Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Adrián Andráš

Vybrané metody pro analýzu mnohorozměrných finančních dat

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2011

Chcel by som poďakovať mojej vedúcej diplomovej práce pani RNDr. Jitke Zichovej Dr. za odborné vedenie mojej práce, za cenné rady a pripomienky, ktoré mi boli prínosom pri písaní.

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že na moju prácu sa vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení vrátane skutočnosti, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školného diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dňa ..... Podpis autora

Názov práce: Vybrané metódy pre analýzu mnohorozmerných finančných dát

Autor: Adrián Andráš
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci diplomovej práce: RNDr. Jitka Zichová Dr.
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
e-mail vedúceho: zichova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V praxi sa často stretávame s dátami vo forme pozorovaní niekoľkých premenných v rôznych časových okamihoch. Týmto dátam hovoríme časové rady. V práci sa zaoberáme vybranými prístupmi pri analýze časových radov; grafickými modelmi, vektorovými autoregresnými modelmi a vektorovými modelmi kĺzavých súčtov. Snažíme sa získať informácie o vzájomnej súvislosti jednotlivých premenných a následne modelovať ich chovanie. Použité postupy sú ilustrované na logaritmických výnosoch mesačných priemerných hodnôt devizových kurzov. Programy sú spracované v software Mathematica 7 a je možné ich nájsť na priloženom CD.
Kľúčové slová: Grafický model, VMA model, VAR model, devizové kurzy

Title: Selected methods for multivariate financial data analysis

Author: Adrián Andráš
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr.
Supervisor's e-mail address: zichova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In practice, we often meet data in the form of observations of several variables at various points in time. These data are called time series. We present various approaches in time series analysis; graphical models, vector autoregressive models and vector moving-average models. We try to get information about mutual relationship of the variables and then to model their behavior. The used techniques are illustrated on log returns of monthly average exchange rates. The programs are processed in the software Mathematica 7 and can be found on the CD.
Keywords: Graphical model, VMA model, VAR model, exchange rates

Obsah

Úvod **3**

1 Grafické modely **4**

1.1 Základné pojmy 4

1.2 Metóda maximálnej vierohodnosti 6

1.3 Testovanie grafických modelov 7

1.4 Selekcia grafických modelov 9

1.5 Spracovanie dát 11

1.5.1 Overenie predpokladov 12

1.5.2 Aplikácia selekčného algoritmu 14

2 Vektorové ARMA modely **18**

2.1 Základné pojmy 18

2.2 Autokorelačné matice 18

2.3 Lineárna závislosť 20

2.4 Odhad maticovej autokorelačnej funkcie 20

2.4.1 Test nulovosti prvkov korelačnej matice 21

2.5 Mnohorozmerný Portmanteau test 21

2.6 Vektorové autoregresné modely VAR 22

2.6.1 Model VAR(1) 22

2.6.2 Podmienka stacionarity a momenty pre VAR(1) model . . 24

2.6.3 Model VAR(p) 25

2.7 Výstavba VAR(p) modelu 27

2.7.1 Identifikácia rádu modelu 27

2.7.2 Odhadovanie a kontrola modelu 29

2.7.3 Predpovede v modeli 30

2.8 Vektorové MA modely 31

2.8.1 VMA(1) a VMA(q) 31

2.8.2 Odhadovanie parametrov 33

2.8.3 Predpovede v modeli 35

2.9 Spracovanie dát 37
2.9.1 Idendifikácia modelu 39
2.9.2 Overenie stacionarity 40
2.9.3 Testovanie nekorelovanosti bieleho šumu 41
2.9.4 Konštrukcia predpovedí 41

Záver **43**

Literatúra **44**

Prílohy **45**

Príloha č.1: Grafy vybraných priemerných devizových kurzov 46
Príloha č.2: Histogramy vybraných priemerných devizových kurzov . . 47
Príloha č.3: Zdrojový kód realizovaný v software Mathematica 7 51

Úvod

Vo finančnej analýze, tak ako v iných odvetviach, často pozorujeme celé sústavy premenných v čase alebo na rôznych objektoch. Vznikajú tak mnohorozmerné štatistické dáta.

Diplomová práca je venovaná vybraným metódam pre spracovanie takých dát. V prvej časti sme popísali základy teórie grafických modelov. Vďaka ich schopnosti skúmať závislostnú štruktúru v náhodných výberoch sú v súčasnosti používané tiež vo finančnej analýze. Vychádzali sme z knihy [11]. Pri spracovaní grafických modelov sme použili nezávislé dáta s normálnym rozdelením. Na demonštráciu grafických modelov v praxi sme zvolili mesačné priemerné hodnoty devizových kurzov. Grafy časových radov jednotlivých mien sú uvedené v prílohe.

V druhej časti diplomovej práce sa venujeme častejšie používanej štatistickej metóde, vektorovým autoregresným (VAR) modelom a vektorovým modelom kĺzavých súčtov (VMA), ktorých identifikáciu, odhad, diagnostiku a predpovede sme teoreticky popísali na základe zdrojov [2],[5] a [10], naprogramovali v software Mathematica 7 (viď príloha) a aplikovali opäť na vybrané mesačné priemerné hodnoty devizových kurzov.

1. Grafické modely

1.1 Základné pojmy

Definícia 1.1.1. Nech $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ sú náhodné vektory so spojitým rozdelením. Vektory $\boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Z}$ sú *podmienene nezávislé* pri pevnej hodnote vektoru $\boldsymbol{X}$, práve keď podmienená hustota $f_{\boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}}$ splňuje vzťah

$$f_{\boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x})$$

pre všetky hodnoty $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ a pre všetky $\boldsymbol{x}$ také, že $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) > 0$. Túto skutočnosť budeme ďalej značiť $\boldsymbol{Y} \perp \boldsymbol{Z}|\boldsymbol{X}$.

Vlastnosti podmienene nezávislých vektorov je možné nájsť v knihe [11]. Štruktúra podmienenej nezávislosti sa dá znázorniť grafom, ktorého vrcholy odpovedajú zložkám príslušného náhodného vektoru. Chýbajúca hrana v grafe medzi dvoma vrcholmi znamená podmienenú nezávislosť príslušných dvoch zložiek pri pevných hodnotách ostatných zložiek. Naďalej budeme symbolom $G(V, E)$ značiť neorientovaný graf s množinou vrcholov V a množinou hrán E.

Základy teórie grafov je možné dohľadať v [7].

Definícia 1.1.2. Nech máme dva grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$. Pokiaľ súčasne platí $V_1 \subseteq V_2$ a $E_1 \subseteq E_2$, potom povieme, že G_1 je *podgrafom* grafu G_2. Pokiaľ naviac platí $V_1 = V_2$, potom povieme, že graf G_1 je *faktorom* grafu G_2.

Definícia 1.1.3. Povieme, že graf alebo podgraf je *úplný*, pokiaľ je každý z jeho vrcholov spojený hranou so všetkými ostatnými vrcholmi.

Definícia 1.1.4. Nech $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^T$ je k-rozmerný náhodný vektor, $G{=}(V, E)$ graf s k vrcholmi a $a \subseteq V$. Povieme, že množina a je *kľúka*, pokiaľ indukuje úplný podgraf a pokiaľ po pridaní ľubovoľného vrcholu indukuje podgraf, ktorý už nie je úplný.

Definícia 1.1.5. Nech $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^T$ je k-rozmerný náhodný vektor a $G{=}(V, E)$ graf s k vrcholmi.
Grafický model pre vektor $\boldsymbol{X}$ je rodina pravdepodobnostných rozdelení vektoru

$\boldsymbol{X}$, ktoré splňujú podmienené nezávislosti dané grafom G.
Pokiaľ navyše platí $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, potom hovoríme o *gaussovskom grafickom modeli.*

Poznámka. V prípade gaussovských grafických modelov platí, že podmienené nezávislosti sú ekvivalentné výskytu nul v inverznej variančnej matici. Ak sa v i-tom riadku a j-tom stĺpci inverznej variančnej matici objaví nula, znamená to podmienenú nezávislosť medzi zložkami X_i a X_j pri pevných hodnotách ostatných zložiek.

Definícia 1.1.6. *Saturovaný model* je grafický model určený úplným grafom.

Teóriu grafických modelov a spôsoby ich aplikácií pri spracovaní dát je možné nájsť v knihe [11].

Definícia 1.1.7. Majme dáta vo forme N realizacií k-rozmerného náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kN} \end{pmatrix}.$$

Označme si $\boldsymbol{X}_l = (X_{1l}, X_{2l}, \dots, X_{kl})^T$ l-tú realizáciu náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. Potom definujeme:

Vektor výberových priemerov

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{X}_l.$$

Výberovú variančnú maticu

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \left(\boldsymbol{X}_l - \overline{\boldsymbol{X}}\right) \left(\boldsymbol{X}_l - \overline{\boldsymbol{X}}\right)^T.$$

Ďalej zavedieme niektoré spôsoby nájdenia grafického modelu pre popis štruktúry podmienených nezávislostí v pozorovaných dátach.

Jednoduchá selekcia grafického modelu:

1. Odhadneme variančnú maticu $\boldsymbol{V} = Var(\boldsymbol{X})$ pomocou výberovej variančnej matice $\boldsymbol{S}$.

2. Spočítame inverznú maticu $\boldsymbol{S}^{-1}$.

3. Škálujeme $\boldsymbol{S}^{-1}$ tak, aby mala na diagonále samé jednotky. Záporne vzaté mimodiagonálne prvky sú odhadom parciálnych korelačných koeficientov $corr_N(X_i, X_j | V \setminus \{i, j\})$, kde $V \setminus \{i, j\}$ označuje množinu náhodných veličín $\{X_1, \ldots, X_k\}$ s vylúčením X_i a X_j.

4. Odhadnuté parciálne korelačné koeficienty blízke nule položíme rovné nule. To je možné overiť testovaním nulovosti parciálnej korelácie viď [1].

5. Výsledný graf bude obsahovať iba tie hrany, ktorým odpovedajú nenulové prvky škálovanej inverznej variančnej matice.

Pre normálne rozdelené dáta je možné použiť metódy založené na vierohodnostnom prístupe.

1.2 Metóda maximálnej vierohodnosti

Nech $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ je náhodný výber z k-rozmerného normálneho rozdelenia $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ a označíme $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$.
Vierohodnostnú funkciu môžeme napísať v tvare

$$L(\boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{i=1}^{N} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{D})^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{X}_i \right\}.$$

Logaritmickú vierohodnostnú funkciu môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned} 2l(\boldsymbol{\Sigma}) &= const - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{D} \ \boldsymbol{X}_i - N \ln \det \boldsymbol{\Sigma} \\ &= const - N tr(\boldsymbol{D} \ \boldsymbol{S}) - N \ln \det \boldsymbol{\Sigma}, \end{aligned}$$

kde *tr* značí stopu matice, *const* nezávisí na parametrickej matici $\boldsymbol{\Sigma}$, ln označuje prirodzený logaritmus a det značí determinant matice.

Maximálne vierohodným odhadom matice $\boldsymbol{\Sigma}$, bez obmedzenia na jej prvky, je výberová variančná matica $\boldsymbol{S}$.

Navrhneme grafický model pre naše dáta. Každá párová podmienená nezávislosť špecifikovaná grafom generuje obmedzenie na parametre. Pre mnohorozmerné normálné rozdelenie je to nula v inverznej variančnej matici.
Odhadneme neznáme parametre vo variančnej matici maximalizáciou vierohodnostnej funkcie za obmedzení vyplývajúcich z testovaného grafického modelu.

Veta 1.2.1. *(Vierohodnostné rovnice pre gaussovské grafické modely)*
Nech $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ je náhodný výber z k-rozmerného normálneho rozdelenia $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.
Potom maximálne vierohodné odhady $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ a $\widehat{\boldsymbol{D}}$ matíc $\boldsymbol{\Sigma}$ a $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ za obmedzení daných grafom G splňujú vierohodnostné rovnice

$$\widehat{d}_{ij} = 0$$

pre vrcholy i a j, ktoré nie sú spojené hranou grafu G, a platí rovnosť submatíc

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{aa} = \boldsymbol{S}_{aa},$$

pre podmnožinu vrcholov a, ktorá je kľuka. Odhadnuté parametre $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ a $\widehat{\boldsymbol{D}}$ sú jednoznačne určené s pravdepodobnosťou jedna. Navyše platí $\widehat{\boldsymbol{D}} = (\widehat{\boldsymbol{\Sigma}})^{-1}$.

Dôkaz. Uvedený v [11]. □

Poznámka. Maximálne vierohodné odhady sa počítajú IPF algoritmom viď [11].

1.3 Testovanie grafických modelov

Zhodu odhadnutého modelu s dátami je možné testovať pomocou štatistiky zvanej deviancia.

Definícia 1.3.1. Nech G_0 je úplný graf a G je jeho faktor, v ktorom chýba f hrán.
Potom definujeme *devianciu* grafu G

$$dev^{(f)} = 2 \cdot \left[l(\boldsymbol{S}) - l(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}) \right],$$

kde:

$\boldsymbol{S}$ je maximálne vierohodný odhad variančnej matice v saturovanom modeli s úplným grafom G_0, a to je výberová variančná matica,

$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ je maximálne vierohodný odhad variančnej matice v modeli s grafom G a l značí logaritmickú vierohodnostnú funkciu.

Lemma 1.3.2. *Nech $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ je náhodný výber z k-rozmerného normálneho rozdelenia $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.*

Potom devianciu môžeme vyjadriť v tvare

$$dev^{(f)} = N\left[tr(\boldsymbol{S}\widehat{\boldsymbol{D}}) - \ln\det(\boldsymbol{S}\widehat{\boldsymbol{D}}) - k\right]. \tag{1.1}$$

Navyše platí:

$$dev_{ij}^{(1)} = -N\ln(1 - corr(X_i, X_j | V \setminus \{i,j\})^2). \tag{1.2}$$

Dôkaz. Viď [11]. □

Veta 1.3.3. *Deviancia $dev^{(f)}$ má asymptoticky rozdelenie χ^2_f.*

Dôkaz. Uvedený v [11]. □

Definícia 1.3.4. Nech G_0 je kompletný graf, G_1 je jeho faktor, v ktorom chýba f_1 hrán a ktorý ma devianciu $dev^{(f_1)}$, a G_2 faktor grafu G_1, v ktorom chýba f_2 hrán a ktorý ma devianciu $dev^{(f_2)}$. Symbolicky je možné písať $G_0 \supset G_1 \supset G_2$. Potom definujeme *diferenciu deviancií* modelov s grafmi $G_1 \supset G_2$ predpisom:

$$dev^* = -[dev^{(f_1)} - dev^{(f_2)}].$$

Špeciálne:

Pokiaľ v grafe G_2 chýba oproti grafu G_1 iba jedna hrana $\{i,j\}$, budeme hovoriť o *deviancii vynechanej hrany dev^*_{ij}*.

Lemma 1.3.5. *(Výpočtový tvar diferencie deviancií)*

Nech $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ je náhodný výber z k-rozmerného normálneho rozdelenia $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Potom diferenciu deviancií môžeme vyjadriť v tvare

$$dev^* = -N \cdot \left\{tr[\boldsymbol{S} \cdot (\widehat{\boldsymbol{D}}_1 - \widehat{\boldsymbol{D}}_2) + \ln\det(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_1 \cdot \widehat{\boldsymbol{D}}_2)\right\}, \tag{1.3}$$

kde $\widehat{\boldsymbol{D}}_1 = \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_1^{-1}$ *je maximálne vierohodný odhad inverznej variančnej matice v grafickom modeli s grafom* G_1 *a* $\widehat{\boldsymbol{D}}_2 = \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_2^{-1}$ *je maximálne vierohodný odhad inverznej variančnej matice v grafickom modeli s grafom* G_2.

Dôkaz. Možné nájsť v [11]. □

Veta 1.3.6. *Diferencia deviancii* dev^* *má asymptoticky rozdelenie* $\chi^2_{f_2-f_1}$. *Špeciálne, deviancia vynechanej hrany* dev^*_{ij} *má asymptoticky rozdelenie* χ^2_1.

Dôkaz. Možné nájsť v [11]. □

Poznámka. Deviancia je testová štatistika pre test modelu s grafom G proti saturovanému modelu s grafom G_0. Test je založený na porovnávaní deviancii, pričom zhodu modelu G s dátami na hladine α zamietame, ak vyjde deviancia grafu G $dev^{(f)}$ väčšia ako $(1-\alpha).100$ percentný kvantil chí-kvadrát rozdelenia o f stupňoch voľnosti $\chi^2_f(\alpha)$.

Diferencia deviancii je testová štatistika modelu pre test s grafom G_2 proti modelu s grafom $G_1 \supset G_2$. Zhodu modelu G_2 s dátami na hladine α zamietame, ak vyjde diferencia deviancií dev^* väčšia ako $(1-\alpha).100$ percentný kvantil chí-kvadrát rozdelenia o $f_2 - f_1$ stupňoch voľnosti $\chi^2_{f_2-f_1}(\alpha)$.

1.4 Selekcia grafických modelov

Akým spôsobom vybrať grafický model, aby sa dobre zhodoval so zadanými dátami, sa pokusíme zodpovedať v tejto kapitole. Spôsobov je niekoľko a to napr.: generovanie všetkých možných grafov a testovanie príslušných grafických modelov (výpočetne náročný postup a nejednoznačnosť výsledku) a algoritmy Backward (založený na spôsobe odoberania hrán z úplného grafu) a Forward (založený na pridávaní hrán do grafu bez hrán). Popis je možné nájsť v [11].

Pozrime sa podrobnejšie na **Backward algoritmus so stop pravidlom založeným na deviancii vynechanej hrany**.

Algoritmus je možné zhrnúť do niekoľkých krokov:
Majme k dispozícii data vo forme N realizácií k-rozmerného náhodného vektoru

$\boldsymbol{X} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Graf G s vynechanou hranou $\{i,j\}$ budeme značiť $G \setminus \{i,j\}$. Vstupom do selekčnej procedúry sú:

- Výberová variančná matica $\boldsymbol{S}$.
- Saturovaný model reprezentovaný kompletným grafom G_0.

Algoritmus

1. (a) Spočítame devianciu vynechaných hrán $dev^*_{\{i,j\}}$ z G_0, tzn. testujeme graf G_0 s vynechanou hranou $\{i,j\}$ proti G_0. Môžeme použiť dva spôsoby výpočtu deviancie:

   - $\boldsymbol{S}^{-1}$ škálujeme tak, aby mala na diagonále 1, mimodiagonálne prvky sú
   $$-corr(X_i, X_j | V \setminus \{i,j\})$$
   a devianciu spočítame podľa vzorca (1.2) z lemmatu 1.3.2 .
   - Spočítame maximálne vierohodný odhad variančnej matice $\widehat{\boldsymbol{V}}^{(0)}_{ij}$ vektoru $\boldsymbol{X}$ a maximálne vierohodný odhad inverznej variančnej matice $\widehat{\boldsymbol{D}}^{(0)}_{ij}$ vektoru $\boldsymbol{X}$ v modeli $G_0 \setminus \{i,j\}$ a to buď priamym výpočtom, alebo pomocou IPF algoritmu.

     Devianciu spočítame podľa vzorca (1.1) z lemmatu 1.3.2, kde položíme $\widehat{\boldsymbol{D}} = \widehat{\boldsymbol{D}}^{(0)}_{ij}$.

   (b) Vyberieme najmenšiu nevýznamnú dev^*_{ij} a príslušnú hranu $\{i,j\}$ vylúčime z G_0 a dostávame nový graf $G_1 = G_0 \setminus \{i,j\}$ s odhadmi $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(1)}$ a $\widehat{\boldsymbol{D}}^{(1)}$.

   (c) Pokiaľ sú všetky dev^*_{ij} významné, výsledkom selekcie je kompletný graf G_0.

2. Pro $r = 1, 2, \ldots$

   (a) Spočítame deviancie vynechaných hrán dev^*_{ij} v G_r, tzn. testujeme modely s grafom $G_r \setminus \{i,j\}$ proti modelu s grafom G_r.

   - $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(r)}, \widehat{\boldsymbol{D}}^{(r)} \ldots$ maximálne vierohodné odhady v G_r;
   - $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(r)}_{ij}, \widehat{\boldsymbol{D}}^{(r)}_{ij} \ldots$ maximálne vierohodné odhady v $G_r \setminus \{i,j\}$.

Devianciu spočítame podľa vzorca (1.3) z lemmatu 1.3.5, to jest

$$dev_{ij}^* = -N \cdot \left\{ tr[\boldsymbol{S} \cdot (\widehat{\boldsymbol{D}}^{(r)} - \widehat{\boldsymbol{D}}_{ij}^{(r)}) + \ln\det(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(r)} \cdot \widehat{\boldsymbol{D}}_{ij}^{(r)})] \right\}.$$

(b) Vybereme najmenšiu nevýznamnú dev_{ij}^*, príslušnú hranu $\{i, j\}$ vylúčime z G_r a dostávame nový graf $G_{r+1} = G_r \setminus \{i, j\}$ s odhadmi $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(r+1)}$ a $\widehat{\boldsymbol{D}}^{(r+1)}$.

(c) Pokiaľ sú všetky dev_{ij}^* významné, výsledkom selekcie je model s grafom G_r.

1.5 Spracovanie dát

Pre demonštráciu popísaných postupov vyšetrovania štruktúry podmienenej nezávislosti v dátach sme vybrali mesačné priemerné hodnoty devizových kurzov českej koruny (CZK) voči 21 menám od 1.1.2005 do 31.12.2010, ktoré sú uvedené v nasledujúcej tabuľke pod kódmi, ktoré používa ČNB (zdroj [12]):

Kód meny	**Názov meny**
AUD	Australský dolar
BGN	Bulharský lev
CAD	Kanadský dolar
CHF	Švajčiarský frank
DKK	Dánska koruna
EEK	Estónska koruna
EUR	Euro
GBP	Anglická libra
HKD	Hongkongský dolar
HRK	Chorvatská kuna
LTL	Litovský litas
LVL	Lotyšský lat
NOK	Nórska koruna
NZD	Novozélandský dolar
PLN	Poľský zloty

Kód meny	Názov meny
SEK	Švédska koruna
SGD	Singapúrsky dolar
TRY	Turecká libra
USD	Americký dolar
XDR	Menová jednotka pre medzinárodný poštový styk
ZAR	Juhoafrický rant

Skôr ako prejdeme k aplikácii metód pre selekciu grafických modelov na vybrané mesačné priemerné hodnoty devizových kurzov mien, je potrebné overiť predpoklady požadované pre použitie daných modelov a to **nezávislosť** a **normalitu**. Dáta boli transformované na tzv. logaritmické výnosy

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln P_t - \ln P_{t-1},$$

kde

P_t je hodnota menového kurzu na konci mesiaca t,

P_{t-1} je hodnota menového kurzu na konci mesiaca $t-1$.

1.5.1 Overenie predpokladov

Na overenie nezávislosti logaritmických výnosov použijeme *test založený na znamienkách diferencií* uvedený v [2]. Najskôr z daného radu, až na jednu, vyškrtáme rovnaké susedné hodnoty. Označíme:

n... počet pozorovaní testovaného radu,

k... počet kladných diferencií v tomto rade (počet bodov, v ktorých daný rad rastie).

Potom za platnosti hypotézy nezávislosti platí

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{n-1}{2}, \\ Var(k) &= \frac{n+1}{12} \end{aligned}$$

a k má asymptoticky normálne rozdelenie. Na hladine α zamietame hypotézu, že dáta su realizáciami nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín, ak platí

$$\left| \frac{k - \frac{n-1}{2}}{\sqrt{\frac{n+1}{12}}} \right| \geq u_{1-\alpha/2},$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ označuje $(1-\alpha/2) \cdot 100$ percentný kvantil normovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$.

My však použijeme kritérium založené na p-hodnote, tj. na najmenšej hladine, na ktorej daný test zamieta nulovú hypotézu. P-hodnotu pre náš test spočítame následovne:

$$\text{p-hodnota} = 2\left(1 - \Phi\left(\left| \frac{k - \frac{n-1}{2}}{\sqrt{\frac{n+1}{12}}} \right|\right)\right),$$

kde Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$.

Hypotézu nezávislosti zamietame na hladine α, ak p-hodnota $\leq \alpha$.

Test sme realizovali v programe Mathematica 7.

V nasledujúcej tabuľke vidíme výsledky testu nezávislosti.

Kód meny	**p-hodnota testu znamienok diferencií**
AUD	0,414
BGN	0,041
CAD	0,414
CHF	0,683
DKK	0,221
EEK	0,221
EUR	0,041
GBP	0,102
HKD	0,041
HRK	0,414
LTL	0,041
LVL	0,041
NOK	0,102
NZD	0,414

Kód meny	p-hodnota testu znamienok diferencií
PLN	0,683
SEK	0,102
SGD	1,000
TRY	0,414
USD	0,041
XDR	0,221
ZAR	0,683

Z výsledku testu vidíme, že nezávislosť na hladine $\alpha = 0,05$ nezamietame u týchto mien: AUD, CAD, CHF, DKK, EEK, GBP, HRK, NOK, NZD, PLN, SEK, SGD, TRY, XDR, ZAR. Na hladine $\alpha = 0,04$ by sme nezamietali nezávislosť u všetkých mien.

Na overenie normality logaritmických výnosov sme aplikovali program NCSS 2007, ktorý používa niekoľko testov (Shapiro-Wilk, Anderson-Darling, Martinez-Iglewicz, Kolmogorov-Smirnov, D'Agostino Skewness, D'Agostino Kurtosis, D'Agostino Omnibus).

Na hladine $\alpha = 0,05$ všetky testy použité v NCSS 2007 na testovanie normality nezamietli normalitu pri týchto menách: AUD, CAD, GBP, HRK, NZD, PLN, SGD (Histogramy, viď príloha). Pri mene EUR nezamietli normalitu len dva testy: D'Agostino Skewness a D'Agostino Kurtosis a pri mene USD nezamietli normalitu štyri testy: Martinez-Iglewicz, Kolmogorov-Smirnov, D'Agostino Kurtosis a D'Agostino Omnibus.

Zhrnutie

Testom nezávislosti aj všetkými testami normality na hladine $\alpha = 0,05$ prešli tieto meny: AUD, CAD, GBP, HRK, NZD, PLN, SGD. U týchto menových kurzov vyšetríme štruktúru podmienených nezávislostí pomocou grafického modelu vybraného selekčným algoritmom.

1.5.2 Aplikácia selekčného algoritmu

Popis je možné nájsť v kapitole 1.4.

Vrátime sa k naším 7 priemerným hodnotám devizových kurzov mien a ich logaritmickým výnosom, ktoré spĺňajú nezávislosť aj normalitu:

Označenie	**Kód meny**	**Názov meny**
1	AUD	Australský dolar
2	CAD	Kanadský dolar
3	GBP	Anglická libra
4	HRK	Chorvatská kuna
5	NZD	Novozélandský dolar
6	PLN	Poľský zloty
7	SGD	Singapúrsky dolar

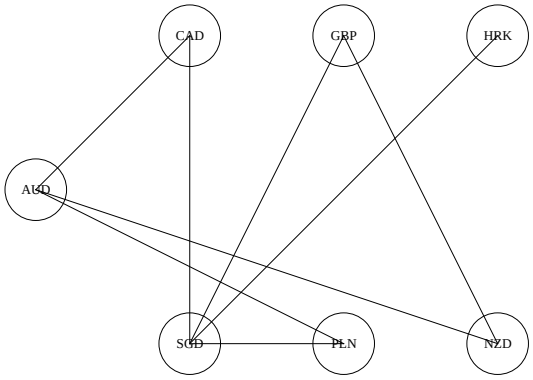
Úvodné informácie o závislostnej štruktúre nám poskytne korelačná matica logaritmických výnosov

$$\begin{array}{c} \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0.704694 & 1 & & & & & \\ 0.500172 & 0.702222 & 1 & & & & \\ 0.494753 & 0.699149 & 0.590378 & 1 & & & \\ 0.756339 & 0.654984 & 0.595973 & 0.458199 & 1 & & \\ 0.328704 & 0.158354 & 0.037529 & -0.000020 & 0.241908 & 1 & \\ 0.496451 & 0.811865 & 0.703127 & -0.086916 & 0.559805 & -0.083488 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

a matica parciálnych korelačných koeficientov logaritmických výnosov

$$\begin{array}{c} \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1. & & & & & & \\ 0.399445 & -1. & & & & & \\ -0.088821 & 0.210898 & -1. & & & & \\ 0.187011 & 0.107821 & 0.067779 & -1. & & & \\ 0.555050 & -0.028784 & 0.256185 & -0.120725 & -1. & & \\ 0.191224 & 0.197148 & -0.018797 & -0.147492 & 0.076929 & -1. & \\ -0.218341 & 0.523135 & 0.206475 & 0.430603 & 0.176115 & -0.225623 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$

z ktorých je zrejmá nezanedbateľná lineárna závislosť medzi niektorými dvojicami logaritmických výnosov menových kurzov. Po aplikácii Backward algoritmu so stop pravidlom založeným na deviancii vynechanej hrany dostávame nasledujúci graf



Vo výslednom grafe je vynechaných 13 hrán, a má celkovú devianciu 17,0837 (viď vzorec (1.1)) a p-hodnota testu vhodnosti modelu pomocou deviancie je 0,195506. Prácu algoritmu vidíme v nasledujúcej matici (vynechané hrany medzi vrcholmi reprezentujúcimi premenné X_i a X_j sú označené v i-tom riadku a j-tom stĺpci záporným znamienkom a číslom kroku, v ktorom boli vynechané, existujúce hrany sú označené číslom 1):

$$
\begin{array}{c}
 \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & \\
-11 & -13 & 0 & & & & \\
-10 & -6 & -4 & 0 & & & \\
1 & -2 & 1 & -5 & 0 & & \\
1 & -12 & -1 & -8 & -3 & 0 & \\
-9 & 1 & 1 & 1 & -7 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Z grafu je vidieť nasledujúce podmienené nezávislosti medzi logaritmickými výnosmi priemerných hodnôt devizových kurzov mien pri pevných hodnotách zvyšných mien:

AUD$\perp$GBP

AUD$\perp$HRK

AUD$\perp$SGD

CAD$\perp$GBP

CAD$\perp$HRK

CAD$\perp$NZD

$$\text{CAD}\perp\text{PLN}$$
$$\text{GBP}\perp\text{HRK}$$
$$\text{GBP}\perp\text{PLN}$$
$$\text{HRK}\perp\text{NZD}$$
$$\text{HRK}\perp\text{PLN}$$
$$\text{NZD}\perp\text{PLN}$$
$$\text{NZD}\perp\text{SGD}$$

Výsledky sú dosť prekvapujúce, pretože sa očakávala väčšia previazanosť medzi jednotlivými menami. Najvačšiu previazanosť zaznamenala mena SGD (singapúrsky dolár) a to s menami CAD, GBP, HRK, PLN. Naopak meny CAD, GBP, PLN a NZD sú previazané iba s dvoma menami. Závislosť medzi menami GBP a NZD, NZD a AUD, AUD a CAD, CAD a SGD , SGD a GBP sa dala očakávať, keďže krajiny Singapúr, Veľká Británia, Kanada, Nový Zéland a Austrália sú členmi spoločenstva Commonwealth.

Ak by sme testovanie robili na hladine $\alpha = 0,08$, ukázala by sa aj očakávaná závislosť medzi CAD a GBP a pri testovaní na hladine $\alpha = 0,15$ dokonca závilosť medzi AUD a GBP.

Výsledky môžu byť čiastočne ovplyvnené tým, že do numerickej štúdie neboli zaradené globálne dôležité meny, najmä USD a EUR, ktoré môžu mať vplyv na chovanie kurzov ostatných svetových mien.

2. Vektorové ARMA modely

2.1 Základné pojmy

Budeme uvažovať k-rozmerný časový rad $\boldsymbol{X}_t = (X_{1t}, \ldots, X_{kt})^T$ s časovým indexom t.

Definícia 2.1.1. Časový rad $\boldsymbol{X}_t$ je *slabo stacionárny*, ak jeho prvé aj druhé momenty sú invariantné voči posunutiu v čase.

Poznámka. Ak nebude uvedené inak, budeme predpokládať slabú stacionaritu mnohorozmerných časových radov.

Pre slabo stacionárny časový rad $\boldsymbol{X}_t$ si označíme jeho vektor *stredných hodnôt* a *varianční maticu* ako

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= E(\boldsymbol{X}_t), \\ \boldsymbol{\Gamma}_0 &= E\left[(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu})^T\right], \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\mu}$ je k-dimenzionálny vektor stredných hodnôt zložiek radu $\mathbf{X}_t$ a variančná matica $\boldsymbol{\Gamma}_0$ má rozmery $k \times k$.

Poznámka. i-tý diagonálny prvok matice $\boldsymbol{\Gamma}_0$ je rozptyl X_{it}, kým (i,j)-tý prvok $\boldsymbol{\Gamma}_0$ je kovarianciou medzi X_{it} a X_{jt}. Vektor $\boldsymbol{\mu}$ skrátene značí $(\mu_1, \ldots, \mu_k)^T$ a matica $\boldsymbol{\Gamma}_0$ má prvky $\Gamma_{ij}(0), \quad i,j = 1, \ldots, k$.

2.2 Autokorelačné matice

Definícia 2.2.1. Nech $\boldsymbol{A}$ je $k \times k$ diagonálna matica pozostávajúca zo smerodatných odchýliek X_{it} pre $i = 1, \ldots, k$, tj. $\boldsymbol{A} = diag\left\{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \ldots, \sqrt{\Gamma_{kk}(0)}\right\}$. Potom *autokorelačnú maticu* radu $\boldsymbol{X}_t$ definujeme ako

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Konkrétne pre (i,j)-tý prvok matice $\boldsymbol{\rho}_0$ máme

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(X_{it}, X_{jt})}{std(X_{it})std(X_{jt})},$$

kde, *std* značí smerodatnú odchýlku a $\rho_{ij}(0)$ je korelačným koeficientom medzi X_{it} a X_{jt}.

Poznámka. $\boldsymbol{\rho}_0$ je symetrická matica s jednotkovými digonálnymi prvkami.

Definícia 2.2.2. Pre stacionárne mnohorozmerné časové rady sa definuje *maticová autokovariančná funkcia*

$$\boldsymbol{\Gamma}_l = cov(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{X}_{t-l}) = E\left[(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}_{t-l} - \boldsymbol{\mu})^T\right],\ l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

pričom (i,j)-tý prvok matice $\boldsymbol{\Gamma}_l$ je kovariancia medzi X_{it} a $X_{j,t-l}$.

Poznámka. Maticová autokovariančná funkcia $\boldsymbol{\Gamma}_l$ je funkciou oneskorenia l a nie času t.

Definícia 2.2.3. *Maticová autokorelačná funkcia* je definovaná ako

$$\boldsymbol{\rho}_l = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_l\boldsymbol{A}^{-1},$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matica z definície 2.2.1.

Konkrétne pre (i, j)-tý prvok matice $\boldsymbol{\rho}_l$ máme

$$\rho_{ij}(l) = \frac{\Gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(X_{it}, X_{j,t-l})}{std(X_{it})std(X_{jt})}.$$

Pre $l > 0$ sa dá odvodiť, viď [10],

$$\rho_{ij}(l) \neq \rho_{ji}(l) \text{ pre } i \neq j,$$

teda $\boldsymbol{\rho}_l$ nie je symetrická. Vzhľadom k rovnosti

$$Cov(X_{it}, X_{j,t-l}) = Cov(X_{j,t-l}, X_{it})$$

a za podmienky slabej stacionarity radu $\boldsymbol{X}_t$, tj.

$$Cov(X_{j,t-l}, X_{it}) = Cov(X_{jt}, X_{i,t+l}) = Cov[X_{jt}, X_{i,t-(-l)}]$$

platí, že $\Gamma_{ij}(l) = \Gamma_{ji}(-l)$. Pretože $\Gamma_{ji}(-l)$ je (j,i)-tý prvok matice $\boldsymbol{\Gamma}_{-l}$ a rovnosť nastáva pre $1 \leq i,\ j \leq k$, dostávame $\boldsymbol{\Gamma}_l = \boldsymbol{\Gamma}_{-l}^T$ a $\boldsymbol{\rho}_l = \boldsymbol{\rho}_{-l}^T$.

2.3 Lineárna závislosť

Uvažujme zložky X_{it} a X_{jt} mnohorozmerného časového radu $\boldsymbol{X}_t$. Potom *vzájomná korelačná funkcia* $\rho_{ij}(l)$ popisuje typ lineárnej závislosti medzi radmi X_{it} a X_{jt} v čase, napr. jak uvádza [2]:

1. ak $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(l) = 0$ pre všetky $l \geq 0$, potom časové rady X_{it} a X_{jt} sú *navzájom nekorelované*;

2. ak $\rho_{ij}(0) = 0$, potom X_{it} a X_{jt} sú *súčasne nekorelované*;

3. ak $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(l) = 0$ pre všetky $l > 0$, potom X_{it} a X_{jt} sú *nesúčasne nekorelované*;

4. ak $\rho_{ij}(l) = 0$ pre všetky $l > 0$, ale $\rho_{ji}(v) \neq 0$ pre nejaké $v > 0$, potom existuje *jednosmerná závislosť* X_{jt} na X_{it} (tj. X_{it} nezávisí na žiadnej minulej hodnote X_{jt}, ale X_{jt} závisí na nejakej minulej hodnote X_{it});

5. ak $\rho_{ij}(l) \neq 0$ pre nejaké $l > 0$ a $\rho_{ji}(v) \neq 0$ pre nejaké $v > 0$, potom existuje *spätná väzba* medzi X_{it} a X_{jt}.

Definícia 2.3.1. Postupnosť $\boldsymbol{a}_t = (a_{1t}, \ldots, a_{kt})^T$ nekorelovaných náhodných vektorov s nulovou strednou hodnotou a pozitívne definitnou variančnou maticou sa nazýva *mnohorozmerný biely šum.*

Poznámka. Zložky a_{it}, a_{jt} bieleho šumu $\boldsymbol{a}_t$ sú nesúčasne nekorelované, ale nemusia byť súčasne nekorelované.

2.4 Odhad maticovej autokorelačnej funkcie

Uvažujme pozorovaný k-rozmerný časový rad $\boldsymbol{X}_t = (X_{1t}, \ldots, X_{kt})^T$, $t = 1, \ldots, N$, potom maticovú autokovariančnú funkciu odhadneme ako

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l = \frac{1}{N} \sum_{t=l+1}^{N} (\boldsymbol{X}_t - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_{t-l} - \overline{\boldsymbol{X}})^T, \ l \geq 0, \tag{2.1}$$

kde $\overline{\boldsymbol{X}} = \sum_{t=1}^{N} \boldsymbol{X}_t / N$ je vektor výberových priemerov.

Maticovú autokorelačnú funkciu $\boldsymbol{\rho}_l$ odhadneme ako

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}, l > 0, \tag{2.2}$$

kde $\widehat{\boldsymbol{A}}$ je $k \times k$ rozmerná diagonálna matica pozostávajúca z výberových smerodatných odchyliek X_{it} pre $i = 1, \ldots, k$.

Poznámka. Asymptotické vlastnosti výberovej maticovej autokorelačnej funkcie $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l$ sa vyšetrujú za rôznych predpokladov viď [3]. Odhad je konzistentný, ale vyjde skreslený pri konečnom výbere.

2.4.1 Test nulovosti prvkov korelačnej matice

K testovaniu nulovosti prvkov $\rho_{ij}(l)$ výberovej korelačnej matice $\boldsymbol{\rho}_l$ využijeme asymptotické vlastnosti $\widehat{\rho}_{ij}(l)$. Pre stacionárne procesy platí, že $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l$ je konzistentný odhad, ktorý má asymptoticky normálne rozdelenie (viď [4]).

Testujeme nulovú hypotézu, že $\rho_{ij}(l) = 0$ pre $|l| > q$ pre zvolené q proti alternatíve $\rho_{ij}(l) \neq 0$ pre nejaké $|l| > q$. Potom vzhľadom k asymptoticky normálnemu rozdeleniu $\widehat{\rho}_{ij}(l)$ zamietame nulovú hypotézu na hladine α, pokiaľ

$$\frac{|\widehat{\rho}_{ij}(l)|}{\widehat{\sigma}_{ij}(l)} > u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

pre nejaké l, kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ značí $(1-\alpha/2)\,.100$ percentný kvantil normovaného normálneho rozdelenia a

$$\widehat{\sigma}^2_{ij}(l) = Var[\widehat{\rho}_{ij}(l)] \cong \frac{1}{N-l}\left[1 + 2\sum_{s=1}^{q}\rho_{ii}(s)\rho_{jj}(s)\right], \ |l| > q. \tag{2.3}$$

Ak $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{a}_t$ je biely šum, platí

$$Cov[\widehat{\rho}_{ij}(l), \widehat{\rho}_{ij}(l+s)] \cong \frac{1}{N-l}$$

a

$$Var[\widehat{\rho}_{ij}(l)] \cong \frac{1}{N-l}.$$

Pre veľké výbery sa $(N-l)$ často nahradzuje N.

2.5 Mnohorozmerný Portmanteau test

Budeme testovať autokorelačnú štruktúru radu $\boldsymbol{X}_t$. Uvažujme nulovú hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\rho}_1 = \ldots = \boldsymbol{\rho}_m = \mathbf{0}$ a alternatívu $H_1 : \boldsymbol{\rho}_i \neq \mathbf{0}$ pre nejaké $i \in 1, \ldots, m$, kde $\mathbf{0}$

je matica núl.

Testová štatistika uvedená v [10] má tvar

$$Q_k(m) = N^2 \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{N-l} tr(\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l^T \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1} \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1}),$$

kde N je dĺžka časového radu, k je rozmer $\boldsymbol{X}_t$ a $tr(\boldsymbol{A})$ je stopa matice $\boldsymbol{A}$. Za platnosti nulovej hypotézy a ďalších predpokladov má $Q_k(m)$ asymptoticky chí-kvadrát rozdelenie s k^2m stupňami voľnosti. H_0 zamietame na hladine α, pokiaľ $Q_k(m) > \chi^2_{k^2m}(1-\alpha)$, kde $\chi^2_{k^2m}(1-\alpha)$ je $(1-\alpha).100$ percentný kvantil zmieneného chí-kvadrát rozdelenia.

2.6 Vektorové autoregresné modely VAR

2.6.1 Model VAR(1)

Mnohorozmerný časový rad $\boldsymbol{X}_t$ je VAR proces rádu 1 (značíme VAR(1)), ak sa dá zapísať v tvare

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t, \tag{2.4}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_0$ je k-rozmerný vektor, $\boldsymbol{\Phi}$ je $k \times k$ rozmerná matica, a $\boldsymbol{a}_t$ je k-rozmerný biely šum s variančnou maticou $\boldsymbol{\Sigma}$. V literatúre sa často predpokladá, že $\boldsymbol{a}_t$ má mnohorozmerné normálne rozdelenie.

Uvažujme dvojrozmerný prípad tj. $k = 2$, $\boldsymbol{X}_t = (X_{1t}, X_{2t})^T$ a $\boldsymbol{a}_t = (a_{1t}, a_{2t})^T$. VAR(1) model pozostáva z dvoch rovníc s explicitným vyjadrením

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \phi_{10} + \Phi_{11}X_{1,t-1} + \Phi_{12}X_{2,t-1} + a_{1t} \\ X_{2t} &= \phi_{20} + \Phi_{21}X_{1,t-1} + \Phi_{22}X_{2,t-1} + a_{2t}, \end{aligned}$$

kde Φ_{ij} je (i,j)-tý prvok $\boldsymbol{\Phi}$ a ϕ_{i0} je i-tý prvok $\boldsymbol{\phi}_0$.

Z vyjadrenia je vidieť, že parametre modelu súvisia so závislosťou medzi radmi X_{1t} a X_{2t} (viď podkapitolu (2.3)).

Ak je variančná matica $\boldsymbol{\Sigma}$ bieleho šumu $\boldsymbol{a}_t$ diagonálna, potom platí:

- ak $\Phi_{12} = \Phi_{21} = 0$, potom časové rady X_{1t} a X_{2t} sú *nesúčasne nekorelované*;
- ak $\Phi_{12} = 0$ a $\Phi_{21} \neq 0$, potom existuje *jednosmerná závislosť* X_{2t} na X_{1t};

- ak $\Phi_{12} \neq 0$ a $\Phi_{21} \neq 0$, potom existuje *spätná väzba* medzi X_{1t} a X_{2t}.

Zápisu (2.4) hovoríme *redukovaný tvar* modelu VAR. Redukovaný tvar popisuje súčasnú koreláciu medzi X_{it} a X_{jt} len čiastočne prostredníctvom prvku σ_{ij} variančnej matice bieleho šumu $\boldsymbol{\Sigma}$.

Niekedy je však nutné súčasný vzťah medzi X_{it} a X_{jt} explicitne vyjadriť. V takom prípade sa prejde k tzv. *štrukturálnemu tvaru* modelu VAR pomocou *Choleského rozkladu* z teórie matic následovne.

Keďže $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitívne definitná, existuje dolná trojuholníková matica s jednotkami na diagonále $\boldsymbol{L}$ a diagonálna matica $\boldsymbol{G}$ taká, že $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}^T$, $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}^T)^{-1} = \boldsymbol{G}$.

Definujme $\boldsymbol{b}_t = (b_{1t}, \ldots, b_{kt})^T = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_t$. Potom

$E(\boldsymbol{b}_t) = \boldsymbol{L}^{-1}E(\boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{0}$, $Var(\boldsymbol{b}_t) = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}^{-1})^T = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}^T)^{-1} = \boldsymbol{G}$,

kde $\boldsymbol{G}$ je diagonálna matica, prvky $\boldsymbol{b}_t$ sú súčasne nekorelované. Vynásobením zľava maticou $\boldsymbol{L}^{-1}$ v modely (2.4), dostávame

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{L}^{-1}a_t = \boldsymbol{\phi}_0^* + \boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{b}_t, \tag{2.5}$$

kde $\boldsymbol{\phi}_0^* = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\phi}_0$ je k-rozmerný vektor a $\boldsymbol{\Phi}^* = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ je $k \times k$ rozmerná matica. Ak k-tý riadok matice $\boldsymbol{L}^{-1}$ označíme ako $(w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{k,k-1}, 1)$, potom k-tá rovnica modelu (2.5) má tvar

$$X_{kt} + \sum_{i=1}^{k-1} w_{ki}X_{it} = \phi_{k,0}^* + \sum_{i=1}^{k} \Phi_{ki}^* X_{i,t-1} + b_{kt}, \tag{2.6}$$

kde $\phi_{k,0}^*$ je k-tý prvok $\boldsymbol{\phi}_0^*$ a Φ_{ki}^* je (k,i)-tý prvok $\boldsymbol{\Phi}^*$. Tento štrukturálny vzťah explicitne prezentuje súčasnú (tj, v čase t) lineárnu závislosť X_{kt} na X_{it} pre $i = 1, \ldots, k-1$ (pretože b_{kt} je nekorelované s X_{it} vzhľadom k tomu, že b_{kt} je nekorelované s b_{it}). Pretože zložky vektoru $\boldsymbol{X}_t$ môžeme ľubovoľne prerovnať, dostaneme rovnaký záver ako pre X_{kt} v štrukturálnom tvare (2.6) aj pre ľubovoľnú inú zložku X_{jt} vektoru $\boldsymbol{X}_t$.

Poznámka. V praxi sa preferuje redukovaný tvar modelu VAR a to hlavne kvôli 2 dôvodom:

- je relatívne ľahko odhadnuteľný;
- väzby na súčasné hodnoty ďalších premenných znemožňujú v štrukturálnom tvare konštrukciu predpovedí.

2.6.2 Podmienka stacionarity a momenty pre VAR(1) model

Predpokladajme, že VAR(1) model (2.4) je slabo stacionárny, potom dostávame

$$E(\boldsymbol{X}_t) = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi} E(\boldsymbol{X}_{t-1}).$$

Pretože $E(\boldsymbol{X}_t)$ je invariantná v čase, dostávame

$$\boldsymbol{\mu} \equiv E(\boldsymbol{X}_t) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\phi}_0$$

za predpokladu, že matica $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}$ je nesingulárna, kde $\boldsymbol{I}$ je $k \times k$-rozmerná identická matica.

Použitím $\boldsymbol{\phi}_0 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{\mu}$, model (2.4) môžeme prepísať ako

$$(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{a}_t.$$

Nech $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu}$ je centrovaný časový rad. Potom VAR(1) model má tvar

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \boldsymbol{\Phi} \widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t. \tag{2.7}$$

Tento tvar nám poslúži na odvodenie vlastností VAR(1) modelu. Opakovanou substitúciou môžeme prepísať (2.7) ako

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{a}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2 \boldsymbol{a}_{t-2} + \boldsymbol{\Phi}^3 \boldsymbol{a}_{t-3} + \cdots . \tag{2.8}$$

Toto vyjadrenie ukazuje mnoho vlastností VAR(1) procesu:

- ak zložky $\boldsymbol{a}_t$ sú navzájom nekorelované, potom $Cov(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{X}_{t-1}) = \boldsymbol{0}$. Teda $\boldsymbol{a}_t$ je nekorelované s $\boldsymbol{X}_{t-l}$ pre všetky $l > 0$. Z toho dôvodu sa označuje $\boldsymbol{a}_t$ aj ako *inovácia* radu v čase t;

- po vynásobení (2.7) výrazom $\boldsymbol{a}_t^T$ sprava a za predpokladu, že zložky $\boldsymbol{a}_t$ sú vzájomne nekorelované, dostávame po aplikácií strednej hodnoty na obe strany rovnice $Cov(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$;

- $\boldsymbol{X}_t$ závisí na inovácii $\boldsymbol{a}_{t-j}$ pomocou matice koeficientov $\boldsymbol{\Phi}^j$. Aby táto závislosť dávala zmysel, je nutné, aby $\boldsymbol{\Phi}^j$ konvergovala k nule pri $j \to \infty$ tzn. všetkých k vlastných čísel matice $\boldsymbol{\Phi}$ musí byť v absolútnej hodnote

menších ako 1. Požiadavka, aby vlastné čísla matice $\mathbf{\Phi}$ boli v absolútnej hodnote menšie ako 1 je nutná a postačujúca podmienka pre slabú stacionaritu $\boldsymbol{X}_t$ za predpokladu, že variančná matica $\boldsymbol{a}_t$ existuje;

- použitím vyjadrenia (2.8) dostávame

$$Var(\boldsymbol{X}_t) = \mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Phi\Sigma\Phi}^T + \mathbf{\Phi^2\Sigma}(\mathbf{\Phi}^2)^T + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Phi^i\Sigma}(\mathbf{\Phi}^i)^T, \quad (2.9)$$

kde $\mathbf{\Phi^0} = \boldsymbol{I}$.

Ak prenásobime rovnicu (2.7) výrazom $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-l}^T$, $l > 0$ potom za predpokladu, že $Cov(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{X}_{t-j}) = E(\boldsymbol{a}_t\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-j}^T) = \mathbf{0}$ pre $j > 0$ dostávame

$$E(\widetilde{\boldsymbol{X}}_t\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-l}^T) = \mathbf{\Phi}E(\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1}\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-l})^T. \quad (2.10)$$

Teda

$$\mathbf{\Gamma}_l = \mathbf{\Phi\Gamma}_{l-1} \quad (2.11)$$

pre $l > 0$, kde $\mathbf{\Gamma}_l$ je maticová autokovariančná funkcia radu $\boldsymbol{X}_t$. Opakovanou substitúciou z (2.11) dostaneme

$$\mathbf{\Gamma}_l = \mathbf{\Phi}^l\mathbf{\Gamma}_0, \quad l > 0.$$

2.6.3 Model VAR(p)

Všetky predchádzajúce vzťahy je možné zobecniť pre model VAR(p)

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1\boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \mathbf{\Phi}_p\boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t, \quad p > 0, \quad (2.12)$$

kde $\boldsymbol{\phi}_0$ je k-rozmerný vektor a $\mathbf{\Phi}_j$ je $k \times k$ matica. Použitím *operátora spätného posunu* B, VAR(p) model môžeme zapísať ako

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 B - \cdots - \mathbf{\Phi}_p B^p)\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a}_t,$$

kde $\boldsymbol{I}$ je $k \times k$ identická matica. Rovnica sa dá napísať v skrátenom tvare

$$\mathbf{\Phi}(B)\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a}_t,$$

kde $\mathbf{\Phi}(B) = \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 B - \cdots - \mathbf{\Phi}_p B^p$ je maticový polynóm. Ak $\boldsymbol{X}_t$ je slabo stacionárny, potom platí

$$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X}_t) = (\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 - \cdots - \mathbf{\Phi}_p)^{-1}\boldsymbol{\phi}_0$$

za predpokladu, že inverzia existuje.
Nech $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu}$, potom VAR($p$) model bude v tvare

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \boldsymbol{\Phi}_1 \widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t. \tag{2.13}$$

Použitím (2.13) a rovnakých techník ako u VAR(1) modelu dostaneme

- $Cov(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$;
- $Cov(\boldsymbol{X}_{t-l}, \boldsymbol{a}_t) = \mathbf{0}$ pre $l > 0$;
- $\boldsymbol{\Gamma}_l = \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_{l-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{\Gamma}_{l-p}$ pre $l > 0$.

Posledná vlastnosť sa nazýva *momentové rovnice* VAR(p) modelu. Je to mnohorozmerná verzia Yule-Walkerových rovníc jednorozmerného AR(p) modelu (viď [2]).
Jednoduchý prístup k pochopeniu vlastností VAR(p) modelu popísaného rovnicou (2.12) je využitie výsledkov VAR(1) modelu popísaného rovnicou (2.4). To sa docieli transformáciou VAR(p) modelu radu $\boldsymbol{X}_t$ na kp-rozmerný VAR(1) model.

Nech $\boldsymbol{Y}_t = (\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-p+1}^T, \widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-p+2}^T, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{X}}_t^T)^T$ a $\boldsymbol{b}_t = (\underbrace{\mathbf{0}^T, \ldots, \mathbf{0}^T}_{(p-1) \text{ krát}}, \boldsymbol{a}_t^T)^T$ sú dva kp-rozmerné procesy, kde $\mathbf{0}^T$ je k-rozmerný vektor núl. Stredná hodnota $\boldsymbol{b}_t$ je nulová a kovariančná matica $\boldsymbol{b}_t$ je $kp \times kp$ rozmerná matica s nulami všade okrem pravého dolného rohu, v ktorom je $\boldsymbol{\Sigma}$. VAR(p) model pre $\boldsymbol{X}_t$ môžeme potom zapísať v tvare

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\Phi}^* \boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{b}_t, \tag{2.14}$$

kde $\boldsymbol{\Phi}^*$ je $kp \times kp$ rozmerná matica v tvare

$$\boldsymbol{\Phi}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\Phi}_p & \boldsymbol{\Phi}_{p-1} & \boldsymbol{\Phi}_{p-2} & \boldsymbol{\Phi}_{p-3} & \ldots & \boldsymbol{\Phi}_1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{0}$ a $\mathbf{I}$ sú $k \times k$ nulová a identická matica.

Rovnica (2.14) je rovnicou VAR(1) modelu pre $\boldsymbol{Y}_t$, ktorý obsahuje $\boldsymbol{X}_t$ v jeho posledných k komponentoch.

Výsledky VAR(1) modelu popísaného v predchádzajúcej podkapitole sa môžu použiť na odvodenie vlastností VAR(p) modelu popísaného rovnicou (2.14). Napríklad, $\boldsymbol{Y}_t$ je slabo stacionárny práve vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{X}_t$ je slabo stacionárny. Teda nutná a postačujúca podmienka slabej stacionarity pre VAR(p) modely je, aby všetky vlastné čísla matice $\boldsymbol{\Phi}^*$ boli v absolútnej hodnote menšie ako 1.

Obzvlášť veľký význam vo finančných časových radoch má štruktúra matíc koeficientov $\boldsymbol{\Phi}_l$, $l = 1, \ldots, p$. Napríklad, ak (i, j)-tý prvok $\Phi_{ij}(l)$ matice $\boldsymbol{\Phi}_l$ je nula pre všetky l, potom X_{it} nezávisí formou VAR(p) modelu na minulých hodnotách $X_{j,t-1}, \ldots, X_{j,t-p}$.

2.7 Výstavba VAR(p) modelu

2.7.1 Identifikácia rádu modelu

Budeme používať iteratívne procedúry na určenie rádu a odhadu modelu a na kontrolu zostaveného modelu pre daný časový rad. Uvedený postup je popísaný v [9].

Uvažujme nasledujúce VAR modely:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_t &= \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t \\
\boldsymbol{X}_t &= \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \boldsymbol{X}_{t-2} + \boldsymbol{a}_t \\
\vdots &= \vdots \\
\boldsymbol{X}_t &= \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \boldsymbol{X}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{X}_{t-i} + \boldsymbol{a}_t \qquad (2.15) \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Parametre týchto modelov môžu byť odhadnuté metódou najmenších štvorcov (OLS) na základe pozorovaní k-rozmerného radu $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N$. Toto odhadovanie sa v mnohorozmernej lineárnej regresii nazýva *mnohorozmerný lineárny regresný odhad*.

Pre i-tú rovnicu (2.15) nech $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_j^{(i)}$ je OLS odhad $\boldsymbol{\Phi}_j$ a $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_0^{(i)}$ je odhad $\boldsymbol{\phi}_0$, kde horný index (i) sa použije na označenie toho, že odhady sú pre VAR(i) model.

Potom reziduum je

$$\widehat{\boldsymbol{a}}_t^{(i)} = \boldsymbol{X}_t - \widehat{\boldsymbol{\phi}}_0^{(i)} - \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_1^{(i)} \boldsymbol{X}_{t-1} - \cdots - \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_i^{(i)} \boldsymbol{X}_{t-i}.$$

Pre $i = 0$ položíme $\widehat{\boldsymbol{a}}_t^{(0)} = \boldsymbol{X}_t - \overline{\boldsymbol{X}}$.

Odhad variančnej matice reziduí je

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_i = \frac{1}{N - 2i - 1} \sum_{t=i+1}^{N} \widehat{\boldsymbol{a}}_t^{(i)} (\widehat{\boldsymbol{a}}_t^{(i)})^T, \quad i \geq 0. \tag{2.16}$$

Na určenie rádu modelu p testujeme hypotézu $H_0^{(i)} : \boldsymbol{\Phi}_i = \boldsymbol{0}$ proti alternatíve $H_1^{(i)} : \boldsymbol{\Phi}_i \neq \boldsymbol{0}$ postupne pre $l = 1, 2, \ldots$. Napríklad použitím prvej rovnice v (2.15) testujeme hypotézu $H_0^{(1)} : \boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{0}$ proti alternatíve $H_1^{(1)} : \boldsymbol{\Phi}_1 \neq \boldsymbol{0}$ (model VAR(1)). Testová štatistika je

$$M(1) = -\left(N - k - 2\frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{\det \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_1}{\det \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0}\right),$$

kde $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_1$ a $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0$ značíme podľa (2.16). Za podmienok regularity, testová štatistika $M(1)$ ma asymptoticky chí-kvadrát rozdelenie o k^2 stupňoch voľnosti.

Zovšeobecnenie môžeme robiť použitím i-tej a $(i-1)$-vej rovnice v (2.15) na testovanie $H_0^{(i)} : \boldsymbol{\Phi}_i = \boldsymbol{0}$ proti $H_1^{(i)} : \boldsymbol{\Phi}_i \neq \boldsymbol{0}$, tzn. testovanie VAR$(i-1)$ modelu proti VAR(i) modelu. Testová štatistika bude

$$M(i) = -\left(N - k - i - \frac{3}{2}\right) \ln \left(\frac{\det \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_i}{\det \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{i-1}}\right). \tag{2.17}$$

$M(i)$ má asymptoticky chí-kvadrát rozdelenie o k^2 stupnoch voľnosti. Ak je teda $M(i) > \chi^2_{k^2(1-\alpha)}$, zamietame $H_0^{(i)}$ v prospech $H_1^{(i)}$ na hladine α.

Ďalšou možnosťou na určenie rádu p je použitie Akaikeovho informačného kritéria (AIC) (viď [5]). Uvažujme i-tú rovnicu v (2.15). Odhadneme model podmienenou metódou maximálnej vierohodnosti (ML) za predpokladu, že biely šum $\boldsymbol{a}_t$ má mnohorozmerné normálne rozdelenie $N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Pre VAR modely, OLS odhady $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_0$ a $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_j$ sú ekvivalentné ML odhadom. Avšak sú rozdiely medzi odhadmi variančnej matice $\boldsymbol{\Sigma}$.

ML odhad $\boldsymbol{\Sigma}$ je

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i = \frac{1}{N} \sum_{t=i+1}^{N} \widehat{\boldsymbol{a}}_t^{(i)} [\widehat{\boldsymbol{a}}_t^{(i)}]^T. \tag{2.18}$$

AIC kritérium VAR(i) modelu za podmienky normality bieleho šumu je definované ako

$$AIC(i) = \ln\left(\det \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i\right) + \frac{2k^2 i}{N}. \tag{2.19}$$

Pre pozorovaný časový rad sa zvolí rád p u VAR modelu taký, aby $AIC(p) = \min_{1 \leq i \leq p_0} AIC(i)$, kde p_0 je vopred definované kladné celé číslo.

2.7.2 Odhadovanie a kontrola modelu

Pre konkrétny VAR model môžeme na odhadovanie parametrov použiť buď metódu najmenších štvorcov alebo podmienenú metódu maximálnej vierohodnosti. Obe metódy sú asymptoticky ekvivalentné. Odhady majú asymptoticky normálne rozdelenie (viď [8]). Odhadnutý model by mal byť potom skontrolovaný. $Q_k(m)$ štatistika z kapitoly 2.5 môže byť aplikovaná na jednotlivé odhadnuté autokorelácie a vzájomné korelácie odhadnutej reziduálnej zložky na overenie predpokladu, že nie je žiadna korelácia medzi odhadnutými reziduami. Pre odhadnutý VAR(p) model má $Q_k(m)$ štatistika reziduí asymptoticky chí-kvadrát rozdelenie o $k^2(m-p)$ stupňov voľnosti.

Na získanie najvhodnejšieho modelu nám slúži tiež *Hannan-Rissanenova procedúra*, ktorá pri hľadaní najvhodnejšieho modelu skúma aj obecnejšie vektorové ARMA modely, ktoré zahŕňajú v sebe jak VAR tak VMA modely. Presný popis vektorových ARMA modelov je možné nájsť v [10]. Spomínaná procedúra pozostáva z nasledujúcich častí:

1. Použitie Levinson-Durbinovho algoritmu (viď [5]) na odhadnutie modelov VAR(i), pre $i = 1, 2, \ldots, k_{max}$ pre naše dáta;

2. Spočítanie AIC hodnôt pre $i = 1, 2, \ldots, k_{max}$ pre odhadnuté modely a výber VAR(k) modelu s najnižšou hodnotou AIC;

3. Spočítanie reziduí odhadnutého VAR(k) modelu;

4. Odhad koeficientov VARMA(p, q) modelu použitím OLS metódy pre $p \leq min(p_{max}, k)$ a $q \leq q_{max}$; odhadnutý šum je daný výrazom

$$\sum_{t=t'+1}^{N} \boldsymbol{a}_t^2/(N-t')$$

kde $t' = max(q+k, p)$;

5. Výber modelu s najnižšou BIC hodnotou danou výrazom $\ln(\det \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^2_{p,q}) + \frac{(p+q)\ln N}{N}$, kde $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^2_{p,q}$ označuje odhad variančnej matice bieleho šumu príslušného VARMA modelu.

Detailnejší popis Hannan-Rissanenovej procedúry je možné nájsť v [5].

Podmienená metóda maximálnej vierohodnosti

Popíšeme tento spôsob odhadu parametrov v modeli VAR(1). Predpokladajme, že $\boldsymbol{X}_0 = \mathbf{0}$. Model (2.4) môžeme prepísať do tvaru $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\phi}_0 - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1}$ a spočítať vektorový biely šum $\boldsymbol{a}_t$ rekurzívne ako

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\phi}_0, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\phi}_0 - \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{X}_1, \quad \ldots$$

Nech $\boldsymbol{a}_t$ má rozdelenie $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Vierohodnostná funkcia bude v tvare

$$L(\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{t=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\left(\det \boldsymbol{\Sigma}\right)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{a}_t\right] \tag{2.20}$$

a logaritmická vierohodnostná funkcia bude v tvare

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Sigma}) &= \ln(L(\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Sigma})) = \\ &= -\frac{kN}{2}\ln 2\pi - \frac{N}{2}\ln\left(\det \boldsymbol{\Sigma}\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N} \boldsymbol{a}_t^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{a}_t \end{aligned} \tag{2.21}$$

Vo VAR modeloch vyšších rádov sa postupuje analogicky. Maximalizácia logaritmickej vierohodnostnej funkcie vedie v optimalizácii k nelineárnemu programovaniu.

2.7.3 Predpovede v modeli

Pre VAR(p) model je predpoveď o jeden krok dopredu od času $t \in \langle p,\ T\rangle$ zostrojená ako

$$\boldsymbol{X}_t(1) = \boldsymbol{\phi}_0 + \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{X}_{t+1-i}$$

vrátane súvisiacou chybou predpovede

$$\boldsymbol{e}_t(1) = \boldsymbol{a}_{t+1} = \boldsymbol{X}_{t+1} - \boldsymbol{X}_t(1).$$

Variačná matica predpovedanej chyby je $\boldsymbol{\Sigma}$.

Pri predpovedi o l krokov dopredu od času t dostaneme

$$\boldsymbol{X}_t(l) = \boldsymbol{\phi}_0 + \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{X}_t(l-i),$$

kde $\boldsymbol{X}_t(l-i) = \boldsymbol{X}_{t+l-i}$ ak $l - i \leq 0$. Chyba predpovede bude potom

$$\boldsymbol{e}_t(l) = \boldsymbol{X}_{t+l} - \boldsymbol{X}_t(l).$$

V praxi sa používajú odhady parametrických matíc $\boldsymbol{\Phi}_i$ a vektoru $\boldsymbol{\phi}_0$.

Ak $\boldsymbol{X}_t$ je slabo stacionárny, potom predpoveď o l krokov dopredu $\boldsymbol{X}_t(l)$ konverguje k vektoru stredných hodnôt $\boldsymbol{\mu}$ pri narastajúcom predpovednom horizonte l.

Ak si to zhrnieme, výstavba VAR modelu zahŕňa 3 kroky

- použitie testovej štatistiky M(i) danej vzorcom (2.17) alebo Akaikeovho informačného kritéria (2.19) na identifikovanie radu p;
- odhad konkrétneho modelu použitím OLS metódy prípadne ML metódy, prípadne spojené identifikačné a odhadové fázy Hannan-Rissanenovho algoritmu;
- kontrola stacionarity odhadnutého modelu (viď kapitola 2.6.2);
- použitie $Q_k(m)$ štatistiky z kapitoly 2.5 na odhadnuté reziduálne zložky kvôli overeniu vhodnosti odhadnutého modelu. Aj ďalšie charakteristiky odhadnutých reziduálnych zložiek ako normalita, podmienená heteroskedasticita alebo odľahlé pozorovania je možné overovať (viď [2]). Ak je odhadnutý model vhodný, môžeme získavať predpovede.

2.8 Vektorové MA modely

2.8.1 VMA(1) a VMA(q)

Na lepšie pochopenie VMA procesov budeme predpokladať dvojrozmerný MA(1) model

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_{t-1} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_{t-1}, \tag{2.22}$$

kde $\boldsymbol{\theta}_0$ je dvojrozmerný vektor a $\boldsymbol{\Theta}$ je 2×2-rozmerná matica s prvkami Θ_{ij}. Tento model môžeme pre jednoduchosť prepísať ako

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \theta_{01} - \Theta_{11}a_{1,t-1} - \Theta_{12}a_{2,t-1} + a_{1t}, \\ X_{2t} &= \theta_{02} - \Theta_{21}a_{1,t-1} - \Theta_{22}a_{2,t-1} + a_{2t}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pre model VMA(1) môžeme klasifikovať závislosti medzi X_{1t} a X_{2t} následovne:

- X_{1t} a X_{2t} sú nesúčasne nekorelované, ak $\Theta_{12} = \Theta_{21} = 0$;
- Ak $\Theta_{12} = 0$ a $\Theta_{21} \neq 0$, potom existuje jednosmerná závislosť X_{2t} na X_{1t}. Opačná jednosmerná závislosť platí, ak $\Theta_{12} \neq 0$ a $\Theta_{21} = 0$;
- Ak $\Theta_{12} \neq 0$ a $\Theta_{21} \neq 0$, potom existuje spätná väzba medzi X_{1t} a X_{2t}.

V dôsledku toho platí, že autokorelácia medzi X_{it} je rovnaká ako medzi a_{it}. Predchadzajúca teória môže byť zobecnená na VMA(q) model.
Obecne vektorový MA model rádu q VMA(q) môžeme zapísať v tvare

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{\Theta}_1\boldsymbol{a}_{t-1} - \cdots - \boldsymbol{\Theta}_q\boldsymbol{a}_{t-q}, \tag{2.24}$$

skrátene $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a}_t$, kde $\boldsymbol{\theta}_0$ je k-rozmerný vektor, $\boldsymbol{\Theta}_i$ je $k \times k$-rozmerná matica a $\boldsymbol{\Theta}(B) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Theta}_1 B - \cdots - \boldsymbol{\Theta}_q B^q$ je maticový polynóm operátora spätného posunutia B. VMA(q) procesy sú slabo stacionárne za podmienky, že pre $\boldsymbol{a}_t$ existuje kovariančná matica $\boldsymbol{\Sigma}$. Z (2.24) pre VMA model plynie, že $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X}_t) = \boldsymbol{\theta}_0$.

Nech $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\theta}_0$ je centrovaný VAR(q) proces. Potom za použitia (2.24) a faktu, že medzi zložkami $\{\boldsymbol{a}_t\}$ nie je žiadna korelácia, dostávame

1. $Cov(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$;
2. $\boldsymbol{\Gamma}_0 = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Theta}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Theta}_1^T + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Theta}_q^T$;
3. $\boldsymbol{\Gamma}_l = \boldsymbol{0}$ ak $l > q$;
4. $\boldsymbol{\Gamma}_l = \sum_{j=l}^{q} \boldsymbol{\Theta}_j\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Theta}_{j-l}^T$ ak $1 \leq l \leq q$, kde $\boldsymbol{\Theta}_0 = -\boldsymbol{I}$.

Ak $\boldsymbol{\Gamma}_l = \boldsymbol{0}$ pre $l > q$, maticová autokorelačná funkcia VMA(q) modelu radu $\boldsymbol{X}_t$ splňuje

$$\boldsymbol{\rho}_l = \boldsymbol{0}, \quad l > q. \tag{2.25}$$

Preto môže byť autokorelačná funkcia použitá na identifikovanie rádu q vo VMA(q) modeli.

2.8.2 Odhadovanie parametrov

Odhadovanie VMA modelov je možné riešiť vierohodnostným prístupom. Je možné použiť dve metódy. Prvá je podmienená metóda maximálnej vierohodnosti, ktorá predpokladá, že $\boldsymbol{a}_t = \mathbf{0}$ pre $t \leq 0$. Druhá je nepodmienená metóda maximálnej vierohodnosti, ktorá považuje $\boldsymbol{a}_t$ pre $t \leq 0$ ako ďalšie parametre modelu. Aby sme lepšie pochopili problematiku odhadu, budeme pracovať s VMA(1) modelom (2.22). Predpokládajme, že máme dáta $\boldsymbol{X}_t,\ t = 1, \ldots, N$ a $\boldsymbol{a}_t$ má mnohorozmerné normálne rozdelenie $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Podmienená metóda maximálnej vierohodnosti

Predpoklqdajme, že $\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{0}$. Potom môžeme prepísať model (2.22) do tvaru $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_{t-1}$ a spočítať vektorový biely šum $\boldsymbol{a}_t$ rekurzívne ako

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_1, \quad \ldots$$

Vierohodnostná funkcia L a logarimitcká vierohodnostná funkcia l sú dané už zmienenými vzťahmi (2.20) a (2.21). Maximalizácia logaritmickej vierohodnostnej funkcie vedie v optimalizácii k nelineárnemu programovaniu.

Nepodmienená metóda maximálnej vierohodnosti

Predpokladajme, že $\boldsymbol{a}_0$ je neznámy vektor, ktorý musí byť odhadnutý z dát, aby sme vyčíslili vierohodnostnú funkciu. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\theta}_0$. Použitím $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$ a (2.22) dostávame

$$\boldsymbol{a}_t = \widetilde{\boldsymbol{X}}_t + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_{t-1}. \tag{2.26}$$

Opakujúcou substitúciou dostávame, že $\boldsymbol{a}_0$ je obsiahnuté vo všetkých $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$ následovne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \widetilde{\boldsymbol{X}}_1 + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_0 \\
\boldsymbol{a}_2 &= \widetilde{\boldsymbol{X}}_2 + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_1 = \widetilde{\boldsymbol{X}}_2 + \boldsymbol{\Theta}\widetilde{\boldsymbol{X}}_1 + \boldsymbol{\Theta}^2\boldsymbol{a}_0 \\
\vdots &= \vdots \\
\boldsymbol{a}_N &= \widetilde{\boldsymbol{X}}_N + \boldsymbol{\Theta}\widetilde{\boldsymbol{X}}_{N-1} + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{N-1}\widetilde{\boldsymbol{X}}_1 + \boldsymbol{\Theta}^N\boldsymbol{a}_0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$\boldsymbol{a}_0$ je teda lineárna funkcia dát, ak sú dané $\boldsymbol{\theta}_0$ a $\boldsymbol{\Theta}$. Tento výsledok nám umožňuje odhadovať $\boldsymbol{a}_0$ za použitia dát a počiatočných odhadov $\boldsymbol{\theta}_0$ a $\boldsymbol{\Theta}$. Ak máme dané $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\Theta}$ a dáta, môžeme definovať

$$\boldsymbol{X}_t^* = \widetilde{\boldsymbol{X}}_t + \boldsymbol{\Theta}\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{t-1}\widetilde{\boldsymbol{X}}_1, \quad t = 1, 2, \ldots, N.$$

Sústavu rovníc (2.27) môžeme prepísať ako

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_1^* &= -\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 \\
\boldsymbol{X}_2^* &= -\boldsymbol{\Theta}^2\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\boldsymbol{X}_N^* &= -\boldsymbol{\Theta}^N\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_N.
\end{aligned}$$

Rovnice sú vo forme mnohonásobnej lineárnej regresie s vektorom parametrov $\boldsymbol{a}_0$, hoci variančná matica $\boldsymbol{\Sigma}$ bieleho šumu $\boldsymbol{a}_t$ nemusí byť diagonálna matica. Ak máme k dipozícii počiatočný odhad $\boldsymbol{\Sigma}$, prenásobíme každú rovnicu predchádzajúcej sústavy rovníc zľava maticou $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}$. Výsledná sústava rovníc je mnohonásobná lineárna regresia s jednotkovou variančnou maticou chýb $\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{a}_t$ a OLS metódou môžeme získať odhad $\boldsymbol{a}_0$. Odhad označíme ako $\widehat{\boldsymbol{a}}_0$.
Použitím odhadu $\widehat{\boldsymbol{a}}_0$ môžeme spočítať $\boldsymbol{a}_t$ rekurzívne ako

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}\widehat{\boldsymbol{a}}_0, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{a}_1, \quad \ldots$$

Navyše môžeme odvodiť nepodmienenú vierohodnostnú funkciu dát zo združeného rozdelenia $\boldsymbol{a}_t,\ t = 0, \ldots, N$. Vierohodnostnú funkciu počítame, aby sme získali

nepodmienené ML odhady. Postup výpočtu si v krátkosti popíšeme.

Nech sú dané počiatočné odhady $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, potom za použitia (2.27) odvodíme OLS odhad $\widehat{\boldsymbol{a}}_0$. Tento odhad sa zase použije na vyčíslenie $\widehat{\boldsymbol{a}}_t$ rekurzívne použitím (2.26) a začínaním u $\widehat{\boldsymbol{a}}_1 = \widetilde{\boldsymbol{X}}_1 + \boldsymbol{\Theta}\widehat{\boldsymbol{a}}_0$. Výsledné $\widehat{\boldsymbol{a}}_t$, $t = 0, \ldots, N$ sa potom použijú na vyčíslenie nepodmienenej vierohodnostnej funkcie dát, aby sa aktualizovali odhady $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\Theta}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$. Celý proces sa potom opakuje, dokiaľ odhady nebudú konvergovať. Táto iteratívna metóda na vyčíslenie vierohodnostnej funkcie platí aj na obecné VMA(q) modely.

Z predchádzajúcej časti je zrejmé, že nepodmienená vierohodnostná metóda požaduje omnoho intenzívnejší výpočet ako podmienený vierohodnostný prístup. Poskytuje však presnejšie odhady parametrov, špeciálne ak niektoré vlastné čísla $\boldsymbol{\Theta}$ sú blízke 1. V článku [6] poskytujú porovnania medzi podmienenou a nepodmienenou ML metódou VMA modelov.

2.8.3 Predpovede v modeli

Pre VMA(1) model môžeme získať predpoveď o jeden krok dopredu ako

$$\boldsymbol{X}_t(1) = \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{a}_t,$$

kde $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_{t-1}(1)$ a $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{0}$.

Chyba predpovede potom bude

$$\boldsymbol{e}_t(1) = \boldsymbol{X}_{t+1} - \boldsymbol{X}_t(1) = \boldsymbol{a}_{t+1}.$$

Variančná matica chyby predpovede je $\boldsymbol{\Sigma}$.

U predpovede o dva kroky dopredu dostaneme

$$\boldsymbol{X}_t(2) = \boldsymbol{\theta}_0$$

a chybu predpovede

$$\boldsymbol{e}_t(2) = \boldsymbol{X}_{t+2} - \boldsymbol{X}_t(2) = \boldsymbol{a}_{t+2} - \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{a}_{t+1}.$$

Analogicky u predpovede o $l > 2$ krokov dopredu dostaneme

$$\boldsymbol{X}_t(l) = \boldsymbol{\theta}_0.$$

Ak prejdeme k VMA(q) modelom, predpoveď o jeden krok dopredu bude vyzerať

$$\boldsymbol{X}_t(1) = \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{\Theta}_2 \boldsymbol{a}_{t-1} - \ldots - \boldsymbol{\Theta}_q \boldsymbol{a}_{t-q+1}$$

s chybou predpovede

$$\boldsymbol{e}_t(1) = \boldsymbol{a}_{t+1}.$$

Predpoveď o l krokov dopredu je

$$\boldsymbol{X}_t(l) = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a}_{t+l} - \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{a}_{t+l-1} - \ldots - \boldsymbol{\phi}_0 \boldsymbol{a}_{t+l-q},$$

kde kladieme

$\boldsymbol{a}_{t+l-j} = \boldsymbol{0}$ pre $l - j > 0;\ j = 0, \ldots, q,$

$\boldsymbol{a}_{t+l-j} = \boldsymbol{X}_{t+l-j} - \boldsymbol{X}_{t+l-j-1}(1)$ pre $l - j \leq 0.$

Chyba predpovede je

$$\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{X}_{t+l} - \boldsymbol{X}_t(l).$$

Predpoveď o $l > q$ krokov dopredu bude teda vyzerať ako

$$\boldsymbol{X}_t(l) = \boldsymbol{\theta}_0$$

s chybou predpovede

$$\boldsymbol{e}_t(l) = \boldsymbol{X}_{t+l} - \boldsymbol{X}_t(l) = \boldsymbol{a}_{t+l} - \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{a}_{t+l-1} - \ldots - \boldsymbol{\Theta}_q \boldsymbol{a}_{t+l-q}.$$

V praxi sa používajú odhady parametrických matíc $\boldsymbol{\Theta}_j$ a vektoru $\boldsymbol{\theta}_0$.

Ak si to zhrnieme, výstavba VMA modelu zahŕňa 3 kroky:

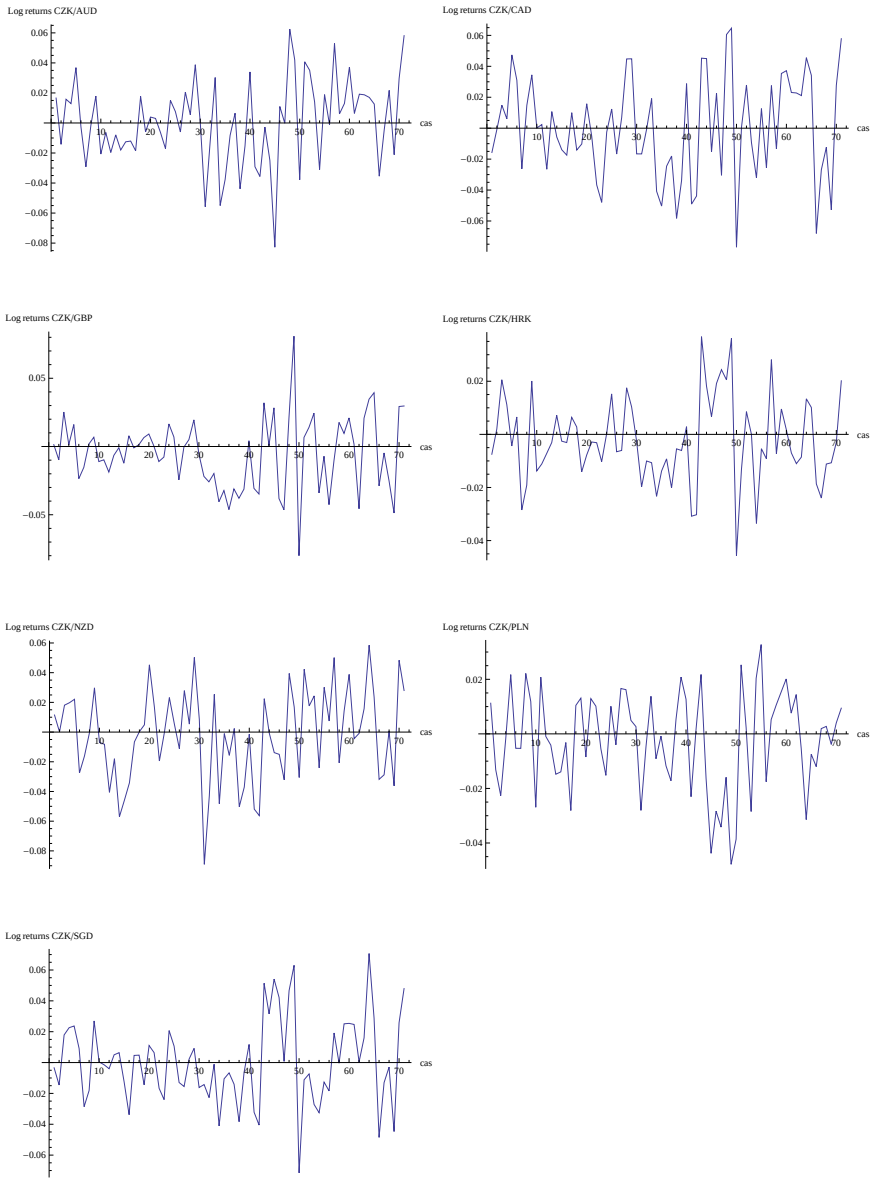
- použiť autokorelačné matice na určenie radu q - pre VMA(q) model, $\boldsymbol{\rho}_l = \boldsymbol{0}$ pre $l > q$, testovanie nulovosti prvkov korelačnej matice (viď podkapitolu 2.4.1);

- odhad konkrétneho modelu použitím buď podmienenej alebo nepodmienenej metódy maximálnej vierohodnosti - nepodmienená ML metóda je preferovaná, ak rozsah výberu nie je veľký;

- odhadnutý model by mal byť skontrolovaný kvôli vhodnosti (napr. aplikáciou $Q_k(m)$ štatistiky na reziduálne zložky). Až po overení vhodnosti odhadnutého modelu môžeme konštruovať predpovede.

2.9 Spracovanie dát

V tejto časti aplikujeme doteraz popísanú teóriu na konkrétny mnohorozmerný časový rad. Vezmeme 7 priemerných hodnôt devizových kurzov, s ktorými sme pracovali v kapitole 1.5: AUD, CAD, GBP, HRK, NZD, PLN, SGD a budeme znova pracovať s ich logaritmickými výnosmi. Na nasledujúcich grafoch vidíme ich časový priebeh:



Pomocou vzorcov (2.1), (2.2) pre $l = 0, 1, \ldots, 20$ sme odhadli maticovú autokorelačnú funkciu. Kvôli prácnosti výstupu si ukážeme len odhad pre $l = 0$, tj. maticu $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0$, ktorá bola spočítaná tiež v kapitole 1.5.2

$$
\begin{array}{c}
 \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1. & 0.704694 & 0.500172 & 0.494753 & 0.756339 & 0.328704 & 0.496451 \\
0.704694 & 1. & 0.702222 & 0.699149 & 0.654984 & 0.158354 & 0.811865 \\
0.500172 & 0.702222 & 1. & 0.590378 & 0.595973 & 0.0375291 & 0.703127 \\
0.494753 & 0.699149 & 0.590378 & 1. & 0.458199 & -0.0869163 & 0.772309 \\
0.756339 & 0.654984 & 0.595973 & 0.458199 & 1. & 0.241908 & 0.559805 \\
0.328704 & 0.158354 & 0.0375291 & -0.0869163 & 0.241908 & 1. & -0.0834875 \\
0.496451 & 0.811865 & 0.703127 & 0.772309 & 0.559805 & -0.0834875 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

a pre $l = 1$ dostávame maticu $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_1$

$$
\begin{array}{c}
 \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.10351 & -0.0686234 & -0.122089 & -0.0411407 & 0.0937932 & 0.0315319 & -0.0326567 \\
0.0722031 & 0.126433 & 0.0618232 & 0.0569531 & 0.132505 & 0.168293 & 0.124047 \\
0.170459 & 0.123007 & 0.0441792 & 0.104945 & 0.195461 & 0.0957621 & 0.0328317 \\
0.0288038 & 0.118286 & 0.0433294 & 0.157154 & 0.128105 & 0.038174 & 0.189916 \\
0.0662784 & 0.00484167 & -0.0337414 & -0.0382337 & 0.183612 & 0.0865598 & -0.0732584 \\
-0.170317 & -0.350112 & -0.286496 & -0.46987 & -0.117643 & 0.203506 & -0.415521 \\
-0.0438793 & 0.119821 & 0.0661793 & 0.150476 & 0.128463 & 0.0263795 & 0.224065
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Otestujeme teraz nulovosť prvkov výberovej maticovej autokorelačnej funkcie (viď kap. 2.4.1). Pri pevne zvolenom $q = 0$ sme testovali hypotézu $\rho_{ij}(l) = 0$ proti alternatíve $\rho_{ij}(l) \neq 0$ na hladine $\alpha = 0,05$. Pre $l = 0$ sme dostali nasledujúcu maticu testov jednotlivých koeficientov výberovej maticovej autokorelačnej funkcie:

$$
\begin{array}{c}
 \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{False} & \text{True} \\
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{False} & \text{True} \\
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{False} & \text{True} \\
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{False} & \text{True} \\
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{False} & \text{True} \\
\text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{True} & \text{False} \\
\text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{True} & \text{False} & \text{True}
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

kde True na pozícii (i, j) značí, že na hladine $\alpha = 0,05$ zamietame nulovú hypotézu nekorelovanosti i-tej a j-tej meny. Iba PLN nevykazuje významné korelácie

s ostatnými menami. Pri $l = 1$ sme dostali

$$
\begin{array}{c}
 \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} \\
\text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} \\
\text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} \\
\text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} \\
\text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} \\
\text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{True} & \text{False} & \text{False} & \text{True} \\
\text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False} & \text{False}
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Vidíme, že len PLN je korelovaný s hodnotou HRK a SGD oneskorených o 1 časovú jednotku. Pre $l = 2, 3, \ldots, 20$ nám už vychádza nulová výberová maticová autokorelačná funkcia $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l$. Podľa (2.25) by teda pre naše dáta bol vhodný VMA(1) model, ale vzhľadom k tomu, že nulovosť korelácie $\rho_{ij}(1)$ na hladine $\alpha = 0,05$ zamietame iba u 2 prvkov výberovej maticovej autokorelačnej funkcie, má zmysel pokusiť sa aplikovať aj model typu VAR.

2.9.1 Idendifikácia modelu

K identifikácii modelu sme vzhľadom k nejednoznačnosti doterajších záverov použili Hannan-Rissanenovu procedúru (viď kap. 2.7.2), ktorá nám za najlepší model vybrala VAR(1) model s odhadnutou maticou koeficientov $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$

$$
\begin{array}{c}
 \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.240089 & -0.282537 & -0.245707 & -0.0335518 & 0.152552 & -0.0103937 & 0.208116 \\
-0.18489 & 0.0624525 & -0.137355 & -0.109664 & 0.143257 & 0.355079 & 0.259076 \\
-0.0626845 & 0.103334 & -0.0457905 & 0.395338 & 0.228659 & 0.0727514 & -0.322059 \\
-0.157145 & -0.0285389 & -0.104252 & 0.166919 & 0.123442 & 0.12354 & 0.144559 \\
-0.235505 & 0.108036 & -0.131938 & 0.155612 & 0.471571 & 0.0194487 & -0.353088 \\
-0.0727012 & -0.0859249 & 0.0284392 & -0.296315 & 0.132923 & 0.181492 & -0.12253 \\
-0.432074 & -0.0010931 & -0.227111 & 0.113423 & 0.278427 & 0.208016 & 0.37982
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

a odhadnutou variačnou maticou bieleho šumu $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$

$$
\begin{array}{c}
 \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.00069543 & 0.00063453 & 0.00034795 & 0.00021741 & 0.00060565 & 0.00013927 & 0.00037773 \\
0.00063453 & 0.00099517 & 0.00058474 & 0.0003376 & 0.00063482 & 0.000097202 & 0.00066333 \\
0.00034795 & 0.00058474 & 0.00066552 & 0.00025186 & 0.00043396 & 0.000034208 & 0.0004977 \\
0.00021741 & 0.0003376 & 0.00025186 & 0.00024245 & 0.00022208 & -0,00000074 & 0.00029323 \\
0.00060565 & 0.00063482 & 0.00043396 & 0.00022208 & 0.00084271 & 0.00009568 & 0.00045379 \\
0.00013927 & 0.000097202 & 0.000034208 & -0,00000074 & 0.00009568 & 0.00023665 & -0.000012402 \\
0.00037773 & 0.00066333 & 0.0004977 & 0.00029323 & 0.00045379 & -0.000012402 & 0.00064315
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Vzhľadom k tomu, ze transformované dáta majú nulovú strednú hodnotu, neodhadovali sme intercept $\boldsymbol{\phi}_0$. $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$ aj $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ sme ešte overili podmienenou metódou maximálnej vierohodnosti pre VAR(1) model a dostali sme rovnaké výsledky. Veľkosť prvkov $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$ (niektoré sú veľmi malé) naznačuje iba nevýraznú previazanosť jednotlivých mien s oneskorenými hodnotami ostatných mien, čo súhlasí s výsledkami testovania nulovosti prvkov matice $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_1$.

Ďalšie možné modely, ktoré nám ponúkla Hannan-Risannenova procedúra, vidíme v nasledujúcej tabuľke:

Model	**AIC kritérium**
VAR(1)	-56,4845
VMA(1)	-55,5451
VAR(2)	-56,3537
VARMA(2,1)	-56,1601

Vidíme, že vybratý bol model s najnižšou AIC hodnotou (viď (2.19)). VMA(1) model má naopak najvyššiu AIC hodnotu.

2.9.2 Overenie stacionarity

Na overenie stacionarity sme spočítali vlastné čísla matice koeficientov $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$ odhadnutého VAR(1) modelu, ktoré nám v absolútnej hodnote vyšli následovne: 0,546387; 0,546387; 0,342915; 0,342915; 0,196982; 0,16909; 0,00704087. Vidíme, že všetky vlastné čísla vyšli v absolútnej hodnote menšie ako 1, z čoho plynie podľa kapitoly 2.6.2 stacionarita odhadnutého VAR(1) modelu.

2.9.3 Testovanie nekorelovanosti bieleho šumu

Na testovanie nekorelovanosti bieleho šumu sme použili Portmanteu test (viď kapitola 2.5). Za m sme si podľa [10] zvolili $\lfloor \ln N \rfloor$, kde symbolom $\lfloor \cdots \rfloor$ označujeme dolnú celú časť. Testová štatistika $Q_k(m)$ nám dala hodnotu 312,242, pomocou ktorej na hladine $\alpha = 0,05$ nezamietame nekorelovanosť bieleho šumu, pretože kvantil χ^2_{343} je 387,188 (viď kapitola 2.5).

2.9.4 Konštrukcia predpovedí

Keďže náš odhadnutý model sa zdá byť na základe identifikácie, odhadu a diagnostiky vhodný, skonštruovali sme na základe vzorcov v kapitole 2.7.3 päť lineárnych predpovedí, vrátane variančnej matice predpovedanej chyby. Predpovede vidíme v nasledujúcej tabuľke:

t	AUD	CAD	GBP	HRK	NZD	PLN	SGD
N+1	0.00379689	0.0063466	0.000592472	0.00103293	-0.0117686	-0.0147762	-0.00167969
N+2	-0.0030531	-0.00786814	-0.002426	-0.00418815	-0.00537	-0.00515087	-0.00865325
N+3	-0.000339916	-0.00397449	-0.000982088	-0.00229197	-0.0000398197	0.00148169	-0.0044496
N+4	0.000412032	-0.000431499	0.000281198	-0.000578442	0.00100472	0.00182627	-0.00127862
N+5	0.0000393428	0.000382822	0.000462422	-0.0000134983	0.000690016	0.000808192	-0.000133042

Pre zdĺhavosť výstupu si uvedieme len variančnú maticu predpovedanej chyby pre $t = N + 1$ a to

$$\begin{array}{c} \\ AUD \\ CAD \\ GBP \\ HRK \\ NZD \\ PLN \\ SGD \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} AUD & CAD & GBP & HRK & NZD & PLN & SGD \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.00069543 & 0.00063453 & 0.00034795 & 0.00021741 & 0.000605658 & 0.000139277 & 0.00037773 \\ 0.00063453 & 0.00099517 & 0.00058474 & 0.00033763 & 0.000634823 & 0.000097202 & 0.00066333 \\ 0.00034795 & 0.00058474 & 0.00066552 & 0.00025186 & 0.000433966 & 0.000034208 & 0.0004977 \\ 0.00021741 & 0.00033763 & 0.00025186 & 0.00024245 & 0.000222084 & -0.000000748 & 0.00029323 \\ 0.00060565 & 0.00063482 & 0.00043396 & 0.00022208 & 0.000842716 & 0.000095684 & 0.00045379 \\ 0.00013927 & 0.00009720 & 0.00003421 & -0.000000748 & 0.000095684 & 0.000236653 & -0.000012402 \\ 0.00037773 & 0.00066334 & 0.00049771 & 0.00029323 & 0.000453791 & -0.000012402 & 0.00064315 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Zvyšné štyri variančné matice chyby predpovede je možné nájsť v priloženom programe na CD.

Po spätnej transformácií z logaritmických výnosov na pôvodné dáta môžeme v nasledujúcej tabuľke vidieť 5 lineárnych predpovedí mesačných priemerných hodnôt devizových kurzov.

Predpovede naznačujú úroveň, okolo ktorej by menové kurzy maly v nasledujúcich 5 mesiacoch kolísať.

t	**AUD**	**CAD**	**GBP**	**HRK**	**NZD**	**PLN**	**SGD**
N+1	18.9769	18.9972	29.6906	3.40852	14.1416	6.20267	14.5436
N+2	18.9191	18.8483	29.6186	3.39427	14.0659	6.1708	14.4182
N+3	18.9126	18.7735	29.5896	3.3865	14.0653	6.17995	14.3542
N+4	18.9204	18.7654	29.5979	3.38454	14.0794	6.19125	14.3359
N+5	18.9212	18.7726	29.6116	3.3845	14.0891	6.19625	14.334

Záver

V diplomovej práci sme sa venovali dvom prístupom k analýze mnohorozmerných časových radov, pričom oba prístupy sme aplikovali na logaritmické výnosy mesačných priemerných hodnôt devizových kurzov.

Prvá časť diplomovej práce pojednáva o grafických modeloch, pomocou ktorých skúma závislostnú štruktúru dát. Testom normality aj nezávislosti prešlo 7 mien, z ktorých vyšla očakávaná prieviazanosť mien krajín, ktoré sú členami Commonwealthu a to Veľká Británia, Nový Zéland, Austrália, Kanada a Singapúr. Prekvapením bola závislosť medzi menami Chorvátska a Singapúru a tiež Poľska so Singapúrom a Austráliou.

V druhej časti diplomovej práce sme sa zaoberali AR a MA modelmi; ich identifikáciou, odhadom, diagnostikou a predpoveďami. Ako dáta sme použili 7 mien z prvej časti práce. Najskôr sme odhadli ich maticovú autokorelačnú funkciu, aby sme mohli otestovať nulovosť jej prvkov. Hannan-Rissanenova procedúra nám za najvhodnejší určila model VAR(1) (potvrdilo to aj AIC kritérium), s ktorým sme ďalej pracovali. Po potvrdení stacionarity aj nekorelovanosti bieleho šumu sme skonštruovali 5 predpovedí vrátane ich variačných matíc prepovedanej chyby. Analýza dát prekázala vzájomné súvislosti kurzu koruny voči jednotlivým menám, ktoré sa prejavujú v rovnakom čase, menej výrazne s časovým oneskorením 1 mesiac a neprejavujú sa pre väčšie časové oneskorenie.

Použité programy boli realizované v software Mathematica 7 a sú priložené na CD. Normalita a nezávislosť jednotlivých mien sa testovala v štatistickom software NCSS 2007.

Literatúra

[1] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha 2007.

[2] Cipra, T.: *Finanční ekonometrie*, Ekopress, Praha 2008.

[3] Fuller, W. A.: *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons Inc., New York 1976.

[4] Hannan, E. J.: *Multiple Time Series*, John Wiley & Sons Inc., New York 1970.

[5] He, Y., Novak, J., Glosemeyer, D.: *Mathematica Time Series. A Fully Integrated Environment for Time-Dependent Data Analysis*, Wolfram Research Inc., Illinois 2007.

[6] Hillmer, S. C., Tiao, G. C.: *Likelihood function of stacionary multiple autoregressive moving average models*, Journal of the American Statistical Association **74** (1979), 652-660.

[7] Matoušek, J., Nešetřil J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, Praha 2010.

[8] Reinsel, G. C.: *Elements of Multivariate Time Series Analysis*, Springer-Verlag, New York 1993.

[9] Tiao, G. C., Box, G. E. P.: *Modeling multiple time series with applications*, Journal of the American Statistical Association **76** (1981), 802-816.

[10] Tsay, R. S.: *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons Inc., New York 2002.

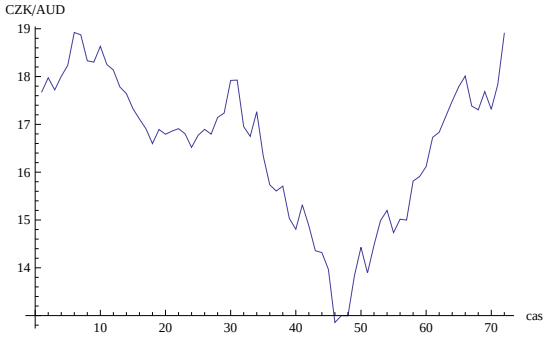
[11] Whittaker, J.: *Graphical Models in Applied Multivariate Statistics*, John Wiley & Sons Ltd., New York 1990.

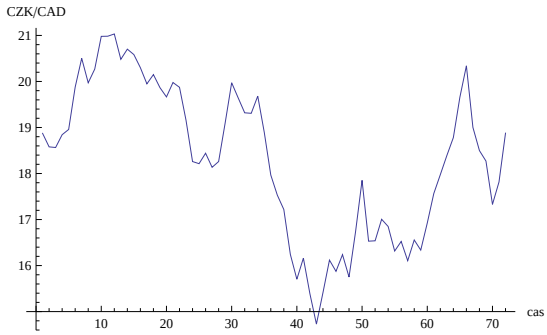
[12] Česká národní banka [online]. 2003-2011 [cit. 2011-07-06]. Kurzy devizového trhu - průměry. Dostupné z WWW: <http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/devizovy_trh/kurzy_devizoveho_trhu/>.

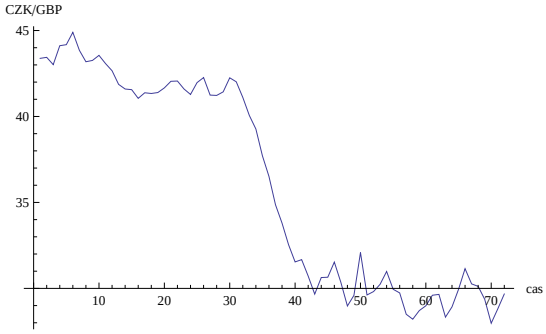
Prílohy

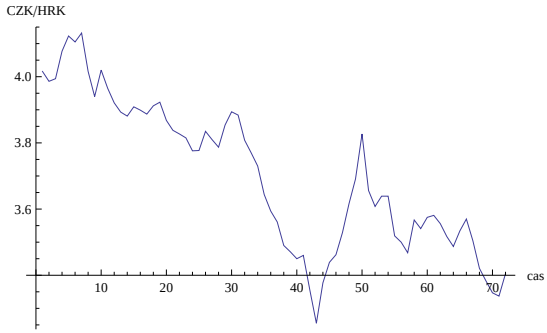
Príloha č.1: Grafy vybraných priemerných devizových kurzov

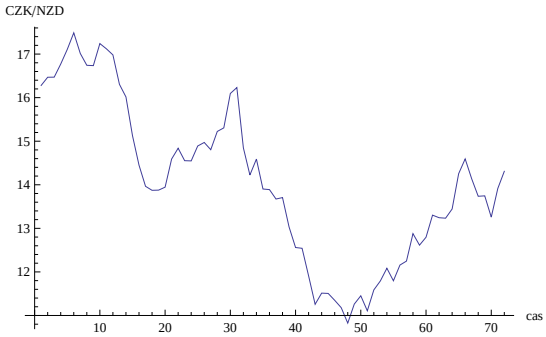
V tejto prílohe sú uvedené grafy mesačných priemerných hodnôt devizových kurzov českej koruny voči vybraným menám od 1.1.2005 do 31.12.2010.

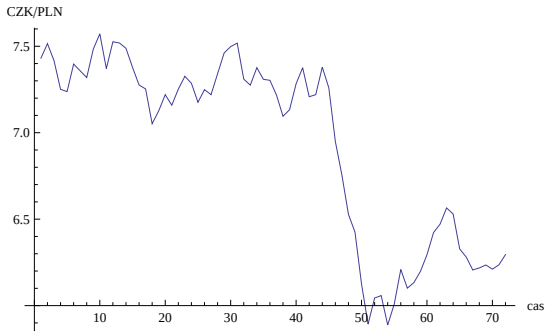


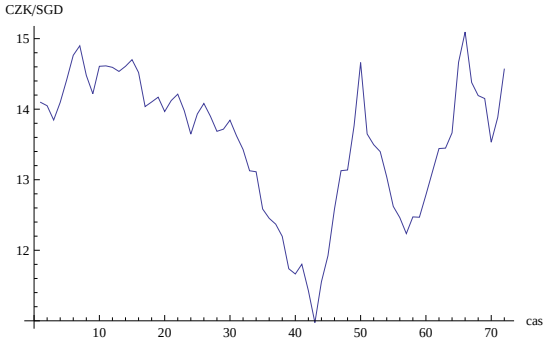






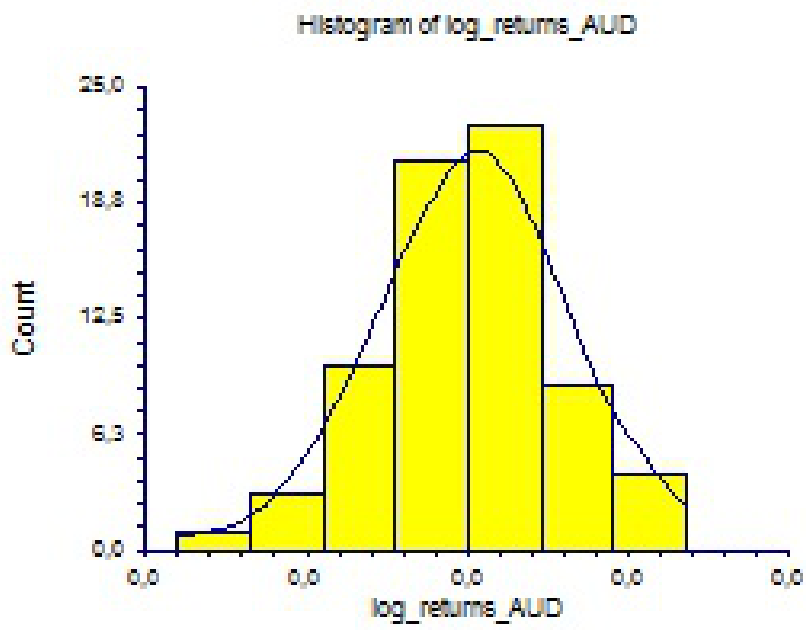


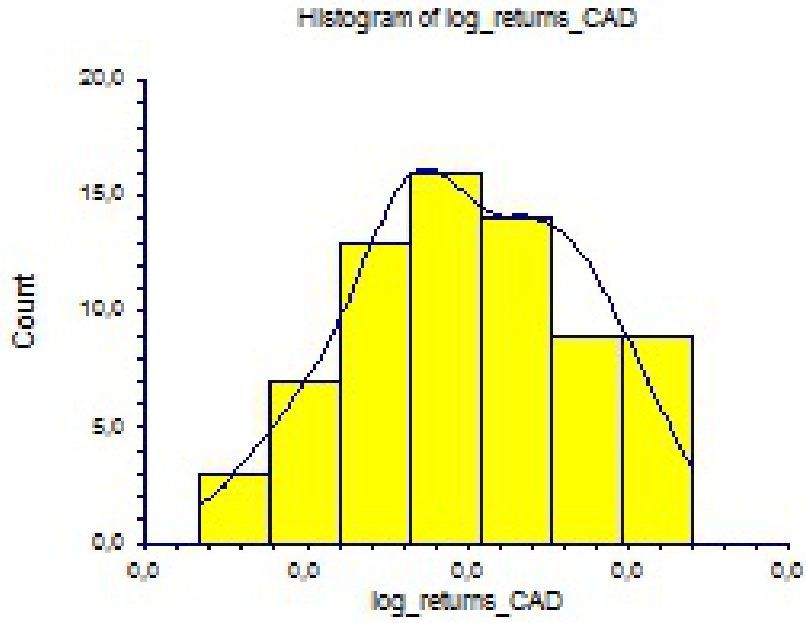


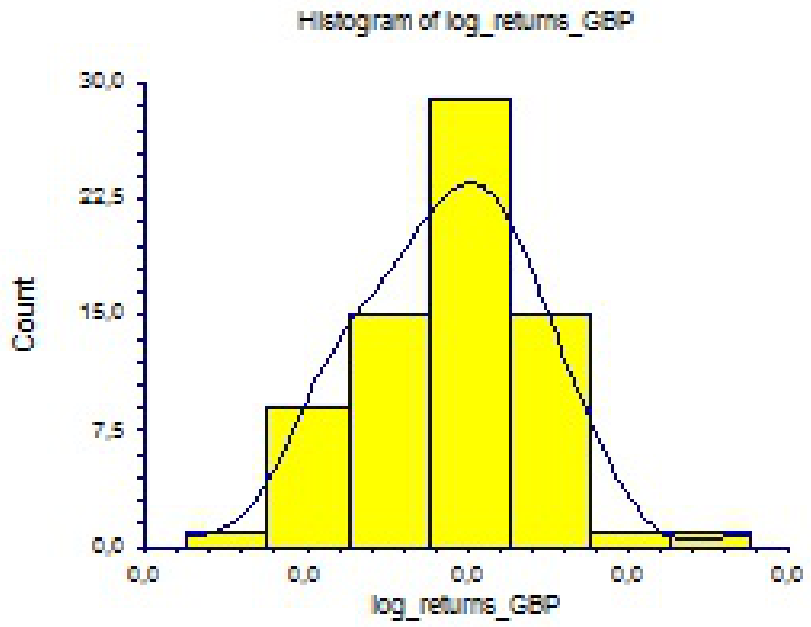


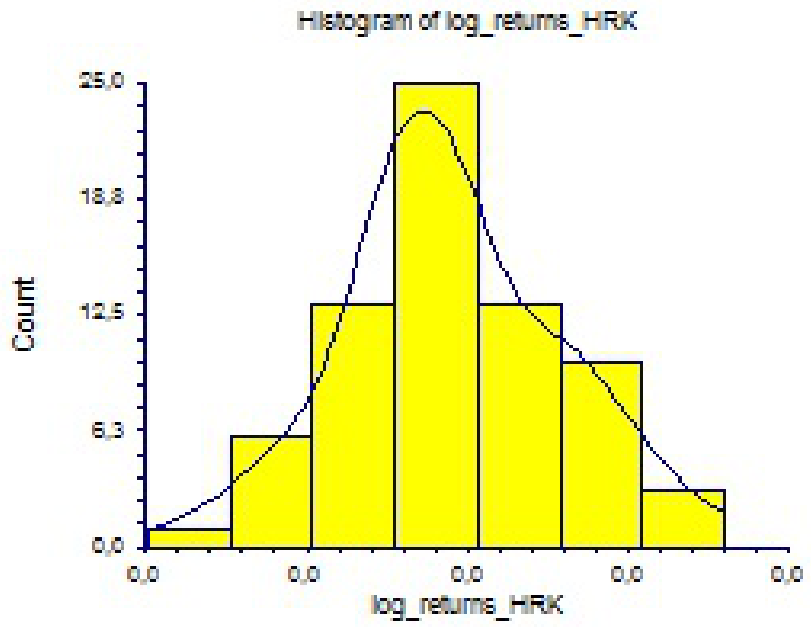
Príloha č.2: Histogramy vybraných priemerných devizových kurzov

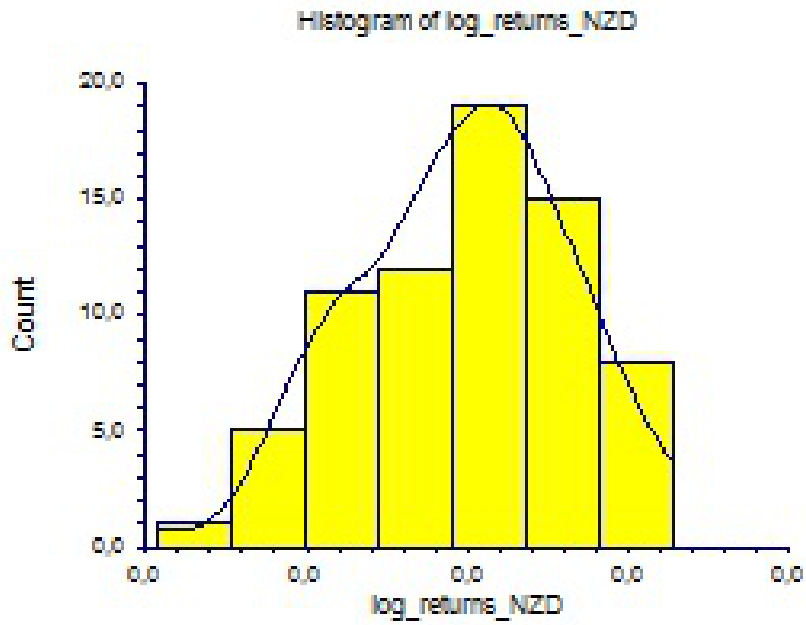
V tejto prílohe sú uvedené histogramy logarimických výnosov vybraných mesačných priemerných hodnôt devizových kurzov.

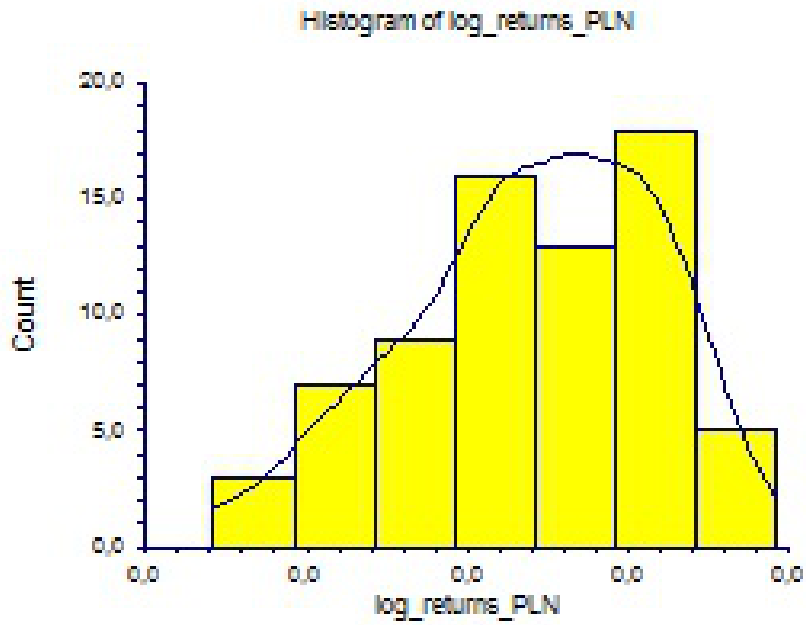


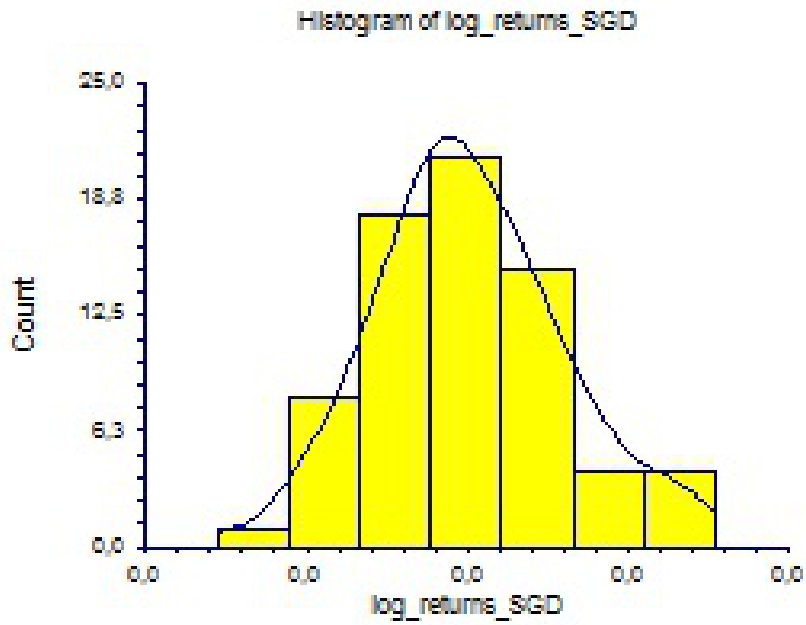



Histogram of log_returns_GBP
30,0
22,5
15,0
7,5
0,0
Count
0,0
0,0
0,0
0,0
0,0
log_returns_GBP


Histogram of log_returns_HRK
25,0
18,8
12,5
6,3
0,0
Count
0,0
0,0
0,0
0,0
0,0
log_returns_HRK


Histogram of log_returns_NZD
Count
20,0
15,0
10,0
5,0
0,0
0,0
0,0
0,0
0,0
0,0
log_returns_NZD


Histogram of log_returns_PLN
Count
20,0
15,0
10,0
5,0
0,0
0,0
0,0
0,0
0,0
0,0
log_returns_PLN


Histogram of log_returns_SGD
25,0
18,8
12,5
6,3
0,0
Count
0,0
0,0
0,0
0,0
0,0
log_returns_SGD

Príloha č.3: Zdrojový kód realizovaný v software Mathematica 7

V tejto prílohe je uvedený zdrojový kód programu (realizovaného v software Mathematica 7) slúžiaceho k identifikácii, odhadu, diagnostiky a predpovede MA a AR modelov. Program je demonštrovaný na príklade logarimických výnosov vybraných mesačných priemerných hodnôt devizových kurzov a je súčasťou priloženého CD pod názvom *AR_MA_modely.nb*.