rovnic a nerovnic. Dostupné z WWW: <http://www.rovnice.kosanet.cz/index.html>.

17. HUSAR, P. *E-matematika.cz* [online]. 2006 [cit. 2011-06-23]. E-matematika.cz. Dostupné z WWW: <http://www.e-matematika.cz/>.

18. *Matematika polopatě* [online]. 2006 [cit. 2011-06-23]. Matematika polopatě. Dostupné z WWW: <http://www.matweb.cz/>.

19. *Matematika pro každého* [online]. 2005 [cit. 2011-06-23]. Matematika pro každého. Dostupné z WWW: <http://matematika-online-a.kvalitne.cz/>.

Seznam příloh

- Ukázka Testu – žák 1
- Ukázka dotazníku – žák 1
- Ukázka dotazníku – žák 2
- Ukázka dotazníku – žák 2
- Ukázka testu – nevyplněný
- Ukázka dotazníku– nevyplněný

Příloha 1 - Ukázka testu – žák 1

Test

Vyřešte následující rovnice v oboru reálných čísel. Čtvrtý příklad se prosím pokuste vyřešit dvěma způsoby, které následně zkuste porovnat. U každého příkladu prosím uveďte kromě výsledku také jak bylo pro vás obtížné určit metodu, kterou ho budete řešit.

Příklad 1

$|-3x+2|=2$

$|2-3x|=2 \quad /^2$

$(2-3x)^2=4$

$(2-3x)^2=4$

$4-12x+9x^2=4$

$-12x+9x^2=0$

???

$9x^2-12x=0$

nevím co s tím dál

Příklad 2

$|2x+5|=|8-2x|$

$(2x+5)^2=(8-2x)^2$

$4x^2+20x+25=64-36x+4x^2$

$20x+36x=64-25$

$56x=39$

$\boxed{x=\frac{39}{56}}$

3/4

Příklad 3

$|-x-2|=-x+2$

$|2+x|=|2-x| \quad /^2$

$(2+x)^2=(2-x)^2$

$4+4x+x^2=4-4x+x^2$

$8x=0$

$\boxed{x=0}$

???

Příklad 4

$|3x-7|=|2x-8| \quad /^2$

$(3x-7)^2=(2x-8)^2$

$9x^2-42x+49=4x^2-36x+64$

$9x^2-4x^2-42x+36x=64-49$

$5x^2-6x-15=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot5\cdot(-15)}}{10}=\frac{6\pm\sqrt{336}}{10}$

nevím co s tím dál

$20 \cdot 15 = 300$

$16 \cdot 16 = 96 + 16$

$13 \cdot 13 = 39 + 13$

Příloha 2 - Ukázka dotazníku – žák 1

Dotazník

Také bych vás rád požádal o vyplnění krátkého dotazníku: Zakroužkujte prosím správnou odpověď, případně odpovězte

1) Použil/a jste v těchto příkladech převedení na kvadratickou rovnici?
   a) Ano
   b) Ne
   c) Nevím

2) Proč jste (ne)použil/a metodu převedení na kvadratickou rovnici?
   - tam kde mi vyšla kvadratická rovnice mi nic jiného nezbývalo

3) Pochopil/a jste tuto metodu při výkladu?
   a) Ano
   b) Ne

4) Myslíte si, že tuto metodu někdy využijete?
   a) Ano
   b) Ne
   c) Nevím

5) Příklady v tomto testu vám přišly?
   a) Příliš těžké
   b) Na horní hranici obtížnosti
   c) Ani těžké ani lehké
   d) Spíše lehké
   e) Příliš snadné

6) Je ještě něco, k čemu byste se rád/a (vzhledem k těmto příkladům a představení metody) vyjádřil/a?
   - občas se mi podaří se dostat někam, ale pak nevím co s tím příkladem mám dál udělat

Děkuji za vyplnění testu i dotazníku.

Příloha 3 - Ukázka testu – žák 2

Test

Vyřešte následující rovnice v oboru reálných čísel. Čtvrtý příklad se prosím pokuste vyřešit dvěma způsoby, které následně zkuste porovnat. U každého příkladu prosím uveďte kromě výsledku také jak bylo pro vás obtížné určit metodu, kterou ho budete řešit.

Příklad 1

$|-3x+2|=2$

$\cancel{|2-3x|=2 \;/^2}$

$\cancel{4-12x+9x^2=4}$

$9x^2-12x=0$

$\cancel{x(4-12x)=0}$

$\cancel{x_1=0 \vee x_2=\frac{3}{4}}$

$|2-3x|=2 \;/^2$

$4-12x+9x^2=4$

$9x^2-12x=0$

$x(3-4x)=0$

$x_1=0 \vee x_2=\frac{4}{3}$

Příklad 2

$|2x+5|=|8-2x|$

$(2x+5)^2=(8-2x)^2$

$4x^2+20x+25=64-32x+4x^2$

$52x=39$

$x=\frac{39}{52}$

$\frac{3}{4}$

Příklad 3

$|-x-2|=-x+2$

$x=0$

?

Příklad 4

$|3x-7|=|2x-8|$

$(3x-7)^2=(2x-8)^2$

$9x^2-42x+49=4x^2-32x+64$

$5x^2-10x-15=0$

$x^2-2x-3=0$

$\cancel{D=100+...}$

$(x+1)(x-3)=0$

$x_1=-1 \vee x_2=+3$

n. b. $\frac{7}{3}; 4$

	$(-\infty; \frac{7}{3}\rangle$	$\langle\frac{7}{3}; 4\rangle$	$\langle 4; \infty)$
$\lvert 3x-7\rvert$	$3x-7$	$7-3x$	$7-3x$
$\lvert 2x-8\rvert$	$-2x+8$	$-2x+8$	$2x-8$
$\lvert 3x-7\rvert=\lvert 2x-8\rvert$	$3x-7=-2x+8$; $5x=15$; $x=3$; $K_1=\{3\}$	$7-3x=-2x+8$; $-x=1$; $x=-1$; $K_2=\{-1\}$	$7-3x=2x-8$; $15=5x$; $x=3$; $K_3=\emptyset$

$K=K_1 \cup K_2 \cup K_3=\{-1; 3\}$

Příloha 4 - Ukázka dotazníku – žák 2

Dotazník

Také bych vás rád požádal o vyplnění krátkého dotazníku: Zakroužkujte prosím správnou odpověď, případně odpovězte

1) Použil/a jste v těchto příkladech převedení na kvadratickou rovnici?
   a) Ano
   b) Ne
   c) Nevím

2) Proč jste (ne)použil/a metodu převedení na kvadratickou rovnici?
   proto vyšlo mi to tak a jsem rychlý

3) Pochopil/a jste tuto metodu při výkladu?
   a) Ano
   b) Ne

4) Myslíte si, že tuto metodu někdy využijete?
   a) Ano
   b) Ne
   c) Nevím

5) Příklady v tomto testu vám přišly?
   a) Příliš těžké
   b) Na horní hranici obtížnosti
   c) Ani těžké ani lehké
   d) Spíše lehké
   e) Příliš snadné

6) Je ještě něco, k čemu byste se rád/a (vzhledem k těmto příkladům a představení metody) vyjádřil/a?
   ne

Děkuji za vyplnění testu i dotazníku.

Příloha 5 - Ukázka testu – nevyplněný

Test

Vyřešte následující rovnice v oboru reálných čísel. Čtvrtý příklad se prosím pokuste vyřešit dvěma způsoby, které následně zkuste porovnat. U každého příkladu prosím uveďte kromě výsledku také jak bylo pro vás obtížné určit metodu, kterou ho budete řešit.

Příklad 1

$|-3x+2|=2$

Příklad 2

$|2x+5|=|8-2x|$

Příklad 3

$|-x-2|=-x+2$

Příklad 4

$|3x-7|=|2x-8|$

Příloha 6 - Ukázka dotazníku – nevyplněný

Dotazník

Také bych vás rád požádal o vyplnění krátkého dotazníku: Zakroužkujte prosím správnou odpověď, případně odpovězte

1) Použil/a jste v těchto příkladech převedení na kvadratickou rovnici?
   a) Ano
   b) Ne
   c) Nevím

2) Proč jste (ne)použil/a metodu převedení na kvadratickou rovnici?

3) Pochopil/a jste tuto metodu při výkladu?
   a) Ano
   b) Ne

4) Myslíte si, že tuto metodu někdy využijete?
   a) Ano
   b) Ne
   c) Nevím

5) Příklady v tomto testu vám přišly?
   a) Příliš těžké
   b) Na horní hranici obtížnosti
   c) Ani těžké ani lehké
   d) Spíše lehké
   e) Příliš snadné

6) Je ještě něco, k čemu byste se rád/a (vzhledem k těmto příkladům a představení metody) vyjádřil/a?

Děkuji za vyplnění testu i dotazníku.