

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



František Štrupl

Einsteinova gravitace ve více dimenzích

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2011

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval zejména svému vedoucímu diplomové práce Prof. RNDr. Jiřímu Podolskému, CSc., DSc., a to nejen za odborné vedení a řadu cenných připomínek, ale především za trpělivost a neutuchající motivaci dotáhnout práci do zdárného konce.

Veliký dík patří také mé rodině, která mě při studiu plně podporovala, a v neposlední řadě i přítelkyni Petře, která mi poskytovala tolik potřebné zázemí.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 05.08.2011

František Štrupl

Název práce: Einsteinova gravitace ve více dimenzích

Autor: František Štrupl

Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Předložená práce zkoumá některé aspekty Einsteinovy gravitace v obecných prostoročasech libovolné dimenze. V první kapitole jsou shrnuty základy použitého geometrického aparátu a zejména odvozen obecný tvar rovnice geodetické deviace reprezentující vztah mezi relativním zrychlením a Riemannovým tenzorem. Druhá kapitola pak představuje různé způsoby algebraické klasifikace Weylova tenzoru ve čtyřech a více dimenzích. Třetí část je věnována zkoumání relativních pohybů testovacích částic a interpretaci různých členů v obecném tvaru rovnice geodetické deviace. Čtvrtá část podrobněji zkoumá vhodnou volbu interpretační báze a souřadnic. Závěrečná pátá kapitola je pak zasvěcena rozboru pohybu testovacích částic v Robinsonově-Trautmanově prostoročase libovolné vyšší dimenze.

Klíčová slova: rovnice geodetické deviace, Weylův tenzor, obecné prostoročasy libovolné dimenze, Robinsonův-Trautmanův prostoročas

Title: Einstein gravitation in higher dimensions

Author: František Štrupl

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In the present work, we study some aspects of Einstein's theory of gravitation in general spacetimes with an arbitrary number of dimensions. In the first chapter we summarize the foundations of used geometric formalism and we derive the equation of geodesic deviation representing the relation between relative acceleration and the Riemann tensor. Second chapter presents different types of algebraic classification of the Weyl tensor in four and higher dimensions. Third chapter is devoted to a detailed examination of the test particle motions and also to the interpretation of different terms in the general equation of geodesic deviation. The fourth section examines appropriate choice of the interpretation frame and the coordinates. The final fifth chapter contains an analysis of the motion of test particles in the Robinson-Trautman spacetime with an arbitrary higher number of dimensions.

Keywords: equation of geodesic deviation, Weyl tensor, general spacetimes of an arbitrary dimension, Robinson-Trautman spacetime

Obsah

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Úvod | 1 |
| Notace a konvence | 5 |
| 1 Základy geometrického aparátu | 6 |
| 1.1 Derivování na obecné varietě | 6 |
| 1.2 Paralelní přenos | 8 |
| 1.3 Křivost | 9 |
| 1.4 Geodetické křivky a geodetická deviace | 10 |
| 2 Algebraická klasifikace Weylova tenzoru | 13 |
| 2.1 Petrovova klasifikace Weylova tenzoru v $D = 4$ | 13 |
| 2.2 Klasifikace Weylova tenzoru ve více dimenzích | 16 |
| 2.2.1 Klasifikace s užitím báze $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i$ | 17 |
| 2.2.2 Klasifikace s užitím báze $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}_i$ | 19 |
| 3 Relativní pohyb částic v obecném prostoročase libovolné dimenze | 21 |
| 3.1 Odvození invariantního tvaru rovnice geodetické deviace | 21 |
| 3.2 Rozbor členů v rovnici geodetické deviace pro různé typy prostoročasů | 29 |
| 3.2.1 Členy obsahující kosmologickou konstantu Λ | 30 |
| 3.2.2 Členy obsahující komponenty Weylova tenzoru Ψ_A | 32 |
| 4 Volba vhodné interpretační báze a přirozených souřadnic | 36 |
| 4.1 Jednoznačnost nulové referenční báze | 36 |
| 4.2 Paralelní přenos nulové referenční báze | 38 |

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.3 | Přirozené souřadnice pro netwistující prostoročasy | 39 |
| 4.4 | Explicitní tvar vektorů nulové referenční báze | 40 |
| 5 | Relativní pohyby částic ve vícerozměrném RT prostoročase | 42 |
| 5.1 | RT řešení a vakuová metrika ve více dimenzích | 43 |
| 5.2 | Pohyb částic v prostoročase typu $RTO(\Lambda)$ | 45 |
| 5.3 | Pohyb částic v prostoročase typu $RTD(\Lambda)$ | 46 |
| 5.3.1 | Vakuová řešení pro případ $\mu \neq 0$ | 47 |
| 5.3.2 | Vakuová řešení pro případ $\mu = 0$ | 48 |
| | Závěr | 48 |
| | Dodatky | 51 |
| A | Nezávislé složky Riemannova a Weylova tenzoru v obecné dimenzi | 52 |
| A.1 | Riemannův tenzor | 52 |
| A.2 | Weylův tenzor | 53 |
| B | Rozklad Weylova tenzoru užitím báze l, n, m_i a C_{abcd} koeficientů | 55 |
| B.1 | Vztah mezi komponentami Weylova tenzoru C_{abcd} a Ψ_A | 56 |
| C | Vztah reálné a komplexní notace pro složky Weylova tenzoru v $D=4$ | 58 |
| | Literatura | 59 |
| | Seznam obrázků | 63 |
| | Seznam tabulek | 64 |

Úvod

Jednou z největších výzev teoretické fyziky v posledních několika dekádách je nalezení sjednocující teorie, která by dokázala popsat zároveň všechny čtyři základní síly – gravitaci, elektromagnetickou sílu, slabou interakci a silnou interakci. V případě elektromagnetické síly a slabé interakce se to již koncem 60. let 20. století podařilo fyzikům Sheldonu Glashowovi, Abdusu Salamovi a Stevenu Weinbergovi, kteří přišli s takzvanou *elektroslabou interakcí* a byli za to v roce 1979 oceněni Nobelovou cenou za fyziku. V průběhu 70. let minulého století pak byla za přispění mnoha významných osobností ze světa fyziky vypracována jednotná kvantová teorie popisující spolu s elektromagnetickou a slabou interakcí i silnou interakci. Tato teorie je dnes všeobecně známa jako *Standardní model*.

Ani přes velikou snahu množství fyziků z celého světa se však do dnešní doby nepodařilo zahrnout do Standardního modelu gravitaci nebo nalézt nějakou konzistentní kvantovou teorii gravitace. Ukazuje se přitom, že gravitace je na subatomární škále velmi odlišná od ostatních interakcí a pro jejich sjednocený popis tak bude potřeba teorie nová.

Žhavým a dominantním kandidátem je již od 80. let minulého století *teorie strun*, která však stále zůstává pouze na úrovni teoretických spekulací a zatím nemá žádnou přímou experimentální podporu. Ta uvažuje o elementárních částicích jakožto jednodimenzionálních objektech, například malých strunách [1], přičemž jednotlivé typy částic jsou pouze různými jejich vibračními módy. Aby však tato teorie byla matematicky konzistentní, je potřeba zavést supersymetrii a 6 dalších rozměrů, neboli prostoročas musí mít 10 dimenzí. Strunová teorie je tak významnou, avšak zdaleka ne jedinou motivací pro zkoumání a porozumění teorii gravitace ve více dimenzích.

Myšlenka více dimenzí má již poměrně dlouhou tradici. Už ve dvacátých letech minulého století se Kaluza a Klein pokoušeli sjednotit elektromagnetismus a gravitaci zavedením pátého rozměru [2], [3]. V poslední době se pak s více dimenzemi můžeme mimo vlastní teorie strun setkat třeba v kontextu AdS/CFT korespondence [4], u bránových kosmologií [5] nebo u různých kvantových teorií gravitace. Naše práce se přitom přímo nezabývá žádnou z výše uvedených teorií, ale zůstává na poli čistě klasické verze obecné teorie relativity a zkoumá některé její aspekty ve více dimenzích.

Existují totiž přirozená vícerozměrná zobecnění Einsteinovy teorie gravitace, která přímo nestanoví žádný počet dimenzí. Na obvykle uvažovaném počtu tří respektive čtyř (jedna časová a tři prostorové) dimenzí tak z její pozice není na první pohled v podstatě nic výjimečného. Přesto mnohá bádání z poslední doby naznačují, že ve více než čtyřech dimenzích přináší kvalitativně nové a odlišné fyzikální jevy, jejichž studium může dosavadní pozici preferovaných čtyř dimenzí oslabit, ale i výrazně posílit. V předložené práci se proto snažíme na některé vlastnosti vícedimenzionální gravitace poukázat a zároveň dosažené výsledky srovnáváme s již dříve získanými a známými výsledky platnými právě ve čtyřech dimenzích. Konkrétně nás zajímá zejména pohyb testovacích částic daný vícerozměrnou rovnicí geodetické deviace, její základní interpretace a chování v prostoročasech Robinsonova-Trautmanova typu.

První kapitola je věnována základům geometrického aparátu. Jsou zde uvedeny základní vlastnosti kovariantní derivace a s její pomocí je pak definován paralelní přenos tenzoru. Pomocí něho dále zavádíme křivost, Riemannův tenzor křivosti, který ji popisuje, a odvozené entity Ricciho tenzor, skalární křivost a Weylův tenzor. V závěru kapitoly pak definujeme v čistě geometrické podobě geodetické křivky a odvozujeme rovnici geodetické deviace vyjadřující fakt, že testovací částice se vůči sobě po geodetikách pohybují s nenulovým relativním zrychlením, které je určeno Riemannovým tenzorem.

Druhá kapitola se podrobně zabývá algebraickou klasifikací Weylova tenzoru ve více dimenzích. Na začátku vycházíme z velmi dobře známé Petrovovy klasifikace

Weylova tenzoru ve čtyřech dimenzích a následně ukazujeme, jak ji zobecnit do více dimenzí. Poukazujeme přitom na skutečnost, že v literatuře jsou pro klasifikaci Weylova tenzoru ve více dimenzích nejčastěji použity dvě volby reálné báze vektorů lišící se normováním. Ve zbytku kapitoly se tedy věnujeme oběma a ukazujeme, jaký je mezi nimi vztah.

Třetí kapitola začíná obecným rozбором invariantní rovnice geodetické deviace ve více dimenzích popisující relativní pohyb volných testovacích částic a dosažené výsledky zároveň srovnává se známými výsledky platnými pro čtyři dimenze. Je v ní ukázáno, že díky volbě vhodné unikátní ortonormální báze reálných vektorů lze rovnici geodetické deviace rozložit na součet členů zodpovědných za různé specifické efekty: členy obsahující kosmologickou konstantu Λ reprezentující izotropní vliv maximálně symetrického kosmologického pozadí, členy obsahující tenzor energie a hybnosti \mathbf{T}_{ab} popisující interakci s hmotou a členy obsahující komponenty Weylova tenzoru Ψ_A odpovídající lokálnímu volnému gravitačnímu poli.

Ve čtvrté kapitole nejprve podrobněji zkoumáme některé důležité vlastnosti nulové referenční (interpretační) báze. Konkrétně poukazujeme na její jednoznačnost a také deklarujeme, jaké podmínky jsou nutné pro její paralelní přenos. Dále ukazujeme, jak volit přirozené souřadnice obecných netwistujících prostoročasů, a nakonec uvádíme, jaký v nich mají explicitní tvar jednotlivé vektory nulové referenční báze.

V páté kapitole představujeme metriku obecného Robinsonova-Trautmanova řešení v libovolné vyšší dimenzi, dále zkoumáme specifické relativní pohyby testovacích částic v obecném vakuovém Robinsonově-Trautmanově prostoročase. Konkrétně se věnujeme pohybům testovacích částic v konformě plochém Robinsonově-Trautmanově prostoročase (typu 0) a v prostoročasech typu D .

Součástí práce jsou také tři dodatky. První z nich, Dodatek A, se věnuje nezávislým složkám Riemannova a Weylova tenzoru a jejich počtu v obecném prostoročase

dimenze D . Dodatek B je zasvěcen rozkladu Weylova tenzoru užitím báze vektorů $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}_i$ a C_{abcd} koeficientů včetně jejich vztahu ke koeficientům Ψ_A použitým v hlavní části textu. Poslední, Dodatek C, ukazuje, jaký je vztah mezi reálnou a komplexní notací pro složky Weylova tenzoru v čtyřech dimenzích.

Notace a konvence

1. V rámci této diplomové práce označujeme proměnnou D , pokud není explicitně uvedeno jinak, obecný počet dimenzí prostoročasu.
2. Dále používáme stejnou znaménkovou konvenci, jako Misner, Thorne a Wheeler v [6]. Signatura metriky má tedy pro libovolný počet dimenzí D obecný tvar $(-, +, \dots, +)$.
3. Tenzory značíme tučným písmem a složky tenzorů obyčejným písmem.
4. Písmena řecké abecedy použitá jako tenzorové indexy značí, jak je obvyklé, příslušné souřadnicové komponenty tenzoru.
5. Využíváme notace abstraktních indexů, což znamená, že k tenzorům přidáváme sadu tučně psaných indexů, pro které využíváme písmena latinské abecedy. Tyto indexy mají stejnou strukturu jako souřadnicové indexy, avšak nejsou svázány s žádnou bází v prostoru tenzorů, neprobíhají žádné konkrétní číselné hodnoty a nemění význam tenzoru.
6. Malá písmena řecké i latinské abecedy a čísla uzavřená v kulatých závorkách použitá jako indexy označují komponenty fyzikálních veličin vyjádřené v ortonormální bázi D nezávislých vektorů.
7. Einsteinovy rovnice mají tvar $\mathbf{R}_{ab} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa\mathbf{T}_{ab}$.

1 Základy geometrického aparátu

Uvažujme situaci, kdy máme prostoročasovou varietu \mathcal{M} obecné dimenze D a symetrickou metriku \mathbf{g}_{ab} s Lorentzovou signaturou $(-, +, \dots, +)$. Nyní chceme definovat vnitřní křivost v řeči paralelního přenosu. Definice paralelního přenosu ovšem vyžaduje více než jen strukturu variety – potřebujeme navíc vědět, jak derivovat vektorová pole. Zavedeme proto standardním postupem operátor kovariantní derivace, viz např. strana 30 v [7], který nám umožní paralelní přenos definovat.

1.1 Derivování na obecné varietě

Kovariantní derivace ∇ na varietě \mathcal{M} je zobrazení, které každému hladkému tenzorovému poli typu (k, l) přiřazuje hladké tenzorové pole typu $(k, l + 1)$ a splňuje přitom pět základních vlastností uvedených níže.

V řeči abstraktních indexů označíme tenzorové pole \mathbf{T} , které je typu (k, l) , jako $\mathbf{T}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}(k, l)$ a působení kovariantní derivace na toto tenzorové pole tak můžeme zapsat $\nabla_c \mathbf{T}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$. Pomocí této notace abstraktních indexů lze pět požadovaných vlastností kovariantní derivace vyjádřit jako:

1. *Linearita*: Pro každé $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}(k, l)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\nabla_c (\alpha \mathbf{A}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \mathbf{B}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c \mathbf{A}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c \mathbf{B}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}. \quad (1.1)$$

2. *Leibnizovo pravidlo*: Pro každé $\mathbf{A} \in \mathcal{T}(k, l)$, $\mathbf{B} \in \mathcal{T}(k', l')$,

$$\begin{aligned} \nabla_e (\mathbf{A}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \mathbf{B}^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}}) &= \\ &= (\nabla_e \mathbf{A}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) \mathbf{B}^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}} + \mathbf{A}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (\nabla_e \mathbf{B}^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

3. *Komutativita s kontrakcí:* Pro každé $\mathbf{A} \in \mathcal{T}(k, l)$,

$$\nabla_{\mathbf{d}} (\mathbf{A}^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_{\mathbf{d}} \mathbf{A}^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}. \quad (1.3)$$

4. *Konzistence s notací tečných vektorů jakožto derivací ve směru na skalárních polích:* Pro každé skalární pole $f \in \mathcal{F}$ a každý tečný vektor $\mathbf{t}^{\mathbf{a}} \in V_p$,

$$\mathbf{t}(f) = \mathbf{t}^{\mathbf{a}} \nabla_{\mathbf{a}} f. \quad (1.4)$$

5. *Absence torze:* Pro každé skalární pole $f \in \mathcal{F}$,

$$\nabla_{\mathbf{a}} \nabla_{\mathbf{b}} f = \nabla_{\mathbf{b}} \nabla_{\mathbf{a}} f. \quad (1.5)$$

Těmito vlastnostmi není ovšem kovariantní derivace ještě určena jednoznačně. Použitím výše uvedených vlastností kovariantní derivace lze ukázat, viz např. strana 32-33 v [7], že pro vztah mezi dvěma různými kovariantními derivacemi $\nabla_{\mathbf{a}}$ a $\tilde{\nabla}_{\mathbf{a}}$ splňujícími tyto vlastnosti platí

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{T}^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} &= \tilde{\nabla}_{\mathbf{a}} \mathbf{T}^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_{i=1}^k \mathbf{C}^{b_i}_{\mathbf{a} \mathbf{d}} \mathbf{T}^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} \\ &\quad - \sum_{j=1}^l \mathbf{C}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{a} c_j} \mathbf{T}^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots d \dots c_l}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Je tedy zřejmě vidět, že rozdíl mezi nimi je plně charakterizován hladkým pseudotenzorovým¹ polem $\mathbf{C}^{\mathbf{c}}_{\mathbf{a} \mathbf{b}}$.

Nejdůležitějším případem vztahu (1.6) je situace, kdy za $\tilde{\nabla}$ vezmeme běžný operátor parciální derivace $\partial_{\mathbf{a}}$. Potom pseudotenzorové pole $\mathbf{C}^{\mathbf{c}}_{\mathbf{a} \mathbf{b}}$ označujeme $\Gamma^{\mathbf{c}}_{\mathbf{a} \mathbf{b}}$ a nazýváme ho *Christoffelovy symboly*. Například pro vektor $\mathbf{t}^{\mathbf{a}}$ můžeme tedy psát

$$\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{t}^{\mathbf{b}} = \partial_{\mathbf{a}} \mathbf{t}^{\mathbf{b}} + \Gamma^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a} \mathbf{c}} \mathbf{t}^{\mathbf{c}}. \quad (1.7)$$

¹Pseudotenzory zde nazýváme objekty, které se na rozdíl od tenzorů neřídí obvyklými transformačními zákony, a jejichž forma se mění v závislosti na zvoleném souřadnicovém systému. Pokud tedy změníme souřadnice například z nečárkovaných na čárkované, změní se rovněž operátor parciální derivace z $\partial_{\mathbf{a}}$ na $\partial_{\mathbf{a}'}$ a také pseudotenzor $\Gamma^{\mathbf{c}}_{\mathbf{a} \mathbf{b}}$ na $\Gamma^{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}' \mathbf{b}'}$. Souřadnicové komponenty $\Gamma^{\mathbf{c}}_{\mathbf{a} \mathbf{b}}$ v nečárkovaných souřadnicích tedy nejsou spojeny se souřadnicovými komponentami $\Gamma^{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}' \mathbf{b}'}$ v čárkovaných souřadnicích tenzorovou transformací.

1.2 Paralelní přenos

S daným operátorem kovariantní derivace ∇_a můžeme nyní asociovat *paralelní přenos vektoru* \mathbf{v}^a podél křivky γ s tečným vektorem \mathbf{t}^a . Řekneme, že vektor \mathbf{v}^a definovaný v každém bodě křivky γ je podél této křivky paralelně přenášen, pokud platí

$$\mathbf{t}^a \nabla_a \mathbf{v}^b = 0. \quad (1.8)$$

Obecněji můžeme definovat paralelní přenos tenzoru libovolného stupně podmínkou

$$\mathbf{t}^a \nabla_a \mathbf{T}^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = 0. \quad (1.9)$$

Jak jsme ukázali dříve, pouze sama struktura variety nestačí k tomu, abychom z mnoha možných tvarů operátorů kovariantní derivace vybrali jeden, který by byl přirozeně preferovaný před ostatními. Takový tvar ale můžeme najít, pokud vezmeme navíc v úvahu konkrétní metriku \mathbf{g}_{ab} na varietě. Ta nám totiž umožňuje naložit na kovariantní derivaci další přirozenou podmínku, a to: máme-li dva vektory \mathbf{v}^a a \mathbf{w}^a , budeme navíc požadovat, aby se jejich skalární součin $\mathbf{g}_{ab} \mathbf{v}^a \mathbf{w}^b$ neměnil při paralelním přenosu podél libovolné křivky. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\mathbf{t}^a \nabla_a (\mathbf{g}_{bc} \mathbf{v}^b \mathbf{w}^c) = 0 \quad (1.10)$$

pro \mathbf{v}^b a \mathbf{w}^c splňující (1.8). Vztah (1.10) lze užitím Leibnizova pravidla upravit na tvar

$$\mathbf{t}^a \mathbf{v}^b \mathbf{w}^c \nabla_a \mathbf{g}_{bc} = 0, \quad (1.11)$$

který bude platit pro všechny křivky a paralelně přenášené vektory právě tehdy, když

$$\nabla_a \mathbf{g}_{bc} = 0. \quad (1.12)$$

Díky existenci metriky tak pro kovariantní derivaci dostáváme další přirozenou podmínku vyjádřenou vztahem (1.12). Ta již určuje tvar kovariantní derivace jednoznačně, viz například strana 35 v [7]. Zejména lze ukázat, že pomocí „obyčejné“ derivace ∂_a můžeme vyjádřit Christoffelovy symboly dobře známým vztahem

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{cd} (\partial_a \mathbf{g}_{bd} + \partial_b \mathbf{g}_{ad} - \partial_d \mathbf{g}_{ab}). \quad (1.13)$$

1.3 Křivost

V předchozí části jsme ukázali, že máme-li daný operátor kovariantního derivování, víme také, jak paralelně přenášet vektory podél křivek. Vektor získaný paralelním přenosem obecně závisí na křivce, podél které ho přenášíme. Právě této závislosti můžeme využít při definování křivosti a Riemannova tenzoru, který křivost charakterizuje.

Nechť tedy $\nabla_{\mathbf{a}}$ je kovariantní derivace a $\omega_{\mathbf{a}}$ je pole 1-forem (duální vektorové pole), potom *Riemannův tenzor křivosti* $\mathbf{R}_{\mathbf{abc}}{}^{\mathbf{d}}$ je dán vztahem

$$\mathbf{R}_{\mathbf{abc}}{}^{\mathbf{d}} \omega_{\mathbf{d}} = \nabla_{\mathbf{a}} \nabla_{\mathbf{b}} \omega_{\mathbf{c}} - \nabla_{\mathbf{b}} \nabla_{\mathbf{a}} \omega_{\mathbf{c}}. \quad (1.14)$$

Lze se přesvědčit, že takto definovaný Riemannův tenzor v podstatě vyjadřuje míru závislosti paralelního přenosu na cestě, podle které probíhá.

Pro obecné tenzorové pole $\mathbf{T}^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}$ je Riemannův tenzor dán vztahem

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{a}} \nabla_{\mathbf{b}} - \nabla_{\mathbf{b}} \nabla_{\mathbf{a}}) \mathbf{T}^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} &= - \sum_{i=1}^k \mathbf{R}_{\mathbf{abe}}{}^{c_i} \mathbf{T}^{c_1 \dots e \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} \\ &+ \sum_{j=1}^l \mathbf{R}_{\mathbf{abd}_j}{}^e \mathbf{T}^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots e \dots d_l}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pro Riemannův tenzor platí následující základní vlastnosti:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{abc}}{}^{\mathbf{d}} = -\mathbf{R}_{\mathbf{bac}}{}^{\mathbf{d}}, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{R}_{[\mathbf{abc}]}{}^{\mathbf{d}} = 0, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{abcd}} = -\mathbf{R}_{\mathbf{abdc}}, \quad (1.18)$$

$$\nabla_{[\mathbf{a}} \mathbf{R}_{\mathbf{bc}]}{}^{\mathbf{d}}{}^{\mathbf{e}} = 0 \quad (\text{Bianchiho identita}). \quad (1.19)$$

Často se mezi vlastnostmi uvádí také

$$\mathbf{R}_{\mathbf{abcd}} = \mathbf{R}_{\mathbf{cdab}}, \quad (1.20)$$

která je však triviálním důsledkem rovnic (1.16) a (1.18). Dále obvyklým způsobem definujeme *Ricciho tenzor* $\mathbf{R}_{\mathbf{ab}}$ jako kontrakci Riemannova tenzoru

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ac}} = \mathbf{R}^{\mathbf{b}}{}_{\mathbf{abc}} \quad (1.21)$$

a skalární křivost \mathbf{R} jako stopu Ricciho tenzoru

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_a{}^a. \quad (1.22)$$

Zavádíme také *Weylův tenzor* \mathbf{C}_{abcd} , který představuje bezstopou část Riemannova tenzoru a pro počet dimenzí $D \geq 3$ je dán vztahem

$$\mathbf{R}_{abcd} = \mathbf{C}_{abcd} + \frac{2}{D-2} (\mathbf{g}_{a[c}\mathbf{R}_{d]b} - \mathbf{g}_{b[c}\mathbf{R}_{d]a}) - \frac{2}{(D-1)(D-2)} \mathbf{R} \mathbf{g}_{a[c}\mathbf{g}_{d]b}. \quad (1.23)$$

Pro Weylův tenzor platí stejně jako pro Riemannův tenzor vlastnosti (1.16), (1.17) a (1.18).

1.4 Geodetické křivky a geodetická deviace

Geodetikami, neboli *geodetickými křivkami*, intuitivně myslíme „nejpřímější možné křivky“, které lze v zakřivené geometrii vytvořit. Máme-li dán operátor kovariantní derivace ∇_a , můžeme je definovat jako křivky, jejichž tečný vektor \mathbf{u}^a se podél nich přenáší paralelním přenosem. Musí pro ně tedy platit rovnice²

$$\mathbf{u}^a \nabla_a \mathbf{u}^b = 0, \quad (1.24)$$

kteřou lze užitím vztahu (1.7) převést do podoby

$$\partial_a \mathbf{u}^b + \Gamma^b{}_{ac} \mathbf{u}^c = 0. \quad (1.25)$$

V souřadnicích pak můžeme pro geodetickou křivku $x^\mu(\tau)$ zapsat rovnici (1.25) ve tvaru

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0, \quad (1.26)$$

přičemž D -rychlost³ je $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ a pro $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ platí dobře známý vztah

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\beta\nu,\alpha} + g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (1.27)$$

²Někdy se lze setkat také s definicí, kdy geodetika musí splňovat místo toho rovnici $\mathbf{u}^a \nabla_a \mathbf{u}^b = \alpha \mathbf{u}^b$, jejíž splnění implikuje pouze zachování směru přenášeného vektoru, nikoliv jeho velikosti. Lze však ukázat, že takovou křivku lze vždy reparametrizovat tak, aby splňovala i rovnici (1.24).

³Pojmem D -rychlost zde označujeme přirozené zobecnění dobře známé čtyřrychlosti do více dimenzí.

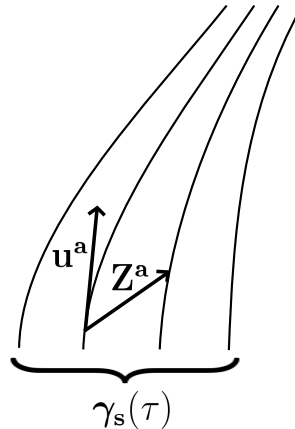
Nakonec tedy v souřadnicích dostáváme

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (1.28)$$

Nyní uvažujme jednoparametrickou množinu geodetických křivek γ_s , takže pro každé $s \in \mathbb{R}$ je křivka $\gamma_s(\tau)$ geodetikou s afinním parametrem τ a zobrazení $(\tau, s) \rightarrow \gamma_s(\tau)$ je difeomorfní⁴. Označme dále Σ dvoudimenzionální nadplochu, která všechny křivky γ_s obsahuje. Pak můžeme vybrat τ a s jako souřadnice na Σ . Vektorové pole $\mathbf{u}^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a = (\partial_\tau)^a$ je tečné ke geodetikám a splňuje tedy rovnici

$$\mathbf{u}^a \nabla_a \mathbf{u}^b = 0. \quad (1.29)$$

Vektorové pole $\mathbf{Z}^a = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a = (\partial_s)^a$ reprezentuje posunutí k infinitesimálně blízké geodetice - vektory tohoto pole se nazývají *vektory posunutí*.



Obrázek 1.1: Jednoparametrická množina geodetik $\gamma_s(\tau)$ se zobrazeným tečným vektorem \mathbf{u}^a a vektorem posunutí \mathbf{Z}^a .

Protože \mathbf{u}^a a \mathbf{Z}^a jsou (lokálně) souřadnicová vektorová pole, platí, že spolu navzájem komutují,⁵ neboli

$$\mathbf{u}^b \nabla_b \mathbf{Z}^a = \mathbf{Z}^b \nabla_b \mathbf{u}^a. \quad (1.30)$$

⁴Difeomorfismem nazýváme zobrazení, které je hladké, na a existuje k němu hladké inverzní zobrazení.

⁵Tedy výsledek paralelního přenosu jednoho podle druhého nezávisí na jejich pořadí.

V důsledku toho lze bez újmy na obecnosti volit \mathbf{Z}^a kolmé na \mathbf{u}^b (viz strana 46 v [7]), neboli

$$\mathbf{Z}^a \mathbf{u}_a = 0. \quad (1.31)$$

Veličina $\mathbf{v}^a = \mathbf{u}^b \nabla_b \mathbf{Z}^a$ udává rychlost změny vektoru posunutí podél geodetiky. Můžeme tedy \mathbf{v}^a interpretovat jako *relativní rychlost* dvou infinitesimálně blízkých geodetik a dále můžeme také interpretovat

$$\mathbf{a}^a \equiv \mathbf{u}^c \nabla_c \mathbf{v}^a = \mathbf{u}^c \nabla_c (\mathbf{u}^b \nabla_b \mathbf{Z}^a) \quad (1.32)$$

jako *relativní zrychlení* dvou infinitesimálně blízkých geodetik.

Nyní lze již odvodit rovnici ukazující vztah mezi relativním zrychlením \mathbf{a}^a a Riemannovým tenzorem. Vyjdeme z rovnice (1.32), kterou díky komutativitě D -rychlosti s vektorem posunutí, viz vztah (1.30), upravíme do tvaru

$$\mathbf{a}^a = \mathbf{u}^c \nabla_c (\mathbf{u}^b \nabla_b \mathbf{Z}^a) = \mathbf{u}^c \nabla_c (\mathbf{Z}^b \nabla_b \mathbf{u}^a). \quad (1.33)$$

Ten můžeme užitím Leibnizova pravidla přepsat na

$$\mathbf{a}^a = (\mathbf{u}^c \nabla_c \mathbf{Z}^b) (\nabla_b \mathbf{u}^a) + \mathbf{Z}^b \mathbf{u}^c \nabla_c \nabla_b \mathbf{u}^a \quad (1.34)$$

a dále aplikací vztahu (1.14) pro Riemannův tenzor dostáváme

$$\mathbf{a}^a = (\mathbf{Z}^c \nabla_c \mathbf{u}^b) (\nabla_b \mathbf{u}^a) + \mathbf{Z}^b \mathbf{u}^c \nabla_b \nabla_c \mathbf{u}^a - \mathbf{R}_{cbd}{}^a \mathbf{Z}^b \mathbf{u}^c \mathbf{u}^d. \quad (1.35)$$

Rovnici můžeme opět díky Leibnizovu pravidlu dále upravit

$$\mathbf{a}^a = \mathbf{Z}^c \nabla_c (\mathbf{u}^b \nabla_b \mathbf{u}^a) - \mathbf{R}_{cbd}{}^a \mathbf{Z}^b \mathbf{u}^c \mathbf{u}^d = -\mathbf{R}_{cbd}{}^a \mathbf{Z}^b \mathbf{u}^c \mathbf{u}^d, \quad (1.36)$$

takže konečně dostáváme finální vztah mezi relativním zrychlením a Riemannovým tenzorem

$$\mathbf{a}^a = -\mathbf{R}_{cbd}{}^a \mathbf{Z}^b \mathbf{u}^c \mathbf{u}^d. \quad (1.37)$$

Tato rovnice je známá jako *rovnice geodetické deviace* a vyjadřuje fakt, že testovací částice pohybující se po geodetikách se vůči sobě pohybují s nenulovým relativním zrychlením, které je určeno Riemannovým tenzorem. Zrychlení přitom vymizí jen a pouze tehdy, když je Riemannův tenzor nulový.

2 Algebraická klasifikace Weylova tenzoru

Abychom mohli dále podrobně zkoumat a klasifikovat pohyby volných testovacích částic v obecném prostoročase, je dobré se nejprve na úvod seznámit s algebraickou klasifikací Weylova tenzoru ve více dimenzích, která se nám pro tento účel bude hodit. Ta vychází ze známé *Petrovovy klasifikace* Weylova tenzoru ve čtyřech dimenzích a je jejím zobecněním.

2.1 Petrovova klasifikace Weylova tenzoru v $D = 4$

Petrovova klasifikace, poprvé představená A. Z. Petrovem v polovině 50. let [8], představuje způsob, jak invariantně určit typ a tedy možnou algebraickou strukturu Weylova tenzoru v daném bodě uvažovaného prostoročasu. Pokud je navíc tento typ stejný pro všechny body zmíněného prostoročasu, říkáme, že tento prostoročas je určitého Petrovova typu. Existuje přitom několik způsobů, jak ke klasifikaci dojít. V následující pasáži použijeme jeden z nejelegantnějších a také nejpoužívanějších, a to *Newmanův-Penroseův formalismus*.

Uvažujme nulovou komplexní tetradu $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$, pro kterou platí

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -1, \quad \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 1 \quad (2.1)$$

a všechny ostatní kombinace jsou nulové. Potom promítnutím Weylova tenzoru na vektory této tetrady dostaneme pět komplexních koeficientů, které jsou známy jako

Newmanovy-Penroseovy koeficienty

$$\Psi_0 = C_{abcd}k^a m^b k^c m^d, \quad (2.2)$$

$$\Psi_1 = C_{abcd}k^a l^b k^c m^d, \quad (2.3)$$

$$\Psi_2 = C_{abcd}k^a m^b \bar{m}^c l^d, \quad (2.4)$$

$$\Psi_3 = C_{abcd}l^a k^b l^c \bar{m}^d, \quad (2.5)$$

$$\Psi_4 = C_{abcd}l^a \bar{m}^b l^c \bar{m}^d. \quad (2.6)$$

Tyto koeficienty plně popisují Weylův tenzor, a tedy i volné gravitační pole.

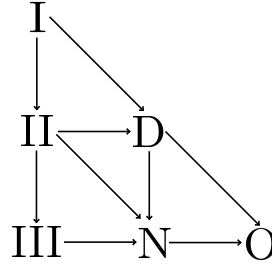
Víme přitom (viz [9]), že v každém bodě každého prostoročasu existují čtyři takzvané *hlavní nulové směry*,¹ tedy směry, kdy jestliže vektor \mathbf{k} nulové tetrády $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ identifikujeme s některým z nich, tak koeficient Ψ_0 vymizí, neboli $\Psi_0 = 0$. Tyto směry jsou obecně různé, avšak ve speciálních případech mohou koincidovat, pak mluvíme o jejich degeneraci.

Podle degenerace hlavních nulových směrů definujeme tzv. *algebraické typy prostoročasu*:

- **I** = {1111} : čtyři různé nulové směry,
- **II** = {211} : jeden dvojnásobný a dva odlišné jednonásobné nulové směry,
- **D** = {22} : dva různé dvojnásobné nulové směry,
- **III** = {31} : jeden trojnásobný a jeden odlišný jednonásobný nulový směr,
- **N** = {4} : čtyřnásobný nulový směr,
- **O** = {−} : Weylův tenzor vymizí, což odpovídá konformě plochému prostoročasu.

Všechny Petrovovy typy vyjma typů **O** a **I** jsou nazývány algebraicky speciálními. Jednotlivým typům prostoročasu pak odpovídají také příslušné ekvivalentní podmínky pro Newmanovy-Penroseovy koeficienty, viz obrázek 2.1 a tabulka 2.1.

¹Z anglického *principal null direction*. V literatuře se však často setkáváme pouze se zkratkou PND.



Obrázek 2.1: Penroseovo schéma názorně zobrazuje vztahy mezi jednotlivými algebraickými typy prostoročasů. Každá šipka v diagramu naznačuje degeneraci některých hlavních nulových směrů.

| | |
|--------------|-----------------------------------------------------------------|
| I | $\Psi_0 = 0, \Psi_1 \neq 0$ |
| II, D | $\Psi_0 = 0, \Psi_1 = 0, \Psi_2 \neq 0$ |
| III | $\Psi_0 = 0, \Psi_1 = 0, \Psi_2 = 0, \Psi_3 \neq 0$ |
| N | $\Psi_0 = 0, \Psi_1 = 0, \Psi_2 = 0, \Psi_3 = 0, \Psi_4 \neq 0$ |

Tabulka 2.1: Vztah mezi jednotlivými algebraickými typy a ekvivalentními podmínkami pro komplexní komponenty Weylova tenzoru v Newmanově-Penroseově formalismu. Je vidět, že existují takové nulové tetrády, ve kterých dané komponenty zcela vymizí.

Jak bylo řečeno již v úvodu této části, ve čtyřdimenzionálních prostoročasech existuje několik různých způsobů jak dospět k Petrovově algebraické klasifikaci. Avšak pouze některé z nich mohou být zobecněny také do vyšších dimenzí. Pojďme se tedy ještě na závěr této části krátce ve čtyřech dimenzích podívat na způsob, který lze později použít i pro více dimenzí.

Již dříve jsme uvedli, že ve standardní nulové komplexní tetradě $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ má Weylův tenzor pět komplexních komponent $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$. Boost v rovině určené vektory \mathbf{k} a \mathbf{l} je popsán rovnicemi

$$\hat{\mathbf{k}} = B \mathbf{k}, \quad (2.7)$$

$$\hat{\mathbf{l}} = B^{-1} \mathbf{l}, \quad (2.8)$$

příčemž jednotlivé komponenty se transformují jako

$$\hat{\Psi}_0 = B^2\Psi_0, \quad (2.9)$$

$$\hat{\Psi}_1 = B^1\Psi_1, \quad (2.10)$$

$$\hat{\Psi}_2 = \Psi_2, \quad (2.11)$$

$$\hat{\Psi}_3 = B^{-1}\Psi_3, \quad (2.12)$$

$$\hat{\Psi}_4 = B^{-2}\Psi_4. \quad (2.13)$$

Je tedy vidět, že komponenty Weylova tenzoru $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ mají *boostové váhy*² 2, 1, 0, -1, -2. Pokud ovšem \mathbf{k} koinciduje s některým hlavním nulovým směrem, víme, že Ψ_0 vymizí. Ostatní komponenty mohou být nulové pouze v algebraicky speciálních případech. Konkrétně je vidět, že pro typ **I** lze vhodnou transformací vynulovat komponenty s boostovou váhou větší nebo rovnou dvěma, pro typ **II** lze vynulovat komponenty s boostovou váhou větší nebo rovnou jedné, pro typ **III** lze vynulovat komponenty s boostovou váhou větší nebo rovnou nule, a konečně pro typ **N** lze vynulovat komponenty s boostovou váhou větší nebo rovnou -1. Typ **D**, který je speciálním případem typu **II**, pak odpovídá situaci, kdy mohou být vynulovány všechny komponenty s nenulovou boostovou váhou.

V následující části popíšeme obdobný přístup pro klasifikaci Weylova tenzoru ve více dimenzích.

2.2 Klasifikace Weylova tenzoru ve více dimenzích

Na rozdíl od čtyřrozměrného prostoročasu, ve vícerozměrných prostoročasech používáme pro klasifikaci Weylova tenzoru reálnou bázi vektorů. V literatuře se lze přitom nejčastěji setkat s těmito dvěma volbami, jež se liší znaménkem normování:

- Báze tvořená vektory $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i$, která je použita například v [10], [11] a [12]. Této bázi se budeme v dalším textu věnovat přednostně, neboť cílem předložené práce je mimo jiné také porovnání získaných výsledků s výsledky uvedenými v [12] platnými pro čtyři dimenze.

²Ríkáme, že veličina q má boostovou váhu b , jestliže se při boostu transformuje jako $\hat{q} = B^b q$.

- Báze tvořená vektory $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}_i$, která se v současné literatuře vyskytuje častěji, viz například [9]. Pro úplnost tedy budeme některé důležité výsledky prezentovat i s použitím této báze.

V následujících dvou částech rozebereme podrobněji obě z nich a ukážeme, jak v nich klasifikace Weylova tenzoru ve více dimenzích probíhá.

2.2.1 Klasifikace s užitím báze $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i$

Uvažujme bázi D reálných vektorů

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{l}, \quad \mathbf{m}_i, \quad i = 2, \dots, D-1, \quad (2.14)$$

kde vektory \mathbf{k} a \mathbf{l} jsou nulové vektory splňující následující podmínky

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -1 \quad (2.15)$$

a $D-2$ vektorů \mathbf{m}_i jsou reálné prostorové vektory, pro něž platí následující normalizace

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_i = 0, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_i = 0, \quad \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j = \delta_{ij}. \quad (2.16)$$

Metrika, která má tvar

$$g_{ab} = -2k_{(a}l_{b)} + \delta_{ij}(m_i)_a(m_j)_b, \quad (2.17)$$

tak zůstává nezměněna v případě následujících Lorentzovských transformací:

- Nulová rotace s pevným \mathbf{k} parametrizovaná³ prostorovým vektorem $\mathbf{L} = L^i \mathbf{m}_i$:

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad \mathbf{l}' = \mathbf{l} + \sqrt{2}L^i \mathbf{m}_i + |L|^2 \mathbf{k}, \quad \mathbf{m}'_i = \mathbf{m}_i + \sqrt{2}L_i \mathbf{k}. \quad (2.18)$$

- Nulová rotace s pevným \mathbf{l} parametrizovaná prostorovým vektorem $\mathbf{K} = K^i \mathbf{m}_i$:

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \sqrt{2}K^i \mathbf{m}_i + |K|^2 \mathbf{l}, \quad \mathbf{l}' = \mathbf{l}, \quad \mathbf{m}'_i = \mathbf{m}_i + \sqrt{2}K_i \mathbf{l}. \quad (2.19)$$

³Na tomto místě poznamenejme, že námi použitá parametrizace nulových rotací se liší od té použité například v [13] faktorem $\sqrt{2}$.

- Boost v rovině dané vektory $\mathbf{k} - \mathbf{l}$ parametrizovaný reálným číslem B :

$$\mathbf{k}' = B\mathbf{k}, \quad \mathbf{l}' = B^{-1}\mathbf{l}, \quad \mathbf{m}_i' = \mathbf{m}_i. \quad (2.20)$$

- Rotace v prostoru daném vektory \mathbf{m}_i parametrizovaná ortogonální maticí Φ_i^j :

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad \mathbf{l}' = \mathbf{l}, \quad \mathbf{m}_i' = \Phi_i^j \mathbf{m}_j, \quad \text{kde} \quad \Phi_i^j \Phi_k^l \delta_{jl} = \delta_{ik}. \quad (2.21)$$

Nyní definujeme *boostový řád* Weylova tenzoru⁴ \mathbf{C}_{abcd} jako maximální boostovou váhu jeho komponent. Dá se pak snadno ukázat, že boostový řád závisí pouze na volbě nulového směru \mathbf{k} , a tak ho spin ani boost neovlivňují. Dále budeme tedy značit boostový řád $b(\mathbf{k})$, čímž dáváme najevo jeho závislost právě na volbě \mathbf{k} , a b_{max} maximální hodnotu $b(\mathbf{q})$ vzatou přes všechny nulové vektory \mathbf{q} . Říkáme pak, že nulový vektor \mathbf{q} je *sousměrný* s Weylovým tenzorem právě tehdy, když $b(\mathbf{q}) < b_{max}$, a číslo $b_{max} - b(\mathbf{q}) - 1$ nazýváme stupněm sousměrnosti.

Pro Weylův tenzor mají sousměrné nulové vektory (směry) význam přirozeného zobecnění hlavních nulových směrů ze čtyřrozměrného případu a dále je budeme nazývat WANDy (z anglického Weyl Aligned Null Directions).

Klasifikace Weylova tenzoru ve vyšších dimenzích může být založena právě na existenci těchto WANDů s různým stupněm sousměrnosti. Weylův tenzor v libovolné dimenzi má obecně komponenty s boostovými vahami $-2 \leq b \leq 2$, a tak stupeň sousměrnosti WANDů nemůže překročit 3.

Říkáme, že primární typ sousměrnosti Weylova tenzoru je G , pokud neexistují žádné WANDy a dále ho nazývám 1, 2, 3, resp. 4 pokud maximálně sousměrný nulový vektor má stupeň sousměrnosti 0, 1, 2, resp. 3.

Dále jestliže máme zafixované dané \mathbf{k} jako WAND s maximálním stupněm sousměrnosti, pak můžeme hledat \mathbf{l} s maximálním stupněm sousměrnosti tak, aby zachovávalo požadovanou vazbu

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -1 \quad (2.22)$$

a obdobně tak definovat sekundární typ sousměrnosti. Typ sousměrnosti je tak pár sestávající z primárního a sekundárního typu sousměrnosti. Všechny možné typy

⁴Tato definice však platí i pro obecný tenzor.

sousměrnosti, jejich označení tzv. Weylovými typy a vztah k Petrovovým typům ve čtyřech dimenzích jsou shrnuty v tabulce 2.2, která byla publikována například v [14] a [9].

Zásadní rozdíl mezi čtyřmi a více dimenzemi je tedy v tom, že zatímco ve čtyřdimenzionálním prostoročase WANDy vždy existují a koincidují s hlavními nulovými směry známými ze standardní čtyřrozměrné algebraické klasifikace, ve více dimenzích v obecném případě WANDy existovat nemusí.

2.2.2 Klasifikace s užitím báze \mathbf{l} , \mathbf{n} , \mathbf{m}_i

Stejně jako v [9] zavedeme bázi D reálných vektorů

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{l}, \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{m}_i, \quad i = 2, \dots, D-1. \quad (2.23)$$

Vektory \mathbf{l} a \mathbf{n} jsou přitom obdobně jako v předchozím případě nulovými vektory

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (2.24)$$

a $D-2$ vektorů \mathbf{m}_i jsou reálné prostorové vektory, pro něž platí následující normalizace

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_i = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_i = 0, \quad \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j = \delta_{ij}. \quad (2.25)$$

Metrika má v tomto případě tvar

$$g_{ab} = 2n_{(a}l_{b)} + \delta_{ij}(m_i)_a(m_j)_b, \quad (2.26)$$

a opět zůstává nezměněna v případě nulových rotací s pevným \mathbf{l} , nulových rotací s pevným \mathbf{n} , spinů i boostů.

Je tedy vidět, že rozdíl mezi oběma bázemi spočívá ve znaménku pro vzájemnou normalizaci nulových vektorů. Algebraická klasifikace Weylova tenzoru tedy v této bázi probíhá obdobně jako v případě báze \mathbf{k} , \mathbf{l} , \mathbf{m}_i až na to, že při hledání sekundárního typu sousměrnosti požadujeme zachování vazby

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (2.27)$$

místo (2.22).

| Více dimenzí | | Čtyři dimenze | |
|--------------|------------------|---------------|------------------|
| Weylův typ | Typ sousměrnosti | Petrovův typ | Typ sousměrnosti |
| G | G | | |
| I | (1) | | |
| I_i | (1,1) | I | (1,1,1,1) |
| II | (2) | | |
| II_i | (2,1) | II | (2,1,1) |
| D | (2,2) | D | (2,2) |
| III | (3) | | |
| III_i | (3,1) | III | (3,1) |
| N | (4) | N | (4) |

Tabulka 2.2: Klasifikace Weylova tenzoru ve čtyřech dimenzích a více dimenzích. Povšimněme si, že ve čtyřech dimenzích je typ sousměrnosti (1) nezbytně ekvivalentní typu (1,1), typ (2) typu (2,1) a typ (3) typu (3,1). Dále je také vidět, že vzhledem k existenci alespoň jednoho hlavního nulového směru ve čtyřech dimenzích typ G vůbec neexistuje.

3 Relativní pohyb částic v obecném prostorově libovolné dimenze

K fyzikální interpretaci různých řešení Einsteinových rovnic lze použít rovnici geodetické deviace popisující relativní pohyby sousedních testovacích částic. Proto v této kapitole nejprve podrobně odvodíme rovnici geodetické deviace v obecném prostorově libovolné dimenze, a poté se budeme věnovat její interpretaci.

3.1 Odvození invariantního tvaru rovnice geodetické deviace

Uvažujeme volnou testovací částici pohybující se podél časupodobné geodetiky $\gamma(\tau) \equiv x^\mu(\tau)$, tedy splňující rovnici

$$\mathbf{u}^a \nabla_a \mathbf{u}^b = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (3.1)$$

viz (1.24), (1.28), kde τ je vlastní čas uvažované částice. D -rychlost \mathbf{u}^a je normalizována

$$\mathbf{g}_{ab} \mathbf{u}^a \mathbf{u}^b = u_\alpha u^\alpha = -1. \quad (3.2)$$

Dále uvažujeme další infinitesimálně blízkou volnou testovací částici pohybující se po geodetice $\tilde{\gamma}(\tau) \equiv \tilde{x}^\mu(\tau)$, jejíž pozice je v libovolném čase τ přirozeně dána *vektorem posunutí* $\mathbf{Z}^a(\tau) = Z^\mu(\tau) \partial_\mu$. Rovnici geodetické deviace (1.37) odvozenou již dříve můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{a}^a = -\mathbf{R}^a_{\ bcd} \mathbf{u}^b \mathbf{Z}^c \mathbf{u}^d, \quad (3.3)$$

což lze v souřadnicových složkách zapsat jako

$$\frac{D^2 Z^\alpha}{d\tau^2} = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta Z^\gamma u^\delta. \quad (3.4)$$

Tato rovnice může být v zásadě vyřešena pro $Z^\alpha(\tau)$ a poskytnout nám tak informace o lokálních relativních pohybech uvažovaných testovacích částic. Problémem ovšem je, že veličina Z^α je závislá na volbě konkrétních souřadnic. Abychom získali výsledky, které na volbě souřadnic závislé nejsou, a hodí se tak lépe pro fyzikální interpretaci, zavedeme dále bázi D nezávislých ortonormálních vektorů $\{\mathbf{e}_a\} = \{\mathbf{e}_{(0)}, \dots, \mathbf{e}_{(D-1)}\}$. Nejpřirozenější volba je taková, kdy $\mathbf{e}_{(0)} = \mathbf{u}$ a $D - 1$ vektorů $\{\mathbf{e}_{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{(D-1)}\}$ jsou prostorupodobné jednotkové vektory tvořící kartézskou bázi v privilegované lokální $(D - 1)$ -dimenzionální prostorupodobné nadploše ortogonální k \mathbf{u} . Jinými slovy, uvažujeme množinu ortonormálních bází podél geodetiky (3.1)

$$\{\mathbf{e}_a\} = \{\mathbf{e}_{(0)}, \dots, \mathbf{e}_{(D-1)}\}, \quad \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta = \eta_{ab}, \quad (3.5)$$

kde $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Duální báze má pak tvar $\mathbf{e}^{(0)} = -\mathbf{u}$ a $\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{e}_{(i)}$, $i = 1, \dots, D - 1$. Projekcí rovnice geodetické deviace (3.1) na zavedenou bázi (3.5) dostáváme

$$\ddot{Z}^{(i)} = -R^{(i)}{}_{(0)(j)(0)} Z^{(j)}, \quad (3.6)$$

kde

$$Z^{(i)} = \mathbf{e}_a^{(i)} \mathbf{Z}^a \quad (3.7)$$

je $D - 1$ prostorupodobných komponent vektoru posunutí \mathbf{Z} určujícího vzdálenost mezi testovacími částicemi a

$$\ddot{Z}^{(i)} = \mathbf{e}_a^{(i)} \frac{D^2 \mathbf{Z}^a}{d\tau^2} \quad (3.8)$$

je $D - 1$ relativních zrychlení. Časovou komponentu přitom uvažovat nemusíme, neboť ta je v důsledku skutečnosti, že \mathbf{u} se přenáší podél geodetiky paralelně, a díky symetrii Riemannova tenzoru rovna nule

$$\frac{D^2 Z^{(0)}}{d\tau^2} = -u_\mu \frac{D^2 Z^\mu}{d\tau^2} = u_\mu R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha Z^\beta u^\gamma = 0. \quad (3.9)$$

V důsledku toho pro $Z^{(0)}$ platí

$$Z^{(0)} = a_0 \tau + b_0, \quad (3.10)$$

kde a_0, b_0 jsou konstanty. Přírozenou volbou počátečních podmínek tak můžeme zvolit $Z^{(0)} \equiv 0$, takže všechny testovací částice jsou „synchronizovány“ pomocí τ a vždy zůstávají ve stejné lokální prostorupodobné nadploše. Vidíme tedy, že komponenta $Z^{(0)}(\tau)$ neobsahuje žádnou fyzikálně důležitou informaci a volba $\mathbf{e}_{(0)} = \mathbf{u}$ je tak výhodná, neboť redukuje fyzikálně nevýznamné veličiny.

Dále spočteme bázové komponenty Riemannova tenzoru $R_{(i)(0)(j)(0)}$, díky čemuž dostaneme explicitní výraz pro rovnici geodetické deviace ve tvaru (3.6), který nám poskytne důležité informace o charakteru pohybů testovacích částic. Již dříve jsme uvedli, že pro rozklad Riemannova tenzoru platí

$$\mathbf{R}_{abcd} = \mathbf{C}_{abcd} + \frac{2}{D-2} (\mathbf{g}_{a[c}\mathbf{R}_{d]b} - \mathbf{g}_{b[c}\mathbf{R}_{d]a}) - \frac{2}{(D-1)(D-2)} \mathbf{R}\mathbf{g}_{a[c}\mathbf{g}_{d]b}, \quad (3.11)$$

přičemž skalární křivost a Ricciho tenzor vyjádřené z Einsteinových rovnic

$$\mathbf{R}_{ab} - \frac{1}{2}\mathbf{R}\mathbf{g}_{ab} + \Lambda\mathbf{g}_{ab} = \kappa\mathbf{T}_{ab} \quad (3.12)$$

lze zapsat jako

$$\mathbf{R} = \frac{2}{2-D}(\kappa\mathbf{T} - \Lambda D), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{R}_{ab} = \frac{2}{D-2}\Lambda\mathbf{g}_{ab} + \kappa(\mathbf{T}_{ab} - \frac{1}{D-2}\mathbf{g}_{ab}\mathbf{T}). \quad (3.14)$$

V nulové tetrádě tak rozklad Riemannova tenzoru můžeme vyjádřit vztahem

$$R_{(i)(0)(j)(0)} = C_{(i)(0)(j)(0)} + \frac{1}{D-2}(\delta_{ij}R_{(0)(0)} - R_{(i)(j)}) + \frac{1}{(D-1)(D-2)}R\delta_{ij}, \quad (3.15)$$

který lze dále s využitím vztahů (3.13) a (3.14) převést do tvaru

$$\begin{aligned} R_{(i)(0)(j)(0)} &= C_{(i)(0)(j)(0)} - \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}\delta_{ij} \\ &\quad - \frac{\kappa}{D-2} \left[T_{(i)(j)} - \delta_{ij} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{D-1}T \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pro rovnici geodetické deviace tak dostáváme výraz

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(i)} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}Z^{(i)} - \frac{\kappa}{D-2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{D-1}T \right) Z^{(i)} \\ &\quad + \frac{\kappa}{D-2}T_{(i)(j)}Z^{(j)} - C^{(i)}{}_{(0)(j)(0)}Z^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ten se ve čtyřech dimenzích redukuje na tvar

$$\ddot{Z}^{(i)} = \frac{\Lambda}{3} Z^{(i)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(i)} + \frac{\kappa}{2} T_{(i)(j)} Z^{(j)} - C^{(i)}{}_{(0)(j)(0)} Z^{(j)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.18)$$

který je znám například z [12], [15].

Abychom mohli blíže zkoumat příspěvky od jednotlivých složek Weylova tenzoru, zavedeme bázi reálných vektorů vztahy

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u} + \mathbf{e}_{(1)}), \quad (3.19)$$

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u} - \mathbf{e}_{(1)}), \quad (3.20)$$

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{e}_{(i)}, \quad i = 2, \dots, D - 1. \quad (3.21)$$

Vektory \mathbf{k} a \mathbf{l} jsou přitom nulovými vektory a vektory \mathbf{m}_i jsou reálné prostorové vektory, přičemž pro všechny vektory platí následující normalizace:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_i = 0, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_i = 0, \quad \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j = \delta_{ij}. \quad (3.22)$$

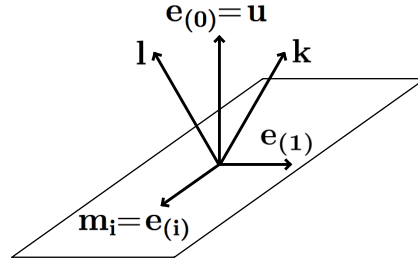
Inverzní vztahy ke vztahům (3.19)-(3.21) jsou pak

$$\mathbf{e}_{(0)} = \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{k} + \mathbf{l}), \quad (3.23)$$

$$\mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (3.24)$$

$$\mathbf{e}_{(i)} = \mathbf{m}_i, \quad i = 2, \dots, D - 1. \quad (3.25)$$

Připomeňme zde, že \mathbf{u} je čtyřrychlost geodetického pozorovatele, $\mathbf{e}_{(1)}$ je prostorový vektor reprezentující longitudinální (podélný) směr a $\mathbf{e}_{(i)}, i = 2, \dots, D - 1$ jsou transverzální (příčné) vektory.



Obrázek 3.1: Ilustrativní zobrazení ortonormální báze vektorů $e_{(i)}$ a báze reálných vektorů $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_{(i)}$.

Dále definujeme stejně jako v [11] nezávislé reálné komponenty Weylova tenzoru¹

$$\Psi_{0^{ij}} = C_{abcd} k^a m_i^b k^c m_j^d, \quad (3.26)$$

$$\Psi_{1^{ijk}} = C_{abcd} k^a m_i^b m_j^c m_k^d, \quad (3.27)$$

$$\Psi_{2^{ijkl}} = C_{abcd} m_i^a m_j^b m_k^c m_l^d, \quad (3.28)$$

$$\Psi_{2^{ij}} = C_{abcd} k^a l^b m_i^c m_j^d, \quad (3.29)$$

$$\Psi_{3^{ijk}} = C_{abcd} l^a m_i^b m_j^c m_k^d, \quad (3.30)$$

$$\Psi_{4^{ij}} = C_{abcd} l^a m_i^b l^c m_j^d, \quad (3.31)$$

$$\Psi_{1T^i} = C_{abcd} k^a l^b k^c m_i^d, \quad (3.32)$$

$$\Psi_{2S} = 2 C_{abcd} k^a l^b l^c k^d, \quad (3.33)$$

$$\Psi_{2T^{ij}} = 2 C_{abcd} k^a m_i^b l^c m_j^d, \quad (3.34)$$

$$\Psi_{3T^i} = C_{abcd} l^a k^b l^c m_i^d. \quad (3.35)$$

Všechny ostatní komponenty Weylova tenzoru lze získat díky jeho symetriím z výše uvedených komponent. Ani tyto komponenty však nejsou ještě zcela nezávislé. Vzhle-

¹Alternativní způsob pro vyjádření Weylova tenzoru pomocí jeho komponent v bázi $\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i$ je podrobně popsán v dodatku B.

dem k vlastnostem Weylova tenzoru totiž platí následující vazby

$$\Psi_{0[ij]} = 0, \quad \Psi_{0k}{}^k = 0, \quad (3.36)$$

$$\Psi_{1i(kl)} = 0, \quad \Psi_{1[ikl]} = 0, \quad (3.37)$$

$$\Psi_{2ijkl} = \Psi_{2kl ij}, \quad \Psi_{2(ij)kl} = \Psi_{2i[jkl]} = 0, \quad \Psi_{2(ij)} = 0, \quad (3.38)$$

$$\Psi_{3i(kl)} = 0, \quad \Psi_{3[ikl]} = 0, \quad (3.39)$$

$$\Psi_{4[ij]} = 0, \quad \Psi_{4k}{}^k = 0. \quad (3.40)$$

Díky výše uvedeným vazbám jsou naprosto nezávislé pouze komponenty Ψ_{0ij} , Ψ_{1ijk} , Ψ_{2ijkl} , Ψ_{3ijk} , Ψ_{4ij} a zbývající komponenty lze vyjádřit

$$\Psi_{1T^i} = \Psi_{1k}{}^k{}_i, \quad (3.41)$$

$$\Psi_{2S} = \Psi_{2T^k}{}^k = \Psi_{2kl}{}^{kl}, \quad (3.42)$$

$$\Psi_{2T^{ij}} = \Psi_{2ikj}{}^k + \Psi_{2ij}, \quad (3.43)$$

$$\Psi_{3T^i} = \Psi_{3k}{}^k{}_i. \quad (3.44)$$

Pomocí nezávislých reálných komponent můžeme tedy pro Weylův tenzor psát

$$\begin{aligned} C_{(1)(0)(1)(0)} &= \mathbf{C}_{abcd} \mathbf{e}_{(1)}^a \mathbf{u}^b \mathbf{e}_{(1)}^c \mathbf{u}^d = \frac{1}{4} \mathbf{C}_{abcd} (\mathbf{k} - \mathbf{l})^a (\mathbf{k} + \mathbf{l})^b (\mathbf{k} - \mathbf{l})^c (\mathbf{k} + \mathbf{l})^d \\ &= -\frac{1}{2} \Psi_{2kl}{}^{kl} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \Psi_{2S}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} C_{(1)(0)(j)(0)} &= \mathbf{C}_{abcd} \mathbf{e}_{(1)}^a \mathbf{u}^b \mathbf{e}_{(j)}^c \mathbf{u}^d = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{C}_{abcd} (\mathbf{k} - \mathbf{l})^a (\mathbf{k} + \mathbf{l})^b \mathbf{m}_j^c (\mathbf{k} + \mathbf{l})^d \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1k}{}^k{}_j - \Psi_{3k}{}^k{}_j) \\ &\equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{1T^j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{3T^j}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} C_{(i)(0)(1)(0)} &= \mathbf{C}_{abcd} \mathbf{e}_{(i)}^a \mathbf{u}^b \mathbf{e}_{(1)}^c \mathbf{u}^d = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{C}_{abcd} \mathbf{m}_i^a (\mathbf{k} + \mathbf{l})^b (\mathbf{k} - \mathbf{l})^c (\mathbf{k} + \mathbf{l})^d \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1k}{}^k{}_i - \Psi_{3k}{}^k{}_i) \\ &\equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{1T^i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{3T^i}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} C_{(i)(0)(j)(0)} &= \mathbf{C}_{abcd} \mathbf{e}_{(i)}^a \mathbf{u}^b \mathbf{e}_{(j)}^c \mathbf{u}^d = \frac{1}{2} \mathbf{C}_{abcd} \mathbf{m}_i^a (\mathbf{k} + \mathbf{l})^b \mathbf{m}_j^c (\mathbf{k} + \mathbf{l})^d \\ &\equiv \frac{1}{2} \Psi_{0ij} + \frac{1}{4} \Psi_{2T^{ij}} + \frac{1}{4} \Psi_{2T^{ji}} + \frac{1}{2} \Psi_{4ij} \end{aligned}$$

a speciálně ve čtyřech dimenzích tak s využitím vztahů (C.2)-(C.6) z dodatku C dostáváme známé výrazy (viz strana 13 v [12])

$$\begin{aligned} C_{(1)(0)(1)(0)} &= -\frac{1}{2}\Psi_{2S} = -\Psi_{2^{323}} \\ &= 2\operatorname{Re}\Psi_2, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} C_{(2)(0)(2)(0)} &= \frac{1}{2}\Psi_{0^{22}} + \frac{1}{4}\Psi_{2T^{22}} + \frac{1}{4}\Psi_{2T^{22}} + \frac{1}{2}\Psi_{4^{22}} \\ &= \frac{1}{2}\Psi_{0^{22}} + \frac{1}{2}\Psi_{2T^{22}} + \frac{1}{2}\Psi_{4^{22}} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Psi_0 - \operatorname{Re}\Psi_2 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Psi_4, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} C_{(1)(0)(2)(0)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{1T^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{3T^2} \\ &= -\operatorname{Re}\Psi_1 + \operatorname{Re}\Psi_3, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} C_{(1)(0)(3)(0)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{1T^3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{3T^3} \\ &= -\operatorname{Im}\Psi_1 - \operatorname{Im}\Psi_3, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} C_{(2)(0)(3)(0)} &= \frac{1}{2}\Psi_{0^{23}} + \frac{1}{4}\Psi_{2T^{23}} + \frac{1}{4}\Psi_{2T^{32}} + \frac{1}{2}\Psi_{4^{23}} \\ &= \frac{1}{2}\Psi_{0^{23}} + \frac{1}{2}\Psi_{4^{23}} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Psi_0 - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Psi_4, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} C_{(3)(0)(3)(0)} &= \frac{1}{2}\Psi_{0^{33}} + \frac{1}{4}\Psi_{2T^{33}} + \frac{1}{4}\Psi_{2T^{33}} + \frac{1}{2}\Psi_{4^{33}} \\ &= -\frac{1}{2}\Psi_{0^{22}} + \frac{1}{2}\Psi_{2T^{33}} - \frac{1}{2}\Psi_{4^{22}} \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\Psi_0 - \operatorname{Re}\Psi_2 - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Psi_4. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Konečně tedy můžeme zapsat explicitní tvar invariantní rovnice geodetické deviace pro relativní pohyby testovacích částic *v obecném prostoročase libovolné dimenze*

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(1)} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}Z^{(1)} - \frac{\kappa}{D-2}\left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{D-1}T\right)Z^{(1)} + \frac{\kappa}{D-2}T_{(1)(j)}Z^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\Psi_{2^{kl}kl}Z^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{1^k k_j} - \Psi_{3^k k_j})Z^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(i)} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}Z^{(i)} - \frac{\kappa}{D-2}\left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{D-1}T\right)Z^{(i)} + \frac{\kappa}{D-2}T_{(i)(j)}Z^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{1^k k_i} - \Psi_{3^k k_i})Z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\Psi_{0^{ij}} + \Psi_{4^{ij}} + \frac{1}{2}(\Psi_{2T^{ij}} + \Psi_{2T^{ji}})\right)Z^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

kde i nabývá hodnot $i = 2, \dots, D - 1$, a který lze s využitím kontrahovaných veličin vyjádřených rovnicemi (3.41)-(3.44) zapsat jako

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(1)} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} Z^{(1)} - \frac{\kappa}{D-2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{D-1} T \right) Z^{(1)} + \frac{\kappa}{D-2} T_{(1)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Psi_{2S} Z^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^j} - \Psi_{3T^j}) Z^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(i)} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} Z^{(i)} - \frac{\kappa}{D-2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{D-1} T \right) Z^{(i)} + \frac{\kappa}{D-2} T_{(i)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^i} - \Psi_{3T^i}) Z^{(1)} - \frac{1}{2} \left(\Psi_{0^{ij}} + \Psi_{4^{ij}} + \frac{1}{2} (\Psi_{2T^{ij}} + \Psi_{2T^{ji}}) \right) Z^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Speciálně ve čtyřrozměrném prostoročase platí

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(1)} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(1)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(1)} + \frac{\kappa}{2} T_{(1)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Psi_{2S} Z^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^j} - \Psi_{3T^j}) Z^{(j)} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(1)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(1)} + \frac{\kappa}{2} T_{(1)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Psi_{2S} Z^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^2} - \Psi_{3T^2}) Z^{(2)} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^3} - \Psi_{3T^3}) Z^{(3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(2)} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(2)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(2)} + \frac{\kappa}{2} T_{(2)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^2} - \Psi_{3T^2}) Z^{(1)} - \frac{1}{2} (\Psi_{0^{2j}} + \Psi_{4^{2j}} + \Psi_{2T^{2j}} - \Psi_{2^{2j}}) Z^{(j)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(2)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(2)} + \frac{\kappa}{2} T_{(2)(j)} Z^{(j)} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^2} - \Psi_{3T^2}) Z^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Psi_{0^{22}} + \Psi_{4^{22}} + \Psi_{2T^{22}} - \Psi_{2^{22}}) Z^{(2)} - \frac{1}{2} (\Psi_{0^{23}} + \Psi_{4^{23}} + \Psi_{2T^{23}} - \Psi_{2^{23}}) Z^{(3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(3)} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(3)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(3)} + \frac{\kappa}{2} T_{(3)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^3} - \Psi_{3T^3}) Z^{(1)} - \frac{1}{2} (\Psi_{0^{3j}} + \Psi_{4^{3j}} + \Psi_{2T^{3j}} - \Psi_{2^{3j}}) Z^{(j)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(3)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(3)} + \frac{\kappa}{2} T_{(3)(j)} Z^{(j)} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^3} - \Psi_{3T^3}) Z^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Psi_{0^{32}} + \Psi_{4^{32}} + \Psi_{2T^{32}} - \Psi_{2^{32}}) Z^{(2)} - \frac{1}{2} (\Psi_{0^{33}} + \Psi_{4^{33}} + \Psi_{2T^{33}} - \Psi_{2^{33}}) Z^{(3)} \end{aligned}$$

S využitím vztahů z dodatku C tak dostáváme

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(1)} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(1)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(1)} + \frac{\kappa}{2} T_{(1)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \Psi_2 Z^{(1)} + (\operatorname{Re} \Psi_1 - \operatorname{Re} \Psi_3) Z^{(2)} + (\operatorname{Im} \Psi_1 + \operatorname{Im} \Psi_3) Z^{(3)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(2)} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(2)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(2)} + \frac{\kappa}{2} T_{(2)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad + (\operatorname{Re} \Psi_1 - \operatorname{Re} \Psi_3) Z^{(1)} - \frac{1}{2} (\operatorname{Re} \Psi_0 + \operatorname{Re} \Psi_4) Z^{(2)} \\ &\quad + \operatorname{Re} \Psi_2 Z^{(2)} - \frac{1}{2} (\operatorname{Im} \Psi_0 - \operatorname{Im} \Psi_4) Z^{(3)}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(3)} &= \frac{\Lambda}{3} Z^{(3)} - \frac{\kappa}{2} \left(T_{(0)(0)} + \frac{2}{3} T \right) Z^{(3)} + \frac{\kappa}{2} T_{(3)(j)} Z^{(j)} \\ &\quad + (\operatorname{Im} \Psi_1 + \operatorname{Im} \Psi_3) Z^{(1)} - \frac{1}{2} (\operatorname{Im} \Psi_0 - \operatorname{Im} \Psi_4) Z^{(2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\operatorname{Re} \Psi_0 + \operatorname{Re} \Psi_4) Z^{(3)} + \operatorname{Re} \Psi_2 Z^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

což je opět ve shodě s výsledky uvedenými v [12].

3.2 Rozbor členů v rovnici geodetické deviace pro různé typy prostorů

Rovnice ve tvaru (3.56)-(3.57) jsou vhodné pro fyzikální interpretaci relativních pohybů testovacích částic. Tyto pohyby, jak je vidět, závisí na třech typech členů:

1. Členy obsahující kosmologickou konstantu Λ způsobující celkové izotropní pohyby zapříčiněné pozadím.
2. Členy obsahující tenzor energie a hybnosti \mathbf{T}_{ab} popisující interakci s hmotou.
3. Členy obsahující komponenty Weylova tenzoru Ψ_A odpovídajících lokálnímu volnému gravitačnímu poli.

Pro další analýzu se omezíme pouze na vakuová řešení, tedy případ, kdy

$$\mathbf{T}_{ab} = 0, \quad (3.64)$$

takže vztahy (3.56)–(3.57) se zjednoduší do podoby

$$\ddot{Z}^{(1)} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}Z^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{1T^j} - \Psi_{3T^j})Z^{(j)} + \frac{1}{2}\Psi_{2S}Z^{(1)}, \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(i)} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}Z^{(i)} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{1T^i} - \Psi_{3T^i})Z^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\Psi_{0^{ij}} + \Psi_{4^{ij}} + \frac{1}{2}(\Psi_{2T^{ij}} + \Psi_{2T^{ji}})\right)Z^{(j)}, \quad i = 2, \dots, D-1. \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.2.1 Členy obsahující kosmologickou konstantu Λ

Předpokládejme, že platí vakuová podmínka daná výrazem (3.64) a dále také, že všechny složky Weylova tenzoru Ψ_A jsou nulové, tedy že *prostoročas je konformě plochý*. Pak se rovnice (3.65) a (3.66) redukuje na

$$\ddot{Z}^{(1)} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}Z^{(1)} \quad (3.67)$$

$$\ddot{Z}^{(i)} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}Z^{(i)}, \quad i = 2, \dots, D-1. \quad (3.68)$$

Je vidět, že rovnice pro longitudinální složku (1) je stejná, jako rovnice pro transverzální složky (i). Tento systém $D-1$ rovnic můžeme tedy jednoduše přepsat do kompaktního tvaru

$$\ddot{Z}^{(i)} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}Z^{(i)}, \quad i = 1, \dots, D-1, \quad (3.69)$$

který lze v geometrické podobě zapsat jako

$$\frac{D^2\mathbf{Z}}{d\tau^2} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}\mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}, \quad (3.70)$$

kde \mathbf{I} je tenzor identity definovaný

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} + \dots + \mathbf{e}_{(D-1)} \otimes \mathbf{e}_{(D-1)}. \quad (3.71)$$

Je přitom vidět, že relativní pohyby částic jsou evidentně *izotropní*.

Opravdu: Uvažujme-li sféru testovacích částic, přičemž pozice každé z nich je oproti referenční částici uprostřed dána vektorem posunutí \mathbf{Z} , pak z rovnic daných vztahem (3.69) vyplývá, že zrychlení $\frac{D^2\mathbf{Z}}{d\tau^2}$ každé z nich má stejný směr jako její vektor posunutí \mathbf{Z} , a proto je jejich pohyb izotropní.

Je vidět, že tento závěr je zcela nezávislý na počtu dimenzí D uvažovaného prostoročasu a odpovídá skutečnosti, že jedinými konformně plochými vakuovými řešeními Einsteinových rovnic jsou prostoročasy konstantní křivosti $R = \frac{2D}{(D-2)}\Lambda$, konkrétně

- Minkowského prostor pro $\Lambda = 0$,
- de Sitterův prostor pro $\Lambda > 0$,
- anti-de Sitterův prostor pro $\Lambda < 0$.

Tyto prostory jsou maximálně symetrické, homogenní a izotropní.

Navíc můžeme vyjádřit přesné rovnice pro charakteristické pohyby odpovídající jednotlivým hodnotám kosmologické konstanty Λ . Uvažujme bázi $D - 1$ vektorů $\{\mathbf{e}_{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{(D-1)}\}$ paralelně přenášenou podél geodetiky, takže platí

$$\frac{D\mathbf{e}_{(i)}}{d\tau} = 0. \quad (3.72)$$

Potom pro jednotlivé komponenty relativního zrychlení dostáváme

$$\ddot{Z}^{(i)} \equiv \mathbf{e}_{\mathbf{a}}^{(i)} \frac{D^2 \mathbf{Z}^{\mathbf{a}}}{d\tau^2} = \frac{D^2(\mathbf{e}_{\mathbf{a}}^{(i)} \mathbf{Z}^{\mathbf{a}})}{d\tau^2} = \frac{D^2 Z^{(i)}}{d\tau^2} = \frac{d^2 Z^{(i)}}{d\tau^2} \quad (3.73)$$

a řešení soustavy rovnic (3.69) tak je

- $\Lambda = 0$

$$Z^{(i)}(\tau) = A_i \tau + B_i, \quad (3.74)$$

- $\Lambda > 0$

$$Z^{(i)}(\tau) = A_i \exp \sqrt{\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}} \tau + B_i \exp \left(-\sqrt{\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}} \tau \right), \quad (3.75)$$

- $\Lambda < 0$

$$Z^{(i)}(\tau) = A_i \cos \sqrt{\frac{2|\Lambda|}{(D-1)(D-2)}} \tau + B_i \sin \left(\sqrt{\frac{2|\Lambda|}{(D-1)(D-2)}} \tau \right), \quad (3.76)$$

přičemž A_i a B_i jsou integrační konstanty.

Na závěr tedy můžeme konstatovat, že stejně jako ve čtyřech dimenzích, viz například strana 19 v [12], také v obecnědimenzionálních prostoročasech členy obsahující kosmologickou konstantu Λ reprezentují izotropní vliv maximálně symetrického kosmologického pozadí.

3.2.2 Členy obsahující komponenty Weylova tenzoru Ψ_A

Nyní uvažujme vakuový prostoročas, tedy platnost podmínky $\mathbf{T}_{ab} = 0$, a dále také $\Lambda = 0$. Pro jednotlivé členy obsahující komponenty Weylova tenzoru Ψ_A pak platí následující vztahy a jejich fyzikální interpretace:

Komponenta Ψ_0

Předpokládejme navíc $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$. Pak se vztahy (3.65) a (3.66) redukuje na soustavu rovnic

$$\ddot{Z}^{(1)} = 0, \quad (3.77)$$

$$\ddot{Z}^{(i)} = -\frac{1}{2}\Psi_{0ij}Z^{(j)}, \quad i, j = 2, \dots, D-1. \quad (3.78)$$

Rovnici lze dále přepsat do geometrického tvaru

$$\frac{D^2\mathbf{Z}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{D-1}\Psi_{0ij}\mathbf{e}_{ij} \cdot \mathbf{Z}, \quad (3.79)$$

kde \mathbf{e}_{ij} jsou tenzory reprezentující jednotlivé polarizační módy definované jako

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{(i)} \otimes \mathbf{e}_{(j)} \quad (3.80)$$

a $-\frac{1}{2}\Psi_{0ij}$ příslušné amplitudy.

Na základě těchto rovnic lze členy obsahující koeficienty Ψ_{0ij} interpretovat jako *transverzální gravitační vlnu*. Pokud totiž uvážíme jejich vliv na kroužek testovacích částic, které jsou na počátku v klidu a leží v nadploše dané „příčnými“ vektory $\mathbf{e}_{(i)}$, kde $i = 2, \dots, D-1$, pak z uvedených rovnic vyplývá, že na částice nepůsobí žádné

zrychlení ve směru $\mathbf{e}_{(1)}$ a částice tedy v dané nadploše zůstávají – neexistuje žádný longitudinální efekt. Samotné koeficienty Ψ_{0ij} přitom určují amplitudy vlny v jednotlivých směrech.

Komponenta Ψ_1

Uvažujme nyní $\Psi_0 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$. Pak se vztahy (3.65) a (3.66) redukují na

$$\ddot{Z}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{1T^j} Z^{(j)}, \quad j = 2, \dots, D-1, \quad (3.81)$$

$$\ddot{Z}^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{1T^i} Z^{(1)}, \quad i = 2, \dots, D-1, \quad (3.82)$$

přičemž tuto soustavu rovnic lze opět přepsat do jednoduchého geometrického tvaru

$$\frac{D^2 \mathbf{Z}}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=2}^{D-1} \Psi_{1T^i} \mathbf{e}_i^L \cdot \mathbf{Z}, \quad (3.83)$$

kde \mathbf{e}_i^L jsou tenzory reprezentující jednotlivé longitudinální módy definované jako

$$\mathbf{e}_i^L = \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(i)} + \mathbf{e}_{(i)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \quad (3.84)$$

a koeficienty $\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{1T^i}$ mají význam amplitud příslušných efektů.

Komponenta Ψ_2

Předpokládejme $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$. Pak se vztahy (3.65) a (3.66) redukují na

$$\ddot{Z}^{(1)} = \frac{1}{2} \Psi_{2S} Z^{(1)}, \quad (3.85)$$

$$\ddot{Z}^{(i)} = -\frac{1}{4} (\Psi_{2T^{ij}} + \Psi_{2T^{ji}}) Z^{(j)}, \quad i, j = 2, \dots, D-1 \quad (3.86)$$

a v geometrické podobě je tentokrát můžeme zapsat jako

$$\frac{D^2 \mathbf{Z}}{d\tau^2} = \left[\frac{1}{2} \Psi_{2S} \mathbf{e}_{11} - \frac{1}{4} \sum_{i,j=2}^{D-1} (\Psi_{2T^{ij}} + \Psi_{2T^{ji}}) \mathbf{e}_{ij} \right] \cdot \mathbf{Z}, \quad (3.87)$$

přičemž platí

$$\mathbf{e}_{11} = \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)}, \quad (3.88)$$

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{(i)} \otimes \mathbf{e}_{(j)}. \quad (3.89)$$

Efekt způsobený členy obsahujícími komponenty Ψ_2 je zobecněním coulombických slapových jevů a proto můžeme tyto členy označit za coulombickou složku gravitačního pole. Již nyní je přitom jasné, že v případě pozorovatele statického v Schwarzschildově prostoročase budou pouze komponenty $\Psi_2 \neq 0$ a všechny ostatní komponenty Ψ_A vymizí, stejně jako je tomu ve 4D, viz [12] strana 21.

Komponenta Ψ_3

Předpokládejme tentokrát $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0$. Pak se vztahy (3.65) a (3.66) redukují do podoby

$$\ddot{Z}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{3T^j}Z^{(j)}, \quad j = 2, \dots, D-1, \quad (3.90)$$

$$\ddot{Z}^{(i)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{3T^i}Z^{(1)}, \quad i = 2, \dots, D-1. \quad (3.91)$$

a v geometrické podobě je můžeme zapsat jako

$$\frac{D^2\mathbf{Z}}{d\tau^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=2}^{D-1}\Psi_{1T^i}\mathbf{e}_i^{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{Z}, \quad (3.92)$$

kde $\mathbf{e}_i^{\mathbf{L}}$ jsou opět tenzory reprezentující jednotlivé longitudinální módy a rovněž koeficienty $-\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{3T^i}$ mají význam amplitud příslušných efektů.

Ze tvaru rovnic je na první pohled vidět, že vliv členů obsahujících koeficient Ψ_{3T^i} je velmi podobný jako v případě členů s koeficientem Ψ_{1T^i} , ale působí opačně ve směru $\mathbf{e}_{(1)}$, což plyne ze skutečnosti, že záměna $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{l}$ je analogická $\Psi_{1T^i} \leftrightarrow \Psi_{3T^i}$. Oba vektory \mathbf{k} a \mathbf{l} jsou nulovými vektory, jejichž souřadnicové komponenty jsou $k_{(i)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$ a $l_{(i)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right) = -k_{(i)}$. Proto členy s Ψ_{3T^i} koeficienty reprezentují longitudinální efekt gravitačního pole spojeného s prostorovým směrem \mathbf{k} , tj. $\mathbf{e}_{(1)}$, zatímco členy obsahující koeficienty Ψ_{1T^i} odpovídají longitudinálnímu efektu příslušícímu prostorovému směru \mathbf{l} , tj. $-\mathbf{e}_{(1)}$.

Komponenta Ψ_4

Nyní pojďme zkoumat vliv poslední z Ψ_A komponent. Uvažujme $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$. Pak se vztahy (3.65) a (3.66) redukují na

$$\ddot{Z}^{(1)} = 0 \quad (3.93)$$

$$\ddot{Z}^{(i)} = -\frac{1}{2}\Psi_{4^{ij}}Z^{(j)}, \quad i, j = 2, \dots, D-1, \quad (3.94)$$

přičemž tyto rovnice lze stejně jako v případě Ψ_0 upravit do geometrického tvaru

$$\frac{D^2\mathbf{Z}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{D-1}\Psi_{4^{ij}}\mathbf{e}_{ij} \cdot \mathbf{Z}, \quad (3.95)$$

s tenzory odpovídajícími dvěma polarizačním módům definovanými vztahy

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{(i)} \otimes \mathbf{e}_{(j)} \quad (3.96)$$

a příslušnými amplitudami $-\frac{1}{2}\Psi_{4^{ij}}$.

Interpretace těchto rovnic je velmi podobná jako v případě členů obsahujících komponenty $\Psi_{0^{ij}}$ – opět jde o transverzální gravitační vlnu šířící se v prostorovém směru $\mathbf{e}_{(1)}$.

Navíc ze skutečnosti $\Psi_{0^{ij}} \leftrightarrow \Psi_{4^{ij}}$ při záměně $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{l}$ můžeme vyvodit, že členy obsahující koeficienty $\Psi_{4^{ij}}$ reprezentují transverzální efekt gravitačního pole asociovaného se směrem \mathbf{k} - gravitační vlnu šířící se v prostoru ve směru vektoru $+\mathbf{e}_{(1)}$, zatímco členy obsahující koeficienty $\Psi_{0^{ij}}$ odpovídají transverzálnímu efektu gravitačního pole spojenému se směrem \mathbf{l} - tedy gravitační vlně šířící se ve směru $-\mathbf{e}_{(1)}$.

4 Volba vhodné interpretační báze a přirozených souřadnic

V této části se blíže podíváme na některé vlastnosti ortonormální báze (3.5) a odpovídající nulové tetrády (3.19)-(3.21), které jsme použili v kapitole 3.1. Ukážeme, že jsou v jistém smyslu dány jednoznačně a že je lze použít pro interpretaci přesných prostoročasů různých typů. My je využijeme v následující kapitole, kde se budeme podrobněji zabývat Robinsonovým-Trautmanovým prostoročasem ve více rozměrech.

4.1 Jednoznačnost nulové referenční báze

Již dříve, v kapitole 2.2, jsme uvedli, že v prostoročase obecné dimenze mohou, avšak nemusí, existovat privilegované nulové směry nazývané Weyl Aligned Null Directions, zkráceně WANDy. Pomocí nich lze invariantně klasifikovat Weylův tenzor v libovolném bodě, a to na základě jejich sousměrnosti [9], [13]. Pokud WANDy existují, zvolíme vektor \mathbf{k} reálné referenční báze (3.19)-(3.21) ve směru WANDu s maximálním stupněm sousměrnosti. Pro komponenty \mathbf{k} vzhledem k bázi $\mathbf{e}_{(i)}$ zavedené v (3.5) navíc platí

$$k_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_{(i)} = 0, \quad i = 2, \dots, D-1, \quad (4.1)$$

neboli vektor \mathbf{k} směřuje pouze do směru prostorupodobného vektoru $\mathbf{e}_{(1)}$. Na základě toho můžeme $\mathbf{e}_{(1)}$ označit jako longitudinální směr a $\mathbf{e}_{(i)}$, $i = 2, \dots, D-1$ za směry transverzální.

Po volbě \mathbf{k} jakožto WANDu je jediná netriviální volnost ve volbě reálné referenční báze (3.19)-(3.21) dána Lorentzovými transformacemi (2.18) a (2.20). Navíc lze však

podobně jako ve čtyřech dimenzích ukázat [12], že díky podmínkám (4.1) jsou \mathbf{k} a \mathbf{l} unikátní. Přesněji, pokud \mathbf{u} je D -rychlost volné testovací částice ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$) a \mathbf{k} je WAND, pak existuje prostorupodobný jednotkový vektor $\mathbf{e}_{(1)}$, který je projekcí nulového směru daného \mathbf{k} do $(D - 1)$ -dimenzionální prostorupodobné nadplochy ortogonální k \mathbf{u} . Tento vektor $\mathbf{e}_{(1)}$ je přitom unikátní (až na záměnu $\mathbf{e}_{(1)} \rightarrow -\mathbf{e}_{(1)}$) a je dán vztahem

$$\mathbf{e}_{(1)} \equiv -\mathbf{u} + \sqrt{2}\mathbf{k}, \quad (4.2)$$

přičemž \mathbf{k} je normováno tak, že platí

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.3)$$

Vzhledem k tomu, že pro \mathbf{l} navíc platí

$$\mathbf{l} \equiv \sqrt{2}\mathbf{u} - \mathbf{k}, \quad (4.4)$$

jedinou zbývající volností ve volbě báze jsou rotace (2.21) v prostoru daném vektory \mathbf{m}_i .

Výše uvedené tvrzení lze přitom snadno dokázat. Vektor \mathbf{k} totiž můžeme rozložit na část ve směru vektoru \mathbf{u} , kterou budeme označovat \mathbf{k}_{\parallel} , a část kolmou k \mathbf{u} , již dále označíme \mathbf{k}_{\perp} . Vektor \mathbf{k} tak můžeme zapsat jako

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}, \quad (4.5)$$

kde $\mathbf{k}_{\parallel} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$, neboli

$$\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}. \quad (4.6)$$

Vektor \mathbf{k}_{\perp} definuje jedinečný směr, do kterého musí vektor $\mathbf{e}_{(1)}$ směřovat, $\mathbf{e}_{(1)} \equiv \sqrt{2}\mathbf{k}_{\perp}$ (koeficient $\sqrt{2}$ je pouze konvence). Podmínka $\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = 1$ pak implikuje

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.7)$$

Dále uvažujeme pouze zápornou hodnotu, tj. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, přičemž kladná hodnota pouze reprezentuje záměnu $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ respektive $\mathbf{e}_{(1)} \rightarrow -\mathbf{e}_{(1)}$. Dostáváme tedy

$$\mathbf{e}_{(1)} = \sqrt{2}(\mathbf{k} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \sqrt{2}\mathbf{k}. \quad (4.8)$$

Pokud dále požadujeme, aby \mathbf{l} leželo v rovině $\mathbf{u}-\mathbf{e}_{(1)}$, tj.

$$\mathbf{l} = a \mathbf{u} + b \mathbf{e}_{(1)} = (a - b) \mathbf{u} - \sqrt{2} b \mathbf{k}, \quad (4.9)$$

pak z podmínky $\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -1$ plyne

$$a - b = \sqrt{2} \quad (4.10)$$

a podmínka $\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 0$ dává

$$b = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.11)$$

Díky tomu lze vektor \mathbf{l} zapsat jako

$$\mathbf{l} = \sqrt{2} \mathbf{u} - \mathbf{k}. \quad (4.12)$$

Vektor $\mathbf{e}_{(1)}$ také definuje jedinečnou ortogonální $(D - 2)$ -dimenzionální nadplochu v $(D - 1)$ -dimenzionálním prostoru kolmém k \mathbf{u} . $(D - 2)$ vzájemně kolmých jednotkových vektorů $\mathbf{e}_{(i)}$, $i = 1, \dots, D - 2$, přitom musí ležet v této nadploše, takže jediná volnost v jejich volbě je dána rotacemi v prostoru (2.21) a triviální reflexivní změnou jejich směru.

4.2 Paralelní přenos nulové referenční báze

Obecně báze D nezávislých ortonormálních vektorů (3.5) není paralelně přenášena podél geodetik generovaných pozorovatelovou D -rychlostí \mathbf{u} . Ortonormální báze a jí odpovídající nulová referenční báze definovaná vztahy (3.19)-(3.21) jsou paralelně přenášeny, neboli platí

$$\frac{D\mathbf{e}_a}{d\tau} = 0, \quad (4.13)$$

právě tehdy, když jsou splněny podmínky

$$\frac{D\mathbf{k}}{d\tau} = 0 = \frac{D\mathbf{m}_i}{d\tau}. \quad (4.14)$$

Z rovnic (3.19)-(3.21) totiž vyplývá, že

$$\mathbf{e}_{(1)} = \sqrt{2}\mathbf{k} - \mathbf{u} = \mathbf{u} - \sqrt{2}\mathbf{l} \quad (4.15)$$

a vzhledem k tomu, že vektor $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{(0)}$ je paralelně přenášen podél geodetik, protože \mathbf{u} je tečný vektor D -rychlosti, musí platit

$$\frac{D\mathbf{e}_{(1)}}{d\tau} = 0 \iff \frac{D\mathbf{k}}{d\tau} = 0 \iff \frac{D\mathbf{l}}{d\tau} = 0. \quad (4.16)$$

Nutnost podmínky $\frac{D\mathbf{m}_i}{d\tau} = 0$ pro reálné vektory $\mathbf{m}_{(i)}$ je evidentní.

4.3 Přirozené souřadnice pro netwistující prostoročasy

V obecném netwistujícím prostoročase je vždy možné [16], [17] zavést třídu nulových nadploch $u = konst.$ tak, že $g^{\mu\nu}u_{,\mu}u_{,\nu} = 0$. Nulové vektory $\mathbf{n} = n^\mu\partial_\mu$ definované jako $n^\mu \equiv g^{\mu\nu}u_{,\nu}$ jsou tečné ke třídě nulových geodetik ležících v nadploše $u = konst.$ a splňujících $n^\mu{}_{;\alpha}n^\alpha = 0$. Pokud zvolíme jako souřadnice $u = x^{D-1}$, parametr $r = x^0$ podél příslušných nulových geodetik a $D - 2$ reálných prostorupodobných souřadnic $x^i, i = 1, \dots, D - 2$, které označují geodetiky na každé ploše $u = konst.$, metrika nabývá tvaru

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & g_{0(D-1)} \\ 0 & g_{11} & \dots & g_{1(D-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{(D-2)1} & \dots & g_{(D-2)(D-1)} \\ g_{(D-1)0} & g_{(D-1)1} & \dots & g_{(D-1)(D-1)} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Pokud uvažujeme prostoročas, ve kterém nulové vektorové pole \mathbf{k} generuje netwistující množinu geodetik, pak je toto vektorové pole \mathbf{k} také ortogonální ke třídě nulových nadploch, například $u = const.$ Je tedy vidět, že \mathbf{k} je úměrné \mathbf{n} a v souřadnicích $x^\mu = (r, x^1, \dots, x^{D-2}, u)$ má vektor $\mathbf{k} = k^\mu\partial_\mu$ nenulovou pouze nulovou složku, neboli ho lze zapsat

$$k^\mu = (k^0, 0, \dots, 0) \quad (4.18)$$

a D -rychlost $\mathbf{u} = u^\mu \partial_\mu$ volné testovací částice pohybující se podél geodetiky $x^\mu(\tau) = (r(\tau), x^1(\tau), \dots, x^{D-2}(\tau), u(\tau))$ lze pak vyjádřit jako

$$u^\mu = (\dot{r}, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^{D-2}, \dot{u}), \quad (4.19)$$

kde τ je vlastní čas a $\cdot \equiv \frac{d}{d\tau}$.

4.4 Explicitní tvar vektorů nulové referenční báze

Nyní ukážeme, že v souřadnicích zavedených v předchozí části má referenční nulová báze podél časupodobné geodetiky následující tvar

$$k^\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{g_{0(D-1)} \dot{u}}, 0, \dots, 0 \right), \quad (4.20)$$

$$l^\mu = \left(\sqrt{2} \dot{r} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{g_{0(D-1)} \dot{u}}, \sqrt{2} \dot{x}^i, \sqrt{2} \dot{u} \right), \quad (4.21)$$

$$m_i^\mu = \left(-\frac{1}{g_{0(D-1)} \dot{u}} (g_{kl} \dot{x}^k + g_{(D-1)l} \dot{u}) m_i^l, m_i^1, \dots, m_i^{D-2}, 0 \right). \quad (4.22)$$

Abychom získali nultou složku vektoru \mathbf{k} , připomeňme, že již dříve jsme v kapitole 4.1 zavedli pro \mathbf{k} normalizaci $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Díky tomu pro k^0 dostáváme

$$k^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{g_{0(D-1)} \dot{u}}, \quad (4.23)$$

přičemž ostatní složky \mathbf{k} jsou vzhledem k (4.18) nulové. Vyjádření vektoru \mathbf{l} pak snadno získáme díky vztahu (4.4), který můžeme zapsat jako

$$l^\mu = \sqrt{2} u^\mu - k^\mu, \quad (4.24)$$

a pro jednotlivé složky \mathbf{l} tak platí

$$l^0 = \sqrt{2} u^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{g_{0(D-1)} \dot{u}} \equiv \sqrt{2} \dot{r} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{g_{0(D-1)} \dot{u}}, \quad (4.25)$$

$$l^i = \sqrt{2} u^i \equiv \sqrt{2} \dot{x}^i, \quad i = 1, \dots, D-2, \quad (4.26)$$

$$l^{D-1} = \sqrt{2} u^{D-1} \equiv \sqrt{2} \dot{u}. \quad (4.27)$$

V případě vektorů \mathbf{m}_i můžeme explicitně vyjádřit složky $m_i^0 = m_i^r$ a $m_i^{(D-1)} = m_i^u$, k čemuž využijeme normalizaci zavedenou v (2.16). Ostatní složky, tj. m_i^k pro $k =$

$1, \dots, D-2$, zůstanou nezávislými parametry. Z normalizace $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_i = 0$ dostáváme

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_i = g_{\mu\nu} k^\mu m_i^\nu = g_{0(D-1)} k^0 m_i^{D-1} = 0 \quad (4.28)$$

a tedy platí

$$m_i^{D-1} = m_i^u = 0. \quad (4.29)$$

Pro vyjádření $m_i^0 = m_i^r$ využijeme normalizaci $\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_i = 0$. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_i &= g_{\mu\nu} l^\mu m_i^\nu \\ &= \sqrt{2} g_{kl} \dot{x}^k m_i^l + \sqrt{2} g_{0(D-1)} \dot{u} m_i^0 + \sqrt{2} g_{(D-1)l} \dot{u} m_i^l = 0, \\ &k, l = 1, \dots, D-2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

takže pro m_i^0 můžeme psát

$$m_i^0 = -\frac{1}{g_{0(D-1)} \dot{u}} (g_{kl} \dot{x}^k + g_{(D-1)l} \dot{u}) m_i^l, \quad l = 1, \dots, D-2. \quad (4.31)$$

Normalizace $\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j = \delta_{ij}$ nám pak dává podmínky pro vektory \mathbf{m}_i :

$$g_{kl} m_i^k m_i^l = \delta_{ij}, \quad k, l = 1, \dots, D-2. \quad (4.32)$$

5 Relativní pohyby částic ve vícerozměrném RT prostoročase

Ve čtyřdimenzionální obecné teorii relativity je Robinsonova-Trautmanova třída řešení [16], [18] objevená počátkem 60. let jednou ze základních tříd přesných řešení Einsteinových rovnic. Tato velká skupina algebraicky speciálních prostoročasů zahrnuje mnoho významných, zejména vakuových, řešení, jako jsou schwarzschildovské černé díry, akcelerující černé díry popsané C-metrikou a další zářivé prostoročasy různých algebraických typů. Připouští také kosmologickou konstantu, elektromagnetické pole nebo čisté záření jako v případě Vaidayovy metriky.

Z geometrického pohledu je pak Robinsonova-Trautmanova třída charakteristická tím, že připouští kongruenci nulových geodetik generovaných polem \mathbf{k} , které je bez zkreslení (shear-free), nerotující (twist-free), ale expandující. Tato invariantní definice založená na optických skalárech může být aplikována na jakoukoliv teorii gravitace reprezentovanou Lorentzovskou metrikou na D -dimenzionální varietě.

V následujících částech bude nejprve naším cílem připomenout, jak vypadá metrika obecného Robinsonova-Trautmanova prostoročasu libovolné dimenze, a dále pak poukázat na některé vlastnosti relativních pohybů testovacích částic popsané invariantní rovnicí geodetické deviace v obecném vakuovém Robinsonově-Trautmanově (RT) prostoročase s kosmologickou konstantou, aniž bychom dopředu specifikovali jeho algebraický typ. Následně se pak podíváme na dva algebraicky speciální typy samostatně – konformě plochý prostoročas typu O a na vakuové prostoročasy typu D .

5.1 RT řešení a vakuová metrika ve více dimenzích

Uvažujme obecný D -dimenzionální prostoročas, ve kterém mohou existovat kongruence nulových geodetik generovaných vektorovým polem \mathbf{k} . Při affinní parametrizaci lze využít dobře známé optické skaláry

$$\theta = \frac{1}{D-2} k^{\alpha}{}_{;\alpha}, \quad (5.1)$$

$$\sigma^2 = k_{(\alpha;\beta)} k^{\alpha;\beta} - \frac{1}{D-2} (k^{\alpha}{}_{;\alpha})^2, \quad (5.2)$$

$$A^2 = -k_{[\alpha;\beta]} k^{\alpha;\beta}. \quad (5.3)$$

V našem případě se omezujeme pouze na řešení *nerotující* (twist-free), z čehož plyne $A = 0$, a *bez zkreslení* (shear-free), tedy také $\sigma^2 = 0$. Pokud by platilo také $\theta = 0$, pak by vymizela i expanze a jednalo by se o řešení patřící do Kundtovy třídy. Podrobnou charakteristiku těchto velmi důležitých tříd přesných řešení ve čtyřech dimenzích lze nalézt například v [19]. Zde se však dále soustředíme na zobecnění pro libovolný počet vyšších dimenzí. Metrika všech takových prostoročasů může být zapsána [20], [21] ve tvaru

$$ds^2 = g_{ij}(dx^i + g^{ri} du)(dx^j + g^{rj} du) - 2 dudr - g^{rr} du^2, \quad (5.4)$$

kde r je affinní parametr podél nulových geodetik generovaných vektorovým polem $\mathbf{k} = \partial_r$, $u = \text{const.}$ jsou nulové nadplochy ortogonální ke \mathbf{k} a $x \equiv (x^1, \dots, x^{D-2})$ jsou prostorové souřadnice transverzální $(D-2)$ -dimenzionální Riemannovské variety \mathcal{M} .

Abychom zjistili, jakou konkrétní podobu má metrika, aplikujeme vakuové Einsteinovy rovnice s kosmologickou konstantou

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0 \quad (5.5)$$

na element prostoročasového intervalu (5.4). Dostáváme tak, viz například [20], [22], že pro obecný počet dimenzí lze metriku Robinsonovy-Trautmanovy třídy řešení splňující vakuové Einsteinovy rovnice s kosmologickou konstantou Λ zapsat ve tvaru

$$ds^2 = \frac{r^2}{P^2} \gamma_{ij} dx^i dx^j - 2 dudr - 2H du^2, \quad (5.6)$$

kde γ_{ij} je unimodulární $(D - 2)$ -dimenzionální prostorová metrika definovaná

$$\gamma_{ij} = p^2 g_{ij}, \quad p^{2(2-D)} \equiv \det g_{ij} = -\det g_{\alpha\beta}, \quad \det \gamma_{ij} = 1, \quad (5.7)$$

a funkce $2H \equiv g^{rr} = -g_{uu}$ je dána vztahem

$$2H = \frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} - 2r(\ln P)_{,u} - \frac{2\Lambda}{(D-2)(D-1)}r^2 - \frac{\mu}{r^{D-3}}, \quad (5.8)$$

kde \mathcal{R} je skalární křivost odvozená od Ricciho tenzoru \mathcal{R}_{ij} asociovaného s prostorovou metrikou $h_{ij} = P^{-2}\gamma_{ij}$ a μ je libovolná konstanta. Metrika $\gamma_{ij}(x)$ a funkce $P(x, u)$ musí přitom stále splňovat rovnice pole

$$\mathcal{R}_{ij} = \frac{\mathcal{R}}{D-2}h_{ij}. \quad (5.9)$$

Zajímavé přitom je, že všechny takto popsané Robinsonovy–Trautmanovy prostoročasy jsou nutně typu D (nebo O), takže nepřipouštějí čisté gravitační vlny (typu N, III nebo II). Navíc, díky tomu, že H je nezávislé na x a u , mnoho důležitých řešení typu D je také vyloučeno, například vícedimenzionální zobecnění C -metriky. Ve více než čtyřech dimenzích se tak Robinsonova-Trautmanova třída řešení značně liší od její klasické a dobře známé podoby ve čtyřech dimenzích.

V dodatku A v [20] se také dozvídáme, že jediné nenulové komponenty Riemannova tenzoru křivosti pro RT metriku jsou

$$\begin{aligned} R_{ruru} &= H_{,rr}, \\ R_{riu} &= r \left[H_{,r} + (\ln P)_{,u} \right] h_{ij}, \\ R_{ijkl} &= r^2 \mathcal{R}_{ijkl} - 4r^2 \left[H + r (\ln P)_{,u} \right] h_{i[k} h_{l]j}, \\ R_{ruui} &= -H_{,ri} + r^{-1} H_{,i}, \\ R_{uijk} &= 2r^2 h_{i[k} (\ln P)_{,j]u} + 2r H_{i[k} H_{,j]}, \\ R_{uiuj} &= r \left[\left[2H + r (\ln P)_{,u} \right] H_{,r} + H_{,u} - r \left[(\ln P)_{,u} \right]^2 + r (\ln P)_{,uu} \right] h_{ij} \\ &\quad + H_{,ij} - H_{,k} \Gamma^k_{ij}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

kde Γ^k_{ij} respektive \mathcal{R}_{ijkl} jsou Christoffelovy symboly respektive Riemannův tenzor asociované s prostorovou metrikou h_{ij} a v případě Weylova tenzoru se nenulové

komponenty redukuje na

$$\begin{aligned}
C_{ruru} &= -\mu \frac{(D-2)(D-3)}{2r^{D-1}}, \\
C_{riu_j} &= \mu \frac{(D-3)}{2r^{D-3}} h_{ij}, \\
C_{ijkl} &= r^2 \mathcal{R}_{ijkl} - 2r^2 \left(\frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} - \frac{\mu}{r^{D-3}} \right) h_{i[k} h_{l]j}, \\
C_{uiuj} &= 2H C_{riu_j}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

5.2 Pohyb částic v prostoročase typu $RTO(\Lambda)$

Konformně plochá vakuová RT řešení (typ O) s kosmologickou konstantou odpovídají nutně prostoročasům konstantní křivosti $R = \frac{2D}{(D-2)}\Lambda$, konkrétně

- Minkowského prostoru pro $\Lambda = 0$,
- de Sitterovu prostoru pro $\Lambda > 0$,
- anti-de Sitterovu prostoru pro $\Lambda < 0$.

Tyto prostory jsou maximálně symetrické, homogenní a izotropní. Rovnice geodetické deviace (3.65), (3.66) se tak redukuje do tvaru

$$\ddot{Z}^{(i)} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} Z^{(i)}, \quad i = 1, \dots, D-1, \tag{5.12}$$

takže pohyb volných testovacích částic je dán, jak jsme již dříve uvedli v kapitole 3.2.1 na straně 31, vztahy

- $\Lambda = 0$

$$Z^{(i)}(\tau) = A_i \tau + B_i, \tag{5.13}$$

- $\Lambda > 0$

$$Z^{(i)}(\tau) = A_i \exp \sqrt{\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}} \tau + B_i \exp \left(-\sqrt{\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)}} \tau \right), \tag{5.14}$$

- $\Lambda < 0$

$$Z^{(i)}(\tau) = A_i \cos \sqrt{\frac{2|\Lambda|}{(D-1)(D-2)}} \tau + B_i \sin \left(\sqrt{\frac{2|\Lambda|}{(D-1)(D-2)}} \tau \right), \quad (5.15)$$

přičemž A_i a B_i jsou integrační konstanty, viz také (3.74)-(3.76).

5.3 Pohyb částic v prostoročase typu $\text{RTD}(\Lambda)$

Vakuová Robinsonova-Trautmanova řešení typu D s kosmologickou konstantou jsou dána vztahy (5.6) a (5.8), takže nenulové složky metriky jsou

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{r^2}{P^2} \gamma_{ij}, \\ g_{0(D-1)} &= -1, \\ g_{(D-1)(D-1)} &= -2H \\ &= -\frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} + 2r(\ln P)_{,u} + \frac{2\Lambda}{(D-2)(D-1)} r^2 + \frac{\mu}{r^{D-3}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Jejich dosazením do souřadnicové podoby vektorů nulové referenční báze (4.20)-(4.22) a se znalostí explicitního tvaru nenulových komponent Weylova tenzoru (5.11) tak můžeme spočítat přesný tvar jednotlivých nenulových nezávislých reálných komponent Weylova tenzoru Ψ_A daných vztahy (3.26)-(3.35). Další zkoumání přitom rozdělíme na obecný případ $\mu \neq 0$ a speciální případ $\mu = 0$, kdy se nenulové komponenty Weylova tenzoru redukují na C_{ijkl} .

5.3.1 Vakuová řešení pro případ $\mu \neq 0$

Pro $\mu \neq 0$ jsou nenulové čtyři typy koeficientů Ψ_A , a to $\Psi_{2^{ijkl}}$, $\Psi_{3^{ijk}}$, $\Psi_{4^{ij}}$ a $\Psi_{2T^{ij}}$. Konkrétně pro ně platí

$$\Psi_{2^{ijkl}} = \left[r^2 \mathcal{R}_{pqst} - 2r^2 \left(\frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} - \frac{\mu}{r^{D-3}} \right) h_{p[s} h_{t]q} \right] m_i^p m_j^q m_k^s m_l^t, \quad (5.17)$$

$$\Psi_{3^{ijk}} = \sqrt{2} \left[r^2 \mathcal{R}_{pqst} - 2r^2 \left(\frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} - \frac{\mu}{r^{D-3}} \right) h_{p[s} h_{t]q} \right] \dot{x}^p m_i^q m_j^s m_k^t, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{4^{ij}} &= \mu \frac{D-3}{2r^{D-3}} h_{qt} (2\dot{r}\dot{u} - 1) m_i^q m_j^t \\ &+ 2 \left[r^2 \mathcal{R}_{pqst} - 2r^2 \left(\frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} - \frac{\mu}{r^{D-3}} \right) h_{p[s} h_{t]q} \right] \dot{x}^p m_i^q \dot{x}^s m_j^t \\ &+ 2H\mu \frac{D-3}{r^{D-3}} h_{qt} \dot{u}^2 m_i^q m_j^t, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\Psi_{2T^{ij}} = \mu \frac{D-3}{r^{D-3}} h_{qt} m_i^q m_j^t. \quad (5.20)$$

Koeficient $\Psi_{4^{ij}}$ můžeme dále upravit, pokud uvážíme, že platí normalizace $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$. Z ní lze vyjádřit

$$2\dot{r}\dot{u} - 1 = \frac{r^2}{P^2} \gamma_{ps} \dot{x}^p \dot{x}^s - 2H\dot{u}^2. \quad (5.21)$$

Pro $\Psi_{4^{ij}}$ tak dostáváme

$$\begin{aligned} \Psi_{4^{ij}} &= H\mu \frac{D-3}{r^{D-3}} h_{qt} \dot{u}^2 m_i^q m_j^t + 2r^2 \left[\mathcal{R}_{pqst} - \frac{2\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} h_{p[s} h_{t]q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{r^{D-3}} \left(\frac{D-3}{4} h_{ps} h_{qt} - 2 h_{p[s} h_{t]q} \right) \right] \dot{x}^p m_i^q \dot{x}^s m_j^t, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\Psi_{2T^{ij}} = \mu \frac{D-3}{r^{D-3}} h_{qt} m_i^q m_j^t, \quad (5.23)$$

a invariantní rovnici geodetické deviace (3.56), (3.57) lze zapsat jako

$$\ddot{Z}^{(1)} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} Z^{(1)}, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^{(i)} &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} Z^{(i)} + 2r^2 \left[\mathcal{R}_{pqst} - \frac{2\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} h_{p[s} h_{t]q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{r^{D-3}} \left(\frac{D-3}{4} h_{ps} h_{qt} - 2 h_{p[s} h_{t]q} \right) \right] \dot{x}^p m_i^q \dot{x}^s m_j^t Z^{(j)} \\ &\quad - \frac{D-3}{2} \frac{\mu}{r^{D-3}} h_{qt} \left(m_{(i}^q m_{j)}^t + H\dot{u}^2 m_i^q m_j^t \right) Z^{(j)}. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic je zřejmé, že v obecném případě pohybů částic ve vakuovém Robinsonově-Trautmanově prostoročase vstupují do hry jak členy způsobující celkové izotropní pohyby pozadí, tak členy coulombického charakteru a konečně také kinematické členy s charakterem transverzální gravitační vlny.

Dále stojí za povšimnutí, že nenulové koeficienty Ψ_{2ijkl} a Ψ_{3ijk} nemají na výsledný tvar rovnic žádný vliv, neboť v nich vystupují pouze ve své kontrahované podobě, která je však v tomto případě nulová.

5.3.2 Vakuová řešení pro případ $\mu = 0$

Pokud je $\mu = 0$ jediné nenulové komponenty Weylova tenzoru¹ jsou ve tvaru

$$C_{pqst} = r^2 \mathcal{R}_{pqst} - 2r^2 \frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} h_{p[s} h_{t]q} \quad (5.25)$$

a nenulovými koeficienty Ψ_A jsou

$$\Psi_{2ijkl} = \left[r^2 \mathcal{R}_{pqst} - 2r^2 \frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} h_{p[s} h_{t]q} \right] m_i^p m_j^q m_k^s m_l^t, \quad (5.26)$$

$$\Psi_{3ijk} = \sqrt{2} \left[r^2 \mathcal{R}_{pqst} - 2r^2 \frac{\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} h_{p[s} h_{t]q} \right] \dot{x}^p m_i^q m_j^s m_k^t, \quad (5.27)$$

$$\Psi_{4ij} = 2r^2 \left[\mathcal{R}_{pqst} - \frac{2\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} h_{p[s} h_{t]q} \right] \dot{x}^p m_i^q \dot{x}^s m_j^t. \quad (5.28)$$

Rovnice geodetické deviace má tedy tvar

$$\ddot{Z}^{(1)} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} Z^{(1)}, \quad (5.29)$$

$$\ddot{Z}^{(i)} = \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} Z^{(i)} - r^2 \left[\mathcal{R}_{pqst} - \frac{2\mathcal{R}(u)}{(D-2)(D-3)} h_{p[s} h_{t]q} \right] \dot{x}^p m_i^q \dot{x}^s m_j^t Z^{(j)}. \quad (5.30)$$

Toto řešení, jehož podrobnější rozbor obecné geometrie lze najít například v [23], je přitom důležité, neboť díky němu bychom mohli blíže zkoumat čistě kinematické efekty působící na pohybující se částice. Ostatní členy kromě pozadí totiž vymizí.

¹Pokud by bylo i $C_{pqst} = 0$, pak by řešení degenerovalo na typ 0, tedy na prostoročas konstantní křivosti popsáný v kapitole 5.2.

Závěr

Cílem předložené diplomové práce bylo odvodit explicitní tvar invariantní rovnice geodetické deviace v obecném prostoročase libovolné dimenze a blíže prozkoumat některé její vlastnosti. Dále jsme měli aplikovat tyto obecné výsledky na některé významné třídy vícerozměrných prostoročasů Einsteinovy gravitace, zejména na vakuový Robinsonův-Trautmanův prostoročas. Tohoto cíle se nám v zásadě podařilo dosáhnout.

Konkrétně jsme v diplomové práci nejprve popsali základy geometrického aparátu, který umožňuje velmi elegantní způsob přístupu k interpretaci obecné teorie relativity a který jsme využili v dalších pasážích textu. Následně jsme také shrnuli dobře známou Petrovovu klasifikaci Weylova tenzoru ve čtyřech dimenzích a představili její rozšíření na prostoročasy libovolné dimenze.

Stěžejní část práce, kterou tvoří 3. kapitola, se věnuje relativnímu pohybu testovacích částic v obecném prostoročase libovolné dimenze popsanému invariantní rovnicí geodetické deviace. Součástí této kapitoly je též interpretace některých členů rovnice geodetické deviace, konkrétně členů obsahujících kosmologickou konstantu Λ způsobujících celkové izotropní pohyby dané pozadím a členů obsahujících komponenty Weylova tenzoru Ψ_A odpovídajících lokálnímu volnému gravitačnímu poli.

Čtvrtou kapitolu jsme zasvětili volbě báze vhodné pro interpretaci přesných prostoročasů různých typů. Poukázali jsme zejména na její jednoznačnost a stanovili, jaké jsou podmínky pro její paralelní přenos. V závěru kapitoly jsme navíc ukázali, jaká je přirozená volba souřadnic pro netwistující prostoročasy a jaký v nich má nulová referenční báze přenášená podél časupodobné geodetiky explicitní tvar.

V poslední páté kapitole jsme výsledky získané v předchozích částech aplikovali

vali na vícerozměrný vakuový Robinsonův-Trautmanův prostoročas a ukázali, jaký konkrétní tvar má rovnice geodetické deviace. Zjistili jsme přitom, že i v tomto speciálním případě jsou v ní obsaženy členy zodpovědné za izotropní pohyb daný kosmologickým pozadím, členy coulombického typu a rovněž kinematické členy odpovídající svým charakterem transverzální gravitační vlně.

Dodatky

A Nezávislé složky Riemannova a Weylova tenzoru v obecné dimenzi

V následujícím textu ukážeme, kolik nezávislých komponent má Riemannův respektive Weylův tenzor v obecném prostoročase dimenze D .

A.1 Riemannův tenzor

Riemannův tenzor je tenzor typu $(0,4)$, pro nějž obecně platí vlastnosti reprezentované rovnicemi (1.16)–(1.20). Pro zjištění počtu jeho nezávislých složek musíme uvažovat ty z nich, které se týkají jeho symetrie, tedy

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{abcd} &= -\mathbf{R}_{bacd}, \\ \mathbf{R}_{abcd} &= -\mathbf{R}_{abdc}, \\ \mathbf{R}_{abcd} &= \mathbf{R}_{cdab},\end{aligned}\tag{A.1}$$

a dále také cyklickou identitu vyjádřenou vztahem

$$\mathbf{R}_{abcd} + \mathbf{R}_{acdb} + \mathbf{R}_{adbc} = 0.\tag{A.2}$$

Vezměme tedy nejprve v úvahu symetrie vyjádřené vztahem (A.1) a spočtěme zbývající nezávislé komponenty. Protože je tenzor antisymetrický v indexech \mathbf{ab} , reprezentují tyto indexy $n = D(D-1)/2$ nezávislých komponent. Tyto komponenty můžeme pro přehlednost označit jako $I = 1, \dots, n$. Dále také pro indexy \mathbf{cd} platí stejná antisymetrie jako pro indexy \mathbf{ab} a označují proto stejné množství nezávislých komponent, které můžeme označit jako $J = 1, \dots, n$. Nakonec uvažme, že tenzor \mathbf{R}_{IJ}

je symetrický v nově zavedených indexech I a J , takže má $n(n+1)/2$ nezávislých komponent a platí

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{4}D(D-1) \left[\frac{1}{2}D(D-1) + 1 \right]. \quad (\text{A.3})$$

Nyní vezmeme v potaz také cyklickou identitu danou vztahem (A.2). Nejjednodušší je, pokud si uvědomíme, že tato identita je za předpokladu platnosti vlastností (A.1) ekvivalentní vztahu

$$\mathbf{R}_{[abcd]} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Tento fakt vyplývá ze skutečnosti, že díky symetriím (A.1) platí

$$8\mathbf{R}_{abcd} = \mathbf{R}_{abcd} - \mathbf{R}_{abdc} + \mathbf{R}_{badc} - \mathbf{R}_{bacd} + \mathbf{R}_{cdab} - \mathbf{R}_{dcab} + \mathbf{R}_{dcba} - \mathbf{R}_{cdba} \quad (\text{A.5})$$

a obdobně pro $8\mathbf{R}_{acdb}$ a $8\mathbf{R}_{adbc}$. Pokud každý člen v rovnici (A.2) takto rozepíšeme, pak výsledná rovnice obsahující 24 členů odpovídá právě identitě (A.4).

V rovnici (A.4) máme možnost volby pro čtyři různé neuspořádané indexy, takže počet nezávislých vazeb je roven počtu kombinací čtvrté třídy z D prvků bez opakování. To znamená, že výsledný počet nezávislých komponent Riemannova tenzoru $N_R(D)$ je dán vztahem

$$N_R(D) = \frac{1}{4}D(D-1) \left[\frac{1}{2}D(D-1) + 1 \right] - \binom{D}{4}, \quad (\text{A.6})$$

který lze jednoduchými algebraickými úpravami převést do tvaru

$$N_R(D) = \frac{1}{12}D^2(D^2 - 1). \quad (\text{A.7})$$

Pro $D = 4$ dostáváme $N_R(4) = 20$.

A.2 Weylův tenzor

Weylův tenzor má stejné symetrie jako Riemannův tenzor, ale navíc musí splňovat ještě $D(D+1)/2$ rovnic vyplývajících z jeho bezestoposti

$$\mathbf{C}_{abc}{}^b = 0. \quad (\text{A.8})$$

Počet nezávislých komponent Weylova tenzoru $N_W(D)$ je tak dán vztahem

$$N_W(D) = \frac{1}{12}D^2(D^2 - 1) - \frac{1}{2}D(D + 1), \quad (\text{A.9})$$

neboli platí

$$N_W(D) = \frac{1}{12}(D + 2)(D + 1)D(D - 3). \quad (\text{A.10})$$

Ve čtyřrozměrném prostoročase $N_W(4) = 10$.

B Rozklad Weylova tenzrou užitím báze $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}_i$ a C_{abcd} koeficientů

Abychom vyjádřili Weylův tenzor pomocí jeho komponent v bázi $\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i$, můžeme postupovat i jiným způsobem, než je rozklad pomocí nezávislých reálných komponent Weylova tenzoru Ψ_A definovaných vztahy (3.26)–(3.35).

Stejně jako například v [9] nebo [14] zavedeme operaci $\{ \}$ definovanou následujícím způsobem

$$w_{\{axbyczd\}} \equiv \frac{1}{2}(w_{[axb]y[czd]} + w_{[cxd]y[azb]}). \quad (\text{B.1})$$

Díky ní můžeme Weylův tenzor v obecné dimenzi zapsat jako

$$\begin{aligned} C_{abcd} = & \overbrace{4C_{0i0j} \mathbf{n}_{\{a} \mathbf{m}^i_{\mathbf{b}} \mathbf{n}_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^j_{\mathbf{d}}\}}^2 + \overbrace{8C_{010i} \mathbf{n}_{\{a} \mathbf{l}_{\mathbf{b}} \mathbf{n}_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^i_{\mathbf{d}}\}}^1 + \overbrace{4C_{0ijk} \mathbf{n}_{\{a} \mathbf{m}^i_{\mathbf{b}} \mathbf{m}^j_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^k_{\mathbf{d}}\}}^1 \\ & + \overbrace{4C_{0101} \mathbf{n}_{\{a} \mathbf{n}_{\mathbf{b}} \mathbf{n}_{\mathbf{c}} \mathbf{l}_{\mathbf{d}}\}}^0 + \overbrace{C_{01ij} \mathbf{n}_{\{a} \mathbf{l}_{\mathbf{b}} \mathbf{m}^i_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^j_{\mathbf{d}}\}}^0 \\ & + \overbrace{8C_{0i1j} \mathbf{n}_{\{a} \mathbf{m}^i_{\mathbf{b}} \mathbf{l}_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^j_{\mathbf{d}}\}}^0 + \overbrace{C_{ijkl} \mathbf{m}^i_{\{a} \mathbf{m}^j_{\mathbf{b}} \mathbf{m}^k_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^l_{\mathbf{d}}\}}^0 \\ & + \overbrace{8C_{101i} \mathbf{l}_{\{a} \mathbf{n}_{\mathbf{b}} \mathbf{l}_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^i_{\mathbf{d}}\}}^{-1} + \overbrace{4C_{1ijk} \mathbf{l}_{\{a} \mathbf{m}^i_{\mathbf{b}} \mathbf{m}^j_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^k_{\mathbf{d}}\}}^{-1} + \overbrace{4C_{1i1j} \mathbf{l}_{\{a} \mathbf{m}^i_{\mathbf{b}} \mathbf{l}_{\mathbf{c}} \mathbf{m}^j_{\mathbf{d}}\}}^{-2}, \end{aligned}$$

kde sčítáme přes indexy i, j, k, l a čísla uvedená nad jednotlivými skupinami komponent vyjadřují jejich boostovou váhu.

Rozdělení komponent podle jejich boostových vah přehledně shrnuje tabulka B.1 a souvislost s různými algebraicky speciálními typy tabulka B.2, které jsou na straně 57.

Počet nezávislých souřadnicových komponent odpovídajících jednotlivým boostovým vahám je podle [14]

$$\begin{aligned}
& \overbrace{2 \left(\frac{D(D-3)}{2} \right)}^{2,-2} + \overbrace{2 \left(\frac{(D-1)(D-2)(D-3)}{3} \right)}^{1,-1} \\
& + \overbrace{\frac{(D-2)^2(D^2-4D-5)}{12}}^0 + \frac{(D-2)(D-3)}{2} = \frac{1}{12}D^2(D^2-1) - \frac{1}{2}D(D+1),
\end{aligned}$$

což souhlasí s již dříve odvozeným vztahem pro počet nezávislých komponent Weylova tenzoru (A.9).

B.1 Vztah mezi komponentami Weylova tenzoru

C_{abcd} a Ψ_A

Nezávislé komponenty Weylova tenzoru C definované v kapitole 2.2.2 pomocí báze vektorů $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}_i$ jsou obdobou nezávislých komponent Weylova tenzoru definovaných vztahy (3.26)–(3.35) použitím báze $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i$. Následující vztahy vyjadřují souvislost mezi jednotlivými komponentami

$$C_{0i0j} \simeq \Psi_{0^{ij}}, \quad (\text{B.2})$$

$$C_{0ijk} \simeq \Psi_{1^{ijk}}, \quad (\text{B.3})$$

$$C_{ijkl} \simeq \Psi_{2^{ijkl}}, \quad (\text{B.4})$$

$$C_{01ij} \simeq \Psi_{2^{ij}}, \quad (\text{B.5})$$

$$C_{1ijk} \simeq \Psi_{3^{ijk}}, \quad (\text{B.6})$$

$$C_{1i1j} \simeq \Psi_{4^{ij}}, \quad (\text{B.7})$$

$$C_{010i} \simeq \Psi_{1T^i}, \quad (\text{B.8})$$

$$C_{0101} \simeq \Psi_{2S}, \quad (\text{B.9})$$

$$C_{0i1j} \simeq \Psi_{2T^{ij}}, \quad (\text{B.10})$$

$$C_{101i} \simeq \Psi_{3T^i}. \quad (\text{B.11})$$

| 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
|------------|----------------------|------------------------------------------|----------------------|------------|
| C_{0i0j} | C_{010i}, C_{0ijk} | $C_{0101}, C_{01ij}, C_{0i1j}, C_{ijkl}$ | C_{101i}, C_{1ijk} | C_{1i1j} |

Tabulka B.1: Boostové váhy jednotlivých nezávislých komponent Weylova tenzoru.

| Algebraický typ | Podmínka pro komponenty Weylova tenzoru |
|-----------------|------------------------------------------------------------|
| I | $C_{0i0j} = 0$ |
| II | $C_{0i0j} = C_{0ijk} = 0$ |
| III | $C_{0i0j} = C_{0ijk} = C_{ijkl} = C_{01ij} = 0$ |
| N | $C_{0i0j} = C_{0ijk} = C_{ijkl} = C_{01ij} = C_{1ijk} = 0$ |

Tabulka B.2: Algebraické typy Weylova tenzoru.

C Vztah reálné a komplexní notace pro složky Weylova tenzoru v D=4

V kapitole 2.1 jsme pro potřeby klasifikace Weylova tenzoru ve čtyřech dimenzích zavedli komplexní nulovou tetradu a Weylův tenzor jsme pak klasifikovali pomocí odpovídajících komplexních komponent, tzv. Newmanových-Penroseových koeficientů. Ty jsou přitom v úzkém vztahu k reálným komponentám Weylova tenzoru, které jsme použili pro klasifikaci Weylova tenzoru ve více dimenzích v kapitole 2.2. Dále tedy pro přehlednost uvádíme, jaký je vztah mezi těmito dvěma notacemi.

Ve čtyřech dimenzích nabývá index i použitý pro označení vektorů báze (2.23) respektive (2.14) pouze hodnot $i = 2, 3$. Kombinací reálných vektorů \mathbf{m}_2 a \mathbf{m}_3 přitom můžeme dostat komplexní vektory

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{m}_2 + i\mathbf{m}_3), \quad \bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{m}_2 - i\mathbf{m}_3), \quad (\text{C.1})$$

použité ve čtyřrozměrné bázi (2.1).

Navíc ve čtyřech dimenzích existují pouze dvě nezávislé reálné komponenty Weylova tenzoru pro každou boostovou váhu, konkrétně

$$\Psi_{022} = -\Psi_{033}, \quad \Psi_{023} = \Psi_{032}, \quad (\text{C.2})$$

$$\Psi_{1T^2} = \Psi_{1332} = -\Psi_{1323}, \quad \Psi_{1T^3} = \Psi_{1223} = -\Psi_{1232}, \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \Psi_{22323} &= \Psi_{23232} = -\Psi_{23223} = -\Psi_{22332} = \Psi_{2T^22} = \Psi_{2T^33} = \frac{1}{2}\Psi_{2S}, \\ \Psi_{223} &= -\Psi_{232} = \Psi_{2T^23} = -\Psi_{2T^32}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\Psi_{3T^2} = \Psi_{3332} = -\Psi_{3323}, \quad \Psi_{3T^3} = \Psi_{3223} = -\Psi_{3232}, \quad (\text{C.5})$$

$$\Psi_{4^{22}} = -\Psi_{4^{33}}, \quad \Psi_{4^{23}} = \Psi_{4^{32}}. \quad (\text{C.6})$$

Jejich kombinací pak dále dostáváme dobře známé Newmanovy-Penroseovy komponenty

$$\Psi_0 = \Psi_{0^{22}} + i\Psi_{0^{23}}, \quad (\text{C.7})$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^2} + i\Psi_{1T^3}), \quad (\text{C.8})$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{2} (\Psi_{2^{2323}} - i\Psi_{2^{23}}), \quad (\text{C.9})$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{3T^2} - i\Psi_{3T^3}), \quad (\text{C.10})$$

$$\Psi_4 = \Psi_{4^{22}} - i\Psi_{4^{23}}. \quad (\text{C.11})$$

zavedené již dříve, viz rovnice (2.2)–(2.6), vztahy

$$\Psi_0 = C_{abcd} k^a m^b k^c m^d, \quad (\text{C.12})$$

$$\Psi_1 = C_{abcd} k^a l^b k^c m^d, \quad (\text{C.13})$$

$$\Psi_2 = C_{abcd} k^a m^b \bar{m}^c l^d, \quad (\text{C.14})$$

$$\Psi_3 = C_{abcd} l^a k^b l^c \bar{m}^d, \quad (\text{C.15})$$

$$\Psi_4 = C_{abcd} l^a \bar{m}^b l^c \bar{m}^d. \quad (\text{C.16})$$

Literatura

- [1] Becker M., Becker J., Schwarz H.: *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [2] Kaluza T.: *Zum Unitätsproblem in der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss, Berlin, Math. Phys., 966–972 (1921).
- [3] Klein O.: *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zeitschrift für Physik **37**, 895-906 (1926).
- [4] Maldacena J. M.: *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Advances in Theoretical and Mathematical Physics **2**, 231–252 (1997).
- [5] Langlois D.: *Brane cosmology: an introduction*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148**, 181-212 (2003).
- [6] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.: *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
- [7] Wald R. M.: *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [8] Petrov A. Z.: *Classification of spaces defined by gravitational fields*, Uch. Zapiski Kazan Gos. Univ. **144**, 55 (1954), (překlad do angličtiny Gen. Rel. Grav. **32**, 1665 (2000)).
- [9] Coley A.: *Classification of the Weyl tensor in higher dimensions and applications*, Class. Quantum Grav. **25**, 1-29 (2008).

-
- [10] Kramer D., Stephani H., MacCallum M. A. H., Herlt H.: *Exact Solutions of the Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).
- [11] Krtouš P., Podolský J.: *Asymptotic structure of radiation in higher dimensions*, Class. Quantum Grav. **23**, 1603-1615 (2006).
- [12] Podolský J.: *On Exact Radiative Space-times with Cosmological Constant*, PhD thesis, Prague (1993).
- [13] Milson R., Coley A., Pravda V., Pravdová A.: *Alignment and algebraically special tensors in lorentzian geometry*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **2**, 41-61 (2005).
- [14] Pravda V.: *On the algebraic classification of spacetimes*, Journal of Physics: Conference Series **33**, 463-468 (2006).
- [15] Bičák J., Podolský J.: *Gravitational waves in vacuum spacetimes with cosmological constant. II. Deviation of geodesics and interpretation of nontwisting type N solutions*, Journal of Mathematical Physics **9**, 4506-4517 (1999).
- [16] Robinson I., Trautman A.: *Spherical gravitational waves*, Phys. Rev. Lett. **4**, 431-432 (1960).
- [17] Newman E., Penrose R.: *An approach to gravitational radiation by method of spin coefficients*, J. Math. Phys. **3**, 566-578 (1962).
- [18] Robinson I., Trautman A.: *Some spherical gravitational waves in general relativity*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A265**, 463-473 (1962).
- [19] Griffiths J. B., Podolský J.: *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (2009).
- [20] Ortaggio M., Podolský J.: *Robinson-Trautman spacetimes in higher dimensions*, Class. Quantum Grav. **23**, 5785-5797 (2006).

-
- [21] Ortaggio M., Podolský J., Žofka M.: *Robinson-Trautman spacetimes with an electromagnetic field in higher dimensions*, *Class. Quantum Grav.* **25**, 1-18 (2008).
- [22] Bičák J., Podolský J.: *Gravitational waves in vacuum spacetimes with cosmological constant. I. Classification and geometrical properties of nontwisting type N solutions*, *Journal of Mathematical Physics* **9**, 4495-4505 (1999).
- [23] Ortaggio M.: *Higher dimensional spacetimes with a geodesic, shearfree, twistfree and expanding null congruence*, arXiv:gr-qc/0701036v2 (2006).

Publikace jsou uvedeny v pořadí výskytu v textu.

Seznam obrázků

| | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Jednparametrická množina geodetik | 11 |
| 2.1 | Penroseovo schéma | 15 |
| 3.1 | Ortonormální báze vektorů $\mathbf{e}_{(i)}$ a báze reálných vektorů $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_{(i)}$. . . | 25 |

Seznam tabulek

| | | |
|-----|--------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Algebraické typy Weylova tenzoru a komponenty Ψ_A | 15 |
| 2.2 | Weylova klasifikace tenzoru ve $4D$ a ND | 20 |
| B.1 | Boostové váhy jednotlivých nezávislých komponent Weylova tenzoru . | 57 |
| B.2 | Algebraické typy Weylova tenzoru | 57 |