Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jana Plačková

Shluky volatility a dynamika poptávky a nabídky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	Dr. Jan M. Swart
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Praha 2011

Na tomto místě bych ráda poděkovala Dr. Janu Swartovi za jeho pomoc a cenné rady při psaní této práce. Za jeho trpělivost, otevřonost mým nápadům a ochotné vysvětlení mých dotazů. Dále bych ráda poděkovala Mgr. Karlu Janečkovi za jeho ochotu se se mnou a Dr. Swartem sejít a přiblížit nám realitu obchodování na burze. Také bych ráda poděkovala Mgr. Jakubovi Černému za jeho podporu a pomoc při boji s výpočetním softwarem. V neposlední řadě své rodině, která mě celé studium podporovala a dodávala mi sílu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Shluky volatility a dynamika poptávky a nabídky

Autor: Jana Plačková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Dr. Jan M. Swart

e-mail vedoucího: swart@utia.cas.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme dynamikou poptávky a nabídky, která je zachycena vývojem elektronického obchodního systému na burze tzv. order booku. Přinášíme základní popis order booku, limit a market orderu, definici bid a ask ceny, spreadu. Dále je popsána volatilita a základní modely používané pro modelování či předpovídání jejího vývoje. Následuje přehled současných úspěchů na poli modelování shluků volatility, ať již ekonomy či fyziky. V praktické části je vytvořen modelový order book, ve kterém pozorujeme příliv orderů, vývoj ask, bid a především spreadu. Pro rozdělení spreadu je určeno empirické pravděpodobnostní rozdělení a nalezeno jeho možné spojité rozdělení. Dále jsou vypočítány výnosy ze spreadu a pomocí nich se snažíme zachytit shlukování volatility i v takto jednoduchém modelu order booku. Jsou představena i určitá zlepšení a porovnána s původním modelem.

Klíčová slova: shluky volatility, order book, limit order, market order

Title: Volatility bursts and order book dynamics

Author: Jana Plačková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Dr. Jan M. Swart

Supervisor's e-mail address: swart@utia.cas.cz

Abstract: The presented paper studies the dynamics of supply and demand through the electronic order book. We describe and define the basic rules of the order book and its dynamics. We also define limit and market orders and describe the differences between them and how they influenced the evolution of ask, bid price and spread. Next part of the paper is dedicated to the description and definition of volatility and its basic models. The brief overview about volatility clustering and its modeling by economists and physicists can be found in the following part. In the last part we introduce a simple model of order book in which we observe ask, bid price and spread. Then we study the empirical distribution of spread and try to find its probability distribution. The volatility clustering is then observed through the relative returns of spread. In the last part we introduce some possible improvement of the model.

Keywords: volatility clustering, order book, limit orders, market orders

Obsah

1 Úvod **2**

2 Dynamika poptávky a nabídky, Order book **4**
2.1 Dynamika poptávky a nabídky 4
2.2 Order Book 6
2.3 Modelování Order Booku 9
2.4 (Limit) Order book a světové trhy 11
2.4.1 Londýnská Burza - London Stock Exchange (LSE) 11
2.4.2 Euronext 12
2.4.3 Česká burza cenných papírů 12

3 Volatilita **14**
3.1 Modelování volatility 14
3.1.1 Historická volatilita 15
3.1.2 EWMA modely 16
3.1.3 Implikovaná volatilita, Autoregresní modely, ARMA modely 16
3.1.4 ARCH modely 19
3.1.5 GARCH modely 20
3.2 Shluky volatility 21

4 Praktická část **23**
4.1 Předpoklady modelu 23
4.2 Popis modelu 24
4.3 Výsledky modelu 25
4.4 Modifikace modelu 34

5 Závěr **43**

Seznam použité literatury **45**

Kapitola 1

Úvod

Jak obchodovat na burze, jak se vyvíjí bid, ask či spread? Toto všechno jsou zajímavé otázky, které studuje mnoho odborníků ve snaze najít a popsat zákonitosti, které pro takové obchodování platí. Modelování tržních sil je vždy velmi zajímavým a v dnešní době vyhledávaným tématem. Především z důvodu velmi snadného přístupu k informacím, které jsou ve většině případů uchovávány a skladovány v elektronických systémech, kterým se říká order book.

Order booky slouží v dnešní době jako elektronická tržiště, kde obchodník může zjistit za jakou nejlepší cenu může své aktivum prodat či koupit, pokud ho poptává. Modelováním order booku se zabývají jak matematici - ekonomové, tak fyzici, kteří našli zajímavou možnost modelovat order book pomocí částic a mřížek. Tyto dvě skupiny pracují téměř nezávisle jedna na druhé a přesto jsou jejich nálezy shodné, nebo alespoň z větší části srovnatelné.

V dnešní době již existuje řada objevů, které se týkají sil utvářejících order book. Jsou popsány a namodelovány. Avšak stále mnoho vlastností, které jsou pozorovány v empirických studiích nemá své vysvětlení, nebo si je vysvětlujeme jako charakteristická pro daný order book. Mnoho dnešních světových trhů je hybridem mezi trhem, který je řízen ordery a tím, který je řízen quotes. I přesto v těchto, řekněme hybridních order book-cích, platí mnoho pravidel a zákonitostí, která byla objevena pro trhy, které jsou čistě řízeny ordery.

Stejně jako dynamika nabídky a poptávky a proces utváření současné ceny v order booku, je častěji v hledáčku rizikovost investice. Jedním ze způsobů, jak tuto rizikovost vyjádřit je volatilita. Studium volatility, která není na trhu pozorovatelná přímo, ale pouze zprostředkovaně, je dnes běžnou součástí mnoha analýz. Dnes se do popředí zájmu dostává především rys volatility, který je znám již mnoho let - shluky volatility. Považuje se za známý fakt, že volatilita má tendenci se shlukovat. Tím je myšleno, že malé změny ve volatilitě nastávají s největší pravděpodobností opět po malých změnách. Obdobně s velkými výkyvy. Tento fenomén je velmi dobře znám, existuje mnoho způsobů modelování, avšak samotné vysvětlení, proč ke shlukování dochází, ještě nebylo odkryto.

Snahou předložené práce je vývoj jednoduchého modelu order booku a studium jeho vlastností a zjištění, zda i za našich zjednodušujících předpokladů stále dochází ke shlukováňí volatility.

Práce je rozdělena na dvě hlavní části - teoretickou (kapitola 2 a 3) a praktickou (kapitola 4).

V kapitole 2 je popsán stručný úvod do dynamiky poptávky a nabídky, popis a

definice order booku a základních nástrojů, které slouží k obchodování na takovém to trhu - limit a market ordery. Dále jsou rozebrány přístupy, které jsou používany k modelování order booku a některé jejich výsledky. V poslední části této kapitoly jsou popsány reálné order booky.V kapitole 3 je definována volatilita, popsány přístupy k jejímu modelování a především fenomén shluků volatility.

V praktické části práce je popsán vyvinutý model, jeho vlastnosti a jsou představena možná zlepšení.

Kapitola 2

Dynamika poptávky a nabídky, Order book

Určení ceny, která je výhodná pro prodej či nákup daného aktiva, je problémem starým jako lidstvo samo. Dříve se obchodníci setkávali tváří v tvář na tržištích a smlouvali o výši ceny. Zboží, o které byl nějvětší zájem a jehož zásoby byly omezené, nebo se získávalo velmi složitým způsobem, bylo ceněno vysoko a cena mohla být závratná. Na druhé straně stojí zboží, jehož je dostatek nebo zájem o něj je malý. Jeho cena nebývá vysoká a je lehce k dostání.

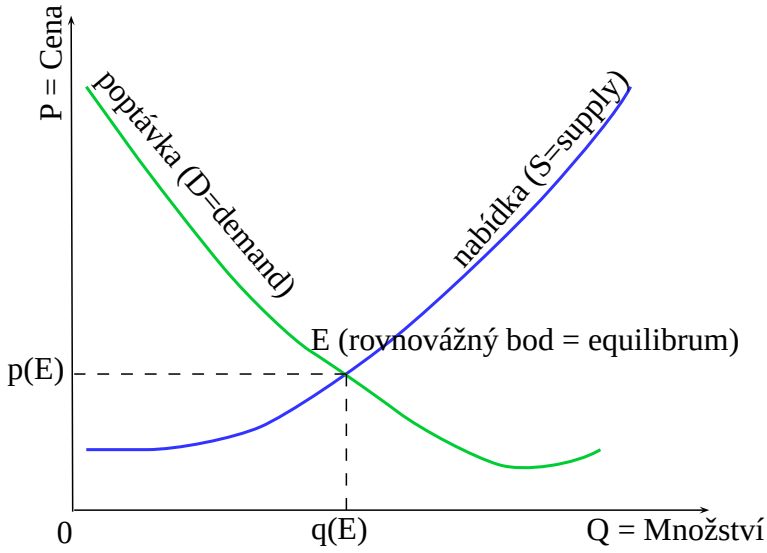
V dnešní době se již obchodníci nesetkávají na tržištích. V naší uspěchané době jsou to právě burzy a jimi spravované elektronické obchodní systémy - tzv. *order booky*, které zprostředkovávají obchody mezi kupujícími a prodávajícími. I v těchto elektronických a vysoce sofistikovaných systémech platí a dají se vysledovat základní pravidla poptávky a nabídky.

2.1 Dynamika poptávky a nabídky

Poptávka a nabídka - dvě slova, která ekonomové, finanční matematici, bankéři a obchodnicí celého světa skloňují ve všech pádech a mají k tomu dobrý důvod. Jsou to právě tyto dvě síly, které dovolují fungování trhu jako celku. Určují množství zboží, které je potřeba vyprodukovat a stanovují jeho prodejní cenu. Pokud na trh přijde nová informace, např. nový zákon, zvýšení DPH, neúroda, pokrok na poli techniky a mnoho jiných, je to právě poptávka a nabídka po daném statku, která je ovlivněna jako první. Proto je v centru zájmu nespočtu odborných studií. Jak poznamenává [17] poptávka a nabídka určuje ceny na trhu a na druhou stranu ceny ovlivňují alokaci zdrojů v ekonomice.

Nejčastěji se termíny nabídka a poptávka váží k chování subjektů (obchodníků, spekulantů aj.) na trhu. Skupina obchodníků, označováná jako kupci, ovlivňuje svými rozhodnutími poptávku po daném statku. Druhá skupina, prodejci, ovlivňuje nabídku. Klasická teorie poptávky a nabídky vychází z předpokladu, že prodejce je výrobcem daného statku a kupující spotřebitelem. Z tohoto pohledu jsou pravidla poptávky a nabídky vyjádřena pomocí dvou ekonomických zákonů:

zákon poptávky - Spotřebitelé poptávají více, pokud cena statku klesá a méně, když cena roste (toto pravidlo je latinsky označováno jako *ceteris paribus*).



Obrázek 2.1: nabídková a poptávková křivka

zákon nabídky - Pokud cena statku stoupá, množství nabízeného statku se snižuje a naopak.

Nabídka a poptávka se vyjádřují graficky pomocí tzv. *křivky nabídky a poptávky*, obrázek 2.1.

Nabídková a poptávková křivka se potkávají v bodě, který je označován jako *bod rovnováhy trhu*. Při rovnovážné ceně $p(E)$, je množství $q(E)$, které jsou výrobci ochotni vyrábět a prodávat, shodné s množstvím, které jsou spotřebitelé ochotni za tuto cenu koupit. Někdy je E označován jako bod, při kterém dochází k vyčištění trhu. Protože při ceně $p(E)$ a množství $q(E)$ jsou všechny subjekty na trhu uspokojeny. Pokud se preference jedné ze skupin změní, vede to k posunu bodu E. Spravedlivá cena určitého zboží (aktiva na trhu), je tedy v klasické teorii poptávky a nabídky určena preferencemi dvou skupin - výrobců a spotřebitelů, které jsou vyjádřeny poptávkovou a nabídkovou křivkou a jejich průsečíkem.

Protože cílem této práce je modelování dynamiky poptávky a nabídky z pohledu obchodníka na burze, je vhodné popsat proces utváření cen na burze. Burza je jednou ze základních součástí trhu, kde se obchoduje především s investičními nástroji, např. cenné papíry, investiční certifikáty, warranty, futures aj. Je to místo setkání emitentů - vydavatelů investičních nástrojů (tedy z pohledu klasické ekomonické teorie poptávky a nabídky by se dalo hovořit o „výrobcích“ investičních nástrojů) a investorů („spotřebitelé“ investičních nástrojů). Pro emitenty je burza místem, kde mohou získat finanční prostředky pro své podnikání. Investoři zde mají možnost zhodnotit své volné finanční prostředky. Stejně jako jsme uvedli výše, i o ceně obchodovaného instrumentu, rozhoduje na burze poptávka a nabídka. V souvislosti s burzou se často o této ceně mluví jako o *kurzu*. Ceny na burze jsou však do značné míry určeny subjekty, které bychom měli nazývat spekulanty. Spekulant je subjekt, který dané aktivum (investiční nástroj) nekupuje z důvodu jeho potřeby, ale protože si myslí, že cena by mohla vzrůst a následný prodej by mu přinesl zisk. Speklunati jsou důležitou součástí trhu a přináší na něj potřebnou likviditu.

2.2 Order Book

Dnes je velmi běžné, že nabídka a poptávka účastníků trhu je realizována elektronicky a informace o ní jsou udržovány v databázi. Správa těchto databází a přístup k nim je zajišťován především prostřednictvím burz. Účastníci trhu, kteří mají do takovéto databáze přístup, kotují své nabídky a tím vzniká tzv. *order book* (OB), kniha objednávek.

Obecně můžeme říci, že **order** vyjadřuje úmysl obchodníka zúčastnit se transakce na trhu, která se týka daného aktiva či služby. Může mít jak ústní tak psanou podobu. Pokud hovoříme o orderech (podle názvosloví na Pražské burze „objednávkách“, podle České burzy cených papírů „pokynů“), které se uskutečňují na trzích, ať již akciových, komoditních nebo na trzích s finančními deriváty či dluhopisy, je order instrukce od zákazníka brokerovi, aby na burze nakupoval či prodával.

Způsobů, jak order book definovat je mnoho. Například [25] definuje order book jako *uspořádaný seznam přijatých orderů* (tj. cen, za které jsou obchodníci na trhu ochotni prodat či koupit dané aktivum), který burza používá k zaznamenávání preferencí obchodníků o dané aktivum. Jiný možný způsob definice order booku nám přináší [21]. Ti popisují order book jako seznam všech tzv. *limit orderů* s informací o jejich velikosti a ceně v daném časovém okamžiku.

V této chvíli začínáme narážet na názvosloví, které jednotliví autoři používají a které se liší většinou jen v určitých detailech. Výše jsme zmínili *limit order*. Gould, Potters a spol. [12] jej definují jako order s danou velikostí a cenou, který vyústí v obchod pouze v případě, že cena aktiva na trhu dosáhne dané ceny. Maslow a Mills [19] definují limit order to sell/buy („limitni příkaz k prodeji/nákupu“) jako informaci o tom, že obchodník bude prodávat/nakupovat dané množství aktiva pokud cena vystoupí nad/klesne pod předem definovanou úroveň, která se ve většině případů označuje jako *vypořádávací cena limit order* (execution price of a limit order). Velmi často je limit order chápán jako order který udává za jakou maximální (resp. minimální) cenu je obchodník ochoten koupit (resp. prodat) dané množství obchodovaného aktiva. U.S. Securities and Exchange Commission (viz. [28]) definuje limit order jako order ke koupi či prodeji daného aktiva, za určenou cenu či lepší. Tato jejich definice je však nejasná z důvodu, že již neříkají, jak daný subjekt na trhu dostane lepší cenu. Také poznamenávají, že pro limit ordery neexistuje jistota vyrovnání. Toto je určitá forma „penalizace“ obchodníka za to, že má zaručenu minimální či maximální cenu budoucího obchodu.

Velmi často se ve spojení s order book mluví i o tzv. *market orders* - tržních orderech. Definice orderů tohoto typu také obsahuje určité niance. Většina autorů (např. [1], [12], [19]) se shodne na tom, že market order je order, který po příchodu na trh okamžitě vyústí v obchod. V čem se však liší je skutečnost, zda market order je definován pouze svým množstvím nebo i cenou. Podle [19] je market order definován tak, že obchodník je velmi netrpělivý a chce prodat dané množství aktiva na trhu hned, ať je cena jakákoli. Avšak [12] definují market order jako order, který má svou cenu, ale ta je vyšší/nižší než současný *ask nebo bid price*[1] a tedy vyústí v obchod.

Abychom se vyhli případnému nedorozumění, zavedeme si definici limit a mar-

[1]Pojmy bid a ask price budou vysvětleny a popsány v následujícím textu.

ket orderu, které budeme používat v navazujícím textu a především v praktické části práce.

Definice 1. Order určený k prodeji ω množství aktiva za cenu p, který není po příchodu do order booku okamžitě vyrovnán, nazýváme *limitní order k prodeji (sell limit order - SLO).* Order určený k nákupu ω množství aktiva za cenu p, který není po příchodu do order booku okamžitě vyrovnán, nazýváme *limitní order určený k nákupu (buy limit order - BLO).*

Definice 2. Order určený k prodeji ω množství aktiva za cenu p, který je po příchodu do order booku okamžitě vyrovnán, nazýváme *tržní order k prodeji (sell market order - SLO).* Order určený k nákupu ω množství aktiva za cenu p, který je po příchodu do order booku okamžitě vyrovnán, nazýváme *tržní order určený k nákupu (buy market order - BLO).*

Jak je vidět výše, ani definice order booku není jednotná. Ve většině případů se dá však říci, že order book jak ho popisují [21] je označován jako tzv. *limit order book* (LOB). Limit order book je souhrnem všech limit orderů, které jsou v order booku v daný časový okamžik. Tedy lze říct, že stav (limit) order booku a především to, jak se vyvíjí v čase, odráží poptávku a nabídku po daném aktivu na trhu - burze. Přesto je dobré poznamenat, že ve většině případů pojmy order book a limit order book splývají.

Než se stal limit order book populárním, většina finančních trhů byla tzv. „quote driven“ (volně přeloženo jako trhy, které jsou řízeny cenou). Na takovém trhu se vyskytují tzv. market makers (tvůrci trhu) (viz. [3]). Tito market makers „centralizují“ buy a sell ordery tím, že zveřejňují pouze cenu, za kterou jsou ochotni prodat či koupit dané aktivum. Prodejní cena (z pohledu market makers) je v tomto případě vyšší než nákupní. Tato disbalance je způsobena tím, že market makers si „účtují poplatek za poskytnutí likvidity“ na trh[2]. Tím tito účastníci na trhu poskytují trhu dostatek likvidity a burza je za to odměňuje, např. ve formě dřívějšího přístupu k datům. Ostatní účastníci na trhu znají pouze dvě zveřejněné ceny. Jejich jedinou možností je dát quote k okamžitému prodeji či nákupu požadovaného množství aktiva za jim známou cenu (viz. [12]).

Trh, který je řízen pomocí limitních orderů, je však daleko flexibilnější. Za prvé účastníci trhu mají možnost užívat dva typy orderů - limit a market ordery. Velmi často je (ne)trpělivost spojována s tím, jaký druh orderu u obchodníka převažuje. Pokud budeme mluvit o trpělivých obchodnících, u těch převažují především limit ordery. Jsou ochotni si počkat, dokud cena nevzroste nebo nepoklesne pod jimi definovanou hranici. Netrpěliví obchodníci jsou zaměření spíše na market ordery. Tedy raději koupí či prodají dané množství aktiva za aktuální cenu na trhu.

Trhy po celém světě se liší v pravidlech jak, kdy a kdo může zadávat ordery a také tím, jak velká část order booku je viditelná různým skupinám účastníků trhu. Pokud budeme hovořit o trzích, kterou jsou čistě řízeny pomocí orderů - tzn. pure order-driven markets, nenalezneme zde žádné vytvořené market makers (tvůrce trhu). Pokud se na trhu nenacházejí, likvidita se na trh dostává pouze prostřednictvím limit orderů od subjektů na trhu, viz. [1].

[2]Toto je naprosto běžný jev. Představme si například směnárnu, pokud si my jako zákazník budeme chtít nakoupit cizí měnu, kurz za kterou ji budeme nakupovat - tedy směnárna prodává danou měnu - je vyšší než kurz, za který bychom danou měnu směnárně prodávali a ona by ji od nás nakupovala.

Čistě order-driven markets jsou např. burzy v Torontu (CATS), Paříži (CAC), Tokiu, Helsinkách (HETI), Stockholmu (SAX), Austrálii (ASX), nebo Honkongu (AMS) aj. Trhy v USA užívají trochu jiný přístup. Na New Yorské burze - NYSE (New York Stock Exchange) jsou individuální ordery párovány specialisty, kteří nezveřejňují žádné informace týkající se jejich order booky. To redukuje průhlednost order booku pro ostatní účastníky trhu. Ale i zde se dají najít příklady, které se podobají trhům, které jsou čistě řízeny ordery (tzv. pure order-driven markets), ve zbytku světa. Příkladem může být NASDAQ Level II screen. NASDAQ se však obecně považuje za quote-driven market. Malsov a Mills [19] popisují a vytvářejí svůj model právě pomocí dat z NASDAQ Level II screen, mnoho jejich výsledků je shodných s výsledky v ostatních pramenech popisujících order book, např. [4].

V dnešní době jsou data z elektronických OB (např. Pařížská Burza - Euronext, NYSE aj.) do určité míry přístupná široké veřejnosti. Všechny ordery týkající se aktiv obchodovaných na daných burzách jsou uchovávány a poskytují prostředek k modelování vývoje order booku hluboko do minulosti (mluvíme zde o stovkách tisíc záznamů, které jsou uskladňovány).

Nyní se budeme zabývat průběhem obchodování v (limit) order booku. Definujme si ask a bid price, mid price a především spread.

Definice 3. V daném časovém okamžiku t je *bid price* $b(t)$ *(zjednodušeně bid)* definován jako maximum ze všech buy limit orderů, které se v čase t nachází v LOB. Všechny ostatní buy limit ordery se nachází pod ním.

Definice 4. V daném časovém okamžiku t je *ask price* $a(t)$ *(zjednodušeně ask)* definován jako minimum ze všech sell limit orderů, které se v čase t nachází v LOB. Všechny ostatní sell limit ordery se nachází nad ním.

Obě tyto definice jsou ve shodě například s [12]. Nyní si definujeme spread a mid price.

Definice 5. V daném časovém okamžiku t je *spread* $s(t)$ definován jako rozdíl mezi bid a ask. Tedy $s(t) = a(t) - b(t)$.

Definice 6. V daném časovém okamžiku t je *mid price (průměrná cena)* $m(t)$ definována jako průměr mezi bid a ask. Tedy $m(t) = \frac{a(t)+b(t)}{2}$.

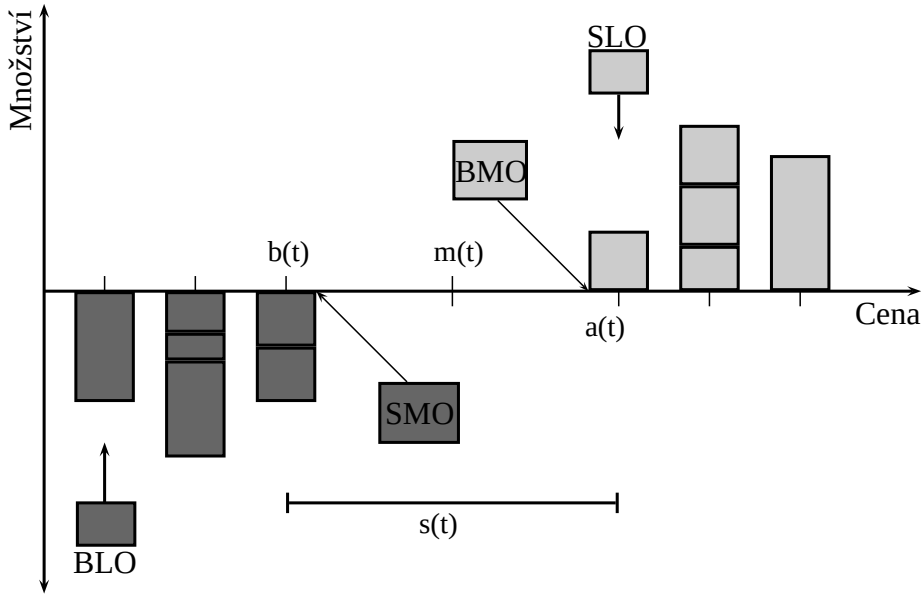
Pokud se na trhu objeví nový order, řekněme například buy order, je buď

1. přidán do order booku, pokud se nachází pod ask price (stává se z něj BLO) nebo

2. vyústí v obchod, pokud jeho cena je větší nebo rovna současné ask price (stává se z něj BMO).

Na obrázku 2.2 je vybrazen stav limit order booku v daném časovém okamžiku t.

Jelikož česká terminologie je v případě order booku nejednotná, budeme nadále používat výrazy order, order book, limit order book, buy/sell limit order, buy/sell market order, bid, ask, spread, ve smyslu jak byli vysvětleny a definovány výše.



Obrázek 2.2: stav LOB v daném čase t

Změna ceny a její dynamika je tedy výsledkem mezi stavem order booku v daný časový okamžik a přílivem orderů. Podle [21] může být samotné obchodování trhem interpretováno jako nová informace, která změní cenu. Obizhaeva a Wang [20] říkají, že dynamika aktuální poptávky a nabídky závisí na obchodování samotném. Pro účastníky trhu může být velmi zajímavé sledovat, jak limit či market ordery ovlivňují stav (limit) order booku, jak se vyvijí bid, ask či spread.

Velikost orderů Je známo, že ordery mají tendenci se shlukovat ve velikosti. Ve většině případů se jedná o násobky 10, 100, 1000 apod., viz. [14] Samozřejmě se dají najít i ordery neobvyklých velikostí. Pak může být velmi zajímavé sledovat cestu takových orderů v (limit) order booku. I když ordery jsou obchodníky rušeny, mohou být znova do (limit) order booku umístěny a neobvyklá množství se považují za rovna stále stejným obchodníkům.

Tvar order booku Je obecně známo, že příliv orderů je největší kolem současné ceny (tedy kolem současné hodnoty bid či ask). Pravděpodobnost vyrovnání těchto orderů je vysoká, viz. [21]. Bouchaud, Mézard a Potters [6] říkají, že tvar běžného order booku zobrazuje soupeření mezi přílivem limit orderů[3] a faktem, že ordery v blízkosti současného ask nebo bid jsou vyrovnány velmi rychle.

2.3 Modelování Order Booku

Modelováním vztahů a závislostí v (limit) order booku se v dnešní době zabývají dvě nezávislé skupiny. První skupinou jsou ekonomové, finanční matematici a

[3]Pravděpodobnostní rozdělení přílivu limit orderů mívá rozdělení s těžkým koncem, viz.[6], [21].

statistici. Druhou skupinou jsou fyzici, označovaní termínem ekonofyzici (ang. econophysicists). Obě tyto skupiny modelují order book různými metodami - např. z mikroekomonického pohledu (bohužel výsledky pomocí modelování tohoto typu často neodpovídají realitě), a dosahují rozdílných úspěchů a výsledků.

Ekonomové, Finanční matematici Bollerslev a Domowitz [5] používají počítačovou simulaci ke studiu proměnlivé délky order booku. Zovko a Farmer [29] popisují chování subjektů v order booku pomocí *relativní limitní ceny*, kterou definují jako rozdíl mezi limitní cenou (nejhorší cenou, kterou je subjekt ochoten akceptovat) a nejlepším bidem nebo askem. Ukazují, že pravděpodobnostní rozdělení těchto relativních cen má těžký konec a časová řada relativních limitních cen je korelovaná s volatilitou.

Bouchaud, Mézard a Potters [6] se ve své práci zabývají především statistickými vlastnostmi order booku, tzn. pravděpodobnostním rozdělením příchozích limit orderů, průměrným tvarem order booku v závislosti na ceně či pravděpodobnostním rozděléním objemu na bid/ask straně order booku. Mezi jejich nejdůležitější poznatky patří

1. cena, se kterou přichází nový limit order do order booku, je široce rozdělena (power law) kolem současné bid/ask (tzn. účastníci na trhu věří, že velké skoky v ceně daného aktvia jsou možné a umisťují své ordery daleko od současné bid/ask ceny)

2. pravděpodobnostní rozdělení objemu na bid/ask straně order book je Gama rozdělení

Dále popisují stav na Pařížské burze. Je velmi časté, že 10% orderů je změněno nebo zrušeno před tím, než dojde k jejich vyrovnání trhem. Bohužel data, která jsou k dispozici většinou tento fakt sama o sobě nereflektují. Tedy při návrhu modelu, který je postaven na reálných datech, je nutné se s tímto faktem vyrovnat. Velikost limit orderů (tzn. množství obchodovaného aktiva) je velmi variabilní. Většinou je největší pro ordery blízko současné ceny, zmenšuje se směrěm od ní a pro odlehlé ordery bývá nejmenší.

Fyzici Maslov a Mills [19] ve své práci studují vysokofrekvenční data s NASDAQ Level II. Podle jejich zjištění má pravděpodobnostní rozdělení velikosti limit orderů těžký konec. Dále popisují velké rozdíly v počtu limit orderů na bid a ask straně order booku a říkají, že tato nevyrovnanost vede ke změnám cen, které jsou v souladu s pravidly poptávky a nabídky.

Challet a Stinchcombe [14] analyzují data z Island ECN (NASDAQ). Order book popisují a modelují jako mřížku, na kterou jsou umisťovány ordery v podobě částic. Order je definován jako částice, jehož velikost je rovna velikosti částice a jeho cena je rovna pozici částice na mřížce. Dále popisují statické a dynamické vlastnosti systému a pozorují shluky volatility.

Slanina [26] vychází z Maslova modelu [18],[19], který předpokládá dva typy účastníků trhu - investory (limit ordery) a spekulanty (market ordery) a modeluje order book pomocí tzv. mean-field approximation[4].

[4]Jedná se o aproximaci používanou např. v kvantové fyzice či termodynamice

Většina výše popsaných modelů se dá zařadit mezi tzv. zero-inteligence models (modely nulové inteligence) - tzn. účastníci trhu nemají nebo nevykazují žádné sledovatelné strategie obchodování. Toto je samozřejmě velmi zlehčující a nereálný předpoklad. Na reálném trhu každý účastník sleduje určitou strategii, která se během času mění a vyvíjí. Jak zmiňuje [19], spekulanti i market makers ukazují světu své preference jen po určitou dobu a pak je mění, podle vývoje na trhu. Dále je třeba vzít v potaz i určité zpoždění mezi aktuálním stavem order booku a momentem, kdy je tento stav zobrazen obchodníkům. Např. investor zadal order, transakce proběhla, ale protože existuje zpoždění, ještě o ní neví. Na druhou stranu market makers mají většinou přístup k okamžitým datům, která jsou v order booku k dispozici. Ačkoliv v současné době elektronického obchodování je zpoždění velmi malé, stále se zde nachází a může hrát významnou roli obzvláště v případě, pokud se jedná o velmi likvidní aktivum, s kterým se obchoduje v řádu setin či tisícin sekundy. Nehomogennita v přístupu k datům vede účastníky trhu k velmi různorodým strategiím.

2.4 (Limit) Order book a světové trhy

V reálném světě je většina finančních trhů založena na principech, které byly popsány výše - samozřejmě s většími či menšími úpravami. Nyní popíšeme některé z těchto trhů a jejich určitá specifika.

2.4.1 Londýnská Burza - London Stock Exchange (LSE)

Nejznámějším orderbookem Londýnské burzy je SETS (viz. [15]). Na stránkách LSE se můžeme dočíst, že SETS je vlajkovou lodí, kde se uskutečňují denně miliony obchodů. Obchodují se v něm indexy FTSE100, FTSE250, FTSE Small Cap Index, Exchange Traded Funds - cenné papíry vázané na index, Exchange Trading Products stejně tak jako ostatní likvidní AIM, Irish and London Standard listed securities - Irské a Londýnské kotované akcie. Obchodní den v SETS má tři specifická období:

- Od 8:00 do 16:30 je používán běžný mechanismus limit order booku. Tzn. do order booku přichází limit ordery, které zde zůstávají dokud nejsou trhem vyrovnány nebo vlastníkem zrušeny a market ordery, které vyústí v okamžitý obchod.

- Mezi 7:50 až 8:00 probíhá tzv. otevírací aukce. V těchto deseti minutách mohou obchodníci umisťovat své ordery, stejně jako v průběhu obchodního dne. Jediným rozdílem je, že market ordery nevyústí v okamžitý obchod. Místo toho jsou uloženy dokud aukce neskončí a pak jsou najednou napárovány proti limit orderům. Během této doby jsou data viditelná všem účastníkům trhu. Účelem této aukce je dát účastníkům na trhu možnost pozorovat proces utváření ceny.

- Mezi 16:30 a 16:35 probíhá tzv. uzavírací aukce, která má stejná pravidla, jako výše popsaná otevírací aukce.

2.4.2 Euronext

Je elektronický portál, pod který spadá skupina burz souhrnně označována jako NYSE Euronext (viz. [9]). V této skupině můžeme najít např. Pařížskou, Bruselskou či burzu v Amsterdamu. Jak se můžeme dočíst na jejich stránkách, Euronext s více než 8000 evidovanými ceninami všech velikostí, představuje skoro 40% světového trhu s kapitálem a je jedním z nejlikvidnějších.

Obchodováni v Euronext je realizováno na základě pravidel NSC central order book, tedy jeden order book pro jeden titul (např. akcie jednoho podniku) na trhu (one order book per issue). Obchodní den v centrálním order booku je rozdělen do pěti fází.

- 7:15 - tzv. pre-opening („před otevřením“). V této době jsou příjímány ordery. Mohou být upravovány, zrušeny, ale stejně jako v případě otevírací aukce na LSE, nenastává žádné vyrovnání. Je určena teoretická otevírací cena a je zveřejněn list s pěti nejlepšími limit a market ordery.

- 9:00 - otevření. V tento okamžik se určuje nejlepší cena, při které je vyrovnáno maximum orderů. Jakmile je otevírací cena určena, ordery jsou vyrovnány. Vyrovnávací cena je ve většině případů stejná jako poslední teoretická otevírací cena.

- 9:00 - 17:30 - obchodování. Ordery přichází do order booku, mohou být upraveny nebo zrušeny. K jejich vyrovnání dochází jakmile je k dispozici opačný order s danou cenou. Seznam pěti nejlepších limit a market orderů je přístupný v reálném čase.

- 17:35 - uzavírací aukce (closing auction). Všechny ordery, které přišli do order booku za posledních pět minut jsou vyrovnány, pokud je to možné.

- Následuje tzv. trading at last (volně přeloženo jako „obchodování za poslední“). Během této fáze mohou přicházet ordery a být vyrovnány za poslední obchodovanou cenu a pouze za tu. Ordery mohou být zrušeny.

2.4.3 Česká burza cenných papírů

RM-SYSTÉM je elektronickým order bookem České burzy cenných papírů, a. s. (viz. [23]), kde se obchoduje s akciemi předních českých i zahraničních společností, např. ČEZ, Telefónica O2, Unipetrol, Komerční banka, Erste Group Bank, Volkswagen, Deutsche Telekom, Intel, Nokia či Microsoft. Její cílovou skupinou jsou především drobní a střední investoři. Místo označení order se v souvislosti s obchodováním v order booku užívá pojem *pokyn*. Stejně jako v SETS i obchodní den v RM-SYSTÉMU se dá rozdělit na specifická období.

- 8:50 - 9:00. V této době probíhá stejně jako v SETS otevírací aukce, při které se podávají a ruší obchodní pokyny. V devět hodin jsou napárovány nevypořádané pokyny z předchozího dne s pokyny jež byly přijaty v této době nebo během tzv. uzavřené fáze po skončení předešlého obchodního dne.

- Mezi 9:00 a 17:00 probíhá online obchodování. Trh je otevřen a investoři mohou reagovat na měnící se poptávku a nabídku cenných papíru na trhu.
- Od 17:00 do 21:00 probíhá zadávání pokynů na další obchodní den - uzavřená fáze.

Kapitola 3

Volatilita

Pod pojmem *volatilita* většinou rozumíme míru kolísání hodnoty daného aktiva nebo jeho výnosové míry. Velmi často se vyjadřuje jako rozptyl či směrodatná odchylka daných změn za nějaký časový úsek. Odtud plyne i označení volatility - σ^2 či pouze σ. V dnešní době je volatilita oblíbeným ukazatelem rizikovosti.

Předpokládejme, že se nacházíme v čase $t-1$, známe $S_{t-1}, \ldots, S_1$ - hodnoty tržní proměnné. Těmito proměnnými mohou být např. hodnoty bid nebo ask ceny pro dané aktivum na trhu, hodnoty spreadu a mnoho dalších. Na základě pozorování $S_{t-1}, \ldots, S_1$ popíšeme očekávanou hodnotu S_t - především její střední hodnotu a rozptyl podmíněné hodnotami $S_{t-1}, \ldots, S_1$. Hledáme tedy

$$\mu_t = E(S_t|\mathcal{F}_{t-1}), \tag{3.1}$$

kde $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(S_{t-1}, \ldots, S_1)$ je σ-algebra (označováno též termínem *filtrace*, viz. [10]) generována veličinami $S_{t-1}, \ldots, S_1$. Jinými slovy můžeme říct, že známe veškerou informaci o hodnotách řady $\{S_t\}$, kterou máme v čase $t-1$ k dispozici. Podmíněný rozptyl pak určíme jako

$$\sigma_t^2 = Var(S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E\left[(S_t - \mu)^2|\mathcal{F}_{t-1}\right]. \tag{3.2}$$

Obecně se místo označení podmíněný rozptyl či směrodatná odchylka mluví o *volatilitě* řady $\{S_t\}$ v čase t.

Volatilitu nelze ve finančních datech pozorovat přímo. Její odhadování je však v centru zájmu mnoha finančních analýz. To není překvapující, obzvláště z důvodu zmíněného výše - základní míra rizikovosti finančních aktiv. To je patrné například v bankovním sektoru, kde je odhad a určení volatility součástí metodiky kapitálové přiměřenosti, která je založená na určení hodnoty v riziku - VaR.

3.1 Modelování volatility

Předpovídání a modelování volatility je běžnou součástí finančních analýz, ať se jedná o teoreticky či prakticky zaměřené analýzy. Jak již bylo zmíněno, volatilita není ve finančních řadách přímo pozorovatelná (viz. [24]) a z tohoto důvodu bývá občas velmi obtížné určit výpovědní hodnotu předpovědí pomocí daných modelů. Má však určité vlastnosti, které se projeví především při sledování výnosnosti finančních aktiv:

- shluky volatility (ang. volatility clustering) - volatilita je vysoká v určitých časových obdobích a nízká v jiných
- pákový efekt - odlišná reakce volatility na vzestup a pokles ceny
- spojitý průběh - volatilita se vyvíjí spojitě bez výrazných skoků
- stacionarita - volatilita nediverguje k vysokým hodnotám, spíše se mění v určitém rozmezí.

Většina modelů je proto vyvíjena tak, aby co nejlépe pokryly tyto vlastnosti, nebo se o to alespoň pokouší. Velmi důležitou roli hraje i tvar autokovarianční a distribuční[1] funkce volatility.

3.1.1 Historická volatilita

Nejstarším přístupem k modelování volatility je odhad volatility pomocí výběrového rozptylu nebo směrodatné odchylky. Proto tento přístup bývá označován jako *historická volatilita.* Ve své nejjednodušší formě se odhaduje pomocí

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_{t-i} - \hat{\mu})^2, \quad \text{kde } \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{t-i}. \tag{3.3}$$

Poznamenejme, že $\hat{\mu}$ značí odhad střední hodnoty a r_j, označuje soubor dat, který máme k dispozici. Velmi často bývá r_j řadou např. výnosů z daného aktiva. Způsoby určení r_j se mohou velmi lišit.

Nejčastějším způsobem určení r_j je

$$r_j = \ln \frac{S_j}{S_{j-1}}, \tag{3.4}$$

kde S_j je cena daného aktiva v čase j. r_j je poté označováno jako logaritmická míra zisku nebo logaritmický výnos aktiva. V některých případech se r_j určuje jako

$$r_j = \frac{S_j - S_{j-1}}{S_{j-1}}.$$

Při použití tohoto přístupu, se odhad střední hodnoty $\hat{\mu}$ předpokládá nulový a $n-1$ je nahrazeno [2]n. Rovnice (3.3) se poté změní na tvar

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{t-i}^2. \tag{3.5}$$

Přístup pomocí historické volatility byl používán v dřívějších dobách především pro předpověď volatility, který se užíval v Black-Scholesově formuli. Dnes má spíše jen srovnávací charakter pro posouzení efektivnosti jiných modelů volatility.

[1] Mnoho studií ukázalo, že rozdělení volatility se chová jako logaritmicko-normální, ačkoliv konce rozdělení je lepší popsat pomocí power law.

[2] Toto nahrazení nás posouvá od nestranného odhadu k maximálně věrohodnému odhadu rozptylu, viz [13]

3.1.2 EWMA modely

Za rozšíření přístupu pomocí historické volatility bývají označovány *EWMA modely* (ang. exponentially weighted moving average models). V rovnici (3.5) mají všechny $r_{t-1}^2, r_{t-2}^2, \ldots, r_{t-n}^2$ stejnou váhu. Ve většině případů však chceme určit volatilitu, která se váže k času t. Tedy je logické, že novější data by měla mít větší váhu než starší data. Tedy rovnici (3.5) chceme změnit na tvar

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_{t-i}^2, \tag{3.6}$$

kde proměnná α_i představuje váhu, která je kladná a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Hovoříme-li o EWMA modelu volatility, váhy α_i klesají exponenciálně do minulosti. Toto má ve srovnání s odhadem volatility pomocí historické simulace mnoho výhod:

- velmi často je volatilita ovlivněna aktuálními pozorováními (což je v EWMA modelu vzato v úvahu vahami, které jsou menší pro pozorování, která se nacházejí hlouběji v minulosti)
- redukuje se zde problém odlehlého pozorování

Volatilita při přístupu EWMA se odhaduje pomocí

$$\hat{\sigma}_t^2 = \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2. \tag{3.7}$$

Jedním z příjemných rysů EWMA modelů je fakt, že pouze malé množství dat je zapotřebí ukládat. V jakémkoli časovém okamžiku je potřeba znát pouze současný odhad volatility a změnu v tržní proměnné. Přístup pomocí EWMA modelů je stvořen především ke sledování změn volatility a je užíván např. při aktualizaci volatility v RiskMetrics databázi (viz.[13]).

3.1.3 Implikovaná volatilita, Autoregresní modely, ARMA modely

Finanční ekonometrie využívá vztahů, ve kterých volatilita často figuruje a hraje důležitou roli. Jedním z nejpoužívanějších vztahů je tzv. Black-Scholesova formule (viz. [7],[13]), pomocí níž je analyticky vyjádřena cena opce. Nejznámější je její vyjádření pro cenu c_t evropské call opce

$$c_t = S_t \cdot \Phi(d_1) - X \cdot e^{-i(T-t)} \cdot \Phi(d_2), \tag{3.8}$$

kde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln S_t/X + (i + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

S_t je cena pokladového aktiva v čase t, X je realizační cena opce, $T - t$ je doba do splatnosti opce, σ je volatilita ceny podkladového aktiva, i je bezriziková úroková míra a $\Phi(\cdot)$ je distribuční funkce $N(0, 1)$. Pokud pozorujeme cenu obchodované opce v závislosti na všech faktorech, kromě volatility, je možné ji určit vhodným numerickým přístupem. Takto určená volatilita se označuje jako *implikovaná volatilita.* Jinými slovy se dá říci, že se jedná o předpověď volatility ceny podkladového aktiva v čase t, kde předpovědní horizont je roven době do splatnosti opce $T-t$. Bohužel takovéto odvození volatility funguje na základě určitých předpokladů, které nemusí být v praxi splněny (např. logaritmicko-normální rozdělení ceny podkladového aktiva). Z těchto důvodů bývá hodnota implikované volatility vyšší než volatilita určená pomocí jiných modelů, viz. [7] a [24].

Autoregresní modely volatility, ARMA modely Na tomto místě připomeneme definice základních modelů stacionárních posloupností - posloupnosti klouzavých součtů, autoregresní posloupnosti a ARMA posloupnosti.

Definice 7. Řekneme že, časová řada $\{r_t\}$, kterou definujeme předpisem

$$r_t = \theta_0 + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \ldots - \theta_q e_{t-q}, \tag{3.9}$$

kde $\theta_0, \ldots, \theta_q$ jsou reálné konstanty, $\theta_q \neq 0$, q je nezáporné celé číslo a $\{e_t\}$ je bílý šum s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ_e^2, se řídí *modelem klouzavých součtů řádu q (značíme MA(q)).*

Definice 8. Řekneme, že časová řada $\{r_t\}$, kterou definujeme předpisem

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \ldots + \phi_p r_{t-p} + e_t, \tag{3.10}$$

kde $\phi_0, \ldots, \phi_p$ jsou reálné konstanty, $\phi_p > 0$, p je nezáporné celé číslo a $\{e_t\}$ je bílý šum s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ_e^2, se řídí *autoregresním modelem řádu p (značíme AR(p)).*

Definici bílého šumu můžeme najít např. v [22].

Autoregresní modely volatility lze zařadit mezi stochastické modely volatility, viz. [7]. Co se týče finanční praxe často se používají pro

1. časové řady logaritmických měr zisku r_t - obvykle se jako vstup modelu bere samotná řada logaritmických měr zisku umocněná na druhou. Tedy

$$\sigma_t^2 = r_t^2;$$

2. časové řady denních cen finančních aktiv S_t - jako vstup modelu se často používá volatilita měřená pomocí tzv. denního cenového rozsahu

$$\sigma_t^2 = \log\left(\frac{\max S_t}{\min S_t}\right),$$

což se dá přibližně vyjádřit jako

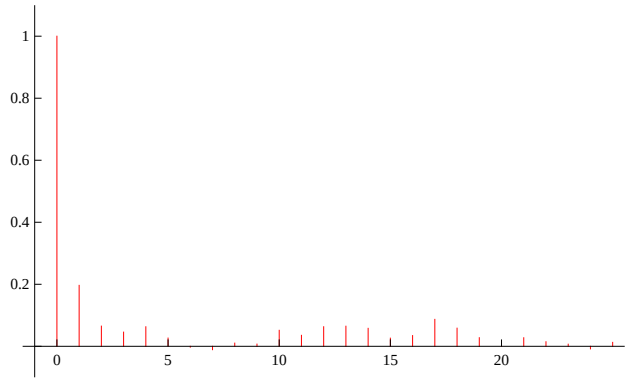
$$\sigma_t^2 \approx \frac{\max S_t - \min S_t}{\min S_t}.$$

Pro volatilitu se odhadne autoregresní model AR(p) tvaru

$$\sigma_t^2 = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \ldots + \phi_p r_{t-p} + e_t, \tag{3.11}$$

kde e_t je bílý šum. Často se volatilita pomocí tohoto modelu i předpovídá.

Předpokládejme, že r_t je logaritmický výnos z aktiva v čase t, viz. 3.4, studium volatility takové řady říká, že r_t jsou buď mnohonásobně nekorelované nebo se korelace téměř nevyskytuje, ale jsou závislé.



Obrázek 3.1: autokorelační funkce log výnosů indexu PX

Volatilita je jedním ze způsobů, jak takovéto závislosti v řadách zachytit. Dále budeme předpokládat podmíněnou střední hodnotu a podmíněný rozptyl $r(t)$, při filtraci $\mathcal{F}_{t-1}$.Tedy

$$\mu_t = E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}), \quad \sigma_t^2 = Var(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E\left[(r_t - \mu)^2|\mathcal{F}_{t-1}\right]. \tag{3.12}$$

Jak již bylo poznamenáno výše, $\mathcal{F}_{t-1}$ je veškerá informace dostupná v čase $t-1$. Jak je vidět z obrázku 3.1 a také podle [24] mnohonásobná závislost řady r_t je slabá, pokud vůbec existuje. Proto rovnice pro střední hodnotu (3.12) může být zjednodušena. Pomocí tohoto zjednodušení dostáváme stacionární ARMA(p,q) model tvaru:

$$r_t = \mu_t + e_t, \quad \mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{t-i}, \tag{3.13}$$

kde p,q jsou nezáporná celá čísla. Spojením rovnic (3.12) a (3.13) dostáváme

$$\sigma_t^2 = Var(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = Var(e_t|\mathcal{F}_{t-1}). \tag{3.14}$$

Náhodná veličina e_t bývá mimo názvů, které jsme uvedli dříve, označována ve finanční praxi jako *odchylka míry zisku od podmíněné střední hodnoty* (*mean-corrected returns*). Právě způsob, jakým se σ_t^2 (volatilita) v čase vyvíjí, vzájemně odlišuje jednotlivé modely. Tyto modely se dají rozdělit do dvou skupin. První popisuje vývoj volatility pomocí určité funkce - GARCH modely, druzí využívají v popisu vývoje volatility stochastické rovnice - stochastické modely volatility.

3.1.4 ARCH modely

Prvním modelem, který systematicky modeluje volatilitu byl *model ARCH* (autoregresní podmíněná heteroskedasticita, ang. autoregressive conditional heteroscedasticity), který poprvé aplikoval R. F. Engle ve své práci *Autoregressive conditional heteroscedasticity with the estimates of the variance of United Kingdom inflactions* z roku 1982. Englův přístup a především zjednodušení ve formě GARCH modelů dnes představují jeden z nejúspěšnějších nástrojů pro modelování finančnách časových řad.

Modely těchto typů vycházejí ze dvou předpokladů:

1. finanční časové řady a jejich modely jsou heteroskedastické, tj. volatilita je proměnná v čase;

2. volatilita může být vyjádřena pomocí jednoduché kvadratické funkce minulých předpovědních chyb (odchylek od podmíněné střední hodnoty) e_t.

První přepoklad je známý a podpořen celou řadou empirických studií (viz. obrázky 3.2a 3.3). Druhý předpoklad je spojen s fenoménem shlukování volatility, tj. momenty, ve kterých větší výkyvy jsou s větší pravděpodobností následovány opět většími výkyvy a naopak. Díky tomuto lze předpokládat, že volatility jsou pozitivně autokorelované a nejjednodušším modelem je tedy autoregresní či ARMA model viz. rovnice (3.13).

ARCH(m) model řádu m předpokládá, že

$$r_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m e_{t-m}^2, \tag{3.15}$$

kde ϵ_t jsou nezávislé a stejně rozdělené (iid) náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem, $\alpha_0 > 0$ a $\alpha_i \geq 0$ pro $i > 0$. Po koeficientech α_i je vyžadováno splnění určitých podmínek regularity, aby nepodmíněný rozptyl e_t byl konečný. Rozdělení ϵ_t se v praxi uvažuje buď jako standartizované normální rozdělení ($N(0,1)$), nebo jako standartizované (studentovo) t-rozdělení.

Jak je z rovnic (3.15) vidět, větší minulé šoky implikují větší podmíněný rozptyl. Toto znamená, že pokud volatilitu modelujeme pomocí ARCH modelů, velké šoky (výkyvy volatility) budou s největší pravděpodobností následovány dalšími velkými šoky. Shlukování volatility je tedy v těchto modelech zachyceno.

K pochopení vlastností ARCH modelů je dobré se zaměřit na ARCH(1) model. Tento model je vyjádřen jako

$$e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2, \tag{3.16}$$

kde $\alpha_0 > 0$ a $\alpha_1 \geq 0$. Střední hodnota e_t zůstává rovna nule a rozptyl se dá vyjádřit jako $\alpha_0/(1-\alpha_1)$. Jelikož chceme, aby rozptyl e_t byl kladný, klademe $0 \leq \alpha_1 < 1$. Někdy je třeba, aby existovali i vyšší momenty e_t (např. pokud chceme studovat těžké konce modelu), poté α_1 musí splňovat další podmínky.

Bohužel i modely ARCH(m) mají své nedostatky.

- Kladné a záporné výkyvy mají na volatilitu stejný vliv, jelikož závisí na druhé mocnině. Z praxe je však známo, že cena aktiva reaguje velmi různorodě na kladné a záporné šoky.

- Velmi často je potřeba velmi vysokého řádu modelu, aby dostatečně popsal vývoj volatility dané řady. To znamená, že je nutné odhadnout velké množství parametrů.
- Tyto modely mají tendenci předpovídat větší hodnotu volatility, protože pomaleji reagují na velké izolované výkyvy ve výnosových řadách sledovaných aktiv.

Většinu těchto nedostatků odstraňují modely GARCH.

3.1.5 GARCH modely

Ačkoli jsou ARCH modely jednoduché, jejich nevýhodou, jak bylo poznamenáno výše, se může stát velký počet parametrů, které je zapotřebí pro správné fungování modelu odhadnout. V roce 1996 přichází Tim Bollerslev ve svém článku *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, který vyšel v Journal of Econometrics, s modelem GARCH - zobecněný ARCH (generalized ARCH). V tomto modelu a jeho dalších modifikacích závisí podmíněný rozptyl (tj. volatilita) na svých předchozích hodnotách.

GARCH(m,s) model předpokládá, že

$$r_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=i}^{s} \beta_j e_{t-j}^2, \tag{3.17}$$

kde ϵ_t jsou opět iid náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem (opět se předpokládá, že mají normální nebo t-rozdělení), $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{\max(m,s)}(\alpha_i + \beta_i) < 1$. Pro $i > m$ se klade $\alpha_i = 0$ a pro $j > s$ se klade $\beta_j = 0$. Jestliže $s = 0$ dostáváme model ARCH(m). Nerovnost $\sum_{i=1}^{\max(m,s)}(\alpha_i + \beta_i) < 1$ nám zaručuje, že nepodmíněný rozptyl e_t je konečný a jeho podmíněný rozptyl σ_t^2 se vyvíjí v čase.

Velmi často se rovnice volatility GARCH modelu interpretuje následujícím způsobem. Uvažujme η_t definované jako $\eta_t = e_t^2 - \sigma_t^2$, η_t má poté vlastnosti bílého šumu. Dosazením $\sigma_{t-i}^2 = e_{t-i}^2 - \eta_{t-i}$, $i = 0, \ldots, s$, do rovnice (3.17), dostáváme GARCH model tvaru

$$e_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) e_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=i}^{s} \beta_j \eta_{t-j}. \tag{3.18}$$

Poté rovnice (3.18) volatility GARCH modelu je možné považovat za ARMA model pro řadu čtvercových odchylek e_t^2.

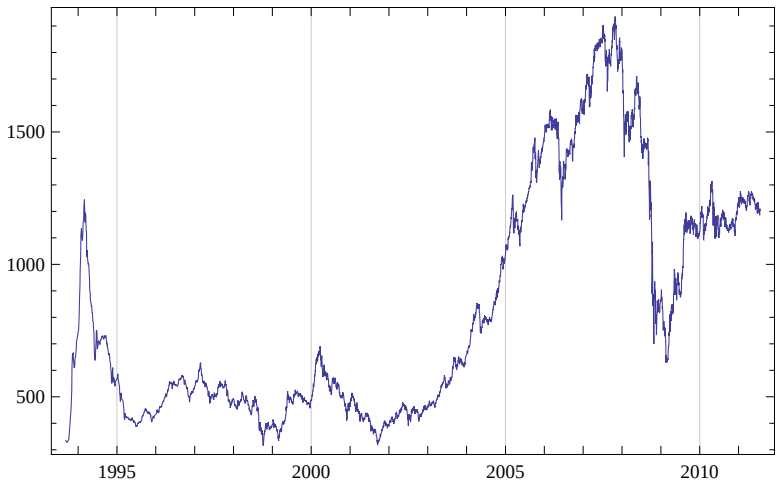
Model GARCH(1,1), nejjednodušší představitel ze skupiny těchto modelů, je jedním z nejpoužívanějších modelů finančních časových řad. Především proto, že již se třemi paramtery je schopen zvládnout obecné volatilitní struktury. Modely GARCH vyšších řádů se obvzláště v praxi využívají jen málokdy.

Stejně jako GARCH je zlepšením pro ARCH modely, i pro modely GARCH existují zlepšení. Patří mezi ně např. IGARCH model nebo GARCH-M model. IGARCH model (ang. integrated GARCH model) je definován pro případ, že polynom AR v (3.18) má jednotkový kořen. GARCH-M model je GARCH model ve střední hodnotě (ang. GARCH model in mean), který je používán především

pro modelováni volatility akcií. Dalšími jsou např. exponenciální GARCH model - EGARCH model (ang. exponential GARCH model).

3.2 Shluky volatility

Shluky volatility jsou dobře známým a všudypřítomným fenoménem, který se objevuje u časových řad nejrůznějších finančních aktiv, např. akcií, tržních indexů, směnných kurzů, úrokových sazeb aj. Je všeobecně známo, že velké změny cen aktiv jsou následovány ve většině případů opět velkými změnami. Na druhou stranu malé výkyvy cen jsou následovány malými změnami. Můžeme tedy říci, že změny cen daných aktiv jsou charakterizovány obdobími s nízkou volatilitou, s malými změnami cen, a obdobími s vysokou volatilitou a tedy s velkými změnami cen. Názorně je toto ukázáno na obrázku 3.2 a 3.3.



Obrázek 3.2: historické ceny indexu PX (tzv. daily closing price)

Na obrázku 3.2 je zakreslen vývoj indexu PX na pražské burze a od 7. 9. 1993 do 22. 7. 2011. Na obrázku 3.3 jsou zakresleny relativní denní výnosy indexu určené pomocí vzorce

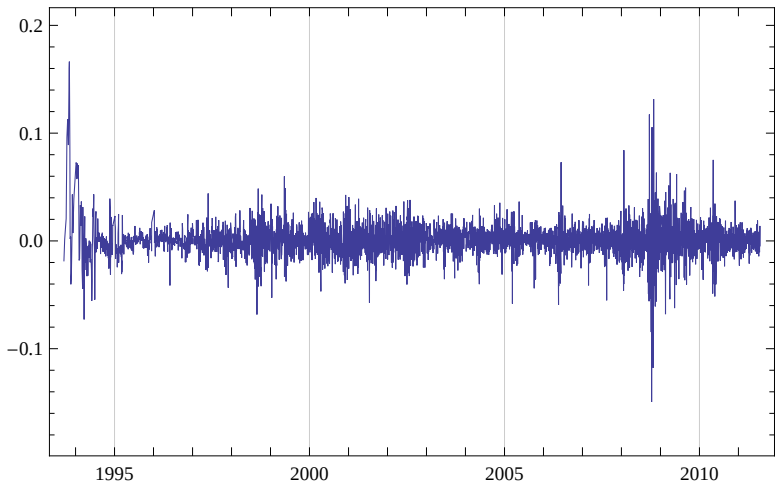
$$R_\tau(t) = \frac{p(t) - p(t-\tau)}{p(t-\tau)}, \tag{3.19}$$

kde

$R_\tau(t)$ - je výnos aktiva (v našem případě indexu) v čase t za časový okamžik τ,

$p(t)$ - je cena aktiva v čase t.

Pro naši názornou ukázku jsme τ zvolili rovno jedné. Tedy dostáváme denní výnosy indexu PX. Na obrázku 3.3 je názorně vidět výše popsaný fenomén shluků volatility. Je zde naprosto patrné, že období s menšími změnami jsou následovány ve většině případů opět malými změnami a naopak pro velké výkyvy. Velmi často se tato vlastnost nahlíží z kvantitativního hlediska pomocí autokorelační funkce řady denních výnosů, viz. [27].



Obrázek 3.3: Denní výnosy indexu PX

Ve většině případů jsou shluky volatility modelovány pomocí statistických modelů, např. (G)ARCH model a jejich rozšířeními, fractional integrated time series, multi-fractal model. Ačkoli většina těchto modelů je nesmírně přínosná, bohužel nenabízejí vysvětlení toho, proč k samotnému shlukování dochází.

Podle Gaunersdorfer a Hommes [11] může být jedním z možných vysvětlení interakce mezi velmi různorodou skupinou obchodníků na trhu, kteří mají naprosto odlišné cíle a přístup k informacím. Tento heterogenní trh je podle nich definován nepravidelným střídáním období s nízkou volatilitou, kde změny v cenách jsou nepatrné, a obdobími s vysokou volatilitou, kde se nízké ceny mění v důsledku nových infomací. Shlukování volatility je tedy zapříčiněno heterogenitou trhu a přizpůsobování se obchodníků dané situaci na trhu. Gaunersdorfer a Hommes [11] modelují shluky volatility pomocí nelineárního dynamického modelu. Uvádí, že shlukování volatility je v jejich modelu způsobeno vývojem strategií jednotlivých subjektů na trhu. Toto je podle nich podpořeno tím, že volatilita svou největší částí závisí právě na samotném procesu obchodování.

Tseng a Li [27] se snaží ve své studii najít kvantitativní popis shluků volatility. Představují index, kterým se dá změřit shlukování ve finančních časových řadách. Jejich motivací je především snaha porovnat shlukování rozdílných akcií na trhu. Shluky volatility se též zabývají např. Lux, Marchesi [16].

Kapitola 4

Praktická část

V této části práce se budeme zabývat popisem vyvinutého modelu, jeho předpoklady, vlastnostmi, odlišnostmi od jiných modelů a odlišnostmi od reality, jeho výsledky a možnými zlepšeními. V kapitole 2 jsme popsali, co to znamená, když nabídka potká poptávku v bodě tržní rovnováhy. Nás zajímá, jakým způsobem se cena na trhu vyvíji a především jak to vypadá než toto ekvilibrum cena dosáhne.

K modelování a testování byl použit software Wolfram Mathematica® 8 for Students.

4.1 Předpoklady modelu

Přesný popis reality je vždy velmi obtížný a nese sebou velké množství nevýhod. Čím více se model snaží přiblížit realitě, tím těžkopádnějším a složitějším se obvykle stává. Při modelování reality více než kde jinde platí okřídlené „méně je někdy více“ (někdy označováno jako zásada úspornosti modelu). Proto je běžnou praxí snaha zjednodušit modely popisující realitu co nejvíce se v dáné oblasti dá. Toto sebou přináší zjednodušení modelů a jejich předpokladů. I když se některé zjednodušující předpoklady mohou zdát nerealistické, jejich zjednodušení je v rámci modelu velmi důležité a často se ukáže, že i za takových to podmínek je model schopen velmi věrně popsat realitu.

Nejvíce zjednodušujícím předpokladem v našem modelu je předpoklad, že *v daném časovém okamžiku na trh přichází pouze jeden obchodník.* Tento předpoklad znamená, že na konci časového okamžiku t se obchodování v modelovém order booku účastnilo právě t obchodníků. Tedy čas a počet obchodníků vyjadřují ekvivalentní veličinu. Jedna časová jednotka = jeden obchodník.

Dále uvažujeme, že *na začátku je náš modelový order book prázdný.* Tento předpoklad není úplně nerealistický. Na některých světových burzách se po uplynutí obchodního dne veškeré zbývající limit ordery, ať již sell či buy, zruší a order book je vyčištěn. Na začátku nového obchodního dne probíhá před začatkem obchodování tzv. aukce. Toto znamená, že veškeré ordery, které jsou během aukce přijaty - aukční ordery, jsou do order booku zaznamenány jako limit ordery a tímto způsobem je order book zaplněn. Po skončení aukce je order book otevřen pro obchodování. Jako první jsou uspokojeny aukční ordery, které je možné uspokojit (tedy se napárují sell na buy pokud je to možné). Ostatní ordery zůstanou v order booku a jejich pomocí se stanoví bid, ask a spread. V našem modelovém order booku jsme se rozhodli aukci nerealizovat.

Dalším předpokladem je *zveřejňování informací z order booku.* Stejně jako většina světových burz i my jsme se rozhodli zveřejňovat jen část informací. Těmi nejdůležitějšími jsou nejlepší bid a ask.

Velmi důležitým předpokladem, který z velké části ovlivňuje tvar modelovaného order booku, je *předpoklad neexistence možnosti zrušení limit orderu obchodníkem, který jej vlastní.* Tím říkáme, že limit order opouští order book pouze v případě, že je vyrušen opačným market orderem. Tento předpoklad je samozřejmě nerealistický. Obchodník na burze má možnost zrušit svůj limit order. Tento úkon je ve většině případů spojen s poplatkem v předem stanovené výši.

4.2 Popis modelu

Nechť $L(t)$ je stav order booku v čase t. Dále nechť $X(t)$ označuje spravedlivou cenu obchodníka v čase t (tj. spravedlivá cena t-tého obchodníka). Předpokládáme, že $X(t) \sim R(1, 100)$. Rozhodnutí modelovat spravedlivé ceny z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(1, 100)$ bylo motivováno uvědomněním si, že pokud bychom použili jiné rozdělení, existuje určitá transformace, které by nám umožnila danou transformovanou veličinu vyjádřit opět pomocí rovnoměrného rozdělení. Toto trvzení je pravdivé pro spojitý model, ve kterém mohou ceny nabývat všech reálných hodnot. Dynamika takového modelu se nemění, ani pokud je vystavena transformaci. Tedy každé spojité rozdělení můžeme vyjádřit pomocí rovnoměrného. Pokud ale uvažujeme, že ceny jsou diskrétní, potom se vzdálenost po provedené transformaci mezi cenami mění.

Nyní se budeme zabývat popisem chování obchodníka. Náš modelový obchodník přichází do order booku v čase t (ozn. obchodníkt) se svou spravedlivou cenou X_t[1]. První náhodou, která se v našem modelu vyskytuje je určení „motivace“ vstupu obchodníka$t$ na trh. Touto motivací myslíme rozhodnutí obchodníka, zda bude prodávat = **prodávající**, nebo kupovat = **nakupující** dané aktivum na trhu.

Definice 9. *Nechť $A(t)$ je náhodná veličina označující motivaci obchodníka na trhu. Veličina $A(t)$ nabývá hodnoty nula nebo jedna,*

$$P(A(t) = 0) = P(A(t) = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pokud $A(t) = 0$ motivací obchodníka je prodej. Pokud $A(t) = 1$ motivací obchodníka je nákup.

Tedy s pravděpodobností $p = \frac{1}{2}$ přichází do našeho modelového order booku prodavající nebo nakupující.

OBCHODNÍK - PRODÁVAJÍCÍ/EMITENT Pro tohoto obchodníka je nejdůležitější informací aktuální výše bid - $b(t)$. Nyní si popíšeme rozhodovací proces, při kterém se náš modelový obchodník rozhoduje zda aktivum prodá za aktuální cenu na trhu - sell market order, či svou touhu prodat projeví za pomoci sell limit orderu.

[1] Výpočet a stanovení spravedlivé ceny pro dané aktivum (akcii, dluhopis či finanční derivát) není cílem práce. Proto se zde nebudeme touto problematikou blíže zabývat. Určení spravedlivé ceny se věnuje celá řada publikací, např.[13] nebo [8] a mnoho dalších.

1. $X(t) \geq b(t)$ - spravedlivá cena v čase t je větší než výše bid v čase t. Z pohledu obchodníka by prodej za aktuální tržní cenu znamenal ztrátu nebo nulový výnos, jelikož $b(t) - X(t) \leq 0$. Aby obchodník tomuto předešel zadává do order booku sell limit order (abychom si pojistili, že obchodník na daném orderu opravdu vydělá je hodnota sell limit orderu rovna spravedlivé ceně navýšené o α).

2. $X(t) < b(t)$ - spravedlivá cena v čase t je nižší než výše bid v čase t. Prodej za aktuální tržní cenu přinesl obchodníkovi výnos, protože $b(t) - X(t) > 0$. Jelikož obchodník chce vydělat, dává sell market order a své aktivum prodává za tržní cenu.

OBCHODNÍK - NAKUPUJÍCÍ/INVESTOR Pro tohoto obchodníka je nejdůležitější informací aktuální výše ask - $a(t)$. Nyní si popíšeme rozhodovací proces, při kterém se náš modelový obchodník rozhoduje zda aktivum koupí za aktuální cenu na trhu - buy market order, či svou touhu koupit projeví pomocí buy limit orderu.

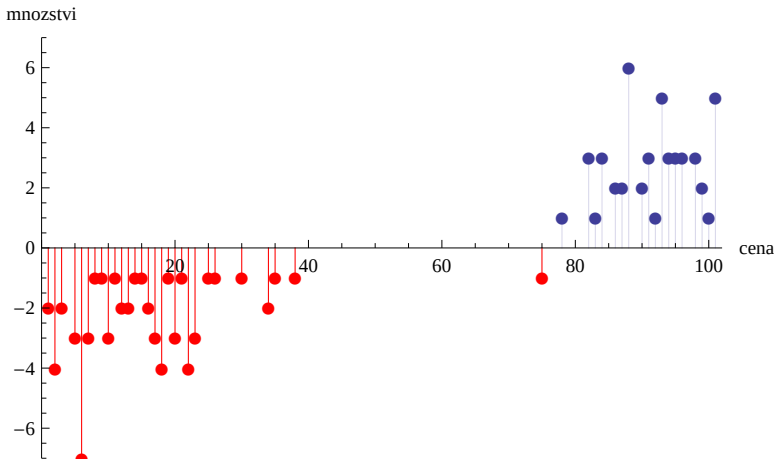
1. $X(t) \geq a(t)$ - spravedlivá cena v čase t je větší, rovna výši ask v čase t. Nákup za aktuální tržní cenu by přinesl obchodníkovi výnos, protože $a(t) - X(t) > 0$. Jelikož obchodník chce ze svého pohledu vydělat, dává buy market order a aktivum kupuje za tržní cenu.

2. $X(t) < a(t)$ - spravedlivá cena v čase t je nižší než výše bid v čase t. Z pohledu obchodníka by nákup za aktuální tržní cenu znamenal ztrátu nebo nulový výnos, jelikož $a(t) - X(t) \leq 0$. Aby obchodník tomuto předešel zadává do order booku buy limit order (abychom si pojistili, že obchodník na daném orderu opravdu vydělá je hodnota buy limit orderu rovna spravedlivé ceně snížené o α).

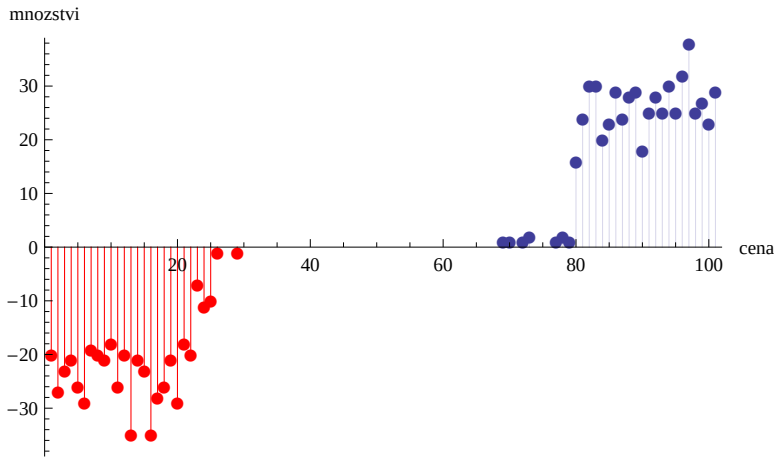
α bylo v našem modelování stanoveno rovno jedné. Při takto použitém postupu se může stát, že order book je na jedné či druhé straně prázdný. Že se v něm nenacházejí žádné buy či sell limit ordery. V tomto případě dá uvažovaný obchodník sell či buy limit order.

4.3 Výsledky modelu

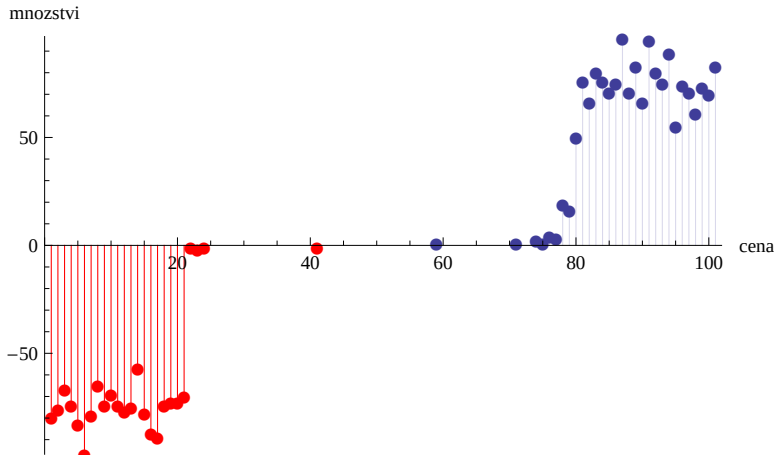
Na obrázcích 4.1 až 4.4 je znázorněn vývoj modelového order booku. Červenou barvou jsou znázorněny buy limit ordery, modrou sell limit ordery. V souladu s obecně uznávanou praxí, je množství na straně buy limit orderů vyjádřeno v záporných hodnotách.



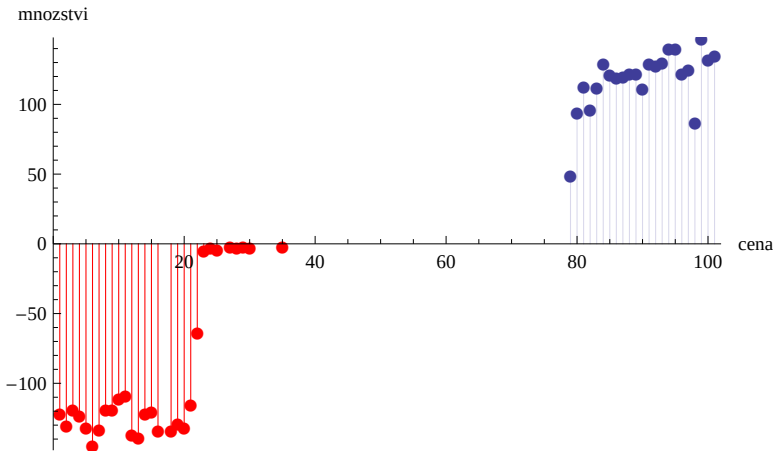
Obrázek 4.1: Stav order booku na konci času $t = 500$.



Obrázek 4.2: Stav order booku na konci času $t = 5000$.

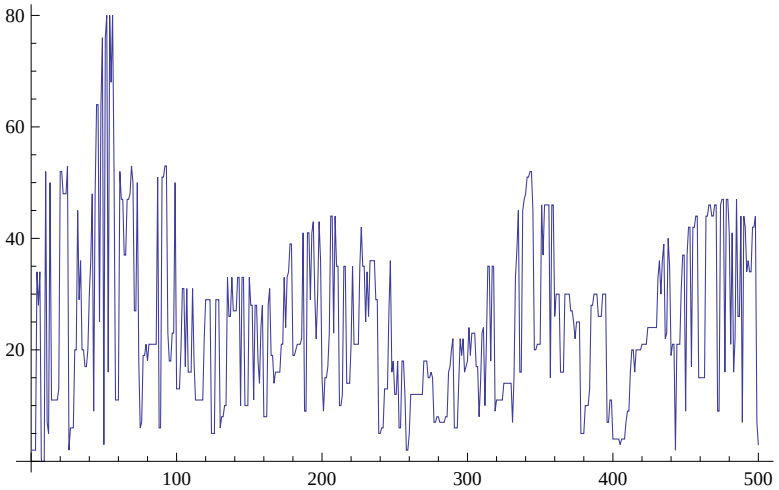


Obrázek 4.3: Stav order booku na konci času $t = 15000$.

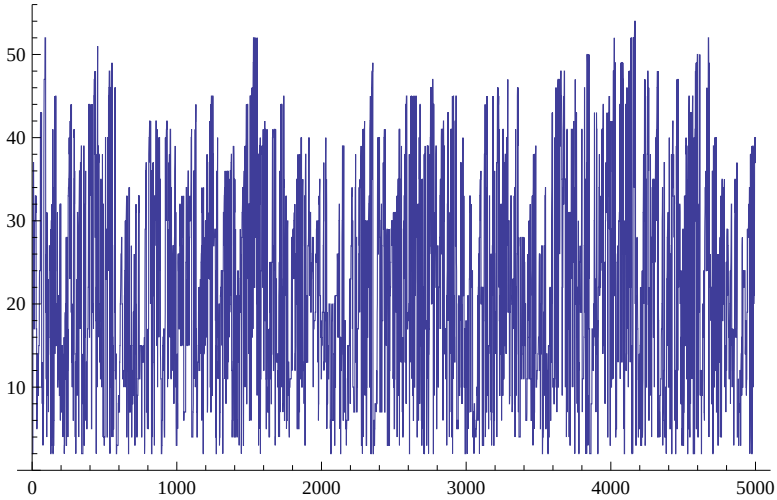


Obrázek 4.4: Stav order booku na konci času $t = 25000$.

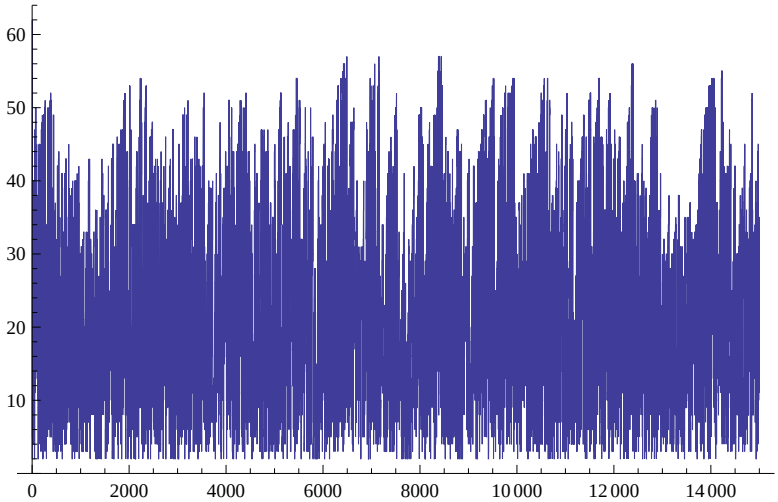
Jak je z těchto obrázků patrné, při zvětšujícím se počtu simulací se zvětšuje množství limit orderů na obou stranách order booku. Tento jev je způsoben tím, že neuvažujeme žádné zrušení orderu v průběhu simulace a že na trhu neuvažujeme žádné spekulanty. Zajímavým pozorováním je, že největší nárůst množství se odehrává v cenových intervalech přibližně (0,25) a (80,100). Z tohoto je vidět, že většina obchodů se v takto vyvinutém modelu děje převážně ve spreadu, tj. kolem hodnoty bid a ask. Toto je také jeden z důvodu, proč spread tak velmi fluktuuje. Vývoj spreadu pro dané simulace je zachycen na obrazcích 4.5 až 4.8.



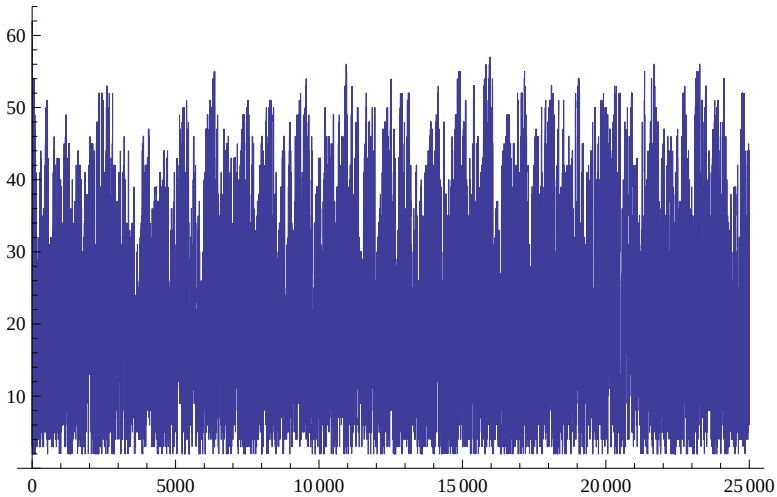
Obrázek 4.5: Vývoj spreadu pro $t = 500$.



Obrázek 4.6: Vývoj spreadu pro $t = 5000$.

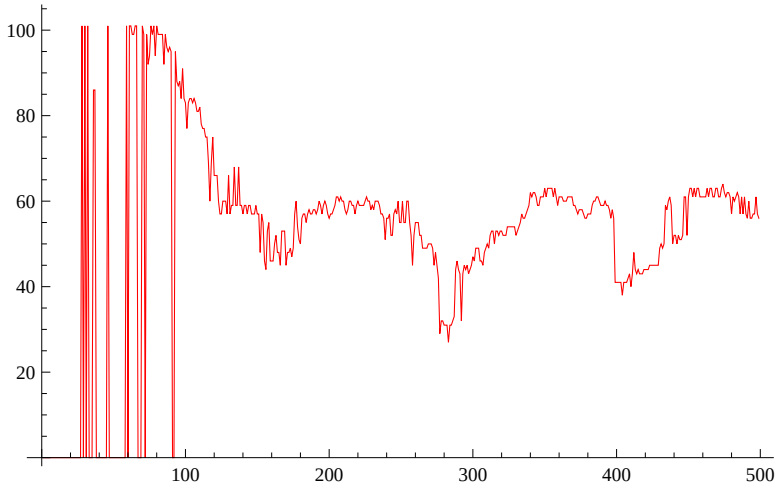


Obrázek 4.7: Vývoj spreadu pro $t = 15000$.

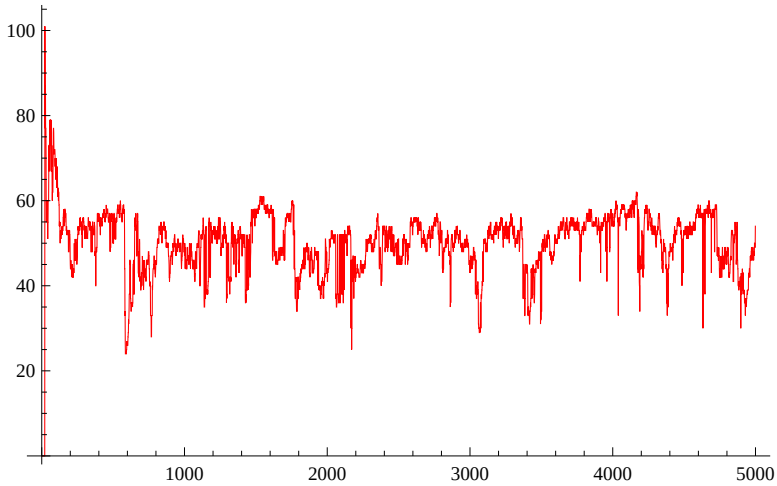


Obrázek 4.8: Vývoj spreadu pro $t = 25000$.

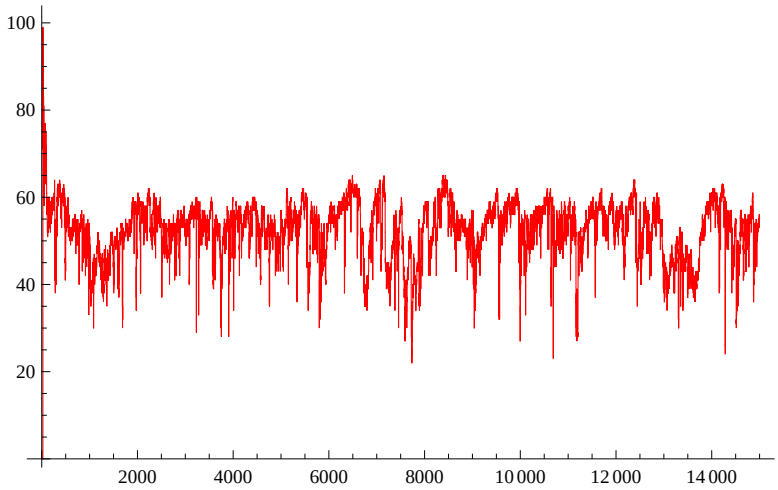
Nejvíce se tedy obchoduje ve spreadu. To není překvapující, protože limit order umístěný v okolí nebo blízko spreadu má nejvyšší šanci být vyrovnán. Tento řekněme „maximální“ spread se velmi mění a fluktuuje. Z tohoto důvodu jsme se rozhodli studovat spread z pohledu pátého nejlepšího bidu a asku (ozn. **spread5**). Průběh tohoto spreadu je zakreslen na obrázcích 4.5 až 4.8. Tento spreadu svým průběhem daleko více odpovídá spreadu, který je pozorován na trhu.



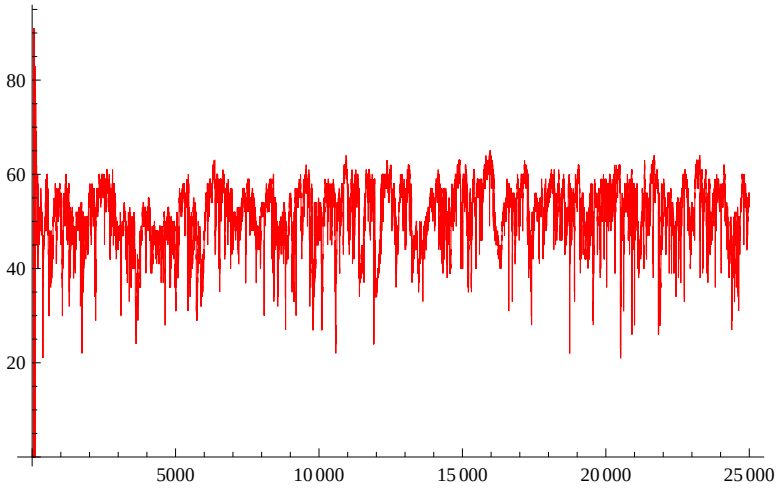
Obrázek 4.9: Vývoj spread5 pro $t = 500$.



Obrázek 4.10: Vývoj spread5 pro $t = 5000$.



Obrázek 4.11: Vývoj spread5 pro $t = 15000$.



Obrázek 4.12: Vývoj spread5 pro $t = 25000$.

V tabulkách 4.1 a 4.2 jsou uvedeny základní charakteristky rozdělení spreadu a spreadu5.

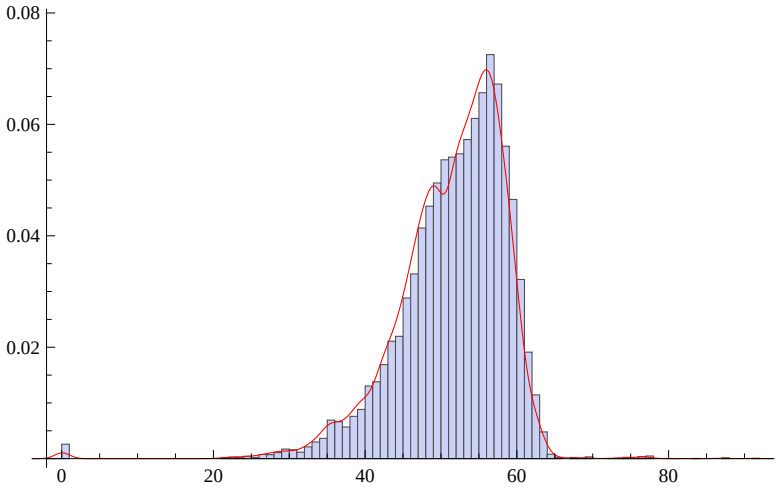
Moment	**Hodnota**
střední hodnota	22,95
rozptyl	175,52
šikmost	0,30
špičatost	2,12
medián	22,00

Tabulka 4.1: Základní charakteristiky rozdělení spread, t=25000

Moment	Hodnota
střední hodnota	51,35
rozptyl	50,87
šikmost	-1,54
špičatost	10,19
medián	52,00

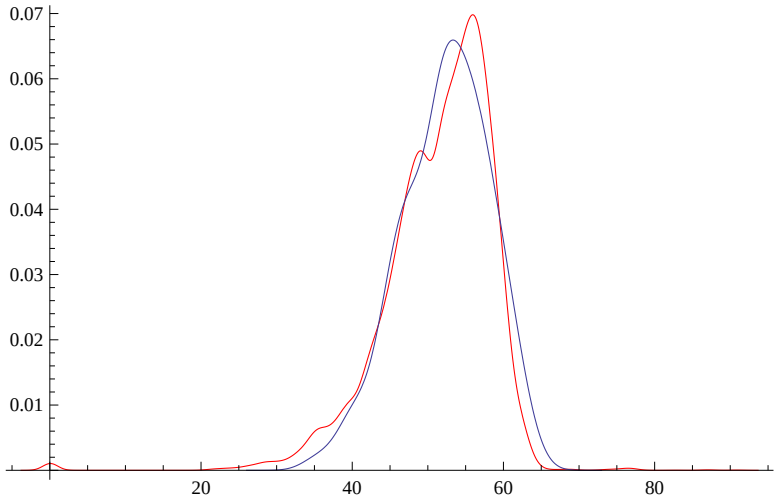
Tabulka 4.2: Základní charakteristiky rozdělení spread5, t=25000

Pomocí použitého softwaru se nám podařilo určit přibližné pravděpodobnostní rozdělení spreadu5. Toto rozdělení bylo určeno jako beta rozdělení s parametry 16 a 4 (Beta(16, 4)), které je přenásobenou konstantou (výše této konstanty byla určena jako 65)[2]. Dále jsme otestovali, jak dobře toto rozdělení odpovídá emipirickému rozdělení. Celá simulace byla použita při $t = 25000$, tedy při nejvyšším počtu simulací. Pro odhad hustoty byl použit histogram spread5. Tento histogram jsem vyhladili pomocí funkce `SmoothHistogram`. Jak dobře vyhlazená funkce kopíruje histogram je vidět na obrázku 4.13. Již jsme poznamenali, že odhadnuté rozdělení bylo určeno jako beta rozdělení. Na obrázku 4.14 jsou obě hustoty vykreslené proti sobě, jak empirická tak odhadnutá hustota.



Obrázek 4.13: Vyhlazení a histogram pro 25000 hodnot spread5.

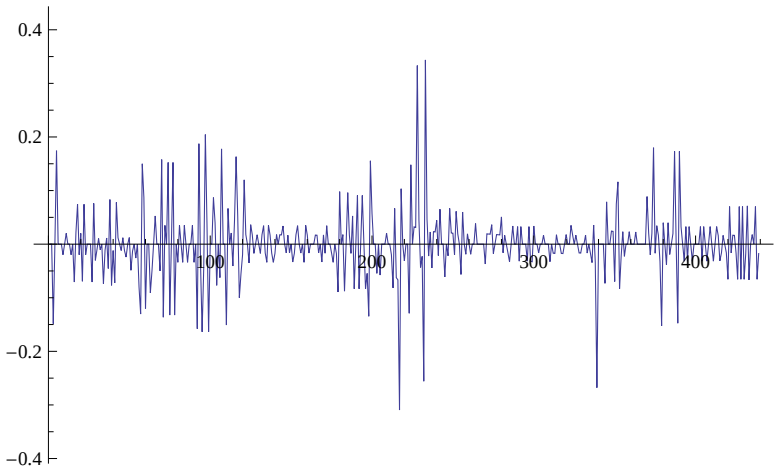
[2]Vlastnosti beta rozdělení a tvar jeho hustoty můžeme najít např. v [2]



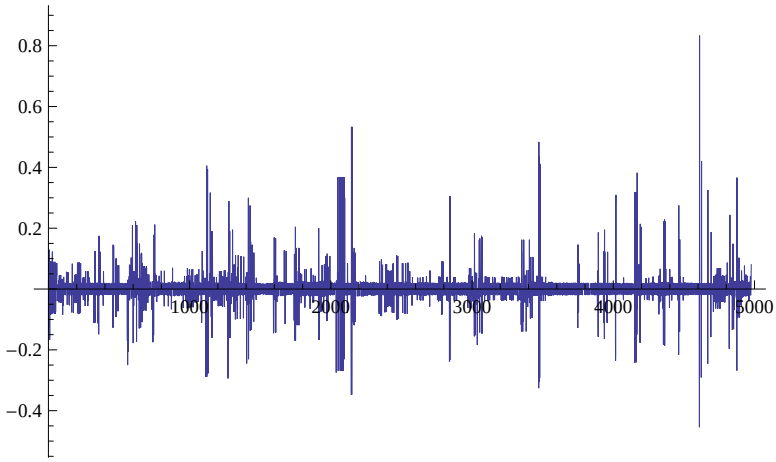
Obrázek 4.14: Empirická a odhadnutá hustota pro 25000 hodnot spread5.

Abychom zjistili, jak dobře se zvolené pravděpodobnostní rozdělení shoduje s empirickým rozdělením spreadu5, použili jsme Kolmogorovův-Smirnovův test na hladině významnosti 5%. Kolmogorův-Smirnovův test testuje nulovou hypotézu H_0, že dané empirické rozdělení se shoduje se zvoleným rozdělením, proti hypotéze H_1, že tomu tak není. Použitý software vrací úspěšnost testu ve formě p-hodnoty. Nulovou hypotézu H_0 zamítáme pokud p-hodnota je menší než zvolená testová statistika. Výsledná p-hodnota byla určena jako 0,48. Detailnější popis testů dobré shody je popsán např. v [2].

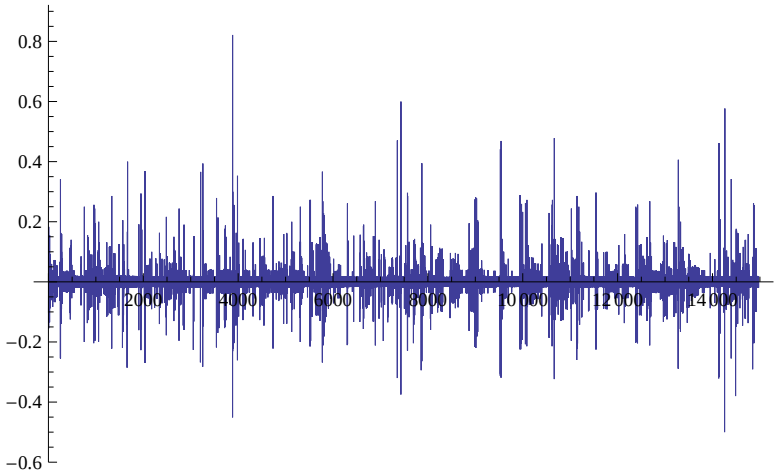
Jak bylo popsáno v kapitole 3, volatilita není na trhu přímo pozorovatelná a většinou se její vliv ukazuje na průběhu relativního výnosu daného ukazatele na trhu. My jsme se rozhodli demonstrovat shlukování volatility pomocí relativních výnosů řady spread5. Relativní výnos byl určen pomocí rovnice (3.19). Průběhy relativních výnosů pro počet simulací 500,5000,15000 a 25000 jsou zakresleny na obrázcích 4.15 až 4.18



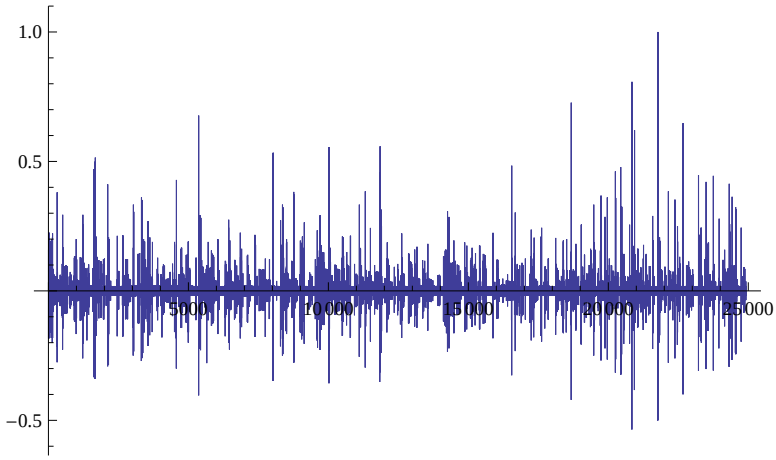
Obrázek 4.15: Výnosy spread5 pro 500 hodnot.



Obrázek 4.16: Výnosy spread5 pro 5000 hodnot.



Obrázek 4.17: Výnosy spread5 pro 15000 hodnot.



Obrázek 4.18: Výnosy spread5 pro 25000 hodnot.

Z daných obrázků je vidět, že ke shlukování v řadě relativních výnosů dochází. Tedy můžeme říci, že náš model, i když je velmi jednoduchý a realitu popisuje jen z části, i přesto ke shlukům volatility dochází.

4.4 Modifikace modelu

Z výše popsaného modelu je patrné, že na trhu se vyskytují pouze emitenti a investoři. Ale jak jsme popsali v dřívějších kapitolách, pokud nás zajímá čistě order driven market, je zde velmi důležité vzít v úvahu funkci spekulantů. Tedy jsme se rozhodli přistoupit k modelu z jiného úhlu pohledu.

Na rozdíl od předchozího modelu, se nyní nacházíme v momentě, kdy daný subjekt na trhu jak nakupuje, tak současně prodává. Dalo by se tedy říct, že se chová jako „spekulant“ - současně nakupuje i prodává pokud je cena pro něj výhodná. Opět modelujeme order book z pohledu spravedlivé ceny účastníka trhu.

Jak bylo zmíněno v předpokladech původního modelu, nerealizujeme počáteční aukci. Jelikož ji nepoužíváme, rozhodli jsem se bid, ask a spread stanovit pomocí prvního obchodníka - obchodník1. V čase $t = 0$ je náš modelový order book prázdný, v čase $t = 1$ přichází do order booku obchodník1. Tento obchodník - spekulant prodává i kupuje dané aktivum.

Spravedlivou cenu spekulanta na trhu v čase t označíme opět jako $X(t)$ a dodržíme veškeré značení, které bylo definováno a popsáno výše. Obchodování našeho spekulanta probíhá podle stejných pravidel, jaká jsme stanovili pro investory a emitenty. Pokud tedy:

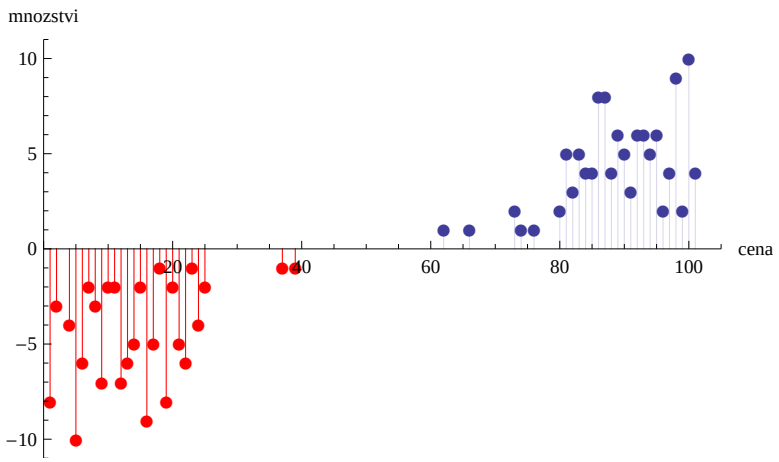
1. $X(t) \geq b(t)$ - spekulant zadává do order booku sell limit order (hodnota sell limit orderu he rovna spravedlivé ceně navýšené o α).

2. $X(t) < b(t)$ - spekulant dává sell market order a své aktivum prodává za tržní cenu.

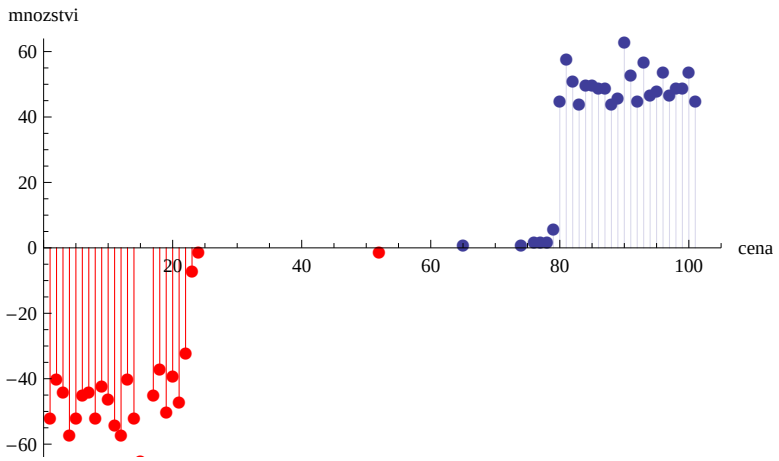
3. $X(t) \geq a(t)$ - spekulant dává buy market order a aktivum kupuje za tržní cenu.

4. $X(t) < a(t)$ - spekulant zadává do order booku buy limit order (hodnota buy limit je orderu rovna spravedlivé ceně snížené o α).

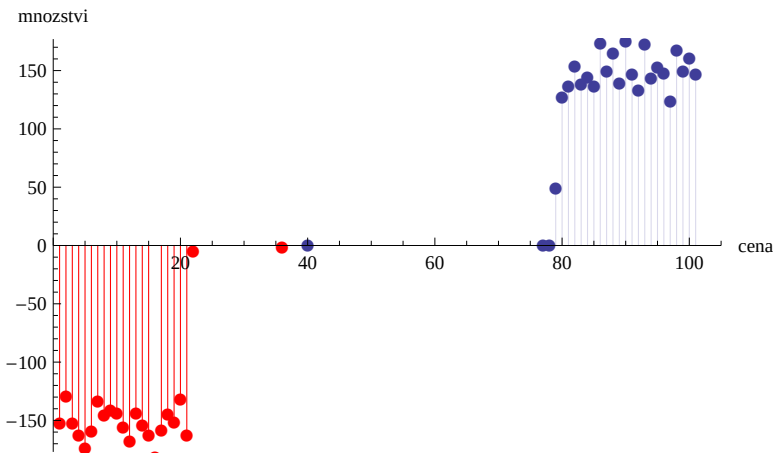
Hodnota konstanty α byla opět stanovena rovna jedné. Na obrázcích 4.19 až 4.22 je zachycen vývoj order booku pro výše popsané účastníky trhu. Červeně jsou znázorněny buy limit ordery, modrou sell limit ordery a množství na straně buy limit orderů je vyjádřeno v záporných hodnotách. Opět pozorujeme kumulaci limit orderů v oblastech přibližně (0,25) a (80,100). Jednou z možností kumulace je fakt poznamenaný výše - neexistence možnosti zrušení limit orderu, který je v order booku po určitou dobu.



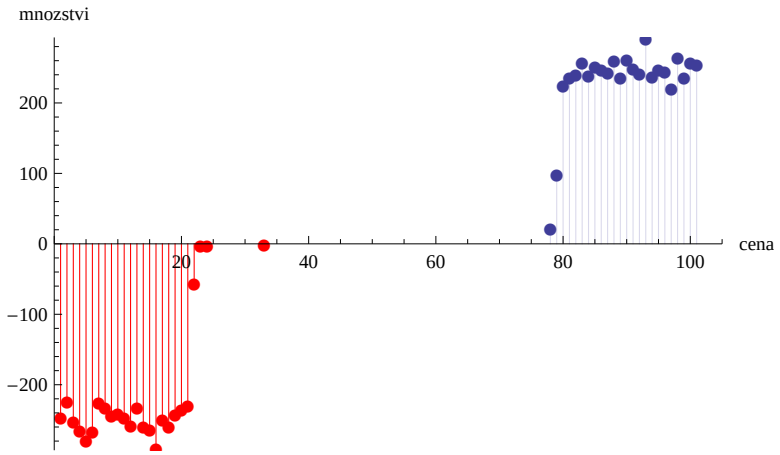
Obrázek 4.19: Tvar order booku, pokud se na trhu vyskytují pouze obchodníci, které nazýváme spekulanty - 500 simulací.



Obrázek 4.20: Tvar order booku, pokud se na trhu vyskytují pouze obchodníci, které nazýváme spekulanty - 5000 simulací.

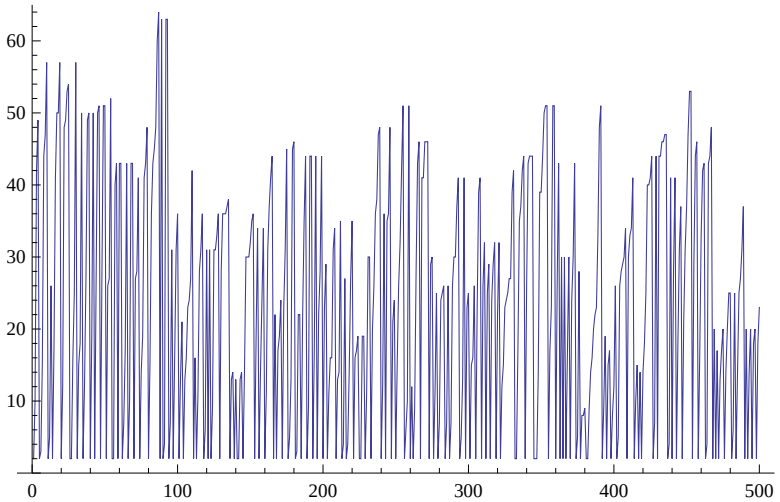


Obrázek 4.21: Tvar order booku, pokud se na trhu vyskytují pouze obchodníci, které nazýváme spekulanty - 15000 simulací.

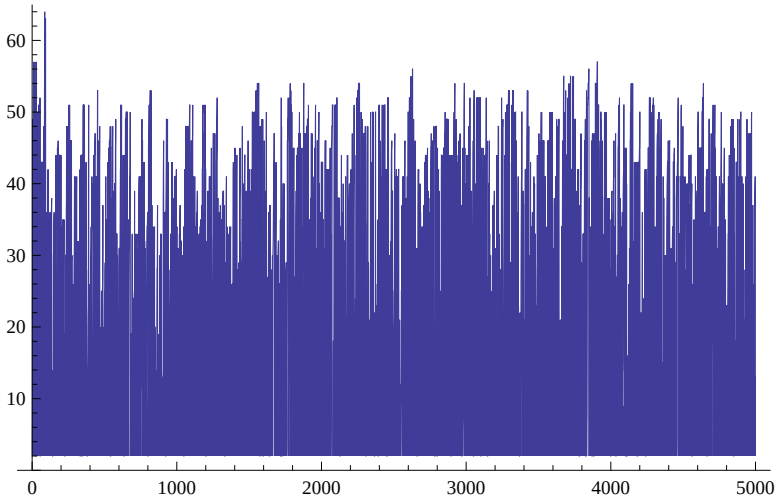


Obrázek 4.22: Tvar order booku, pokud se na trhu vyskytují pouze obchodníci, které nazýváme spekulanty - 25000 simulací.

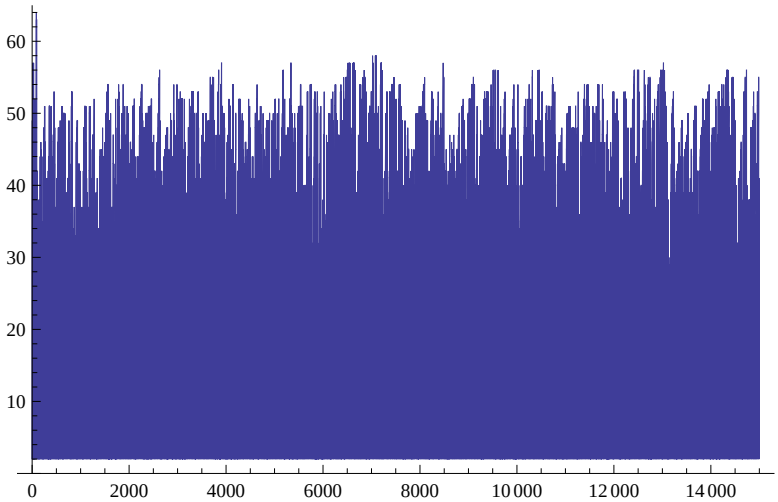
Stejně jako v původním modelu i zde jsme studovali vývoj spreadu a spreadu5. Toto je zachyceno na obráczích 4.23 až 4.30.



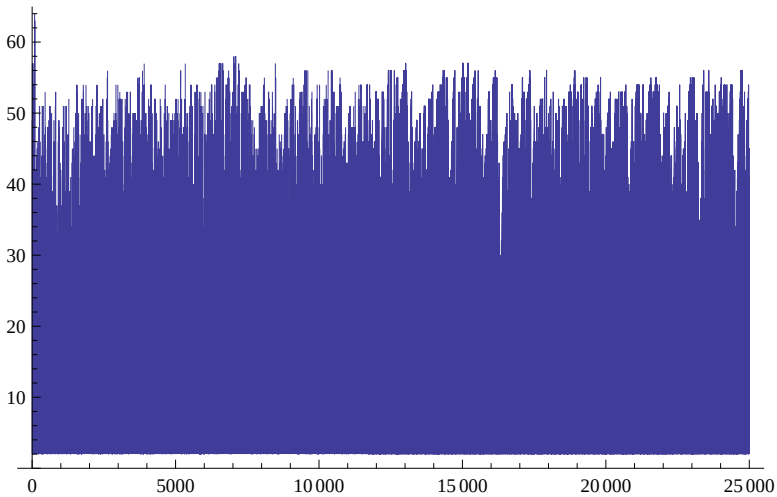
Obrázek 4.23: Spread spekulanti - 500 simulací.



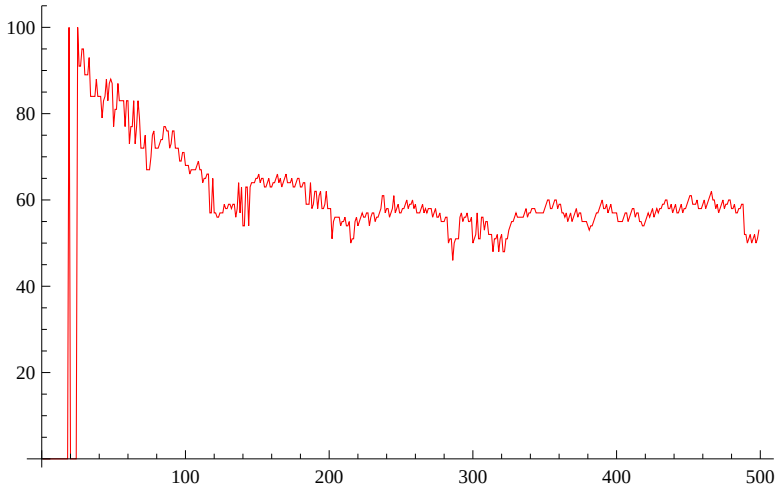
Obrázek 4.24: Spread spekulanti - 5000 simulací.



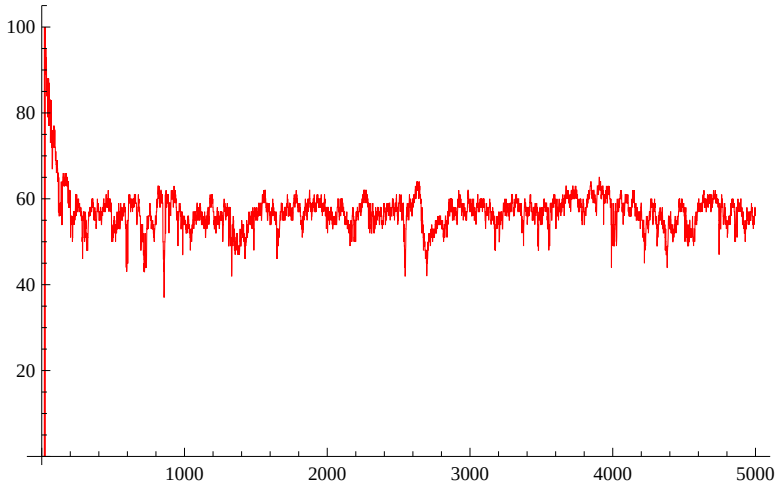
Obrázek 4.25: Spread spekulanti - 15000 simulací.



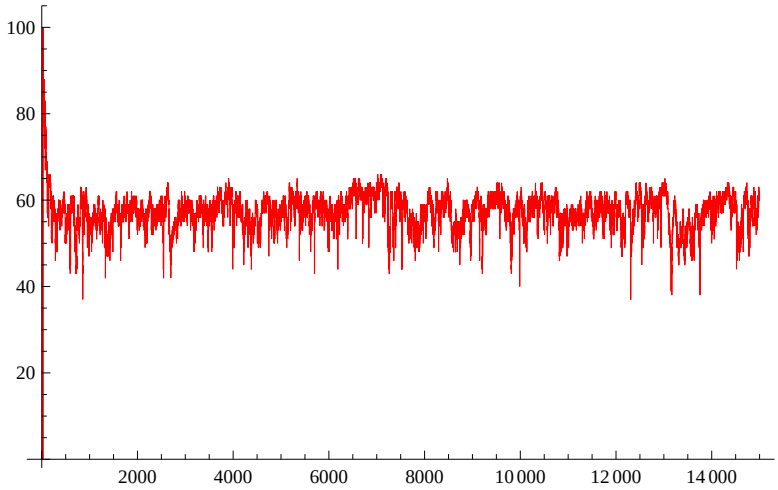
Obrázek 4.26: Spread spekulanti - 25000 simulací.



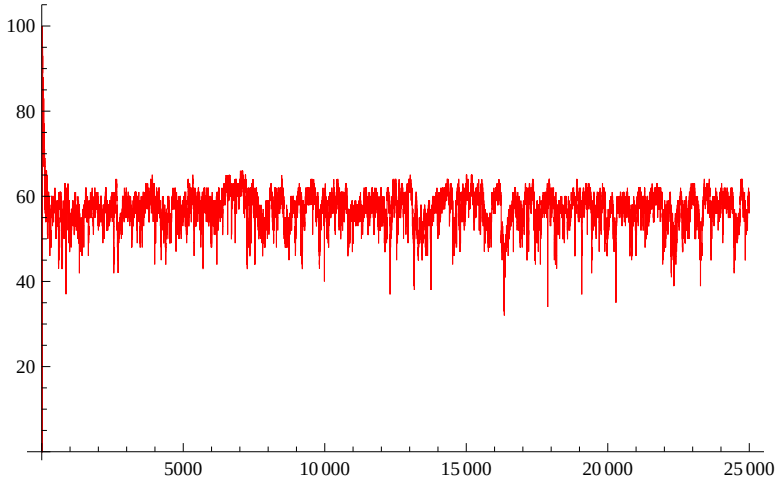
Obrázek 4.27: Spread5 spekulanti - 500 simulací.



Obrázek 4.28: Spread5 spekulanti - 5000 simulací.



Obrázek 4.29: Spread5 spekulanti - 15000 simulací.



Obrázek 4.30: Spread5 spekulanti - 25000 simulací.

V tabulkách 4.3 a 4.4 jsou uvedeny základní charakteristky rozdělení spreadu a spreadu5.

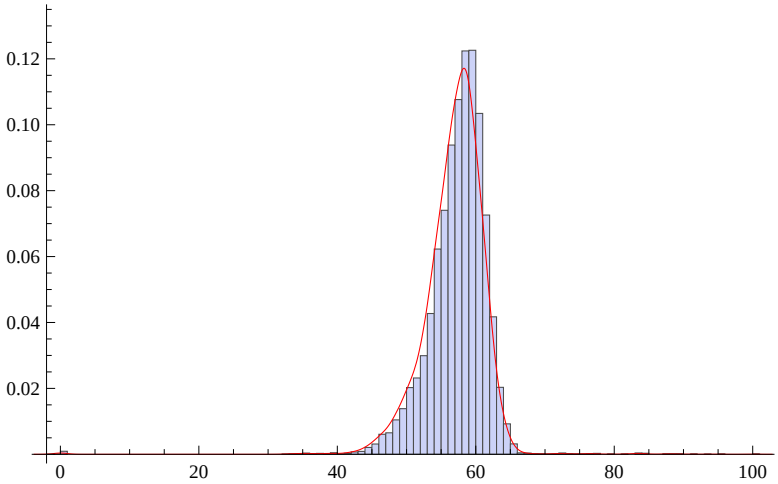
Moment	**Hodnota**
střední hodnota	23,21
rozptyl	293,40
šikmost	0,17
špičatost	1,69
medián	23,00

Tabulka 4.3: Základní charakteristiky rozdělení spread pro spekulanty, t=25000

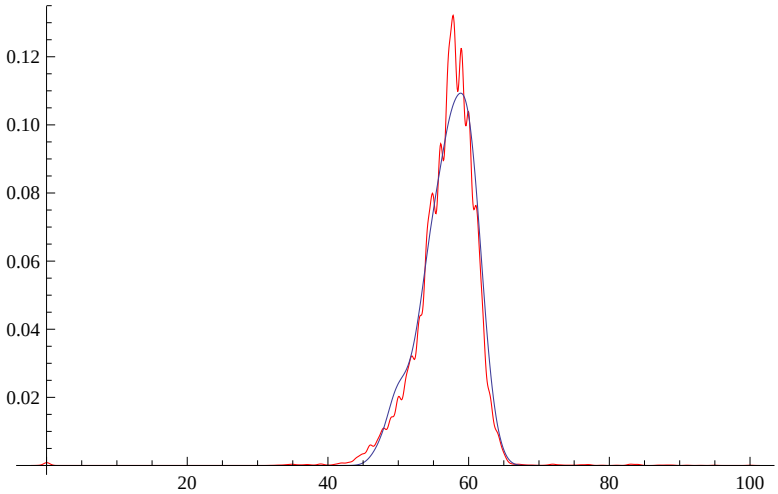
Moment	**Hodnota**
střední hodnota	56,92
rozptyl	19,39
šikmost	-2,14
špičatost	33,61
medián	57,00

Tabulka 4.4: Základní charakteristiky rozdělení spread5 pro spekulanty, t=25000

I v tomto případě jsme hledali pravděpodobnostní rozdělení, které by mohlo popsat empirické rozdělení spreadu5. Použitím stejného přístupu jako v základním modelu jsme za pomoci daného softwaru určili rozdělení a provedli Kolomogorovův-Smirnovův. Na obrázcích 4.31 a 4.32 je zobrazen histogram s jeho vyhlazením (opět jsme použili funkci `SmootHistogram`) a odhadnuté rozdělení dohromady s vyhlazením.

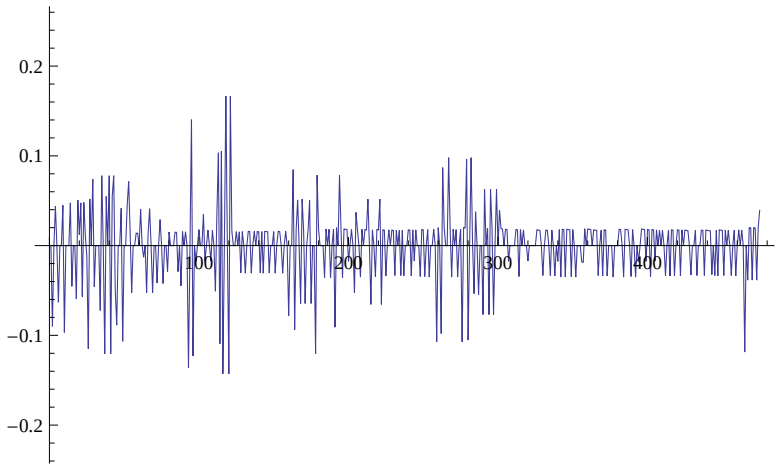


Obrázek 4.31: Histogram s vyhlazením pro spread5 - 25000 simulací.

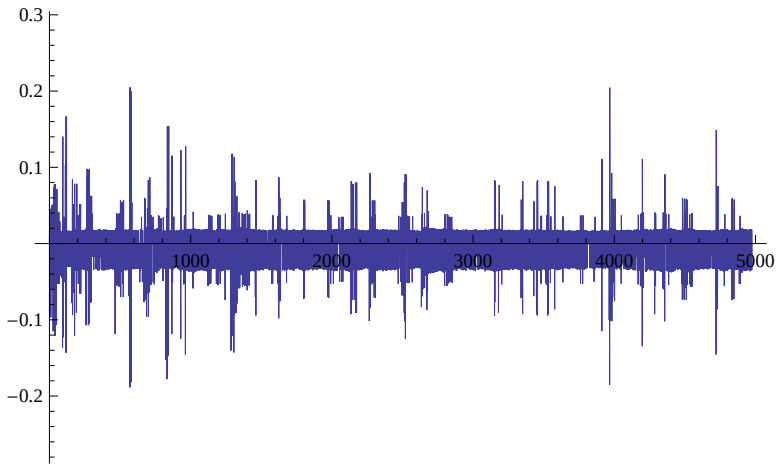


Obrázek 4.32: Histogram s vyhlazením pro spread5 - 25000 simulací.

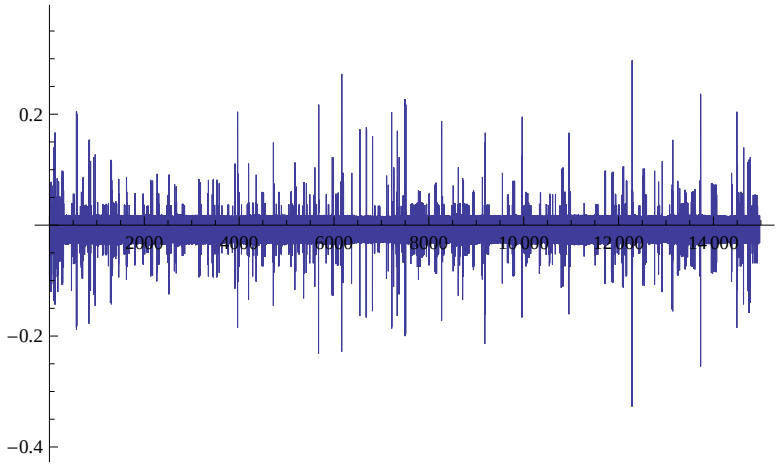
Hledané rozdělení bylo opět určeno jako beta rozdělení s paramatery 38 a 5, které je vynásobené konstantou velikosti 65. p-hodnota pro Kolmogorovův-Smirnovův test je rovna 0,46.



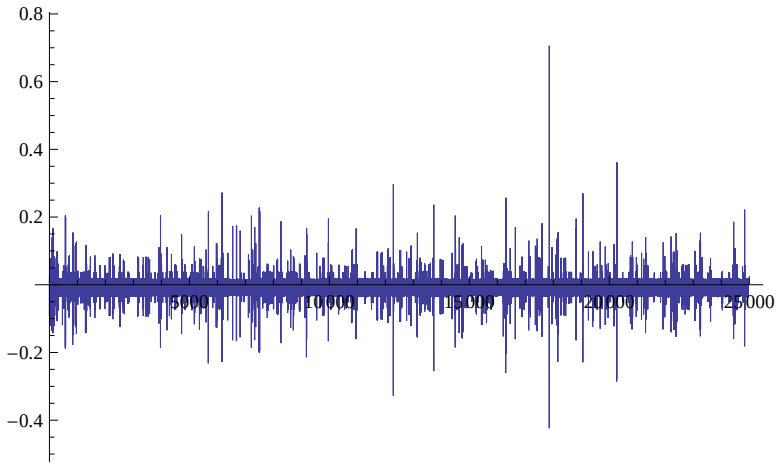
Obrázek 4.33: Výnos Spread5 spekulanti - 500 simulací.



Obrázek 4.34: Výnos Spread5 spekulanti - 5000 simulací.



Obrázek 4.35: Výnos Spread5 spekulanti - 15000 simulací.



Obrázek 4.36: Výnos Spread5 spekulanti - 25000 simulací.

Zda dochází alespoň k nějaké známce shlukování volatility jsem usuzovali z časové řady výnosu ze spread5. Výnosy jsou zobrazeny na 4.33 až 4.36. Jako výše i zde se dají vypozorovat období, kde se malé výkyvy výnosů shlukují spolu.

Obdobně pro velké výkyvy. Tedy usuzujeme, že shluky volatility se dají vysledovat i v našem modelu.

Kapitola 5

Závěr

V předložené práci jsme studovali model order booku a jeho vlastnosti. Nejprve jsme popsali samotný order book, jeho vlastnosti, přístupy, které byli již pro modelování procesu v order booku představeny a vyvinuty. Dále jsme si příblížili obchodování v order book-cích, které jsou používány na burzách v Londýně či Paříži.

V následujících kapitolách jsem přinesli přehled týkající se volatility a především přístupů, které se používají k modelování volatility. Dále jsme popsali fenomén týkající se shlukování volatility. Tento fenomén je známý, avšak příčiny této vlastnosti volatility nejsou dosud plně objasněny.

V praktické části jsme se pokusili vyvinout vlastní model order booku a studovali jsme jeho vlastnosti. Představili jsem řadu předpokladů, podle kterých náš model funguje. V původním modelu se vyskutují pouze dva druhy obchodníků - emitenti a investoři.

Ze studia tvaru order booku ze vzrůstajícím počtem obchodníků na trhu, jsme si povšimli i vzrůstajícího množství orderů na obou stranách order booku. Jak bylo poznamenáno v kapitole 4, jedním z důvodů, proč se tak děje je fakt neexistence možnosti zrušení limit orderu, který je v order booku již po určitou dobu. Tedy v našem modelu dochází k hromadění orderů. Dále jsme studovali vývoj spreadu. Jelikož spread velmi fluktuuje, rozhodli jsme se přejít k odlišnému druhu spreadu, který označujeme termínem spread5. Ten jsme definovali jako spread mezi pátým nejlepším bidem a askem. Určili jsme empirické rozdělení a našli přibližné spojité rozdělení, které empirickému odpovídá. Jak dobře si rozdělení odpovídají, jsme otestovali pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu. Toto odpovídající rozdělení bylo určeno jako beta rozdělení s parametry 16 a 4 (Beta(16, 4)).

Zda dochází či nedochází ke shlukování volatility jsme studovali na časové řadě výnosů spreadu5. Ačkoliv jsme vytvořili model pomocí nerealistických předpokladů, ke shlukům volatility dochází podobně jako na skutečném trhu.

Abychom představili určité zlepšení modelu, představili jsme model, ve kterém se vyskytují tzv. spekulanti. I pro tento model jsme studovali tvar order booku, jeho spread a spread5. Opět bylo určeno empirické rozdělení spread5 a přibližné spojité rozdělení. I v tomto případě jsme shluky volatility pozorovali prostřednictvím časové řady výnosů spreadu5.

Teorie v tomto odvětví je sice stará jen pár desítek let, ale velmi rychle je různými skupinami lidí (matematici, fyzici, obchodníci na trhu, ekonomové) rozšiřována. Vzhledem k tomu, jak dlouho se order booky používají a skladují se

veškerá data o proběhlých obchodech, se nemůžeme divit, že ještě nebylo vytvořeno uplně jednotné názvosloví. Proto je problém shlukování volatility i modelů dynamiky poptávky a nabídky velmi zajímavým odvětvím studia.

Seznam použité literatury

[1] Ahn, Hee-Joon, Bae, Kee-Hong, Chan, Kalok. *Limit Orders, Depth, and Volatility: Evidence from the Stock Exchange of Hong Kong*, The Journal of Finance,**56**, 2, 767-788, 2001.

[2] Anděl, Jiří. *Základy matematické statistiky, 2. vydání,* Matfyzpress, Praha, 2007, ISBN 80-7378-001-1.

[3] Avellaneda, Marco, Stoikov, Sasha. *High-Frequency Trading in a Limit Order Book*, Quantitative Finance, **8**, 3, 217–224, 2008.

[4] Biais, Bruno, Hillion, Pierre, Spatt, Chester. *An Empirical Analysis of the Limit Order Book and the Order Flow in the Paris Bourse*, The Journal of Finance, **50**, 5, 1655-1689, 1995.

[5] Bollerslev, Tim, Domowitz, Ian. *Trading Patterns and Prices in the Interbank Foreign Exchange Market*, The Journal of Finance, **48**, 4, 1421-1443, 1993.

[6] Bouchaud, Jean-Philippe, Mézard, Marc, Potters, Marc. *Statistical Properties of Stock Order Books: Empirical Results and Models*, Quantitative Finance, **2**, 4, 251–256, 2002.

[7] Cipra, Tomáš. *Finanční ekonometrie, 1. vydání,* Ekopress, s. r. o, Praha, 2008.

[8] Dupačová, Jitka, Hurt, Jan, Štěpán, Josef. *Stochastic Modeling in Economics and Finance,* Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2002.

[9] *NYSE Euronext* [online], [cit. 2011-07-16], dostupné na: http://www.euronext.com/landing/indexMarket-18812-EN.html

[10] Föllmer, Hans, Schied, Alexander. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time, 2nd edition,* Walter de Gruyter, Berlin, 2002.

[11] Gaunersdorfer, Andrea, Hommes, Cars H. *A nonlinear Structural Model For Volatility Clustering*, AM Working Paper No. 63, 2000.

[12] Gould, Martin D., Porter, Mason A., et al. *The Limit Order Book: A Survey*, CornelL University Library, eprint arXiv:1012.0349, 2010.

[13] Hull, John C. *Options, Futures and Other Derivatives, 7th edition,* Pearson Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2008.

[14] Challet, Damien, Stinchcombe, Robin. *Analyzing and Modeling 1 + 1d Markets*, Physica A, **300**, 1–2, 285–299, 2001.

[15] *London Stock Exchange* [online], [cit. 2011-08-01], dostupné na: http://www.londonstockexchange.com/products-and-services/trading-services/sets/sets.htm

[16] Lux, Thomas, Marchesi, Michele. *Volatility Clustering in Financial Markets: A Microsimulation of Interacting Agents*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, **3**, 4, 675-702, 2000.

[17] Mankiw, Gregory N. *Principles of Economics, 5th Edition,* South-Western College Pub, Mason OH, 2008.

[18] Maslov, Sergei. *Simple Model of a Limit Order-Driven Market*, Physica A, **278**, 3-4, 571-578. 2000.

[19] Maslov, Sergei, Mills, Mark. *Price Fluctuations From The Order Book Perspective - Empirical Facts and Simple Model*, Physica A, **299**, 1–2, 234–246, 2001.

[20] Obizhaeva, Anna A., Wang, Jiang. *Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics (February 2005).* AFA 2006 Boston Meetings Paper, dostupné na SRRN: http://ssrn.com/abstract=686168.

[21] Potters, Marc, Bouchaud, Jean-Philippe. *More statistical Properties of Order Books and Price Impact*, Physica A, **324**, 1-2, 133-140, 2003.

[22] Prášková, Zuzana. *Základy náhodných procesů II*, Karolinum, Praha, 2007.

[23] *RM-SYSTÉM, česká burza cenných papírů a.s.*, [cit. 2011-08-01], dostupné na: http://www.rmsystem.cz/

[24] Ruey, S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley&Sons, Inc., New York, 2002.

[25] Sewell, Martin. *Characterization of Financial Time Series*, UCL Research Note RN/11/01, 2011.

[26] Slanina, František. *Mean-field approximation for a limit order driven market model*, Physical Review E, **64**, 5, 2001.

[27] Tseng, Jie-Jun, Li, Sai-Ping. *Asset Returns and Volatility Clustering in Financial Time Series*, Physica A, **390**, 7, 1300-1314, 2011.

[28] *The U. S. Securities and Exchange Commission* [online], 2011-03-11, [cit. 2011-08-01], dostupné na: http://www.sec.gov/answers/limit.htm

[29] Zovko, Ilja, Farmer, J Doyne. *The Power of Patience: A Behavioural Regularity in Limit-Order Placement*, Quantitative Finance, **2**, 5, 387–392, 2002.