Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jana Moltašová

Sbírka úloh z kinematiky hmotného bodu

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Dana Mandíková, CSc.

Studijní program a obor: Učitelství fyziky-matematiky pro 2.stupeň základní školy

2011

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucí diplomové práce RNDr. Daně Mandíkové, CSc. za ochotu, trpělivost, neocenitelnou pomoc a vedení při vypracování diplomové práce. Dále bych chtěla poděkovat RNDr. Zdeňce Koupilové, Ph.D. za pomoc při zadávání úloh do elektronické podoby.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1.srpna 2011 Jana Moltašová

Obsah

Abstrakt

Název práce: Sbírka úloh z kinematiky hmotného bodu
Autor: Jana Moltašová
Katedra (ústav): Katedra didaktiky fyziky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Dana Mandíková, CSc.
e-mail vedoucího: Dana.Mandikova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce navazuje na bakalářskou práci Sbírka úloh z kinematiky hmotného bodu pro studenty učitelství fyziky, obhájenou v roce 2006. Diplomová práce je součástí širšího projektu, jehož cílem je vytvoření elektronické sbírky úloh s podrobnými řešeními a se strukturovanou nápovědou. V rámci diplomové práce vznikla část sbírky se čtyřiceti úlohami, jejichž tématem je kinematika hmotného bodu. Většina úloh je vybrána z již existujících sbírek a učebnic. Každá úloha obsahuje zadání, systém nápověd a řešení nápověd, podrobné řešení a odpověď. V úvodní části diplomové práce je vymezena problematika, cíle práce a je uvedena její struktura. V další části je uveden přehled učiva probíraného na ZŠ, SŠ a stručně na VŠ, které se týká daného tématu. Následuje přehled a charakteristika sbírek úloh k danému tématu. Čtvrtá část je věnována charakteristice elektronické sbírky, její historii, je zde popsáno technické zpracování úloh a charakteristika a struktura vlastní sbírky úloh. V závěru jsou shrnuty výsledky práce. Součástí práce je příloha s ukázkou šesti vytvořených úloh. Všechny úlohy jsou pak v elektronické podobě na přiloženém CD.
Klíčová slova: kinematika, elektronická sbírka řešených úloh, strukturovaná nápověda

Title: Book of problems of kinematics of mass point
Author: Jana Moltašová
Department: Department of Physics Education
Supervisor: RNDr. Dana Mandíková, CSc.
Supervisor's e-mail address: Dana.Mandikova@mff.cuni.cz

Abstract: This thesis is a follow-up to the bachelor thesis titled Book of problems of kinematics of mass point for students of Physics Education. This work is a part of wider project which aim is to create an electronic collection of problems completed with detailed solutions and structured hints. Within the frame of this work was made part of collection with forty problems, which theme is kinematics of mass point. Most of problems were chosen from already existing collections and textbooks. Each problem contains task, system of hints and resulting solutions of hints, detailed solution and answer. At the beginning of the work are given aims of the work and its structure. In the next part of work is mentioned a survey of curriculum which is instructed in lower and upper secondary school and university in brief, which relates to this theme. The next part is a survey and brief characterization of collections of problems with this theme. The fourth part of the work is devoted to the electronic collection of problems, its history, the technical elaboration of problems, there is described the general characterization of the self collection of problems and its structure, too. Produces of the work are summarized at the end of this work. The component of this work is a supplement with extract of six created problems. All problems are then in electronic form on added CD.
Keywords: kinematics, electronic collection of solved problems, structured hint

.

Kapitola 1

Úvod

1.1 Vymezení problematiky

Předmětem mé diplomové práce bylo vytvořit soubor řešených úloh z mechaniky, resp. z kinematiky hmotného bodu. Úlohy jsou součástí rozsáhlé elektronické sbírky dostupné na serveru katedry didaktiky fyziky, na které spolu se mnou pracovali i další studenti a v rámci svých bakalářských a diplomových prací sestavili úlohy z dalších oblastí fyziky jako je elektřina a magnetismus, kvantová mechanika, molekulová fyzika a termodynamika i dalších částí mechaniky jako je např.dynamika hmotného bodu, hybnost, práce, energie a výkon, mechanika tuhého tělesa, gravitační pole. Sbírka je především určena studentům vysokých škol, ale také studentům středních škol a talentovaným žákům základních škol. Může také sloužit jako pomůcka pro učitele fyziky. Výhodou je její snadná dostupnost díky dnes běžnému přístupu k internetu. Sbírka je interaktivní, protože obsahuje řadu strukturovaných nápověd a také komentáře k problematickým místům v úlohách. Elektronickou podobu sbírky naprogramovala RNDr. Zdeňka Koupilová, Ph.D.

Fyzika patří spíše k předmětům, které studenti nemají příliš v oblibě, hlavně proto, že jim připadá velmi složitá a nepoužitelná v praktickém životě. Formulace mnoha úloh, které jim učitelé předkládají, jsou opravdu často pro studenty příliš abstraktní a neskutečné a tím odtržené od reálného života. Přitom řešení úloh je jednou z nejdůležitějších složek vyučování fyziky, úlohy by měly sloužit nejen k procvičení nově nabytých vědomostí a k jejich prohloubení, ale vést studenta k samostatnosti a k aktivitě a také být pro něj zajímavé a užitečné.

Ve své sbírce jsem se snažila nabídnout dostatek úloh vycházejících z reálné situace a vedoucích k samostatnému uvažování a řešení problému.

Tématický celek, na který jsem se ve svých úlohách zaměřila, je kinematika hmotného bodu. Tato část klasické mechaniky se obvykle nepovažuje za obtížnou, přesto některé úlohy činí problémy nejen žákům základních škol a studentům středních škol, ale i studentům prvních ročníků vysokých škol se zaměřením na fyziku. Jedná se například o sestrojování a interpretaci grafů, vytvoření představy o pohybu z jeho grafického záznamu, správné chápání některých pojmů jako okamžitá a průměrná rychlost, zrychlení a rychlost a podobně.

Diplomová práce přímo navazuje na mou bakalářskou práci, ve které byl vytvořen základ sbírky. V jejím rámci jsem zpracovala 38 úloh, všechny jsem vyřešila a k 16 z nich jsem se pokusila navrhnout strukturované nápovědy. V té době ovšem ještě neexistovalo webové rozhraní pro elektronickou sbírku ani jeho koncepce.

1.2 Cíl práce

Cíle mé práce jsou následující:

1. V návaznosti na bakalářskou práci dopracovat ucelený soubor úloh z mechaniky k tématu "Kinematika hmotného bodu" určený především pro studenty úvodních vysokoškolských kurzů fyziky.
2. Vypracovat ke všem úlohám podrobná komentovaná řešení a strukturované nápovědy.
3. Úlohy včetně všech částí řešení a obrázků převést do formátu vhodného pro zobrazení ve sbírce.

Sbírka je koncipována tak, aby pomohla procvičit základní partie kinematiky hmotného bodu, proto jsou v ní zařazeny různé typy úloh od úloh na pohyb daný grafem přes úlohy zabývající se rovnoměrným přímočarým nebo zrychleným přímočarým pohybem, dále pak pohybem po kružnici, až po úlohy na volný pád a skládání různých druhů pohybů. Úlohy ve sbírce mají různou úroveň obtížnosti. Jsou zde většinou úlohy řešitelné na vysoké škole, dále na úrovni středoškolské fyziky, ale i úlohy řešitelné na základní škole.

Každá úloha má vypracované úplné řešení s případným komentářem k problematickým místům kinematiky hmotného bodu a strukturované nápovědy, kde se cílenými otázkami propracováváme k postupnému řešení úlohy. Strukturované nápovědy studentům pomáhají úlohu vyřešit, aniž by museli předem nahlížet do zpracovaného řešení úlohy, dovolují jim se sbírkou interaktivně a samostatně pracovat a rozvíjejí tak jejich ”fyzikální myšlení”.

Celá elektronická sbírka má několik tématických oblastí, takže student si kromě různé obtížnosti či úrovně dané úlohy může volit fyzikální úlohu i podle obsahu (mechanika, elektřina a magnetismus apod).

1.3 Struktura práce

Diplomovou práci jsem rozdělila do pěti kapitol se dvěma přílohami.

V první kapitole neboli v úvodu vymezuji problematiku práce, píši, co je předmětem mé práce a čeho jsem se v ní snažila dosáhnout a proč jsem si při tvorbě sbírky vybrala právě téma kinematika hmotného bodu. Dále předkládám cíle své práce a úvod končím popisem struktury práce.

V druhé kapitole uvádím přehled učiva, které se z tématu kinematika hmotného bodu probírá na základní škole, střední škole a na vysoké škole.

V třetí kapitole předkládám přehled a stručnou charakteristiku sbírek úloh, ze kterých jsem při tvorbě své práce čerpala a sbírek, které mne zaujaly a obsahují úlohy z kinematiky hmotného bodu.

Čtvrtá kapitola se zabývá samotnou elektronickou sbírkou. Popisuji v ní historii, filozofii a současný stav sbírky, technické zpracování úloh a kapitolu končím pojednáním o vlastním vytvořeném souboru úloh, jeho struktuře s přehledem a stručnou charakteristikou jednotlivých úloh.

Pátou kapitolou je závěrečná část, ve kterém jsou shrnuty výsledky mé práce.

Diplomová práce obsahuje dvě přílohy. První příloha obsahuje ukázky šesti mnou vybraných úloh. Druhou přílohou je CD, které obsahuje všechny vytvořené úlohy spolu s teoretickou částí diplomové práce ve formátu pdf.

Kapitola 2

Přehled učiva z kinematiky hmotného bodu na základní, střední a vysoké škole

Při výběru úloh pro svou sbírku jsem považovala za potřebné seznámit se s učivem, které se v oblasti kinematiky probírá na jednotlivých stupních vzdělávání, tak abych ho v úlohách pokryla. V následující kapitole uvádím jeho stručný přehled spolu s komentáři k některým učebnicím.

2.1 Učivo z kinematiky na základní škole

V první části této kapitoly uvádím stručný přehled učiva z kinematiky na základní škole (v bodech). Přehled učiva jsem vytvořila na základě témat uváděných v učebnicích pro základní školy.

Druhá část kapitoly obsahuje komentář ke dvěma učebnicím fyziky pro základní školy se zaměřením na učivo kinematiky. Vybrala jsem si učebnice, které patří na základních školách mezi nejpoužívanější a se kterými jsem při své praxi na základní škole pracovala.

2.1.1 Přehled učiva na ZŠ:

- Klid tělesa
- Pohyb tělesa
- Trajektorie pohybu tělesa

- Přímočarý pohyb tělesa, příklady přímočarého pohybu
- Křivočarý pohyb tělesa, příklady křivočarého pohybu
- Dráha tělesa
- Měření dráhy, jednotka dráhy
- Posuvný pohyb tělesa, příklady posuvného pohybu
- Otáčivý pohyb tělesa kolem nehybné osy, příklady otáčivého pohybu
- Rovnoměrný pohyb tělesa, příklady rovnoměrného pohybu
- Nerovnoměrný pohyb tělesa, příklady nerovnoměrného pohybu
- Rychlost rovnoměrného pohybu
- Měření rychlosti, jednotka rychlosti
- Dráha při rovnoměrném pohybu tělesa
- Graf přímé úměrnosti dráhy a času při rovnoměrném pohybu tělesa
- Průměrná rychlost pohybu tělesa
- Zrychlený a zpomalený pohyb jako příklad nerovnoměrného pohybu tělesa

2.1.2 Učebnice fyziky pro ZŠ:

Kolářová R., Bohuněk J.: *Fyzika pro 7. ročník základní školy*, nakladatelství Prometheus, Praha 2002 [5]:

Tato učebnice žákům podává učivo zajímavým a poutavým způsobem a učí je poznat, jakou úlohu hraje fyzika v každodenním životě.

Žáci se s kinematikou seznamují v kapitole s názvem ”Pohyb tělesa”. Kapitola začíná opakováním učiva ze 6.ročníku, které se týkalo probíraného tématu, a pokračuje podkapitolami s názvy ”Klid a pohyb tělesa”, ”Jak můžeme popsat pohyb”, ”Rovnoměrný a nerovnoměrný pohyb”, ”Rychlost rovnoměrného pohybu”, ”Dráha při rovnoměrném pohybu tělesa” a ”Průměrná rychlost pohybu tělesa”. Na konci je učivo celé kapitoly zopakováno v několika úlohách, které mají převážně úvahový charakter.

Podkapitola ”Klid a pohyb tělesa” začíná motivačními otázkami typu ”Díváte se z okna, jak Petr sedí na sáňkách a sjíždí z kopce. Pohybuje se Petr, když vlastně sedí?”. Pojmy ”klid” a ”pohyb” žáci intuitivně znají, motivační otázky jim pomáhají pochopit, že tyto pojmy jsou relativní a je důležité vždy říct, vzhledem k čemu pohyb nebo klid tělesa vztahujeme. V další části jsou uvedeny příklady pohybů různých těles, motivační otázky jsou zodpovězeny a je zde zdůrazněno, proč bylo obtížné na ně odpovědět. Shrnutím a formulací hlavních myšlenek tématu (kdy se těleso pohybuje a kdy je v klidu a jakým způsobem o tom můžeme rozhodnout) tato podkapitola končí. Zda žáci nové informace dobře přijali a pochopili, si mohou ověřit v ”Úlohách a otázkách” na závěr každé podkapitoly. Ty jsou ve všech částech kapitoly ”Klid a pohyb tělesa” vytvořeny takovým způsobem, aby byly pro žáky zajímavé, úzce spojené s realitou a podněcovaly jejich samostatné uvažování.

Podkapitola ”Jak můžeme popsat pohyb” opět začíná motivačními otázkami pro popis pohybu tělesa a motivačními pokusy. Žáci pouštějí ocelovou kuličku po desce s bílým a kopírovacím papírem, kreslí tužkou přímku a kroužek nebo posunují po lavici a otáčejí trojúhelníkové pravítko. Seznamují se tak s pojmy ”trajektorie pohybu tělesa”, ”přímočarý a křivočarý pohyb tělesa”, ”posuvný a otáčivý pohyb tělesa” a s fyzikální veličinou ”dráha tělesa”, jejím označením a měřením.

V podkapitole ”Rovnoměrný a nerovnoměrný pohyb” jsou žáci seznamováni s novými pojmy ”rovnoměrný pohyb tělesa” a ”nerovnoměrný pohyb tělesa” popisem pohybu automobilu (rozjíždění a brzdění automobilu, jízda automobilu stálou rychlostí). Žáci popisují pohyb automobilu na obrázku. Následně si mohou svá nová zjištění ověřit pokusem - ukazovatelem připevněným na gumové smyčce poháněné elektromotorem.

První část podkapitoly ”Rychlost rovnoměrného pohybu” opět začíná motivační otázkou ”Když jedeš na kole a předjede tě kamarád, řekneš, že jede rychleji nebo že má větší rychlost. Co to vlastně rychlost je a jak ji určíme?”. Dále je zde návod na motivační pokus: žáci sledují rovnoměrný pohyb tří různých vozidel - motocyklu, traktoru a osobního automobilu a stopkami měří dobu, za kterou jednotlivá vozidla urazí zvolenou dráhu. Vše zapisují do tabulky. Prostřednictvím pokusu se žáci seznamují s fyzikální veličinou ”rychlost tělesa” a z tabulky mohou sami vyčíst, jakým způsobem se dá rychlost rovnoměrného pohybu tělesa určit a matematicky vyjádřit. Druhá část podkapitoly je věnovaná jednotkám rychlosti pohybu tělesa.

Předposlední podkapitola se nazývá ”Dráha při rovnoměrném pohybu tělesa”. Na počátku jsou žáci motivováni otázkou, jakou dráhu by s rodiči urazili autem, které by na tachometru mělo stálou rychlost 80 km/h, za jednu hodinu, za dvě hodiny, za tři hodiny a dozví se tak skutečnost, že při rovnoměrném pohybu tělesa dráha rovnoměrně přibývá s časem. Pokusem z podkapitoly ”Rovnoměrný a nerovnoměrný pohyb” žáci zkoumají závislost dráhy rovnoměrného pohybu tělesa na době pohybu a mohou tak sami dojít ke zjištění, že při rovnoměrném pohybu tělesa je dráha přímo úměrná době pohybu a konstantou úměrnosti je rychlost tělesa. Grafickému znázornění této přímé úměrnosti je věnovaná závěrečná část podkapitoly. Žáci se zde učí převést údaje o pohybu, které zjistili při pokusu, do grafické podoby. Docházejí ke skutečnosti, že grafem závislosti dráhy rovnoměrného pohybu tělesa na čase je přímka, učí se z grafu určit dráhu, znají-li dobu rovnoměrného pohybu tělesa, dobu, znají-li naopak dráhu rovnoměrného pohybu tělesa a z doby a dráhy odpovídajících libovolnému bodu grafu určit rychlost rovnoměrného pohybu. Porovnávají grafy rovnoměrných pohybů těles s různými rychlostmi pohybu.

V podkapitole ”Průměrná rychlost pohybu tělesa” autoři žáky na úvod motivují otázkou, zda můžeme mluvit také o rychlosti nerovnoměrného pohybu, a úvahou o pohybu rychlíku a jeho rychlosti, známe-li jeho dráhu a dobu pohybu a víme-li, že vlak zastavoval v několika stanicích. V této podkapitole je zaveden jeden z důležitých pojmů týkajících se pohybu tělesa, a to ”průměrná rychlost pohybu”. Autoři se také snaží žáky přimět k zamyšlení nad tím, co se dá o průběhu pohybu z údaje o průměrné rychlosti říci. Na konci podkapitoly jsou zde ještě vymezeny pojmy ”zrychlený a zpomalený pohyb”.

Rauner K., Havel V., Prokšová J., Randa M.: *Fyzika 7, učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia,* nakladatelství Fraus, Plzeň 2005 [12]:

V této učebnici se žáci s kinematikou seznamují v kapitole nazvané ”Pohyb tělesa”. Kapitola má deset podkapitol: ”Co je pohyb?”, ”Posuvný a otáčivý pohyb”, ”Průměrná rychlost”, ”Okamžitá rychlost”, ”Měření rychlosti”, ”Rovnoměrný a nerovnoměrný pohyb”, ”Kreslíme grafy”, ”Dráha rovnoměrného pohybu”, ”Dráha nerovnoměrného pohybu” a ”Výpočet doby rovnoměrného pohybu”.

Každá podkapitola začíná motivačním odstavcem. Do textu jednotlivých podkapitol jsou vkládány odstavce s malými ikonkami, které mají různý účel. Jedná se například o ikonku ”zamysli se”, ”vysvětlení”, ”zajímavost”, ”v praxi”, ”pozor na”, ”souvislost”, ”pokus”, ”domácí úkol” a jiné, kterými se žáci učí nad problémy zamýšlet a samostatně a aktivně přistupovat k učivu. Po stranách obsahu podkapitoly se objevují poznámky s různými informacemi a zajímavostmi z reálného života. Všechny podkapitoly obsahují také spoustu obrázků, které žákům pomáhají si lépe představit to, o čem se učí.

V první podkapitole s názvem ”Co je pohyb?” autoři žáky motivují různými příklady pohybů tělesa, které jsou pro ně zajímavé. Rozlišují zde klid a pohyb tělesa, zmiňují relativnost pohybu a definují vztažnou soustavu a vztažné těleso, trajektorii a dráhu, rozdělují pohyby podle tvaru trajektorie. Podkapitola je zakončena (stejně jako všechny podkapitoly) celkovým shrnutím a částí, kde jsou formulovány otázky a úkoly.

Druhá podkapitola nazvaná ”Posuvný a otáčivý pohyb” definuje posuvné a otáčivé pohyby jako základní pohyby tělesa a zabývá se rozdíly mezi těmito pohyby (trajektorie, osa otáčení...). Uvádí také několik příkladů těchto pohybů.

Třetí, čtvrtá a pátá podkapitola (s názvy ”Průměrná rychlost”, ”Okamžitá rychlost”, ”Měření rychlosti”) se zabývá rychlostí pohybu tělesa. Autoři definují průměrnou rychlost pohybu tělesa podílem dráhy a času a okamžitou rychlost pohybu tělesa jako průměrnou rychlost určenou v nesmírně krátkém časovém úseku. Uvádějí zde rozdíly mezi průměrnou a okamžitou rychlostí (popis pohybu, směr okamžité rychlosti, znázornění okamžité rychlosti). Třetí podkapitola je také věnována jednotkám rychlosti a jejich převodům a najdeme zde spoustu příkladů pohybů z praxe (rychlost pohybu Země kolem Slunce, rychlost pohybu chodce, cyklisty, zvířat apod.). V páté podkapitole se žáci dozvídají, jakými metodami a kterými přístroji se rychlost pohybu těles měří.

V šesté podkapitole nazvané ”Rovnoměrný a nerovnoměrný pohyb” autoři rozdělují pohyby těles podle časového průběhu rychlosti na rovnoměrné a nerovnoměrné pohyby. Jsou zde popisovány posuvné a otáčivé rovnoměrné a nerovnoměrné pohyby těles na různých příkladech.

Sedmá kapitola nazvaná ”Kreslíme grafy” je, jak už název napovídá, celá věnovaná grafům. Žáci se zde seznamují s grafickou podobou popisu pohybu tělesa. Na začátku článku pracují s pojmy ”vodorovná, svislá osa grafu”, ”popis osy”, ”stupnice”, ”měřítko”, později se učí zapisovat údaje o pohybu do tabulky a pak do grafu.

V osmé a deváté podkapitole s názvy ”Dráha rovnoměrného pohybu” a ”Dráha nerovnoměrného pohybu” autoři formulují závislost mezi dráhou, kterou těleso při pohybu urazí, rychlostí a dobou, za kterou těleso dráhu urazí. Žáci se naučí znázorňovat časový průběh rychlosti rovnoměrného pohybu tělesa a z něj určit dráhu jako plochu obdélníka pod úsečkou vymezenou začátkem a koncem pohybu. Podobně u nerovnoměrného pohybu tělesa žáci docházejí ke zjištění, že dráha opět odpovídá ploše pod křivkou znázorňující časový průběh rychlosti.

Poslední desátá podkapitola nazvaná ”Výpočet doby rovnoměrného pohybu” se zabývá dobou u rovnoměrného pohybu tělesa, kterou je důležité znát (jak autoři uvádějí) například při plánování cesty, výletu a podobně. Čas, za který těleso urazí určitou dráhu určitou průměrnou rychlostí, autoři definují jejich podílem.

2.2 Učivo z kinematiky na gymnáziu

V první části této kapitoly uvádím stručný přehled učiva z kinematiky na gymnáziu (v bodech). Přehled učiva jsem vytvořila na základě témat uváděných v učebnicích pro gymnázia.

Druhá část kapitoly obsahuje komentář ke dvěma učebnicím fyziky pro gymnázia se zaměřením na učivo kinematiky. První učebnice je součástí ucelené řady učebnic fyziky, které jsou v současné době na gymnáziu velmi často používané, druhá učebnice pak patří mezi ty, se kterými jsem se při svém studiu setkala já.

2.2.1 Přehled učiva na gymnáziu:

- Čím se zabývá kinematika hmotného bodu
- Hmotný bod
- Vztažné těleso, vztažná soustava
- Polohový vektor hmotného bodu, jeho velikost a směr
- Trajektorie hmotného bodu
- Dráha hmotného bodu
- Rychlost hmotného bodu, okamžitá rychlost, její směr a velikost
- Rovnoměrný pohyb hmotného bodu
- Rychlost u rovnoměrného pohybu

- Dráha u rovnoměrného pohybu
- Graf závislosti dráhy a velikosti rychlosti rovnoměrného pohybu na čase
- Velikost a směr rychlosti při přímočarém a křivočarém rovnoměrném pohybu
- Zrychlení hmotného bodu, okamžité zrychlení, jeho směr a velikost
- Jednotka zrychlení a její odvození
- Tečné a normálové zrychlení hmotného bodu
- Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb hmotného bodu
- Zrychlení, rychlost a dráha u rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu
- Rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb hmotného bodu
- Zrychlení, rychlost a dráha u rovnoměrně zpomaleného přímočarého pohybu
- Graf závislosti dráhy a velikosti rychlosti rovnoměrně zrychleného (resp.zpomaleného) přímočarého pohybu na čase
- Volný pád
- Tíhové zrychlení, jeho směr a velikost
- Vrh svislý, šikmý a vodorovný
- Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici
- Úhlová rychlost hmotného bodu při pohybu po kružnici, její směr a velikost
- Jednotka úhlové rychlosti

- Oběžná doba (perioda) pohybu hmotného bodu po kružnici
- Frekvence pohybu hmotného bodu po kružnici
- Jednotka frekvence
- Dostředivé zrychlení u rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici, jeho směr a velikost
- Příklady nerovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici
- Skládání pohybů a rychlostí
- Princip nezávislosti pohybů

2.2.2 Učebnice fyziky pro gymnázia:

Bednařík M., Široká M.: *Fyzika pro gymnázia, Mechanika*, nakladatelství Prometheus, Praha 2000 [2]:

V této učebnici mohou studenti získat nové poznatky o pohybu těles v kapitole ”Kinematika hmotného bodu”. Tato kapitola se skládá z dvanácti podkapitol s názvy ”Mechanický pohyb”, ”Poloha hmotného bodu”, ”Trajektorie a dráha hmotného bodu”, ”Rychlost hmotného bodu”, ”Rovnoměrný pohyb”, ”Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb”, ”Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu”, ”Volný pád”, ”Skládání pohybů a rychlostí”, ”Rovnoměrný pohyb po kružnici”, ”Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici”, ”Zrychlení při nerovnoměrném křivočarém pohybu”.

V úvodní části kapitoly ”Kinematika hmotného bodu” autoři definují pojem ”hmotný bod ”, jako myšlenkový model tělesa. Nahrazují jím těleso, jehož rozměry a tvar nejsou při popisu zkoumaného děje podstatné a studenty informují o tom, proč tento pojem zavádí a zdůrazňují, že hmotný bod, který zastupuje těleso, má hmotnost rovnou hmotnosti tělesa. Na závěr kapitoly ”Kinematika hmotného bodu” se nachází shrnutí učiva celé kapitoly.

První podkapitola ”Mechanický pohyb” začíná uvedením několika příkladů těles v klidu a v pohybu a následuje diskuse o tom, co je to ”klid tělesa”. Těmito

úvahami jsou studenti seznámeni s pojmem ”vztažné těleso” a se skutečností, že popis klidu nebo pohybu tělesa závisí na volbě vztažného tělesa.
Na konci této podkapitoly mohou studenti najít řadu úloh, které slouží k procvičení a prohloubení učiva. Podobné úlohy lze najít na konci každé podkapitoly.

V druhé podkapitole s názvem ”Poloha hmotného bodu” se studenti učí popsat pohyb tělesa použitím vztažné soustavy, určují polohu hmotného bodu pomocí jeho souřadnic a pracují s pojmy ”polohový vektor”, ”velikost polohového vektoru” (jako vzdálenost hmotného bodu od počátku souřadnic) a ”směr polohového vektoru” (užitím úhlů, které polohový vektor svírá s osami souřadnic).

Další podkapitolou je ”Trajektorie a dráha hmotného bodu”. Na počátku je studentům vysvětleno, co je to trajektorie hmotného bodu, jaký může být její tvar v závislosti na volbě vztažné soustavy a jakým způsobem se dělí pohyby podle tvaru trajektorie. K výkladu o trajektorii hmotného bodu autoři uvádějí příklad pohybu automobilu, jedoucího po přímé silnici. Na tomto příkladu demonstrují oba druhy pohybu, přímočarý (pohyb středu kola) a křivočarý (pohyb bodu na obvodu kola). Dále je zde definovaná ”dráha hmotného bodu” jako délka trajektorie, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu. Na dvou jednoduchých příkladech přímočarého a křivočarého pohybu je zde studentům vysvětleno, jak lze dráhu měřit.
Poslední odstavec článku se zabývá grafickým záznamem pohybu, konkrétně sdělením, že dráha je funkcí času, a ukázkou grafu závislosti dráhy hmotného bodu na čase.

Podkapitola ”Rychlost hmotného bodu” začíná příkladem pohybu traktoru a osobního automobilu, které vyjedou současně z téhož místa a jedou po téže silnici do jiného místa. Na odlišných pohybech obou vozidel autoři demonstrují, co je to ”průměrná rychlost” a definují průměrnou rychlost jako podíl dráhy a času, za který hmotný bod tuto dráhu urazí. Následující část článku je věnována jednotkám rychlosti. V poslední části podkapitoly je využívána znalost pojmů ”trajektorie hmotného bodu” a ”polohový vektor” z předchozích podkapitol a je zde zavedena okamžitá rychlost jako vektorová fyzikální veličina, která má směr tečny k trajektorii hmotného bodu a je orientována ve směru změny polohového vektoru. Velikost okamžité rychlosti je zde definována jako průměrná rychlost ve velmi malém časovém intervalu na velmi malém úseku trajektorie (pojem průměrné rychlosti studenti znají ze základní školy).

V podkapitole ”Rovnoměrný pohyb” autoři na začátku článku rozebírají rovnoměrný přímočarý pohyb na jednoduchém příkladu pohybu vozíku. Hodnoty času a dráhy jsou zaznamenány do tabulky a z nich je pak sestrojen graf závislosti dráhy na čase. Z příkladu pohybu vozíku autoři odvozují vztahy, které platí pro velikost okamžité rychlosti a pro závislost dráhy na čase a sestrojují grafy závislosti velikosti rychlosti rovnoměrného pohybu na čase, dráhy rovnoměrného pohybu při

počáteční dráze s_0 a dráhy rovnoměrného pohybu, který začíná v čase t_0 . Všechny vztahy uvedené v tomto článku mohou studenti použít při přímočarém i křivočarém pohybu.
Důležitá je také poznámka o velikosti okamžité rychlosti, která je u rovnoměrného pohybu rovna průměrné rychlosti.

V podkapitole ”Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb” autoři nejprve studentům připomenou pojem ”nerovnoměrného přímočarého pohybu” a poté se celý článek zabývá nejjednoduššími nerovnoměrnými pohyby, pohybem rovnoměrně zrychleným přímočarým a pohybem rovnoměrně zpomaleným přímočarým. Na začátku je definováno ”zrychlení” jako vektorová fyzikální veličina, která charakterizuje změnu vektoru rychlosti a ”průměrné zrychlení”, jehož velikost je rovna podílu změny velikosti rychlosti a časového intervalu, v němž se rychlost změnila. Odstavec končí poznámkou o jednotce zrychlení a jejím odvození.
V druhé polovině podkapitoly se studenti dozvídají, že velikost zrychlení je u rovnoměrně zrychlených a zpomalených pohybů nezávislá na čase a velikost okamžité rychlosti je při nulové počáteční rychlosti přímo úměrná času. Dále je zde uvedeno, jakým způsobem velikost rychlosti hmotného bodu, který koná rovnoměrně zrychlený (resp. rovnoměrně zpomalený) pohyb s počáteční rychlostí o velikosti v_0 , závisí na čase, a jak vypadají grafy těchto závislostí. Podkapitola končí řešeným příkladem na rovnoměrně zpomalený pohyb.

Podkapitola ”Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu” začíná záznamem pokusu pohybu vozíčku, který se pohybuje přímočaře a rovnoměrně zrychleně. Z tohoto záznamu a s využitím znalosti o rychlosti rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu z předchozí podkapitoly studenti zjišťují, že dráha rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí je přímo úměrná druhé mocnině času a také, jaké vztahy platí pro závislost dráhy rovnoměrně zrychleného (resp. zpomaleného) pohybu s počáteční rychlostí o velikosti v_0 na čase.
Studenti se zde mohou seznámit i s grafickým znázorněním dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou a s nenulovou počáteční rychlostí.
Podkapitola opět končí řešeným příkladem na rovnoměrně zpomalený pohyb, kde je také zakreslen graf dráhy.

V podkapitole ”Volný pád” je rozebírán zvláštní případ rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí. Hned na začátku autoři uvádějí, že volný pád je pohyb tělesa volně puštěného v blízkosti povrchu Země ve vakuu a zdůrazňují předpoklad o pádu ve vakuu proto, aby padající těleso nebylo nadlehčováno vzduchem a aby byl zanedbatelný odpor vzduchu.

O tom, že volný pád je pohyb rovnoměrně zrychlený, se mohou studenti přesvědčit pokusem s kuličkovým padostrojem, který je v článku popsán a zakreslen.
V dalším odstavci autoři studenty seznamují s pojmem ”tíhové zrychlení”, s jeho směrem a změnou velikosti v závislosti na zeměpisné šířce a nadmořské výšce, zmiňují se o hodnotě normálního tíhového zrychlení a uvádějí přibližnou velikost tíhového zrychlení v naší zeměpisné šířce. Studenti se také dozvídají, že tíhové zrychlení je pro všechna tělesa ve vakuu stejné (z pokusu s Newtonovou trubicí). Podkapitola ”Volný pád” opět končí řešeným příkladem.

V podkapitole ”Skládání pohybů a rychlostí” jsou na začátku článku uvedeny příklady, kdy hmotný bod koná dva nebo více pohybů současně a pak je tu rozebírán pohyb motorové loďky, která pluje po hladině řeky, je unášena proudem řeky a poháněna motorem. Výsledná rychlost loďky vzhledem k břehům řeky je pak vektorovým součtem obou rychlostí (rychlosti proudu řeky a rychlosti motoru). V článku je zakresleno skládání rychlostí pomocí vektorového rovnoběžníku. Studenti také zjišťují (opět na příkladu pohybující se loďky), jakým způsobem dochází ke skládání rychlostí v případech, kdy leží obě skládané rychlosti v téže přímce nebo naopak, jsou-li skládané rychlosti navzájem kolmé.
Na konci podkapitoly je formulován a vysvětlen (na příkladu pohybu loďky) princip nezávislosti pohybů.
Poslední odstavec je věnován poznámce o trajektorii složeného pohybu.

Podkapitola ”Rovnoměrný pohyb po kružnici” seznamuje studenty s nejjednodušším křivočarým pohybem, s rovnoměrným pohybem hmotného bodu po kružnici, se kterým se v praxi mohou často setkat. Jedná se například o pohyb bodů na obvodu gramofonové desky, brusného kotouče, setrvačníku a podobně. Před samotným popisem rovnoměrného pohybu po kružnici studenty seznámí se skutečností, že velikost rychlosti u tohoto pohybu je konstantní, směr rychlosti se však neustále mění.
Pro popis rovnoměrného pohybu po kružnici autoři volí vztažný bod ve středu kružnice a rovněž volí základní směr – polopřímku procházející vztažným bodem. Spojnici středu kružnice a pohybujícího se hmotného bodu nazývají ”průvodičem hmotného bodu” a úhel, který průvodič svírá s polopřímkou (základním směrem), nazývají ”úhlovou dráhou”. Velikost tohoto úhlu v radiánech definují jako poměr délky oblouku kružnice a poloměru této kružnice.
Dále pro popis pohybu zavádějí pojem ”úhlové rychlosti” jako podíl úhlové dráhy, kterou opíše průvodič za určitou dobu, a této doby a zmiňují jednotku úhlové rychlosti. V článku je popisován pouze rovnoměrný pohyb po kružnici, u kterého se nemění jeho úhlová rychlost a úhlová dráha je lineární funkcí času.

V druhé polovině podkapitoly najdeme také pojmy ”perioda pohybu ” a ”frekvence pohybu” a vztahy, které platí mezi periodou, frekvencí, úhlovou rychlostí a velikostí rychlosti pohybu hmotného bodu po kružnici.

Předposlední podkapitola ”Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici” navazuje na předchozí podkapitolu, ve které se studenti dozvěděli, že při rovnoměrném pohybu po kružnici se velikost jeho rychlosti nemění, mění se však směr rychlosti.

V této kapitole je na obrázku nakreslena část trajektorie hmotného bodu, který koná rovnoměrný pohyb po kružnici. Na obrázku jsou znázorněna dvě různá místa na obvodu kružnice, kde se hmotný bod nacházel, rychlosti příslušející daným místům a úhel, který opsal průvodič hmotného bodu za dobu, kdy se hmotný bod dostal z jednoho místa do druhého. Za předpokladu, že tato doba je velmi malá, je z obrázku odvozen vztah, který platí pro zrychlení rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici a jeho velikost. Použitím vztahu z předchozí podkapitoly autoři odvozují také závislost mezi zrychlením u rovnoměrného pohybu po kružnici a úhlovou rychlostí. Protože u rovnoměrného pohybu po kružnici směřuje toto zrychlení do středu kružnice, nazývají ho autoři dostředivým zrychlením.

Celá kapitola o kinematice hmotného bodu končí podkapitolou ”Zrychlení při nerovnoměrném křivočarém pohybu”. Na začátku podkapitoly je zmínka o případech, kdy hmotný bod koná nerovnoměrný pohyb po kružnici (například bod na obvodu roztáčejícího se nebo zastavujícího kola). V těchto případech se mění nejen směr rychlosti, ale i její velikost, proto se celkové zrychlení hmotného bodu rozkládá na dvě navzájem kolmé složky – na tečné a normálové zrychlení. Tečné zrychlení autoři popisují jako zrychlení, které vyjadřuje změnu velikosti rychlosti, leží na stejné vektorové přímce jako okamžitá rychlost a má-li s ní stejný směr, je pohyb zrychlený, má-li opačný směr než okamžitá rychlost, je pohyb zpomalený. Normálové zrychlení pak popisují jako zrychlení, které vyjadřuje změnu směru rychlosti, je k okamžité rychlosti kolmé a směřuje stále do středu kruhového oblouku, po němž se hmotný bod pohybuje, je tedy totožné s dostředivým zrychlením (zavedeným v minulé kapitole).

Na konci podkapitoly je formulován poznatek o tom, že celkové zrychlení hmotného bodu je vektorovým součtem tečného a normálového zrychlení a jakým způsobem se dá vyjádřit jeho velikost.

Vachek J. a kol..: *Fyzika pro I.ročník gymnázií,* SPN, Praha 1984 [15]:

V této starší učebnici mohou studenti získat nové poznatky o pohybu těles v kapitole ”Kinematika hmotného bodu”. Tato kapitola se skládá ze čtrnácti podkapitol s názvy ”Mechanický pohyb”, ”Druhy pohybů, trajektorie”,

”Kinematický popis pohybu”, ”Posunutí”, ”Skládání posunutí”, ”Skalární a vektorové fyzikální veličiny”, ”Rovnoměrné a nerovnoměrné pohyby”, ”Pohyb rovnoměrný, pohyb rovnoměrný přímočarý”, ”Rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu”, ”Zrychlení rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu”, ”Dráha pohybu rovnoměrně zrychleného”, ”Volný pád”, ”Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici”, ”Dostředivé zrychlení”.

V prvních dvou podkapitolách nazvaných ”Mechanický pohyb” a ”Druhy pohybů, trajektorie” se studenti obdobně jako v předchozí učebnici seznamují s pojmy: hmotný bod, vztažné těleso a vztažná soustava, trajektorie hmotného bodu, posuvný a otáčivý pohyb.

Třetí podkapitola s názvem ”Kinematický popis pohybu” se zmiňuje o tom, že kinematika je tou částí mechaniky, která se zabývá určováním poloh bodů a jejich změn v čase a popisuje, jak se tělesa pohybují, ale neuvažuje, co je příčinou pohybu. Pro kvantitativní popis pohybu je zde zaveden (obdobně jako v předchozí učebnici) pojem ”dráhy hmotného bodu” jako délky trajektorie, po níž se hmotný bod pohyboval.

Na rozdíl od předchozí učebnice autoři do kapitoly o kinematice zařadili také čtvrtou a pátou podkapitolu s názvy ”Posunutí” a ”Skládání posunutí”, které se zabývají, jak je zřejmé z názvu, vektory posunutí a jejich skládáním. V předchozí učebnici předchází kapitole o kinematice kapitola o vektorových a skalárních veličinách, kde je na příkladu síly rozebráno násobení a dělení vektoru reálným číslem, sčítání a odčítání vektorů a rozklad vektoru do dvou daných směrů.

Šestá podkapitola ”Skalární a vektorové fyzikální veličiny” se podrobně zabývá pojmy ”skalární fyzikální veličina” (skalár) a ”vektorová fyzikální veličina” (vektor) a příklady těchto veličin, grafickým znázorněním vektoru, operacemi sčítání, odčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem a rozkladem vektoru do daných směrů.
Toto učivo je v předchozí učebnici zařazováno postupně do různých podkapitol podle toho, jaká skalární nebo vektorová fyzikální veličina se právě probírá.

V sedmé až čtrnácté podkapitole jsou obdobným způsobem jako v předchozí učebnici studenti uvedeni do problematiky rovnoměrných a nerovnoměrných pohybů, rovnoměrného přímočarého pohybu, rovnoměrného pohybu po kružnici a volného pádu. Na rozdíl od předchozí učebnice autoři nezařadili do kapitoly o kinematice hmotného bodu téma skládání pohybů a rychlostí.

Na konci každého článku studenti najdou stejně jako v předchozí učebnici řadu úloh k procvičení učiva.

V závěru kapitoly ”Kinematika hmotného bodu” se nachází shrnutí učiva celé kapitoly.

2.3 Učivo z kinematiky na vysoké škole

V této části kapitoly uvádím část sylabu pro vysokoškolský kurz fyziky pro studenty MFF UK. Jedná se o kurz pro učitele fyziky na základní škole, předmět Fyzika I (mechanika). Ze sylabu vybírám pouze tu část, která se týká tématu mé diplomové práce, tedy kinematiky hmotného bodu. Připojuji také stručný výtah ze dvou učebnic určených pro studenty fyziky na vysoké škole týkající se kinematiky hmotného bodu.

2.3.1 VŠ kurz

- Kinematika hmotného bodu
- Popis jednorozměrného pohybu hmotného bodu
- Základní kinematické veličiny (poloha, rychlost, zrychlení)
- Měření základních kinematických veličin
- Popis základních kinematických veličin tabulkou, grafem a analytickým vyjádřením
- Přechod $x(t) – v(t) – a(t)$ a obráceně
- Trojrozměrný pohyb
- Vektorový a skalární popis
- Skládání a rozklad pohybů, princip superpozice

2.3.2 Učebnice fyziky pro vysoké školy

Učebnice, jejichž stručnou charakteristiku zde uvádím, používají převážně studenti učitelství fyziky.

Kvasnica J. a kol.: *Mechanika*, nakladatelství Academia, Praha, 1988 [8]:

Tato učebnice vznikla z dlouholetých přednášek autorů na matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze a je určena pro posluchače fyziky prvního ročníku vysoké školy. Obsahuje sice některé matematické partie, které přesahují předpokládané středoškolské znalosti, ale ty jsou v potřebném rozsahu vysvětleny v matematických dodatcích. Učebnice je vhodná jak pro studenty fyziky, tak i pro studenty technických oborů.

Kinematika je v učebnici zpracována v kapitole ”Kinematika hmotného bodu”, která obsahuje tři podkapitoly s názvy ”Prostor a čas”, ”Poloha, trajektorie, rychlost a zrychlení hmotného bodu” a ”Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě”. Ke kapitole je připojeno několik typických řešených úloh, které slouží k aktivnímu osvojení probírané látky.

První podkapitola nejprve popisuje, čím se zabývá kinematika a dynamika těles a pak rozebírá obecné pojmy, například referenční neboli vztažné těleso, referenční soustava, relativnost pohybu, hmotný bod (vhodnější pojem by podle autorů byl bodová hmotnost), prostor jako trojrozměrné kontinuum, čas jako jednorozměrné kontinuum. Je zde zmiňován také Newtonův postulát absolutního prostoru a absolutního času nezávislého na hmotných objektech a na jejich pohybech a pojem prostoročasu v teorii relativity.

V druhé podkapitole autoři postupně odvozují (jak už z názvu podkapitoly plyne) tvar polohového vektoru v kartézské, cylindrické a sférické soustavě souřadnic, délku trajektorie jako dráhu hmotného bodu, parametrické zadání trajektorie, průměrnou rychlost hmotného bodu v časovém intervalu, okamžitou rychlost hmotného bodu jako časovou derivaci polohového vektoru, poloměr křivosti, zrychlení hmotného bodu a jeho rozklad na tečné a normálové zrychlení, okamžité zrychlení hmotného bodu.

Třetí podkapitola se zabývá pohybem hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě. Autoři probírají dva základní případy. První je případ, kdy se jedna referenční soustava vůči druhé pohybuje rovnoměrně a přímočaře konstantní rychlostí, druhý je případ, kdy soustava rotuje s konstantní úhlovou rychlostí.

Popisem těchto pohybů autoři dochází ke Galileiho transformaci, zmiňují zde adiční teorém rychlostí Newtonovy mechaniky nebo Coriolisovo zrychlení.

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika, vysokoškolská učebnice obecné fyziky*; VUTIUM, Brno 2000 [3]:

Jedná se o české vydání americké vysokoškolské učebnice. Obtížnost a náročnost obsahu této učebnice je nižší než vysokoškolská, je proto vhodná nejen pro studenty prvního ročníku fyziky, ale i pro středoškolské studenty zajímající se o fyziku.

Učebnice má pět dílů, první a druhý díl (I. část) se zabývají mechanikou, druhý díl (II. část) termodynamikou, třetí díl elektřinou a magnetismem a ve čtvrtém díle se probírají elektromagnetické vlny, optika a relativita. Pátý díl je věnován moderní fyzice.

Téma kinematiky hmotného bodu je probíráno v druhé a čtvrté kapitole nazvané ”Přímočarý pohyb” a ”Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb”, i když i první kapitola (”Měření”) a třetí kapitola (”Vektory”) se tématu kinematiky také týká.

Kapitola ”Přímočarý pohyb” se skládá z devíti podkapitol: ”Pohyb”, ”Poloha a posunutí”, ”Průměrná rychlost”, ”Okamžitá rychlost”, ”Zrychlení”, ”Rovnoměrně zrychlený pohyb: speciální případ”, ”Rovnoměrně zrychlený pohyb: jiný přístup”, ”Svislý vrh”, ”Částicová fyzika”.

Kapitola ”Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb” se skládá z deseti podkapitol: ”Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb”, ”Poloha a posunutí”, ”Průměrná a okamžitá rychlost”, ”Průměrné a okamžité zrychlení”, ”Šikmý vrh”, ”Šikmý vrh: matematický popis”, ”Rovnoměrný pohyb po kružnici”, ”Vzájemný pohyb po přímce”, ”Vzájemný pohyb v rovině”, ”Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech”.

Učebnice obsahuje kontrolní otázky, které jsou zařazené do textu a mnoho řešených příkladů s následující strukturou: zadání, rozbor (obrázek), podrobné řešení a poznámky. Rady a náměty, které autoři do textu vkládají, dávají studentům návod, jak například postupovat při řešení úloh.

Každá kapitola končí článkem nazvaným ”Přehled a shrnutí”, který shrnuje nejdůležitější poznatky a vztahy z celé kapitoly. Studenti zde mohou najít také ”Cvičení a úlohy”, uspořádané podle obtížnosti, včetně úloh pro řešení s počítačem a problémových úloh, jejichž řešení přináší studentu nové poznatky.

Učebnice je ve svém výkladu velice názorná a vychází z konkrétních reálných situací a problémů.

Kapitola 3

Sbírky úloh

3.1 Přehled sbírek

V této části kapitoly uvádím sbírky, se kterými jsem se při tvorbě diplomové práce setkala.

Lepil O. a kol.: *Fyzika, sbírka úloh pro střední školy*, nakladatelství Prometheus, Praha 1995 [9]:

Sbírka obsahuje úlohy z různých tématických okruhů fyziky. Začíná kapitolou s názvem ”Úvod k řešení fyzikálních úloh”. Následují kapitoly: ”Mechanika”, ”Molekulová fyzika, termika”, ”Mechanické kmitání a vlnění”, ”Elektřina a magnetismus”, ”Optika”, ”Speciální teorie relativity”, ”Fyzika atomu” a ”Astrofyzika”. Na konci sbírky jsou uvedeny výsledky úloh.
Úloh je celkem 1336, jsou rozmanité a mají různý stupeň obtížnosti. U některých z nich najdeme také obrázky nebo grafy. Jedná se o početně zadané úlohy, obecně zadané úlohy, úlohy zadané grafem nebo vyžadující grafické řešení, experimentální úlohy nebo problémové úlohy. Vybrané typové úlohy mají zpracovaná podrobná řešení. Výběr úloh ve sbírce a jejich uspořádání do kapitol navazuje na tématickou řadu učebnic fyziky pro gymnázia. Sbírku využívají studenti gymnázií i ostatních středních škol a jejich učitelé již řadu let a díky její úspěšnosti byla zpracována také její elektronická verze.

Z kinematiky hmotného bodu sbírka obsahuje úlohy v podkapitolách ”Průměrná rychlost”, ”Rovnoměrný pohyb”, ”Rovnoměrně zrychlený pohyb”, ”Volný pád” a ”Rovnoměrný pohyb po kružnici”. Najdeme zde úlohy početně i obecně zadané, ale především úlohy zadané graficky nebo vyžadující grafické řešení (podkapitoly o rovnoměrném a rovnoměrně zrychleném pohybu).

Pro studenty středních škol, kteří se připravují k maturitě z fyziky nebo k přijímacím zkouškám na vysoké školy, připravil stejný kolektiv autorů také publikaci s názvem ”Sbírka testových úloh k maturitě z fyziky”, vydanou také v nakladatelství Prometheus. Sbírka je zpracována jako soubor testových úloh, které pokrývají všechna hlavní témata fyziky pro střední školy. Všechny úlohy v této sbírce mají podrobná řešení usnadňující studentům samostatnou přípravu.

Bartuška K.: ***Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I, Mechanika,*** **nakladatelství Prometheus, Praha, 1997 [1]:**

Jedná se o první díl čtyřdílné publikace, která pokrývá celé středoškolské učivo fyziky. Sbírka se skládá z šesti kapitol a obsahuje úlohy z mechaniky. Na začátku sbírky je článek nazvaný Postup při řešení fyzikálních úloh a následují kapitoly ”Kinematika”, ”Dynamika”, ”Práce, výkon, energie”, ”Gravitační pole”, ”Mechanika tuhého tělesa” a ”Mechanika kapalina plynů”. Každá kapitola začíná přehledem učiva týkajícího se daného tématu a pokračuje úlohami z dané oblasti fyziky. Sbírka je proto vhodná pro samostatné studium studentů středních škol i pro přípravu k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Úlohy obsahují zadání, zápis úlohy, vysvětlení budoucího postupu řešení, podrobné řešení a odpověď. Ve sbírce jsou uvedena různá řešení úloh, jejich diskuse a analýza typických chyb, kterých se studenti dopouštějí, což je důležité pro zpětnou vazbu studentů a rozvoj jejich fyzikálního myšlení. Autoři do sbírky zařadili také článek s názvem ”Postup při řešení fyzikálních úloh”, kde rozebírají hlavní zásady, jak by měl student při řešení fyzikálních úloh postupovat. Shrnují je do osmi kroků: čtení textu, zápis zadání úlohy, rozbor úlohy, obecné řešení úlohy, číselný výpočet, diskuse řešení, kontrola správnosti řešení a odpověď.

Kinematika hmotného bodu je procvičována v podkapitolách ”Rovnoměrný přímočarý pohyb”, ”Průměrná rychlost”, ”Rovnoměrně zrychlený pohyb”, ”Volný pád”, ”Rovnoměrně zpomalený pohyb”, ”Skládání pohybů a rychlostí” a ”Pohyb po kružnici”. Na začátku kapitoly je přehled nejdůležitějších vzorců a fyzikálních zákonů, které se pak používají při řešení následných úloh. V úlohách o pohybu (rovnoměrný přímočarý, rovnoměrně zrychlený či zpomalený) najdeme především úlohy zadané grafem nebo úlohy s grafickým řešením. Zajímavé jsou také poznámky za příklady, kde si mohou studenti uvědomit, jakých chyb se lze dopustit při řešení dané úlohy, nebo se mohou dozvědět něco o jiném způsobu řešení úlohy (např.”Velikost výsledné rychlosti člunu lze vypočítat také ze vztahu...”, ”Všimněte si odlišné polohy osy člunů...”, ”Obecné řešení lze odvodit ještě jiným způsobem...”, ”Proti tomuto řešení lze namítnout, že..., lze však snadno ukázat, že...”).

Kubínek R., Kolářová H.: ***Fyzika v příkladech a testových otázkách pro uchazeče o studium na VŠ*****, nakladatelství Rubico, Olomouc, 2005 [7]:**

Tato sbírka je souborem fyzikálních úloh ve formě početních příkladů, testových otázek s možností výběru jedné nebo dvou správných odpovědí a otázek vyžadujících volnou tvorbu odpovědi. Je koncipována tak, aby byla použitelná pro studenty středních škol k procvičení probraného učiva a pro přípravu k přijímacím zkouškám na většinu typů vysokých škol.
Sbírka obsahuje několik tématických okruhů nazvaných ”Fyzikální veličiny a jejich jednotky”, ”Mechanika”, Gravitační pole”, ”Mechanické kmitání a vlnění”, ”Molekulová fyzika a termodynamika”, ”Elektřina a magnetismus”, ”Optika”, ”Fyzika atomového jádra” a ”Astrofyzika”.
Před každým tématickým okruhem je teoretický úvod, který shrnuje základní poznatky důležité pro řešení daných úloh.

Z kinematiky se zde autoři v otázkách věnují především grafickému znázornění pohybů, pojmu trajektorie a relativnosti klidu a pohybu v závislosti na volbě vztažné soustavy.

Webová sbírka řešených příkladů z fyziky pro základní a střední školy [16]:
http://www.gym-karvina.cz/sbirka_prikladu.htm

Jedná se o projekt realizovaný v rámci programu ”Vzdělávání pro konkurenceschopnost”, jejímž autorem je Gymnázium Karviná. Realizace projektu byla zahájena v roce 2008 a na základě toho byla vytvořena webová stránka více než 250 řešených příkladů z fyziky pro žáky základních a středních škol.

V současné době sbírka obsahuje celkem 252 vložených příkladů z následujících oblastí fyziky: ”Mechanika”, ”Molekulová fyzika a termika”, ”Mechanické kmitání a vlnění”, ”Elektřina a magnetismus”, ”Optika”, ”Speciální teorie relativity”, ”Fyzika atomu” a ”Astrofyzika”.

Můžeme zde najít kromě samotných příkladů také přehled použitých fyzikálních konstant, převodník jednotek a vyhledávání dat, kde si uživatel může vyhledat příklady podle daného pojmu.

Příklady jsou rozděleny na úlohy pro základní školy a úlohy pro střední školy a mají tři stupně obtížnosti: nízký, střední a vysoký stupeň. Obtížnost úlohy je značena jednou, dvěma nebo třemi žárovkami v pravém horním rohu úlohy.

Uživatel si nejprve přečte zadání úlohy, poté si může otevřít okno s řešením úlohy a odpovědí. Řešení úlohy je sestaveno nejprve obecně a pak jsou doplněny číselné hodnoty. U některé z úloh je na jejím konci zařazena poznámka, například o pojmech gravitační síla a tíhová síla.

Příklady si lze vytisknout i ve formátu pdf.

Z kinematiky se zde setkáme například s úlohami na rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb, výpočet průměrné rychlosti, volný pád a jiné. Nenajdeme tu však mnoho úloh zadaných graficky nebo obsahující grafické řešení.

Sbírku lze najít na internetové adrese: www.sbirkaprikladu.cz.

3.2 Použité sbírky úloh

Dále uvádím sbírky úloh, ze kterých jsem přebírala některé úlohy do svého souboru nebo se jimi inspirovala.

Mandíková, D., Rojko, M.: ***Soubor úloh z mechaniky pro studium učitelství, I. část*****; MFF UK, Praha 1994 [10]:**

Jedná se o sbírku úloh určených pro cvičení k předmětu Fyzika I pro první semestr bakalářského studia učitelství fyziky na MFF UK. Obsahuje úlohy i s výsledky k tématům ”Kinematika hmotného bodu”, ”Dynamika posuvného pohybu hmotného bodu”, ”Dynamika kruhového pohybu hmotného bodu”, ”Inerciální a neinerciální soustavy souřadnic”, ”Hybnost, impuls, práce, výkon, energie”, ”Statika tuhého tělesa”, ”Těžiště, hmotný střed, moment setrvačnosti”, ”Dynamika tuhého tělesa”, ”Gravitační pole”, ”Pružnost, pevnost”.
Z této sbírky, konkrétně z části ”Kinematika hmotného bodu” jsem využila řadu osvědčených úloh s různými stupni obtížností od téměř základoškolských až po úlohy složité i pro vysokoškolské studenty.
Často jsem ovšem upravovala text tak, aby vycházel z reálných situací nebo byl alespoň pro studenty poutavější. S tím souvisela například i úprava zadaných hodnot (úloha *”Malý Pavlík“* nebo *”Myš a kočka“*).

Koudelková, H.: *Sbírka příkladů z mechaniky*, Diplomová práce; MFF UK, Praha 2003, dostupné na internetu [6]:
http://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/materialy/mechanika_sbirka/

Tuto sbírku vytvořila v rámci své diplomové práce absolventka studia učitelství fyziky na MFF UK. Jedná se o soubor příkladů z kinematiky a dynamiky hmotného bodu.
Sbírka má formu WWW stránek, k jejímu používání stačí internetový prohlížeč. Úlohy ve sbírce mají různou úroveň i obtížnost, podle nich jsou také zařazeny do různých kategorií (úlohy pro ZŠ, SŠ, VŠ, úvahové úlohy, výpočetní úlohy a podobně). Každý příklad obsahuje několik nápověd (kliknutím na ikonu si je uživatel může přečíst), dále řešení a výsledek. Na tuto sbírku jsem ve své práci navazovala, ovšem s tím, že jsem se soustředila pouze na část kinematiky hmotného bodu. Z této sbírky jsem také použila myšlenku strukturované nápovědy, její realizaci jsem však pojala trochu odlišným způsobem. Sbírka Hany Koudelkové byla pro mne inspirací i co se týče výběru úloh (například úloha Plavba voru je modifikací úlohy Plující loďka).

WWW stránky fyzikální olympiády, *http://fo.cuni.cz* [17]:

Tato webová stránka obsahuje zadání a řešení úloh použitých v domácích, regionálních a celostátních kolech všech kategorií fyzikální olympiády.
Z této internetové stránky jsem převzala některé úlohy do své sbírky (například úloha *"Sprinter"* nebo *"Basketbalista"*).

Mičkal, K.: *Sbírka úloh z technické mechaniky*, SNTL, Praha 1988 [11]:

Sbírka úloh pro střední odborná učiliště a střední školy s technickým zaměřením. V této knize byly úlohy podány většinou nezajímavým způsobem nebo byla jejich řešení příliš technicky zaměřená. Přesto mě ale některé úlohy zaujaly do té míry, že jsem je použila do své sbírky, přičemž jsem pro účely své práce modifikovala některá zadání a tím i řešení úloh (například úloha *"Zahradní hadice"* nebo *"Kamínek na římse"*).

Reichl, J.: *Sbírka příkladů z fyziky*, SPŠST Panská Praha [13]:

Sbírka příkladů z fyziky určená původně studentům 1. ročníku technického lycea jako doplněk ke studiu fyziky, kterou Jaroslav Reichl sestavil pro své studenty ze SPŠST Panská Praha.

Obsahuje celkem sedm kapitol: ”Kinematika hmotného bodu”, ”Pohyb po kružnici”, ”Dynamika hmotných bodů”, ”Práce, energie, výkon”, ”Gravitační pole”, ”Mechanika tuhého tělesa” a ”Mechanika kapalin”.
K jednotlivým úlohám jsou připojeny i číselné výsledky.
Některé úlohy mě inspirovaly při vytváření mých vlastních úloh, některé, například úlohu o dvou plavcích, jejíž text jsem upravila, jsem použila ve své sbírce (úloha *”Jak dlouhý je bazén?”*).

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika, vysokoškolská učebnice obecné fyziky*; VUTIUM, Brno 2000 [3]:

Stručnou charakteristiku této učebnice jsem zpracovala již v druhé kapitole diplomové práce v části ”Učebnice fyziky pro vysoké školy”. Jedná se o české vydání americké vysokoškolské učebnice, v jejichž pěti dílech je obsažen celý kurz obecné fyziky.

Způsob výkladu v učebnici je názorný, podrobný a bez dlouhého matematického odvozování. Lze tu najít velké množství motivačních otázek (na začátku každé kapitoly), kontrolních otázek (v průběhu kapitoly), řešených příkladů, cvičení a úloh, které mají úzký vztah k realitě.

Z prvního dílu této učebnice jsem převzala například úlohu *”Výtah”* a zařadila mezi úlohy zadané graficky.

Kapitola 4

Elektronická sbírka úloh

4.1 Charakteristika elektronické sbírky

4.1.1 Historie sbírky

Elektronická sbírka řešených úloh vznikla v roce 2006. Její tehdejší i současnou podobu stylizovala a naprogramovala RNDr. Zdeňka Koupilová, Ph.D.

ve spolupráci s RNDr.Danou Mandíkovou, CSc., Marií Snětinovou a Lenkou Matějíčkovou a dalšími studenty, kteří do ní přispívali úlohami v rámci svých bakalářských či diplomových prací. Sbírka v současné době obsahuje úlohy ze čtyř tématických celků a je i nadále rozšiřována a obohacována o další úlohy.

4.1.2 Hlavní myšlenka sbírky

Hlavní myšlenkou bylo vypracovat interaktivní sbírku řešených fyzikálních úloh z několika fyzikálních témat a umístit ji na internet tak, aby byla veřejně přístupná. Sbírka je určena primárně studentům prvního a druhého ročníku bakalářského studijního programu Fyzika na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Sbírku mohou využívat i studenti ostatních vysokých škol, případně studenti středních a základních škol se zájmem o fyziku. Sbírka může být také užitečná pro učitele jako pomůcka při výuce fyziky.

Sbírka je využívána jednak v rámci povinné výuky, jednak umožňuje studentům, aby si formou samostudia prohlubovali látku probíranou na cvičeních a díky zařazení i obtížnějších středoškolských úloh si případně doplnili středoškolskou látku a překlenuli problémy plynoucí z horších základů, které získali na střední škole.

Užitečnou a ceněnou pomůckou je zejména pro studenty distančních forem studia, kteří nemají možnost se účastnit přímé výuky.

Každá úloha ve sbírce má vypracované podrobné řešení s případným komentářem k problematickým místům, ale hlavně strukturované nápovědy, jejichž postupné zobrazování na webu umožňuje studentům řešit úlohu samostatně.

4.1.3 Současný stav sbírky

Elektronická sbírka je umístěna na katedrálním serveru katedry didaktiky fyziky na adrese http://fyzikalniulohy.cz. V současné době celá sbírka obsahuje celkem 550 zveřejněných úloh ze čtyř tématických oblastí – mechanika, elektřina a magnetismus, kvantová mechanika, molekulová fyzika a termodynamika. Jednotlivé tématické celky obsahují následující kapitoly:

Mechanika (obsahuje celkem 162 zveřejněných úloh)

- Kinematika hmotných bodů (70 úloh)
- Dynamika hmotných bodů (28 úloh)
- Inerciální a neinerciální vztažné soustavy (7 úloh)
- Hybnost, práce, energie a výkon (26 úloh)
- Mechanika tuhého tělesa (24 úloh)
- Gravitační pole (7 úloh)
- Mechanika kontinua (v současné době žádná zveřejněná úloha)

Elektřina a magnetismus (obsahuje celkem 233 zveřejněnýchúloh)

- Elektrostatika (76 úloh)
- Stejnosměrný elektrický proud (40 úloh)
- Stacionární magnetické pole (57 úloh)
- Nestacionární magnetické pole (23 úloh)
- Obvody se střídavými proudy (34 úloh)
- Elektromagnetické pole (3 úlohy)

Kvantová mechanika (obsahuje celkem 39 zveřejněných úloh)

- Úvod do kvantové mechaniky (2 úlohy)
- Relace neurčitosti (5 úloh)
- Nekonečně hluboká potenciálová jáma (13 úloh)

- Potenciálová jáma konečné hloubky (2 úlohy)
- Lineární harmonický oscilátor (4 úlohy)
- Atom vodíku (5 úloh)
- Počítání s operátory (v současné době žádná zveřejněná úloha)
- Další problémy (8 úloh)

Molekulová fyzika a termodynamika (obsahuje celkem 116 zveřejněných úloh)

- Základní poznatky (8 úloh)
- Změna vnitřní energie, práce a teplo (34 úloh)
- Ideální plyn (15 úloh)
- Reálný plyn (1 úloha)
- Tepelné děje v plynech (22 úloh)
- Pevné látky a kapaliny (31 úloh)
- Termodynamické potenciály (5 úloh)

V budoucnu bude sbírka obohacována o další úlohy v rámci výše uvedených fyzikálních okruhů a předpokládá se její rozšíření i o další tématické celky. V přípravě jsou úlohy z teoretické mechaniky.

4.2 Technické zpracování úloh

Autorkou současného webového rozhraní sbírky je, jak již bylo řečeno, RNDr. Zdeňka Koupilová, Ph.D.. Rozhraní je programováno v PHP4, ale využívají se zde i další webové technologie. Úlohy se ukládají do databáze MySQL. Text úloh je napsán v XHTML, vzorce jsou vytvářeny ve formátu LaTEX a interpretovány pomocí skriptu mimetex.cgi. Obrázky v úlohách jsou tvořeny převážně v programu CorelDraw X3, který jsem pro tvorbu svých obrázků využívala i já. Pro zobrazení ve sbírce je bylo nutné převést do formátu jpg nebo png.

Webové rozhraní sbírky se dělí na uživatelské, které je určené pro veřejnost, a administrátorské pro zadávání a úpravu úloh.

4.3 Struktura úloh

Úlohy jsou svými autory tvořeny v neveřejném administrátorském rozhraní a mohou obsahovat následující části:

- Název úlohy
- Zadání úlohy
- Rozbor úlohy
- Nápovědy k řešení úlohy a jejich řešení
- Řešení úlohy
- Komentáře k řešení či zadání úlohy
- Odpověď
- Odkazy na jiné úlohy

Všechny části nejsou pro autora konkrétní úlohy povinné. Úloha musí obsahovat pouze název a zadání, řešení a odpověď, ostatní části autor může a nemusí použít. Mezi doporučené oddíly patří také rozbor úlohy a nápovědy k řešení úlohy. Nápovědy mohou být použity samostatně ve formě například návodných otázek či doporučení nebo k nim mohou být připojena také řešení nápověd.

Komentáře k řešení nebo zadání úlohy a odkazy na jiné úlohy lze při tvorbě úlohy také použít, pokud je to vhodné a účelné.

Úlohy jsou označeny podle náročnosti příslušnou kategorií (ZŠ, SŠ, SŠ+ a VŠ). Pokud se úloha řeší nějakým méně obvyklým způsobem, může být zařazena do jedné ze speciálních kategorií – úloha řešená graficky, úloha řešená úvahou, komplexní úloha, úloha řešená neobvyklým ”trikem” a úloha s vysvětlením teorie.

4.3.1 Název úlohy

Uvedení názvu úlohy je pro autora povinné.

Název úlohy by měl být pro jejího řešitele zajímavý a lákavý, aby ho tak přiměl si úlohu na webové stránce otevřít a přečíst si její zadání. Zároveň by měl řešitel z názvu úlohy poznat, jakého tématu se týká.

Úlohy v elektronické sbírce nejsou číslovány. Důvodem je neustálé doplňování a rozšiřování sbírky o nové úlohy, které by tak musely být řazeny na konec, což by bylo z tématického hlediska nevhodné a uživatelé sbírky by pak měly problém se ve sbírce zorientovat.

Ve své práci jsem se snažila pro úlohy použít názvy, které by je spojovaly s realitou a vystihovaly, čeho se úloha týká (např. *”Výtah”*, *”Pozorování letadla”*, *”Mravenec na tyči”*, *”Jak dlouhý je bazén?”*).

4.3.2 Zadání úlohy

Zadání úlohy patří mezi povinné oddíly.

V elektronické sbírce je většina úloh inspirovaná úlohami z různých sbírek a jejich zadání je pak modifikací těchto úloh. V zadání je nejdůležitější zdůraznit, co je již dané a co je třeba zjistit (resp.vypočítat). Autor úlohy by se měl také vyhýbat smyšleným hodnotám a zadávat hodnoty, které by vycházely z reality.

Ve svých úlohách jsem se o to také snažila. Například v úlohách *”Malý Pavlík”* nebo *”Myš a kočka”*, kde jsem upravila zadané hodnoty, nebo v úloze *”Zahradní hadice”*, kde jsem modifikovala zadání, aby vycházelo ze skutečnosti.

4.3.3 Rozbor úlohy

Rozbor úlohy patří mezi doporučené části.

V rozboru je řešiteli úlohy předkládána hlavní myšlenka postupu řešení a rozebrána fyzikální podstata úlohy bez vzorců a výpočtů. Je to vhodné zejména u složitějších úloh.

V úlohách, které jsem tvořila, jsem rozbor úlohy použila pouze v úloze, kde bylo potřeba zdůraznit myšlenku řešení (například v úloze *"Zahradní hadice"* nebo *"Jak dlouhý je bazén?"*). V ostatních úlohách je rozbor řešení vlastně součástí nápověd.

4.3.4 Nápovědy k řešení úlohy

Nápověda k řešení úlohy je doporučená část úlohy.

Pro řešení úlohy je to podstatná a důležitá část a její použití v úloze je vlastně filozofií této sbírky, protože cílem tvorby sbírky je předložit studentům úlohy, které by mohli řešit především samostatně.

Nápověda k řešení úlohy má své opodstatnění hlavně na počátku, kdy se uživatel chystá úlohu řešit. Zde se totiž objeví první problém při řešení fyzikálních úloh a většina studentů pak úlohu buď neřeší vůbec nebo si jen přečtou celé řešení úlohy. Přitom pro rozvoj fyzikálního myšlení uživatele je důležité, aby úlohu řešil opravdu samostatně a s použitím vlastního úsudku. Proto by také nápovědy měly mít formu návodných otázek nebo doporučení. V úlohách mohou být použity buď samostatně nebo k nim mohou být připojena i řešení nápověd.

V úlohách z kinematiky hmotného bodu jsem používala nápovědy ve formě návodných otázek (např. "Mění se dráha s časem?", "Jaká matematická funkce popisuje...?", "Stačí nám k výpočtu...?") i doporučení (např. "Nakreslete si obrázek...", "Uvědomte si, jak...", "Zkuste si rozmyslet, jak...").

4.3.5 Řešení nápovědy

Řešení nápovědy nepatří mezi povinné ani mezi doporučené části úlohy.

Některé úlohy v celé elektronické sbírce uvádějí pouze nápovědy k řešení úlohy. Pomocí nich může uživatel úlohu samostatně řešit a svůj postup si poté zkontrolovat v oddíle "řešení úlohy".

V úlohách z kinematiky hmotného bodu jsem ve všech svých úlohách používala několik nápověd, z nichž ke každé bylo připojeno i její řešení. U některých úloh z kinematiky bývá postup řešení velmi zdlouhavý, proto se mi zdálo použití tohoto systému vhodné.

4.3.6 Řešení úlohy

Řešení úlohy je povinný oddíl úlohy.

Tato část obsahuje úplné a komentované řešení dané úlohy. V ”řešení úlohy” by se měl objevit přehledný, podrobný a přesný popis toho, jak se postupovalo při řešení úlohy a zdůvodnění, proč jsme tak postupovali, odkud jsme kterou veličinu získali nebo který vzorec jsme dosazovali. Je zřejmé, že se jedná o vůbec nejdelší oddíl celé úlohy, proto je řešení zpravidla rozděleno do několika dílčích částí. Každá dílčí část řešení, zejména každá matematická úprava, by měla být slovně okomentována. Části, ve kterých dochází k početním úpravám, by měly být přehledně oddělené, aby se řešitel mohl v řešení lépe orientovat. Pokud se v řešení nepracuje pouze s obecnými výpočty, mělo by zde být obsaženo také číselné dosazení a výpočet.

U každé úlohy z kinematiky hmotného bodu uvádím vždy celkové podrobné řešení úlohy.

4.3.7 Komentáře k řešení či zadání úlohy

Komentář k úloze nepatří ani mezi povinné ani mezi doporučené oddíly úlohy.

Záleží pouze na zadavateli úlohy, zda použití tohoto oddílu považuje za účelné. Komentář se používá zejména v úlohách, které lze řešit více než jedním postupem. Tyto postupy je vhodné naznačit právě v oddíle ”komentář k řešení úlohy”. Také může zadavatel úlohy účelně okomentovat i zadání úlohy, jeho reálnost či možné modifikace.

V úlohách z kinematiky hmotného bodu jsem komentář také použila, například v úloze *”Zahradní hadice”*, kde jsem v řešení úlohy okomentovala chybný postup, kterého se obvykle studenti dopouštějí.

4.3.8 Odpověď

Odpověď je povinný oddíl úlohy.

Tato část úzce souvisí se zadáním úlohy. V oddíle ”odpověď ” uživateli sdělujeme, co jsme zjistili (resp. vypočítali) nebo přímo odpovídáme na otázky formulované v oddíle ”zadání úlohy”. Odpověď může být vyjádřena slovně či obecným vztahem a v případě číselného zadání úlohy také číselným výsledkem.

V úlohách z kinematiky hmotného bodu jsem používala všechny tři typy odpovědi.

4.3.9 Odkazy

Odkaz nepatří mezi povinné ani mezi doporučené oddíly úlohy.

Zadavatel může použít odkazy na jiné úlohy, které nějakým způsobem souvisí s danou úlohou. Většinou se jedná o tématickou souvislost, odkazuje se na úlohu, která je tématicky podobná s danou úlohou, ať už jde o složitější nebo jednodušší úlohu.

4.4 Vlastní soubor úloh z kinematiky

Vlastní soubor úloh z kinematiky hmotného bodu tvoří celkem 40 úloh s různou úrovní obtížnosti. Jsou zde převážně úlohy řešitelné na vysoké škole, ale také na úrovni středoškolské fyziky a několik úloh řešitelných na základoškolské úrovni. Každá úloha má vypracované úplné řešení, strukturované nápovědy a jejich řešení a odpověď. Některé úlohy obsahují také komentáře k řešení a rozbor úlohy.

4.4.1 Zařazení úloh v elektronické sbírce

Všechny úlohy jsou v elektronické sbírce zařazeny do tematického celku ”Mechanika”, kapitoly ”Kinematika hmotných bodů”. Úlohy jsou ještě dále rozděleny do šesti podkapitol. V podkapitole ”Pohyb daný graficky” najdeme pět úloh, jejichž zadání vychází z grafů. V podkapitole s názvem ”Rovnoměrný přímočarý pohyb” je sedm úloh, například základní úlohy na výpočet průměrné rychlosti nebo i méně typické, jako jsou úlohy na výpočet délky bazénu či vzdálenosti pozorovatele od letadla. V další podkapitole nazvané ”Zrychlený přímočarý pohyb” najdeme šest úloh, od úloh méně složitých na použití základních znalostí o zrychleném přímočarém pohybu až po náročnější úlohy, kde jsou například hodnoty zrychlení pohybu v závislosti na čase zaznamenány v tabulce. V podkapitole ”Pohyb po kružnici” jsou celkem čtyři úlohy, jedna z nich je na pohyb zadaný číselnou rovnicí. Podkapitola ” Volný pád, vrhy” obsahuje celkem sedm úloh, které se zabývají pohyby těles v gravitačním poli Země. V podkapitole ” Pohyb v rovině a v prostoru” najdeme jedenáct úloh, většinou se jedná o náročnější středoškolské a vysokoškolské úlohy.

4.4.2 Stručná charakteristika úloh

Pohyb daný graficky

- *Pohyb daný graficky I*

  Základní středoškolská úloha na použití grafů v kinematice hmotného bodu. Řešitel musí popsat pohyby autíček čtením z grafů závislostí drah na čase, říct, co se děje s rychlostmi a drahami, sestrojit grafy závislostí rychlostí na čase.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [17].

- *Pohyb daný graficky II*

  Obtížnější středoškolská úloha na použití grafů v kinematice hmotného bodu. Jsou zde zakresleny průběhy souřadnic $x(t)$ (resp.souřadnic rychlostí $v_x(t)$) přímočarého pohybu, ze kterých je třeba sestrojit průběhy souřadnic rychlostí $v_x(t)$ (resp.souřadnic $x(t)$). Řešitel si musí uvědomit, jestli se jedná o reálné pohyby, a umět je znázornit pohybem prstu.
  Úlohu jsem převzala z [10].

- *Pohyb daný graficky III*

  Vysokoškolská úloha na použití grafů v kinematice hmotného bodu. V úloze je graficky zadaná závislost úhlového zrychlení kruhového kotouče na čase. K řešení je nutná znalost integrálního počtu.
  Úlohu jsem převzala z [10].

- *Výtah*

  Středoškolská úloha na použití grafů v kinematice hmotného bodu. Ze zakreslené časové závislosti polohy kabiny výtahu musí řešitel popsat pohyb kabiny a nakreslit závislosti souřadnic rychlosti a zrychlení kabiny na čase. V poslední části úlohy popisujeme chování pružiny s kuličkou zavěšené u stropu kabiny během pohybu výtahu. Částečně se tedy jedná o úlohu z dynamiky hmotného bodu.
  Úlohu jsem převzala z [3].

- *Housenka*

  Základoškolská úloha na použití grafů v kinematice hmotného bodu. V úloze je na obrázku zaznamenaná stopa housenky s časovými údaji, kdy kde byla, ze kterých je třeba sestavit tabulku závislosti dráhy na čase a nakreslit graf. Řešitel pak z grafu určuje souřadnice housenky v jednotlivých časových okamžicích, průměrnou rychlost v jednotlivých intervalech a další úkoly.
  Úloha je od vedoucí diplomové práce RNDr. Mandíkové, CSc.

<u>Rovnoměrný přímočarý pohyb</u>

- *Průměrná rychlost auta*

  Základoškolská úloha na určení průměrné rychlosti u rovnoměrného přímočarého pohybu.
  Úlohu jsem převzala z [10].

- *Anička na výletě*

  Základoškolská úloha na určení průměrné rychlosti u rovnoměrného přímočarého pohybu. Úlohu lze řešit také graficky.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [17].

- *Dva cyklisté*

  Obtížnější základoškolská úloha na určení průměrné rychlosti u rovnoměrného přímočarého pohybu. Při řešení je důležité si uvědomit, co je to průměrná rychlost a jaký pro ni platí vztah.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [17].

- *Nezodpovědný řidič*

  Středoškolská úloha na určení průměrné rychlosti u rovnoměrného přímočarého pohybu. Úloha je řešená početně i graficky.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [3].

- *Pozorování letadla*

  Netypická základoškolská úloha na určení vzdálenosti letadla pohybujícího se rovnoměrným přímočarým pohybem od jeho pozorovatele. Při jejím řešení je důležitý nákres obrázku situace.
  Úlohu jsem převzala z [17].

- *Jak dlouhý je bazén?*

  Netypická základoškolská úloha na výpočet délky bazénu. Při jejím řešení využíváme toho, co víme o pohybu dvou plavců, kteří v bazénu trénují.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [13].

- *Pohyb loďky*

  Středoškolská úloha na skládání rychlostí v kinematice hmotného bodu.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [10].

Zrychlený přímočarý pohyb

- *Sprinter*

  Středoškolská úloha na určení rychlosti a zrychlení při zrychleném přímočarém pohybu. Část úlohy je věnována sestrojování grafů závislosti velikosti rychlosti na čase.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [17].

- *Chodec*

  Vysokoškolská úloha na zrychlený přímočarý pohyb. Velikost rychlosti je zde zadaná funkcí. K výpočtu dráhy a velikosti zrychlení využíváme integrální počet.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [11].

- *Ocelová kulička*

  Středoškolská úloha na rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb po nakloněné rovině.
  Úlohu jsem převzala z [10].

- *Brzdná dráha vlaku*

  Středoškolská úloha na rovnoměrně zpomalený pohyb. Úloha je řešená početně i graficky.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [17].

- *Malý Pavlík*

  Obtížnější středoškolská úloha na zrychlený přímočarý pohyb. Zrychlení pohybu v závislosti na čase jsou zde zaznamenána v tabulce. Řešitel musí z těchto údajů určit tvar funkce $a(t)$, narýsovat graf a určit průběhy velikosti rychlosti a polohy v závislosti na čase. K řešení je potřeba použít integrální počet.
  Úlohu jsem převzala a modifikovala z [10].

- *Srážka aut*

  Středoškolská úloha na zrychlený přímočarý pohyb. Úlohu můžeme řešit též graficky a je tedy možné použít ji i na základní škole.
  Úlohu jsem převzala z [10].

Pohyb po kružnici

- *Pohyb kola*

  Středoškolská úloha na zrychlený pohyb po kružnici. Časová závislost velikosti rychlosti je zadaná funkcí. Z ní pak zjišťujeme velikost celkového zrychlení a úhly, které svírají vektory rychlosti a zrychlení v různých časových okamžicích.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [10].

- *Řemenice*

  Obtížnější středoškolská úloha na pohyb po kružnici. Časová závislost úhlové dráhy bodu na obvodu řemenice je zadaná číselnou rovnicí.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [11].

- *Brusný kotouč*

  Obtížnější středoškolská úloha na pohyb po kružnici. V úloze určujeme závislost polohového vektoru, rychlosti a zrychlení na čase a úhel, který svírá celkové a normálové zrychlení. Úloha je řešená jen teoreticky.
  Úlohu jsem převzala z [10].

- *Otáčení kola*

  Středoškolská úloha na rovnoměrně zpomalený pohyb po kružnici. Část úlohy je řešena početně i graficky.
  Úlohu jsem převzala z [11].

Volný pád, vrhy

- *Hod míčem*

  Středoškolská úloha na vrh svislý vzhůru.
  Úlohu jsem převzala z [17].

- *Volně padající kámen*

  Středoškolská úloha na volný pád.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [11].

- *Kutálení kuličky*

  Středoškolská úloha na kombinaci pohybu po nakloněné rovině a vrhu šikmo vzhůru. Při řešení je důležitý nákres situace.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [17].

- *Kamínek na římse*

  Netypická základoškolská úloha na volný pád. V úloze si rozdělujeme výšku pádu na jednotlivé části tak, aby čas pádu byl v každé části stejný.
  Úlohu jsem převzala z [11].

- *Záchranný letoun*

  Středoškolská úloha na volný pád. Hlavní myšlenkou úlohy je rozklad pohybu na pohyb ve vodorovném a ve svislém směru (při zavedení souřadného systému).
  Úlohu jsem převzala a modifikovala z [17].

- *Zahradní hadice*

  Obtížnější středoškolská úloha na šikmý vrh. Rozebírá se v ní téma spojené s běžným životem.
  Úlohu jsem převzala a modifikovala z [11].

- *Basketbalista*

  Středoškolská úloha na šikmý vrh. Rozebírá se v ní téma spojené s běžným životem.
  Úlohu jsem převzala z [17].

Pohyb v rovině a v prostoru

- *Myš a kočka*

  Obtížnější středoškolská úloha. Pohyb myši a kočky je zde zadán souřadnicemi počáteční polohy a vektoru rychlosti. Úkolem je mimo jiné určit, kde se protnou trajektorie a zda se myš a kočka setkají.
  Úlohu jsem převzala a modifikovala z [10].

- *Brouk na desce*

  Obtížnější středoškolská úloha na rovnoměrný přímočarý a rovnoměrně zrychlený pohyb. Zadaná je rovnice přímky, po které se brouk pohybuje, a počáteční podmínky. Úkolem je napsat parametrické rovnice pro výše uvedené typy pohybu.
  Úlohu jsem převzala a modifikovala z [10].

- *Pohyb částice I*

  Vysokoškolská úloha na rovnoměrně zrychlený pohyb. Je zadaná závislost polohového vektoru částice na čase. Z té je třeba zjistit, o jaký pohyb se jedná, jakými vztahy je pohyb částice popsán ve směru souřadnicových os, určit, jak se mění rychlost a zrychlení částice s časem, a podobně.
  Úlohu jsem převzala z [10].

- *Pohyb částice II*

  Vysokoškolská úloha na rovnoměrně zrychlený pohyb. Tato úloha je pokračováním předchozí úlohy *Pohyb částice I*.
  Úlohu jsem převzala z [10].

- *Beruška na válci*

  Vysokoškolská úloha na pohyb v prostoru, konkrétně pohyb po rotujícím válci. Při řešení je důležité nakreslit si obrázek situace a zvolit si vhodně souřadný systém. Úkolem je popsat pohyb berušky pomocí polohového vektoru, zjistit průběh rychlosti, zrychlení, tvar trajektorie a její poloměr křivosti.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [10].

- *Pohyb kapky*

  Vysokoškolská úloha na pohyb v prostoru, konkrétně pohyb po rotujícím kuželi. Řešitel využívá podobný postup jako u předchozí úlohy *Beruška na válci*.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [10].

- *Mravenec na tyči*

  Vysokoškolská úloha na pohyb v rovině, konkrétně pohyb po rotující tyči. Obdobná úloha jako předchozí.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [10].

- *Jedoucí kolo*

  Vysokoškolská úloha na pohyb rovině. Úkolem je popsat pohyb bodu na obvodu jedoucího kola, určit tvar trajektorie a spočítat délku jednoho jejího oblouku.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [10].

- *Náboj ve vakuu*

  Obtížnější středoškolská úloha na kombinaci rovnoměrného přímočarého pohybu ve vodorovném směru a volného pádu ve svislém směru.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [10].

- *Plavba voru*

  Obtížnější středoškolská úloha na pohyb v rovině. Úkolem je zjistit průběh polohového vektoru voru plujícího přes řeku. Rychlost proudu se přitom mění se vzdáleností od břehu.
  Úlohu jsem převzala a upravila z [6] (úloha je modifikací úlohy *Plující loďka*).

- *Chataři od Lančovské zátoky*

  Středoškolská úloha na pohyb v rovině a skládání rychlostí. Jednodušší varianta předchozí úlohy.
  Úlohu jsem vytvořila, je modifikací úloh tohoto typu.

Kapitola 5

Závěr

Hlavním výsledkem mé diplomové práce je funkční soubor čtyřiceti úloh z kinematiky hmotného bodu, který je součástí elektronické sbírky řešených úloh umístěné na webu na adrese http://fyzikalniulohy.cz.

Diplomová práce navázala na mou práci bakalářskou, kde byl vytvořen základ budoucí sbírky. Úlohy z bakalářské práce jsem ještě doplnila, rozpracovala jejich řešení tak, aby odpovídala koncepci elektronické sbírky. K 24 úlohám jsem dopracovala zcela nově systém strukturovaných nápověd, u 16 úloh, kde jsem nápovědy vytvářela již v bakalářské práci, jsem je ještě dopracovala a uzpůsobila koncepci sbírky. K některým úlohám jsem doplnila obrázky a všechny součásti úloh jsem pak převedla do elektronického rozhraní sbírky.

V úvodní části diplomové práce jsem zpracovala ještě přehled učiva z kinematiky, které se probírá na jednotlivých úrovních vzdělávání spolu s komentáři k několika vybraným učebnicím. Rovněž jsem zde uvedla přehled sbírek úloh, se kterými jsem při výběru úloh pro svou sbírku pracovala.

Elektronická sbírka je koncipována jako studijní pomůcka především pro studenty prvních a druhých ročníků bakalářského studia fyziky na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, ale také pro studenty ostatních vysokých škol a středních a základních škol se zájmem o fyziku.

Při tvorbě sbírky, především při tvorbě strukturovaných nápověd, jsem si nejen zopakovala a procvičila základní partie kinematiky hmotného bodu, ale také jsem pochopila, jaké problémy mohou studenti s řešením fyzikálních úloh mít a které oblasti kinematiky hmotného bodu případně jaké typy úloh jsou pro ně obtížnější. Snažila jsem se úlohy ve sbírce tvořit tak, aby studenti jejich řešením lépe pochopili dané učivo a také, aby je mohli použít ke své budoucí učitelské práci.

Literatura

[1] Bartuška K.: *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I, Mechanika*, nakladatelství Prometheus, Praha, 1997

[2] Bednařík M., Široká M.: *Fyzika pro gymnázia, Mechanika*, nakladatelství Prometheus, Praha 2000

[3] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika, vysokoškolská učebnice obecné fyziky*; VUTIUM, Brno 2000

[4] Kašpar, E. a kol.: *Didaktika fyziky*, SPN, Praha1978

[5] Kolářová R., Bohuněk J.: *Fyzika pro 7. ročník základní školy*, nakladatelství Prometheus, Praha 2002

[6] Koudelková, H.*: Elektronická sbírka příkladů k úvodním partiím klasické mechaniky*, diplomová práce; MFF UK, Praha 2003

[7] Kubínek R., Kolářová H.: *Fyzika v příkladech a testových otázkách pro uchazeče o studium na VŠ*, nakladatelství Rubico, Olomouc, 2005

[8] Kvasnica J. a kol.: *Mechanika*, nakladatelství Academia, Praha, 1988

[9] Lepil O. a kol.: *Fyzika, sbírka úloh pro střední školy*, nakladatelství Prometheus, Praha 1995

[10] Mandíková, D., Rojko, M.: *Soubor úloh z mechaniky pro studium učitelství, I. část*; MFF UK, Praha 1994

[11] Mičkal, K.: *Sbírka úloh z technické mechaniky*, SNTL, Praha 1988

[12] Rauner K., Havel V., Prokšová J., Randa M.: *Fyzika 7, učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia,* nakladatelství Fraus, Plzeň 2005

[13] Reichl, J.: *Sbírka příkladů z fyziky (určená původně studentům 1.ročníku technického lycea jako doplněk ke studiu fyziky)*, SPŠST Panská Praha

[14] Slavíková K.: *Sbírka úloh z dynamiky hmotného bodu*, bakalářská práce, MFF UK, Praha 2008

[15] Vachek J. a kol..: *Fyzika pro I.ročník gymnázií,* SPN, Praha 1984

[16] Webová sbírka řešených příkladů z fyziky pro základní a střední školy *http://www.gym-karvina.cz/sbirka_prikladu.htm*

[17] WWW stránky fyzikální olympiády: *http://fo.cuni.cz*

Příloha

Ukázka úloh

K diplomové práci přikládám jako ukázku šest vytvořených úloh. Úlohy jsou vytištěny přímo z elektronické sbírky. Úlohy nejsou ideálně zobrazeny, protože jsou přizpůsobeny pro čtení na monitoru a nikoliv pro tisk.
Všechny úlohy vytvořené v rámci diplomové práce jsou na přiloženém CD a jsou dostupné i na internetové adrese *http://www.fyzikalniulohy.cz/* .

Výtah

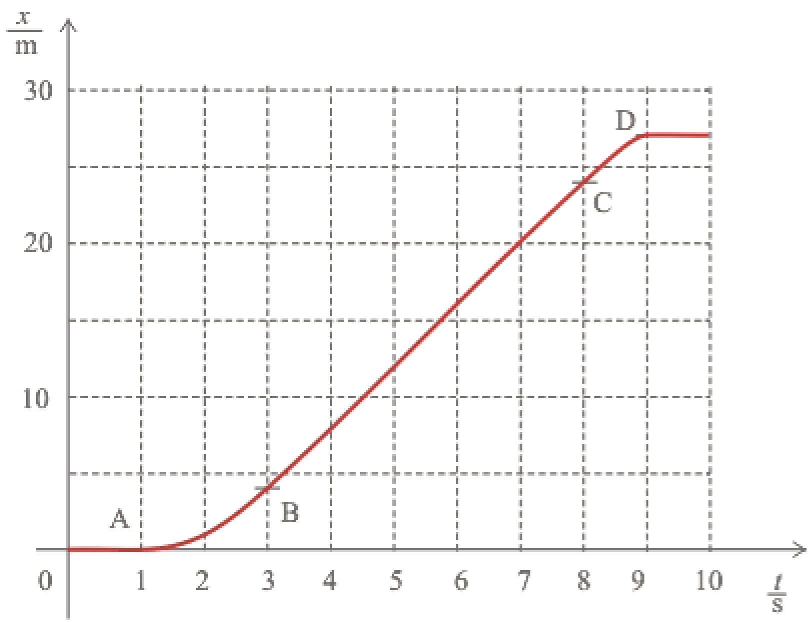
Na obrázku je zakreslena časová závislost *x(t)* polohy kabiny výtahu.

a) Popište slovně pohyb kabiny.

b) Nakreslete závislost souřadnice rychlosti kabiny na čase.

c) Nakreslete závislost souřadnice zrychlení kabiny na čase.

d) U stropu kabiny visí pružina a na ní kulička. Popište chování pružiny během pohybu výtahu.



Bod A: poloha $x = 0$ m v čase $t = 1$ s

Bod B: poloha $x = 4$ m v čase $t = 3$ s

Bod C: poloha $x = 24$ m v čase $t = 8$ s

Bod D: poloha $x = 27$ m v čase $t = 9$ s

- **Nápověda 1 pro a): Popis pohybu**

Rozdělte si pohyb kabiny výtahu na dílčí úseky mezi počátkem a bodem A, bodem A a bodem B, bodem B a bodem C, bodem C a bodem D a mezi bodem D a koncem. O jaké typy pohybu se v těchto úsecích jedná, zjistíte podle tvaru křivek odpovídajících závislosti *x*-ové souřadnice výtahu na čase.

  - **► Řešení k nápovědě 1**

Mezi počátkem a bodem A se souřadnice výtahu nemění (je nulová), kabina je tedy v klidu, stojí v dolním patře.

Mezi body A a B má závislost souřadnice na čase tvar paraboly, souřadnice kvadraticky roste. Výtah se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem nahoru.

V úseku BC je grafem závislosti x-ové souřadnice na čase přímka, výtah se pohybuje konstantní rychlostí, kterou dosáhl v bodě B.

V úseku CD je grafem opět část paraboly, souřadnice sice narůstá, ale čím dál tím méně. Jde o rovnoměrně zpomalený pohyb, kabina brzdí až do zastavení.

Od bodu D se souřadnice nemění, kabina je v klidu, stojí.

- **Nápověda 2 pro b): Souřadnice rychlosti**

Z předchozí části víte, o jaký typ pohybu v jednotlivých úsecích jde, takže již máte představu o tom, zda se velikost rychlosti kabiny výtahu mění a jak, či se nemění.

Pro pohyb kabiny před bodem A a za bodem D je určení velikosti rychlosti kabiny snadné.

Mezi body A a B a mezi body C a D se výtah pohybuje rovnoměrně zrychleným (resp.zpomaleným) pohybem. Víte také pro oba případy, jaká je počáteční a konečná hodnota rychlosti. Její průběh do grafu již snadno zakreslíte.

Víte, že mezi body B a C se jedná o pohyb rovnoměrný přímočarý. Velikost rychlosti kabiny výtahu určíte z grafu ze zadání úlohy.

  - **► Řešení k nápovědě 2**

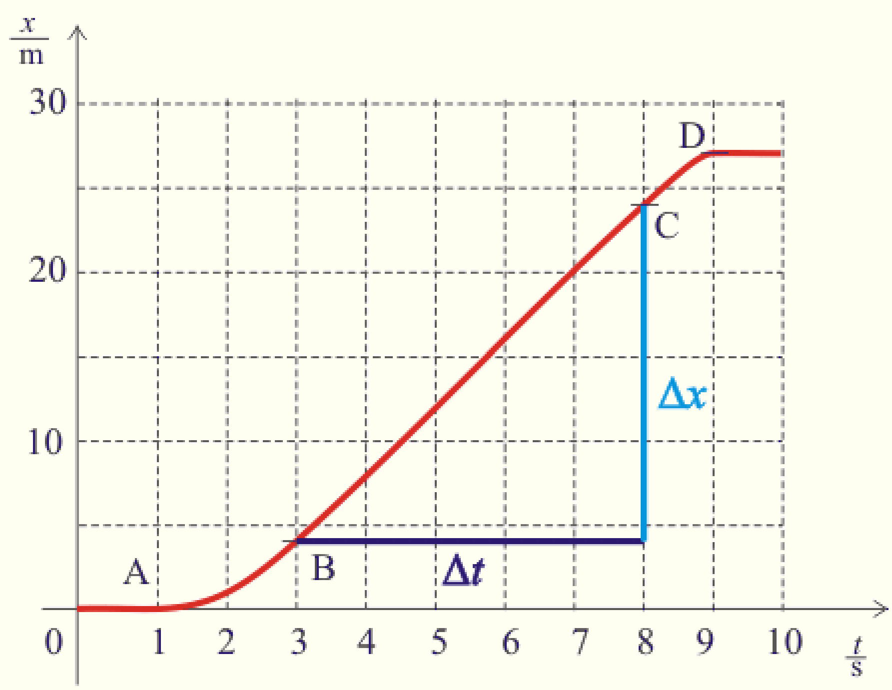
Platí, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj.

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

Úseky grafu před bodem A a za bodem D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová.

V úseku mezi body B a C se kabina pohybuje konstantní rychlostí, kterou určíme jako směrnici přímky BC:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(24-4)\ \mathrm{m}}{(8-3)\ \mathrm{s}} = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$



Bod A: poloha x = 0 m v čase t = 1 s

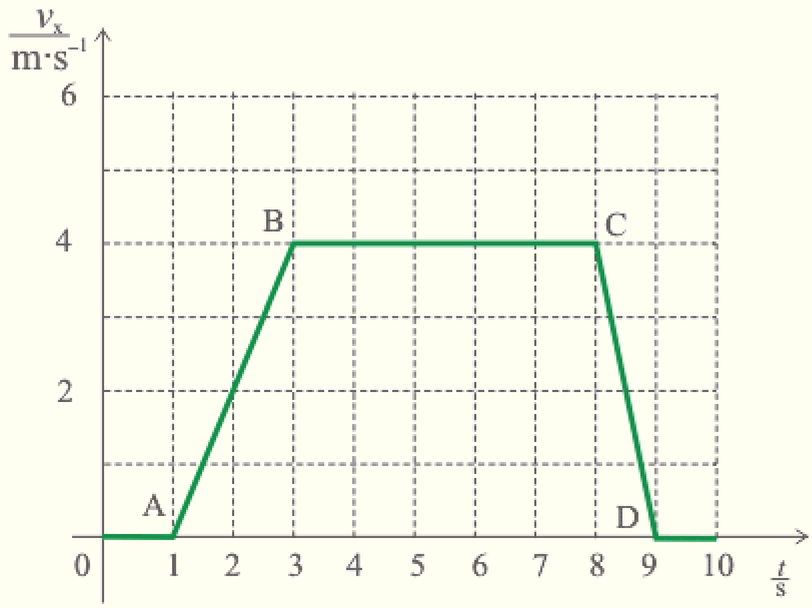
Bod B: poloha x = 4 m v čase t = 3 s

Bod C: poloha x = 24 m v čase t = 8 s

Bod D: poloha x = 27 m v čase t = 9 s

Při rozjezdu (úsek AB) a opětovném zastavení (úsek CD), tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění. Předpokládáme-li, že se výtah rozjíždí a brzdí rovnoměrně, bude závislost rychlosti na čase lineární (úsečky AB a CD).

Závislost rychlosti kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



- **Komentář**

Zamyslete se, zda by bylo možné opačně z grafu $v_x(t)$ určit průběh polohy $x(t)$.

Řešení této úlohy není jednoznačné. Graf funkce $v_x(t)$ dává totiž informaci pouze o změnách polohy, nikoli o poloze samotné. Z grafu určíme změnu polohy v libovolném časovém intervalu jako

$$\int_{t_1}^{t_2} v_x(t)$$

což odpovídá obsahu plochy pod křivkou v grafu $v_x(t)$ omezenou počátečním a koncovým bodem časového intervalu. K tomu, abychom určili, jaká byla poloha na začátku a na konci tohoto intervalu, ale potřebujeme další údaj, např. polohu v čase t = 0 s .

- **Nápověda 3 pro c): Souřadnice zrychlení**

Víte již, jak se mění s časem souřadnice rychlosti výtahu.

Uvědomte si, jaké bude zrychlení v úsecích, kde se rychlost nemění.

V úsecích AB, resp. CD, rychlost lineárně narůstá, resp. klesá, velikost zrychlení určíte z grafu $v_x(t)$. Uvědomte si, jaký směr bude mít zrychlení v těchto úsecích.

○ **▶ Řešení k nápovědě 3**

Platí, že $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj.

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

Úseky grafu před bodem A a za bodem D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu, má tedy nulové zrychlení.

Mezi body B a C je opět zrychlení nulové, protože kabina se pohybuje konstantní rychlostí.

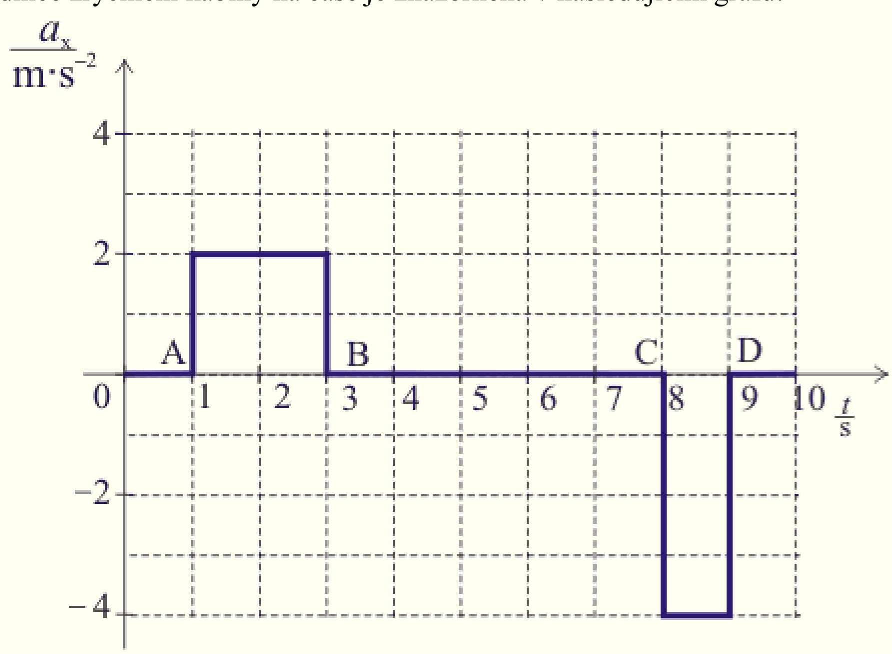
Mezi body A a B rychlost lineárně narůstá, zrychlení bude tedy konstantní, bude kladné a jeho velikost určíme z grafu $v_x(t)$ jako směrnici přímky AB:

$$a_{AB} = \frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{(4-0)\ \mathrm{m}}{(3-1)\ s^2} = 2\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Mezi body C a D rychlost lineárně klesá, zrychlení bude tedy konstantní, bude záporné a jeho velikost určíme z grafu $v_x(t)$ jako směrnici přímky CD:

$$a_{CD} = \frac{\Delta v_{CD}}{\Delta t_{CD}} = \frac{(0-4)\ \mathrm{m}}{(9-8)\ s^2} = -4\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Závislost souřadnice zrychlení kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



- **Nápověda 4 pro d): Pružina s kuličkou**

Uvědomte si, jaké síly působí na kuličku (z pohledu pozorovatele, který zůstane stát v přízemí)a co platí pro jejich výslednici v jednotlivých úsecích. Jak souvisí výsledná síla se zrychlením, říká 2. Newtonův zákon.

  - **► Řešení k nápovědě 4**

Na kuličku působí Země gravitační silou a pružina, na které je zavěšena.

V úsecích před bodem A, BC a za bodem D, kde je zrychlení kabiny nulové, jsou tyto dvě síly v rovnováze, jejich výslednice je nulová.

V úseku AB musí pružina zatáhnout o něco více, aby udělila kuličce zrychlení směrem vzhůru – pružina se protáhne.

Naopak v úseku CD, kdy výtah zpomaluje, směřuje zrychlení dolů proti směru pohybu. Pružina musí tahat za kuličku méně než v klidovém stavu (nebo při rovnoměrném přímočarém pohybu), aby výslednice sil směřovala dolů – pružina se zkrátí.

- **CELKOVÉ ŘEŠENÍ**

a)

Mezi počátkem a bodem A se souřadnice výtahu nemění (je nulová), kabina je tedy v klidu, stojí v dolním patře.

Mezi body A a B má závislost souřadnice na čase tvar paraboly, souřadnice kvadraticky roste. Výtah se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem nahoru.

V úseku BC je grafem závislosti x-ové souřadnice na čase přímka, výtah se pohybuje konstantní rychlostí, kterou dosáhl v bodě B.

V úseku CD je grafem opět část paraboly, souřadnice sice narůstá, ale čím dál tím méně. Jde o rovnoměrně zpomalený pohyb, kabina brzdí až do zastavení.

Od bodu D se souřadnice nemění, kabina je v klidu, stojí.

b)

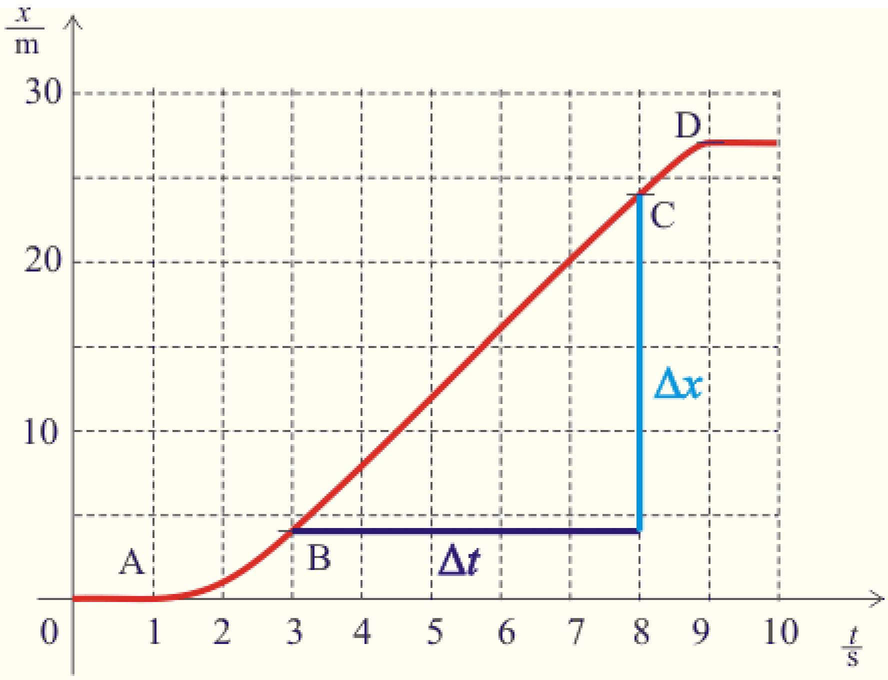
Platí, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj.

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Úseky grafu před bodem A a za bodem D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová.

V úseku mezi body B a C se kabina pohybuje konstantní rychlostí, kterou určíme jako směrnici přímky BC:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(24-4)\ \mathrm{m}}{(8-3)\ \mathrm{s}} = 4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$



Bod A: poloha x = 0 m v čase t = 1 s

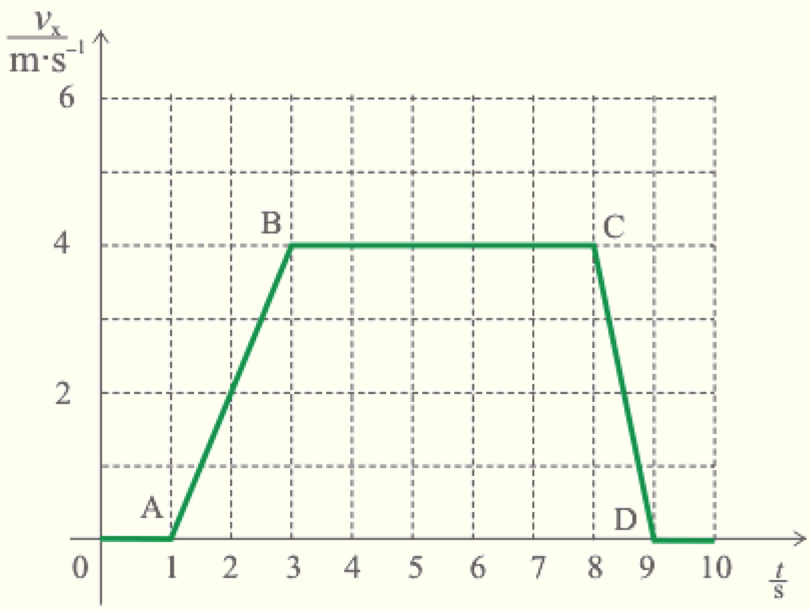
Bod B: poloha x = 4 m v čase t = 3 s

Bod C: poloha x = 24 m v čase t = 8 s

Bod D: poloha x = 27 m v čase t = 9 s

Při rozjezdu (úsek AB) a opětovném zastavení (úsek CD), tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění. Předpokládáme-li, že se výtah rozjíždí a brzdí rovnoměrně, bude závislost rychlosti na čase lineární (úsečky AB a CD).

Závislost rychlosti kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



c)

Platí, že $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj.

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

Úseky grafu před bodem A a za bodem D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu, má tedy nulové zrychlení.

Mezi body B a C je opět zrychlení nulové, protože kabina se pohybuje konstantní rychlostí.

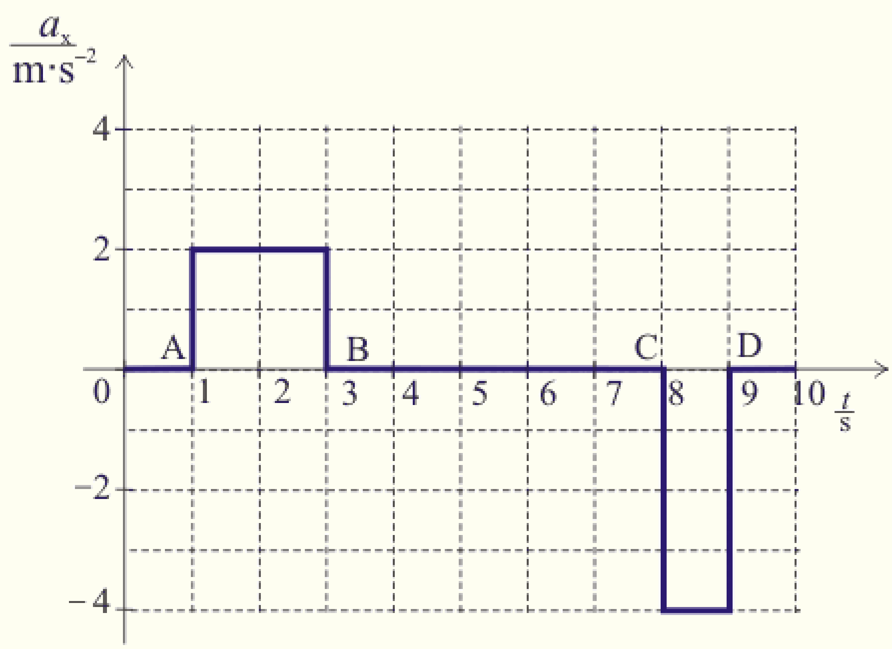
Mezi body A a B rychlost lineárně narůstá, zrychlení bude tedy konstantní, bude kladné a jeho velikost určíme z grafu $v_x(t)$jako směrnici přímky AB:

$$a_{AB} = \frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{(4-0)\ \mathrm{m}}{(3-1)\ s^2} = 2\ \mathrm{m.s}^{-2}$$

Mezi body C a D rychlost lineárně klesá, zrychlení bude tedy konstantní, bude záporné a jeho velikost určíme z grafu $v_x(t)$jako směrnici přímky CD:

$$a_{CD} = \frac{\Delta v_{CD}}{\Delta t_{CD}} = \frac{(0-4)\ \mathrm{m}}{(9-8)\ s^2} = -4\ \mathrm{m.s}^{-2}$$

Závislost souřadnice zrychlení kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



d)

Na kuličku působí Země gravitační silou a pružina, na které je zavěšena.

V úsecích před bodem A, BC a za bodem D, kde je zrychlení kabiny nulové, jsou tyto dvě síly v rovnováze, jejich výslednice je nulová.

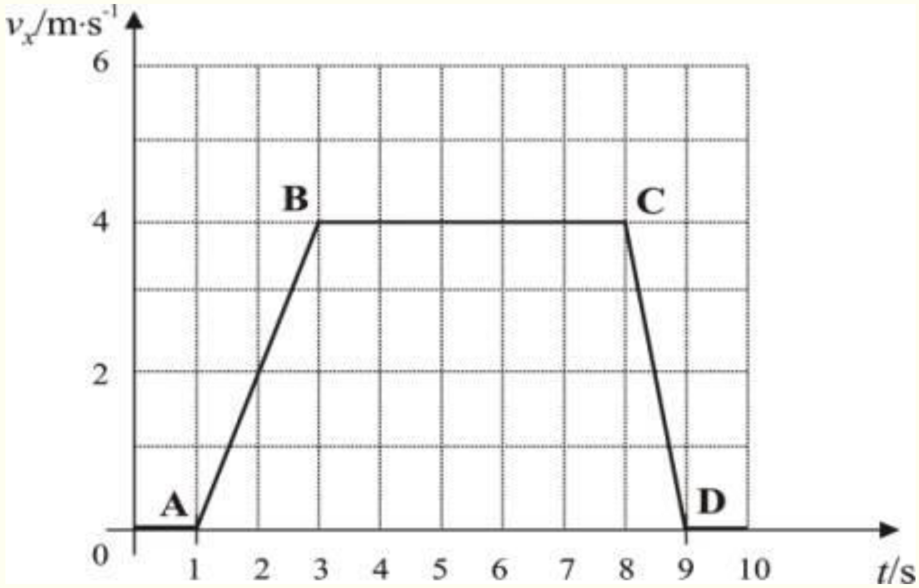
V úseku AB musí pružina zatáhnout o něco více, aby udělila kuličce zrychlení směrem vzhůru – pružina se protáhne.

Naopak v úseku CD, kdy výtah zpomaluje, směřuje zrychlení dolů proti směru pohybu. Pružina musí tahat za kuličku méně než v klidovém stavu (nebo při rovnoměrném přímočarém pohybu), aby výslednice sil směřovala dolů – pružina se zkrátí.

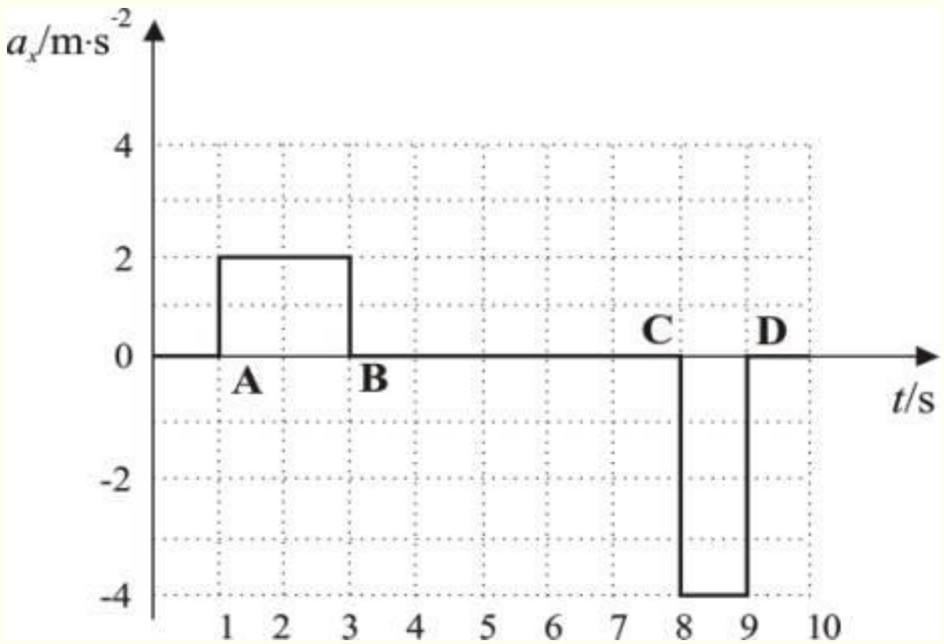
- **Odpověď**

a) Kabina nejprve stojí v dolním patře, je tedy v klidu - tomu odpovídá v grafu křivka mezi počátkem a bodem A. Pak se rozjíždí směrem vzhůru (kladný směr souřadnicové osy), pohybuje se rovnoměrně zrychleným pohybem, až dosáhne určité rychlosti – tomu odpovídá v grafu křivka mezi body A a B. Touto konstantní rychlostí se kabina určitou dobu pohybuje (rovnoměrný přímočarý pohyb) - tomu odpovídá v grafu křivka mezi body B a C. Nakonec začne kabina brzdit, pohybuje se rovnoměrně zpomaleným pohybem, až se zastaví – tomu odpovídá v grafu křivka mezi body C a D. Křivka od bodu D opět odpovídá tomu, že je kabina v klidu.

b) Závislost souřadnice rychlosti kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



c) Závislost souřadnice zrychlení kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



d) V případech, kdy je kabina v klidu (úseky grafu před bodem A a za bodem D) nebo se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem (úsek grafu mezi body B a C) je protažení pružiny stále stejné. Při rozjíždění kabiny (úsek grafu mezi body A a B) dochází oproti klidovému stavu kabiny k delšímu protažení pružiny. Naopak při zpomalování kabiny (úsek grafu mezi body C a D) dochází oproti klidovému stavu kabiny ke zkrácení pružiny.

Dva cyklisté

Cyklista Adam vyšlapal kopec, na vrcholu se otočil a po téže trase se vrátil zpět. Na vrcholu na svém computeru zjistil průměrnou rychlost 16 km·h^{-1}, computer vynuloval a v cíli opět přečetl průměrnou rychlost jízdy z kopce 44 km·h^{-1} .

Cyklista Bedřich jel stejnou trasu, ale na vrcholu computer nevynuloval. Na vrcholu mu computer ukázal průměrnou rychlost 15 km·h^{-1} a v cíli průměrnou rychlost 23 km·h^{-1}.

a) Určete průměrnou rychlost celé jízdy cyklisty Adama.

b) Určete průměrnou rychlost jízdy z kopce cyklisty Bedřicha.

c) Určete pro každého cyklistu poměr doby jízdy do kopce a jízdy z kopce.

Poznámka: Průměrnou rychlost užíváme ve smyslu průměrné velikosti rychlosti.

- **Zápis**

v_1 = 16 km·h^{-1}	průměrná rychlost Adama na vrcholu
v_2 = 44 km·h^{-1}	průměrná rychlost jízdy Adama z kopce
v_1' = 15 km·h^{-1}	průměrná rychlost Bedřicha na vrcholu
v_p' = 23 km·h^{-1}	průměrná rychlost celé jízdy Bedřicha
v_p = ? (km·h^{-1})	průměrná rychlost celé jízdy Adama
v_2' = ? (km·h^{-1})	průměrná rychlost jízdy Bedřicha z kopce

- **Nápověda 1 pro a): Průměrná rychlost cyklisty Adama**

Označte si dráhu, kterou cyklista Adam ujel při jízdě do kopce a dobu, za kterou tuto dráhu ujel. Totéž udělejte pro jeho jízdu z kopce. Také si označte celkovou dobu jízdy Adama.

Uvědomte si, co je to průměrná rychlost a jaký pro ni platí vztah.

Velikost průměrné rychlosti cyklisty Adama do kopce a z kopce znáte. Budete potřebovat znát i dráhu, kterou ujel?

  - **► Řešení k nápovědě 1**

Označíme s dráhu uraženou jedním směrem, pro cyklistu Adama t_1 dobu jízdy nahoru, t_2 dobu jízdy dolů a t celkovou dobu jízdy.

Pro průměrnou rychlost platí: $v_p = \frac{s_c}{t_c}$, kde

s…celková uražená dráha

t…celková doba pohybu

Tedy:

$$v_p = \frac{2s}{t_1+t_2} \qquad (1)$$

Pro jízdu nahoru platí:

$$s = v_1 t_1$$

Odtud:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}$$

Pro jízdu dolů platí:

$$s = v_2 t_2$$

Odtud:

$$t_2 = \frac{s}{v_2}$$

Dosadíme do (1):

$$v_p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$$

Číselně:

$$v_p = \frac{2\cdot 16\cdot 44}{16+44} \doteq 23{,}47\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

- **Nápověda 2 pro b): Průměrná rychlost cyklisty Bedřicha**

Označte si dobu, za kterou cyklista Bedřich vyjel na kopec a dobu, za kterou sjel z kopce. Také si označte jeho celkovou dobu jízdy. Dráhu, kterou Bedřich ujel do kopce nebo z kopce, máte označenou z předchozí nápovědy.

Opět si uvědomte, co je to průměrná rychlost a jaký pro ni platí vztah a postupujte podobně jako u cyklisty Adama.

Pozn.: Můžete k výpočtu použít výsledek úlohy a)?

  - **► Řešení k nápovědě 2**

Z předchozí úlohy máme označenou:

s dráhu uraženou jedním směrem, pro cyklistu Adama t_1 dobu jízdy nahoru, t_2 dobu jízdy dolů a t celkovou dobu jízdy. Pro cyklistu Bedřicha označíme analogicky t_1' dobu jízdy nahoru, t_2' dobu jízdy dolů a t' celkovou dobu jízdy.

Pro jízdu dolů platí:

$$s = v_2' t_2'$$

$$t_2' = t' - t_1'$$

Odtud:

$$v_2' = \frac{s}{t' - t_1'} \qquad (2)$$

Pro jízdu nahoru platí:

$$s = v_1' t_1'$$

$$t_1' = \frac{s}{v_1'}$$

Pro průměrnou rychlost platí:

$$v_p' = \frac{2s}{t'}$$

$$t' = \frac{2s}{v_p'}$$

Dosadíme do (2):

$$v_2' = \frac{s}{\frac{2s}{v_p'} - \frac{s}{v_1'}} = \frac{v_1' v_p'}{2v_1' - v_p'}$$

Číselně:

$$v_2' = \frac{15 \cdot 23}{2 \cdot 15 - 23} \doteq 49{,}29\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Jiná možnost řešení by byla použít výsledek úlohy a), z něj vyjádřit v_2 a všechny rychlosti „opatřit čárkou".

- **Nápověda 3 pro c): Poměr doby jízdy do kopce a z kopce**

Dobu jízdy cyklisty Adama do kopce a z kopce máte vyjádřenou v úloze a). Stačí, když zjistíte jejich poměr.

Obdobně pro cyklistu Bedřicha. Pro vyjádření průměrné rychlosti jízdy Bedřicha z kopce použijte výsledek úlohy b).

  - **► Řešení k nápovědě 3**

Použijeme označení z předchozích úloh.

Pro cyklistu Adama platí:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{s}{v_1}}{\frac{s}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1}$$

Číselně:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{44}{16} = 2{,}75$$

Analogicky pro cyklistu Bedřicha platí:

$$\frac{t_1'}{t_2'} = \frac{v_2'}{v_1'}$$

Dosazením výsledku úlohy b) dostaneme:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_p}{2v'_1 - v'_p}$$

Číselně:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{23}{2 \cdot 15 - 23} \doteq 3{,}29$$

- **CELKOVÉ ŘEŠENÍ**

Označíme *s* dráhu uraženou jedním směrem, pro cyklistu Adama t_1 dobu jízdy nahoru, t_2 dobu jízdy dolů a t celkovou dobu jízdy.

Pro cyklistu Bedřicha označíme analogicky t_1' dobu jízdy nahoru, t_2' dobu jízdy dolů a t' celkovou dobu jízdy.

a) průměrná rychlost Adama

Pro průměrnou rychlost platí: $v_p = \frac{s_c}{t_c}$, kde

s…celková uražená dráha

t…celková doba pohybu

Tedy:

$$v_p = \frac{2s}{t_1 + t_2} \qquad (1)$$

Pro jízdu nahoru platí:

$$s = v_1 t_1$$

Odtud:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}$$

Pro jízdu dolů platí:

$$s = v_2 t_2$$

Odtud:

$$t_2 = \frac{s}{v_2}$$

Dosadíme do (1):

$$v_p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$$

Číselně:

$$v_p = \frac{2 \cdot 16 \cdot 44}{16+44} \doteq 23{,}47\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

b) průměrná rychlost Bedřicha na cestě z kopce

Pro jízdu dolů platí:

$$s = v'_2 t'_2$$

$$t'_2 = t' - t'_1$$

Odtud:

$$v'_2 = \frac{s}{t' - t'_1} \qquad (2)$$

Pro jízdu nahoru platí:

$$s = v'_1 t'_1$$

$$t'_1 = \frac{s}{v'_1}$$

Pro průměrnou rychlost platí:

$$v'_p = \frac{2s}{t'}$$

$$t' = \frac{2s}{v'_p}$$

Dosadíme do (2):

$$v'_2 = \frac{s}{\frac{2s}{v'_p} - \frac{s}{v'_1}} = \frac{v'_1 v'_p}{2v'_1 - v'_p}$$

Číselně:

$$v'_2 = \frac{15 \cdot 23}{2 \cdot 15 - 23} \doteq 49{,}29 \ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Jiná možnost řešení by byla použít výsledek úlohy a), z něj vyjádřit v_2 a všechny rychlosti „opatřit čárkou“.

c) poměr doby jízdy do kopce a z kopce

Použijeme označení z předchozích úloh.

Pro cyklistu Adama platí:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{s}{v_1}}{\frac{s}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1}$$

Číselně:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{44}{16} = 2{,}75$$

Analogicky pro cyklistu Bedřicha platí:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_2}{v'_1}$$

Dosazením výsledku úlohy b) dostaneme:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_p}{2v'_1 - v'_p}$$

Číselně:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{23}{2 \cdot 15 \ - 23} \doteq 3{,}29$$

- **Odpověď**

a) Průměrná rychlost v_p celé jízdy Adama je:

$$v_p = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Číselně:

$$v_p \doteq 23{,}47 \ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

b) Průměrná rychlost v_2' jízdy z kopce cyklisty Bedřicha je:

$$v'_2 = \frac{v'_1 v'_p}{2v'_1 - v'_p}$$

Číselně:

$$v'_2 \doteq 49{,}29 \ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

c) Poměr doby jízdy cyklisty Adama do kopce a z kopce je:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Číselně:

$$\frac{t_1}{t_2} = 2{,}75$$

c) Poměr doby jízdy cyklisty Bedřicha do kopce a z kopce je:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'p}{2v'_1 - v'p}$$

Číselně:

$$\frac{t'_1}{t'_2} \doteq 3{,}29$$

Sprinter

Sprinter měl při tréninku na trati délky 100 m vymezený úsek, na kterém se měl rozbíhat rovnoměrně zrychleným pohybem a dosaženou rychlostí pak pokračovat do cíle. Trenér nejprve stanovil délku zrychleného úseku na 36 m a naměřil na něm čas 9 s, podruhé stanovil délku tohoto úseku na 30 m a naměřil na něm čas 7 s.

a) Určete dosažené maximální rychlosti při prvním a druhém rozběhu a konečné časy na celé dráze 100 m při prvním a druhém rozběhu.

b) Určete maximální rychlost, které by při třetím rozběhu musel sprinter dosáhnout na stejném úseku jako při druhém rozběhu a poté udržet do cíle, aby doběhl v konečném čase 12 s.

c) Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti rychlosti na čase všech tří běhů.

d) Určete zrychlení sprintera při rozbíhání v každém z uvedených běhů.

Poznámka: Přesněji bychom měli mluvit o velikosti rychlosti a velikosti zrychlení. Vzhledem k tomu, že jde o přímočarý pohyb, kde se směr těchto veličin nemění, píšeme pro přehlednost a zkrácení textu jen rychlost a zrychlení.

- **Zápis**

$s = 100$ m	celková dráha
$s_1 = 36$ m	délka zrychleného úseku při 1. rozběhu
$t_1 = 9$ s	čas na zrychleném úseku při 1. rozběhu
$s_2 = 30$ m	délka zrychleného úseku při 2. rozběhu
$t_2 = 7$ s	čas na zrychleném úseku při 2. rozběhu
a)	
$v_{m1} = ?\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	maximální rychlost při 1. rozběhu
$v_{m2} = ?\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	maximální rychlost při 2. rozběhu
$t_{k1} = ?\ (\text{s})$	celkový čas při 1. rozběhu
$t_{k2} = ?\ (\text{s})$	celkový čas při 2. rozběhu
b)	
$s_3 = s_2 = 30$ m	délka zrychleného úseku při 3. rozběhu
$t_{k3} = 12$ s	celkový čas při 3. rozběhu
$t_3 = ?\ (\text{s})$	čas na zrychleném úseku při 3. rozběhu
$v_{m3} = ?\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	maximální rychlost při 3. rozběhu
d)	
$a_1 = ?\ (\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	zrychlení na zrychleném úseku při 1. rozběhu

$a_2 = ?\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$ zrychlení na zrychleném úseku při 2. rozběhu

$a_3 = ?\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$ zrychlení na zrychleném úseku při 3. rozběhu

- **Nápověda 1 pro a): Maximální rychlosti**

Uvědomte si, jaké vztahy platí pro rychlost a dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu. Spojením těchto vztahů snadno určíte dosaženou maximální rychlost v_{m1} a v_{m2}.

- **► Řešení k nápovědě 1**

Pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu platí:

$$v_{m1} = a_1 t_1$$

Odtud:

$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1}$$

Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu platí:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

Dosadíme za a_1:

$$s_1 = \frac{v_{m1} t_1}{2}$$

Odtud:

$$v_{m1} = \frac{2 s_1}{t_1} \qquad (1)$$

Číselně:

$$v_{m1} = \frac{2 \cdot 36}{9}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Analogicky pro druhý běh:

$$v_{m2} = \frac{2s_2}{t_2}$$

Číselně:

$$v_{m2} = \frac{2 \cdot 30}{7}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 8{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

- **Nápověda 2 pro a): Konečné časy na dráze**

Pro určení konečného času si stačí uvědomit, že čas na zrychleném úseku známe a čas sprintera na úseku, kde se pohyboval rovnoměrně, snadno určíme z délky daného úseku a výše určené dosažené maximální rychlosti.

- ○ **► Řešení k nápovědě 2**

Čas dosažený na celé dráze při prvním běhu je:

$$t_{k1} = t_1 + t_1' \qquad (2)$$

Kde:

$$t_1' = \frac{s - s_1}{v_{m1}}$$

Dosadíme za v_{m1} z (1):

$$t_1' = \frac{(s - s_1)t_1}{2s_1}$$

Dosadíme do (2):

$$t_{k1} = t_1 + \frac{(s - s_1)t_1}{2s_1} = \frac{2s_1t_1 + st_1 - s_1t_1}{2s_1} = \frac{s + s_1}{2s_1}\, t_1$$

Číselně:

$$t_{k1} = \frac{100+36}{2 \cdot 36} \cdot 9\ \mathrm{s} = 17\ \mathrm{s}$$

Analogicky čas dosažený na celé dráze při druhém běhu platí:

$$t_{k2} = \frac{s+s_2}{2s_2}\,t_2$$

Číselně:

$$t_{k2} = \frac{100+30}{2 \cdot 30} \cdot 7\ \mathrm{s} \doteq 15{,}2\ \mathrm{s}$$

- **Nápověda 3 pro b): Maximální rychlost pro třetí běh**

Víte, jaký platí vztah mezi dráhou, dobou a rychlostí rovnoměrného pohybu?

Dráhu, na které se sprinter pohyboval rovnoměrně, snadno odvodíte, stejně tak dobu, kterou tento úsek běžel, a jeho rychlost je zadána. Pro neznámý čas běhu sprintera na zrychleném úseku pak stačí buďˇ použít vztah z předchozí úlohy nebo si uvědomit, jak se dá vyjádřit doba rovnoměrně zrychleného pohybu.

  - **► Řešení k nápovědě 3**

Při třetím běhu platí pro úsek, kde sprinter běžel rovnoměrně:

$$s_3' = s - s_3 = v_{m3} t_3' \qquad (3)$$

Kde:

$$t_3' = t_{k3} - t_3$$

t_3…doba zrychleného pohybu

Pro maximální rychlost v_{m3} můžeme psát analogicky podle (1):

$$v_{m3} = \frac{2s_3}{t_3}$$

Odtud:

$$t_3 = \frac{2s_3}{v_{m3}} \qquad (4)$$

Dosadíme do (3):

$$s - s_3 = v_{m3}(t_{k3} - t_3) = v_{m3}\left(t_{k3} - \frac{2s_3}{v_{m3}}\right)$$
$$s - s_3 = v_{m3}t_{k3} - 2s_3$$

Odtud:

$$v_{m3} = \frac{s+s_3}{t_{k3}} \qquad (5)$$

Číselně:

$$v_{m3} = \frac{100+30}{12}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 10{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

- **Nápověda 4 pro c): Grafy závislosti rychlosti na čase**

K sestrojení grafů musíte dopočítat čas t_3. Vztah pro jeho výpočet znáte z předchozí části úlohy.

Které veličiny ještě k sestrojení grafů potřebujete? Znáte je všechny?

  - **► Řešení k nápovědě 4**

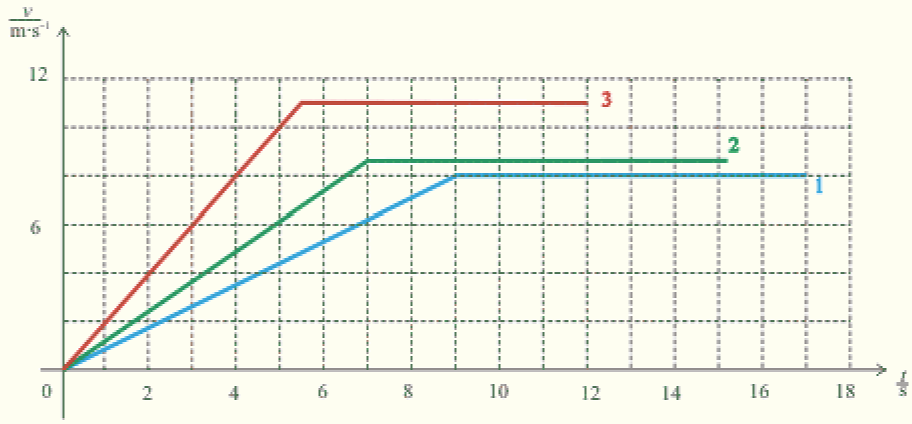
K sestrojení grafů je tedy nutné dopočítat čas t_3, to lze udělat ze vztahu (4) a (5):

$$t_3 = \frac{2s_3}{v_{m3}} = \frac{2s_3}{s+s_3}t_{k3}$$

Číselně:

$$t_3 = \frac{2 \cdot 30}{100+30} \cdot 12\ \mathrm{s} \doteq 5{,}5\ \mathrm{s}$$

Zbývající veličiny t_1, t_2, t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, v_{m1}, v_{m2} a v_{m3} už známe.



- **Nápověda 5 pro d): Zrychlení sprintera při rozbíhání**

Stačí vyjít ze vztahu mezi zrychlením a rychlostí rovnoměrně zrychleného pohybu.

Všechny veličiny pak již znáte.

- **► Řešení k nápovědě 5**

Zrychlení při rozbíhání při jednotlivých pohybech jsou následující:

$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} = \frac{2s_1}{{t_1}^2}$$

$$a_2 = \frac{v_{m2}}{t_2} = \frac{2s_2}{{t_2}^2}$$

$$a_3 = \frac{v_{m3}}{t_3} = \frac{2s_3}{{t_3}^2} = \frac{(s+s_3)^2}{2s_3{t_{k3}}^2}$$

Číselně:

$$a_1 = \frac{2 \cdot 36}{9^2}\ \mathrm{ms}^{-2} \doteq 0{,}89\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$a_2 = \frac{2\cdot 30}{7^2}\ \mathrm{ms}^{-2} \doteq 1{,}2\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$a_3 = \frac{(100+30)^2}{2\cdot 30\cdot 12^2}\ \mathrm{ms}^{-2} \doteq 2\ \mathrm{ms}^{-2}$$

- **CELKOVÉ ŘEŠENÍ**

a) Z rovnic:

$$v_{m1} = a_1 t_1$$

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

plyne:

$$v_{m1} = \frac{2s_1}{t_1}$$

Číselně:

$$v_{m1} = \frac{2\cdot 36}{9}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Čas dosažený na celé dráze při prvním běhu je:

$$t_{k1} = t_1 + \frac{(s-s_1)t_1}{2s_1} = \frac{2s_1t_1 + st_1 - s_1t_1}{2s_1} = \frac{s+s_1}{2s_1}\, t_1$$

Číselně:

$$t_{k1} = \frac{100+36}{2\cdot 36}\cdot 9\ \mathrm{s} = 17\ \mathrm{s}$$

Analogicky pro druhý běh:

$$v_{m2} = \frac{2s_2}{t_2}$$

Číselně:

$$v_{m2} = \frac{2 \cdot 30}{7}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 8{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Pro čas dosažený na celé dráze při druhém běhu platí:

$$t_{k2} = \frac{s+s_2}{2s_2}\,t_2$$

Číselně:

$$t_{k2} = \frac{100+30}{2 \cdot 30} \cdot 7\ \mathrm{s} \doteq 15{,}2\ \mathrm{s}$$

b) Při třetím běhu platí:

$$s - s_3 = v_{m3}(t_{k3} - t_3) = v_{m3}\left(t_{k3} - \frac{2s_3}{v_{m3}}\right)$$

$$s - s_3 = v_{m3}t_{k3} - 2s_3$$

$$v_{m3} = \frac{s+s_3}{t_{k3}}$$

Číselně:

$$v_{m3} = \frac{100+30}{12}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 10{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

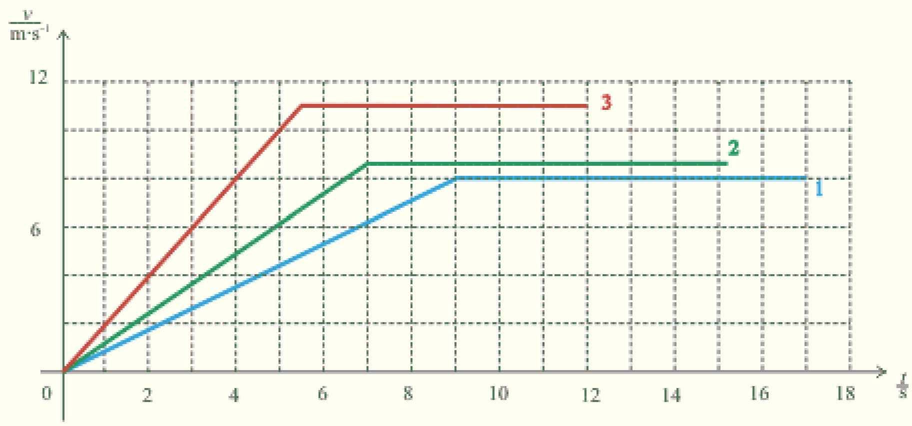
c) K sestrojení grafů je nutné dopočítat čas t_3:

$$t_3 = \frac{2s_3}{v_{m3}} = \frac{2s_3}{s+s_3} t_{k3}$$

Číselně:

$$t_3 = \frac{2\cdot 30}{100+30} \cdot 12\ \mathrm{s} \doteq 5{,}5\ \mathrm{s}$$

Zbývající veličiny t_1, t_2, t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, v_{m1}, v_{m2} a v_{m3} už známe.



d) Zrychlení při rozbíhání při jednotlivých pohybech jsou následující:

$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} = \frac{2s_1}{{t_1}^2}$$

$$a_2 = \frac{v_{m2}}{t_2} = \frac{2s_2}{{t_2}^2}$$

$$a_3 = \frac{v_{m3}}{t_3} = \frac{2s_3}{{t_3}^2} = \frac{(s+s_3)^2}{2s_3{t_{k3}}^2}$$

Číselně:

$$a_1 = \frac{2 \cdot 36}{9^2}\ \mathrm{ms}^{-2} \doteq 0{,}89\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 30}{7^2}\ \mathrm{ms}^{-2} \doteq 1{,}2\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$a_3 = \frac{(100+30)^2}{2 \cdot 30 \cdot 12^2}\ \mathrm{ms}^{-2} \doteq 2\ \mathrm{ms}^{-2}$$

- **Odpověď**

a) Dosažené maximální rychlosti jsou:

$$v_{m1} = \frac{2s_1}{t_1} = 8\ \mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

$$v_{m2} = \frac{2s_2}{t_2} \doteq 8{,}6\ \mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

Konečné časy na celé dráze jsou:

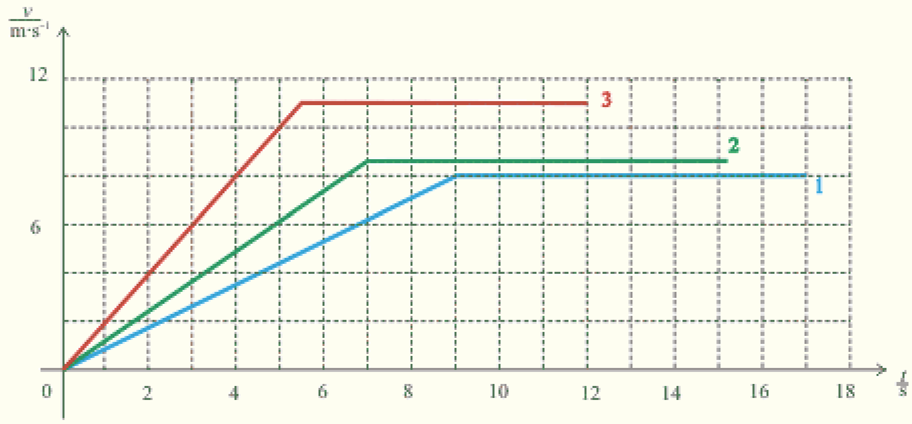
$$t_{k1} = \frac{s+s_1}{2s_1} t_1 = 17\ \mathrm{s}$$

$$t_{k2} = \frac{s+s_2}{2s_2} t_2 \doteq 15{,}2\ \mathrm{s}$$

b) Maximální dosažená rychlost při třetím běhu je:

$$v_{m3} = \frac{s+s_3}{t_{k3}} \doteq 10{,}8\ \mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

c) Grafy závislosti rychlosti na čase u všech tří běhů:



d) Zrychlení sprintera při rozbíhání v každém z uvedených běhů jsou:

$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} \doteq 0{,}89 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_2 = \frac{v_{m2}}{t_2} \doteq 1{,}2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_3 = \frac{v_{m3}}{t_3} \doteq 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Otáčení kola

Kolo se otáčí s frekvencí 25 Hz. Brzděním lze dosáhnout, že jeho otáčení bude rovnoměrně zpomalené a kolo se zastaví po čase 30 s od začátku brzdění. Vypočítejte úhlové zrychlení kola a počet otáček, které kolo vykoná od počátku brzdění do zastavení.

- **Zápis**

f = 25 Hz	frekvence otáčení kola
t_0 = 30 s	čas, po kterém se kolo zastaví
ε = ? (s^{-2})	úhlové zrychlení kola
N = ?	počet otáček, které kolo vykoná od počátku brzdění do zastavení

- **Nápověda 1: Úhlové zrychlení kola**

Uvědomte si, jaký vztah platí mezi okamžitou hodnotou úhlové rychlosti a úhlovým zrychlením kola.

Jakou počáteční úhlovou rychlostí se kolo pohybovalo před tím, než začalo brzdit? A jaká byla velikost úhlové rychlosti v čase t_0 ?

  - **► Řešení k nápovědě 1**

Pro okamžitou hodnotu úhlové rychlosti platí vztah:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\omega_0 = 2\pi f = 50\pi \text{ s}^{-1}$$

V čase $t = t_0$ bude $\omega = 0$, tedy:

$$\omega_0 + \varepsilon t_0 = 0$$

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{2\pi f}{t_0} = -\frac{50}{30}\pi \text{ s}^{-2} = -5{,}24 \text{ s}^{-2}$$

- **Nápověda 2 : Počet otáček - početní řešení**

Jakým způsobem zjistíte, kolik otáček kolo provedlo za určitý čas?

Použijte k tomu úhel, který polohový vektor libovolného bodu kola opíše vzhledem ke středu za určitý čas. Ten vyjádříte pomocí velikosti úhlového zrychlení, které znáte z předchozí nápovědy, a velikosti úhlové rychlosti před brzděním kola.

○ **► Řešení k nápovědě 2**

Polohový vektor libovolného bodu kola opíše vzhledem ke středu za čas t_0 úhel:

$$\psi_0 = \omega_0 t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2} = 2\pi f t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2}$$

$$\psi_0 = 1500\pi - \frac{5}{6}\pi 900 = 750\pi$$

Počet otáček za čas t_0:

$$N = \frac{\psi_0}{2\pi} = \frac{750\pi}{2\pi} = 375$$

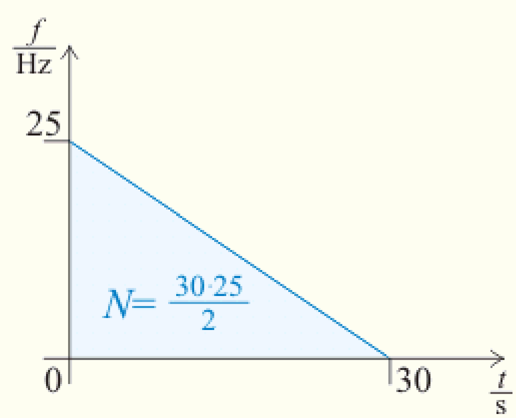
- **Nápověda 3: Počet otáček - grafické řešení**

Počet otáček kola za čas t_0 lze zjistit také graficky.

Nakreslete graf závislosti frekvence otáčení kola na čase. Kde je v grafu schovaný daný počet otáček?

○ **► Řešení k nápovědě 3**

Grafické řešení:



Počtu otáček odpovídá plocha pod křivkou.

- **CELKOVÉ ŘEŠENÍ**

Pro okamžitou hodnotu úhlové rychlosti platí vztah:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\omega_0 = 2\pi f = 50\pi \ \mathrm{s}^{-1}$$

V čase $t = t_0$ bude $\omega = 0$, tedy:

$$\omega_0 + \varepsilon t_0 = 0$$

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{2\pi f}{t_0} = -\frac{50}{30}\pi \ \mathrm{s}^{-2} = -5{,}24 \ \mathrm{s}^{-2}$$

Polohový vektor libovolného bodu kola opíše vzhledem ke středu za čas t_0 úhel:

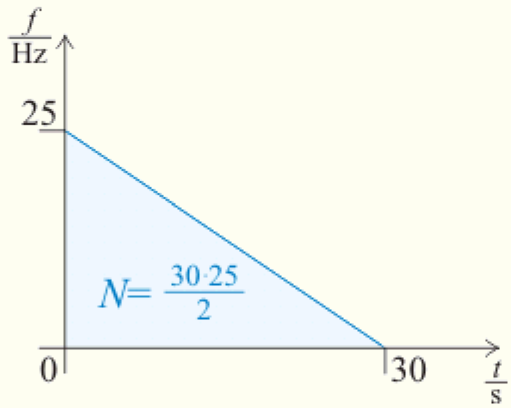
$$\psi_0 = \omega_0 t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2} = 2\pi f t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2}$$

$$\psi_0 = 1500\pi - \frac{5}{6}\pi 900 = 750\pi$$

Počet otáček za čas t_0:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\psi_0}{2\pi} = \frac{750\pi}{2\pi} = 375$$

Grafické řešení:



Počtu otáček odpovídá plocha pod křivkou.

- **Odpověď**

Úhlové zrychlení kola ε je:

$$\varepsilon = -\frac{2\pi f}{t_0} = -5{,}24\ \mathrm{s}^{-2}$$

Počet otáček N, které kolo vykoná od počátku brzdění do zastavení, je:

$$N = \frac{\psi_0}{2\pi} = f t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{4\pi} = 375$$

- **Počet otáček - ještě jinak**

Počet otáček kola lze určit také následujícím způsobem. Frekvence otáčení se s časem mění podle vztahu:

$$f(t) = f_0 - kt\ ,$$

kde

$$k = \frac{25}{30}$$

(směrnice přímky v grafu z Nápovědy 3)

Počet otáček kola od začátku brzdění do zastavení pak můžeme spočítat jako integrál funkce $f(t)$ v daném časovém intervalu (obsah plochy pod křivkou):

$$\boldsymbol{N} = \int_0^{30} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{30} \left(f_0 - \frac{25}{30}t\right)\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{N} = \int_0^{30} \left(f_0 - \frac{5}{6}t\right)\mathrm{d}t = \left[f_0 t - \frac{5t^2}{6\cdot 2}\right]_0^{30}$$

$$\boldsymbol{N} = 25\cdot 30 - \frac{5\cdot 30^2}{2\cdot 6} = 375$$

Basketbalista

Obroučka koše na basketbal se nachází ve výšce h_1 nad podlahou. Střed koše je ve vodorovné vzdálenosti L od čáry trestného hodu. Basketbalista hází trestné hody, přičemž míč opouští jeho ruku v poloze, kdy jeho střed je přesně nad čárou trestného hodu ve výšce h_2 nad podlahou.

Optimální elevační úhel α je takový, při němž střed míče projde středem obroučky a přitom je zapotřebí co nejmenší počáteční rychlost míče. Dokažte obecně, že tento úhel má velikost $\alpha = 45^\circ + \beta/2$, kde β je *záměrný úhel*, tj. odchylka spojnice středu obroučky a počátečního bodu vrhu od vodorovné roviny.

Určete optimální elevační úhel pro zadané hodnoty a vypočtěte příslušnou velikost počáteční rychlosti míče.

Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešte pro hodnoty: $h_1 = 3{,}05$ m, $L = 5{,}425$ m, $h_2 = 2{,}45$ m, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

- **Zápis**

$h_1 = 3{,}05$ m	výška obroučky koše nad podlahou
$L = 5{,}425$ m	vodorovná vzdálenost středu koše od čáry trestného hodu
$h_2 = 2{,}45$ m	výška středu míče nad podlahou ve chvíli, kdy je střed míče přesně nad čárou trestného hodu
$\alpha = ?$	optimální elevační úhel
$v_0 = ?\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	příslušná velikost počáteční rychlosti míče k optimálnímu elevačnímu úhlu

Z tabulek:

$g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$	tíhové zrychlení

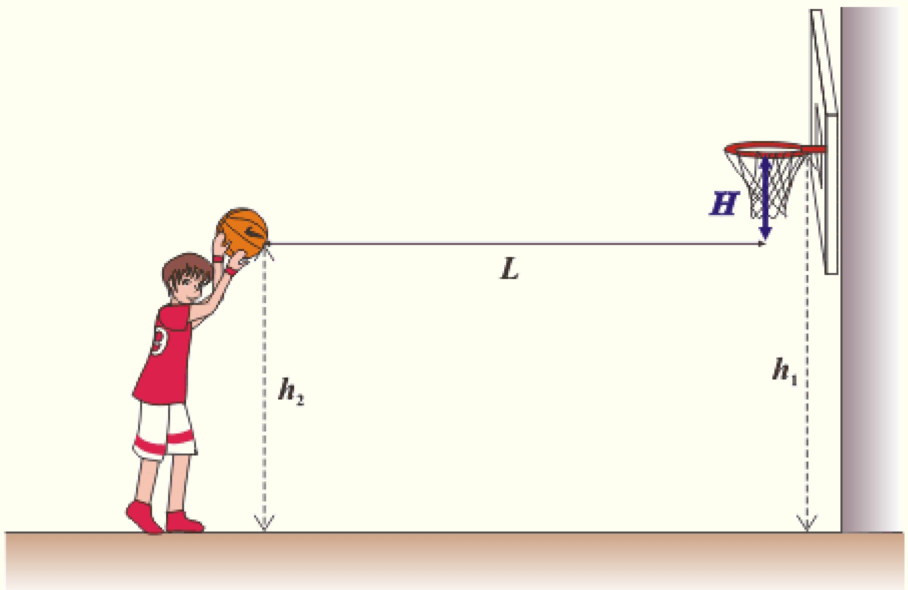
- **Nápověda 1: Obrázek situace**

Nakreslete obrázek zachycující danou situaci, vyznačte do něj elevační a záměrný úhel, vzdálenost L a výšku obroučky koše nad místem, ze kterého házíme míč.

  - **► Řešení k nápovědě 1:**

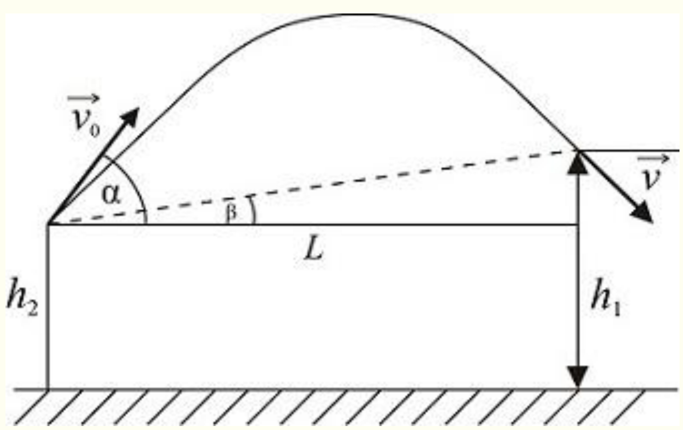
Označíme si L a H vodorovnou a svislou vzdálenost středu obroučky od počátečního bodu vrhu, α elevační úhel, t dobu letu, v_0 počáteční rychlost míče, v rychlost míče při průletu košem (*viz obrázek 1,2*).

Obrázek 1:



$H = h_1 - h_2$

Obrázek 2:



- **Nápověda 2: Pohyb míče ve vodorovném a svislém směru**

Jaký pohyb vykonává míč ve vodorovném směru? Jaký pohyb vykonává míč ve svislém směru?

○ **► Řešení k nápovědě 2:**

Ve vodorovném směru vykonává míč rovnoměrný přímočarý pohyb. Ve svislém směru se jedná o vrh svislý vzhůru.

- **Nápověda 3: Rychlost míče ve vodorovném a svislém směru**

Jaká je rychlost míče ve vodorovném směru a jak se mění s časem *x-ová* souřadnice míče?

Jaká je rychlost míče ve svislém směru a jak se mění s časem *y-ová* souřadnice míče?

Jaké hodnoty budou mít souřadnice x a y v okamžiku, kdy míč doletí do obroučky koše? Napište příslušné vztahy a vyjádřete z nich druhou mocninu počáteční rychlosti v_0^2(využijte ještě vztah tgβ = H/L).

○ **► Řešení k nápovědě 3:**

Platí:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

V okamžiku, kdy míč doletí do obroučky koše, bude platit:

$$x = L = v_0 t \cos\alpha$$

Tedy:

$$t = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = H = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = L tg\alpha - \frac{g L^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Odtud:

$$\frac{g L^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} = L tg\alpha - H$$

$$\frac{g L^2}{L tg\alpha - H} = 2 v_0^2 \cos^2\alpha$$

$$v_0^2=\frac{gL^2}{2(Ltg\alpha-H)\cos^2\alpha}=\frac{gL^2}{2(L\sin\alpha\cos\alpha-H\cos^2\alpha)}$$

Po dosazení $H=Ltg\beta$ a úpravě dostaneme:

$$v_0^2=\frac{gL^2}{2(L\sin\alpha\cos\alpha-Ltg\beta\cos^2\alpha)}=\frac{gL}{\sin2\alpha-tg\beta(1+\cos2\alpha)}$$
$$v_0^2=\frac{gL\cos\beta}{\sin2\alpha\cos\beta-\sin\beta-\sin\beta\cos2\alpha}=\frac{gL\cos\beta}{\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta}$$

Poznámka: Při úpravách jsme použili následující goniometrické vztahy:

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha-\beta)=\sin2\alpha\cos\beta-\cos2\alpha\sin\beta$$

- **Nápověda 4: Minimální hodnota výrazu**

Pro jaký úhel α bude hodnota výrazu pro v_0^2 minimální?

- ► **Řešení nápovědy 4:**

Hodnota výrazu bude minimální, jestliže bude maximální hodnota jmenovatele, tedy jestliže:

$$\sin(2\alpha-\beta)=1$$

$$2\alpha-\beta=90^\circ$$

Tedy, když platí:

$$\alpha=45^\circ+\frac{\beta}{2}$$

- **Nápověda 5: Počáteční rychlost pro optimální úhel**

Spočítejte počáteční rychlost v_0 pro optimální úhel α, tedy pro případ, kdy $sin(2\alpha-\beta) = 1$. Sinus a cosinus úhlu β vyjádřete pomocí vzdáleností H a L.

  - **► Řešení k nápovědě 5:**

V takovém případě:

$$v_0^2=\frac{gL\cos\beta}{1-\sin\beta}$$

Platí:

$$\cos\beta=\frac{L}{\sqrt{H^2+L^2}}$$

$$\sin\beta=\frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}}$$

S použitím $H=h_1-h_2$:

$$\cos\beta=\frac{L}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}}$$

$$\sin\beta=\frac{h_1-h_2}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}}$$

Pak:

$$v_0^2=\frac{\frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}}}{1-\frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}}}=\frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}-H}=g\left(\sqrt{H^2+L^2}+H\right)$$

S použitím $H=h_1-h_2$:

$$v_0^2=g\left(\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}+(h_1-h_2)\right)$$

Číselně pro zadané hodnoty:

$$\sin\beta = \frac{3{,}05-2{,}45}{\sqrt{(3{,}05-2{,}45)^2+5{,}425^2}}$$

Z toho:

$$\beta \doteq 6^{\circ}$$

Pak:

$$\alpha = 45^{\circ}+\frac{\beta}{2}$$

$$\alpha \doteq 48^{\circ}$$

Dále:

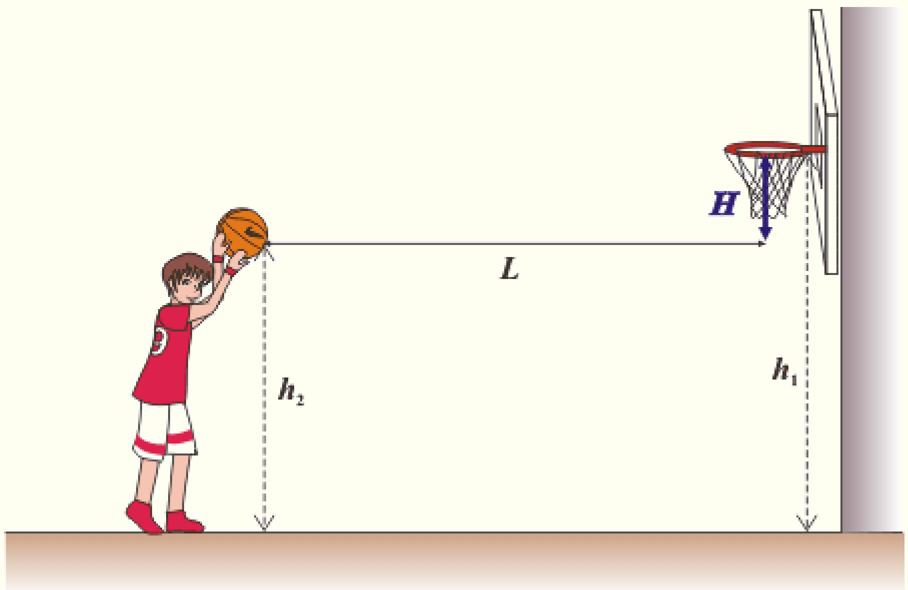
$$v_0^2 = 9{,}81\left(\sqrt{(3{,}05-2{,}45)^2+5{,}425^2}+(3{,}05-2{,}45)\right)\ \mathrm{m^2.s^{-2}}$$

$$v_0 \doteq 7{,}7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

- **CELKOVÉ ŘEŠENÍ:**

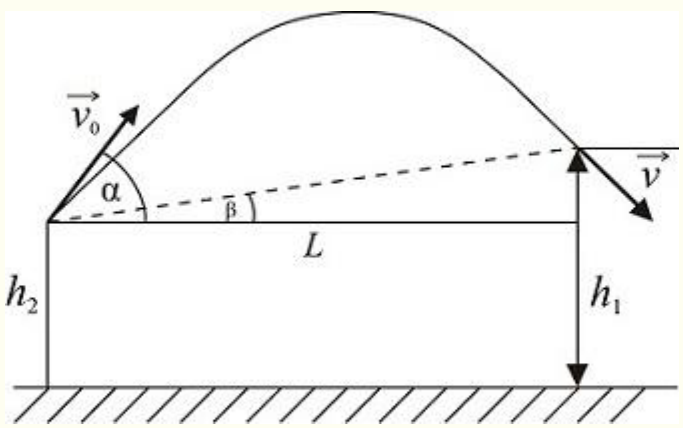
Označíme si *L* a *H* vodorovnou a svislou vzdálenost středu obroučky od počátečního bodu vrhu, *α* elevační úhel, *t* dobu letu, v_0 počáteční rychlost míče, *v* rychlost míče při průletu košem (*viz obrázek 1,2*).

Obrázek 1:



$$H = h_1 - h_2$$

Obrázek 2:



Ve vodorovném směru vykonává míč rovnoměrný přímočarý pohyb. Ve svislém směru vykonává míč vrh svislý vzhůru.

Platí:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

V okamžiku, kdy míč doletí do obroučky koše, bude platit:

$$x = L = v_0 t \cos\alpha$$

Tedy:

$$t = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = H = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = L tg\alpha - \frac{gL^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Odtud:

$$\frac{gL^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} = L tg\alpha - H$$

$$\frac{gL^2}{L tg\alpha - H} = 2 v_0^2 \cos^2\alpha$$

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(L tg\alpha - H)\cos^2\alpha} = \frac{gL^2}{2(L \sin\alpha\cos\alpha - H cos^2\alpha)}$$

Po dosazení $H = L tg\beta$ a úpravě dostaneme:

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(L \sin\alpha\cos\alpha - L tg\beta\cos^2\alpha)} = \frac{gL}{\sin 2\alpha - tg\beta(1+\cos 2\alpha)}$$

$$v_0^2 = \frac{gL\cos\beta}{\sin 2\alpha\cos\beta - \sin\beta - \sin\beta\cos 2\alpha} = \frac{gL\cos\beta}{\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta}$$

Poznámka: Při úpravách jsme použili následující goniometrické vztahy:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha-\beta) = \sin 2\alpha\cos\beta - \cos 2\alpha\sin\beta$$

Hodnota výrazu bude minimální, jestliže bude maximální hodnota jmenovatele, tedy jestliže:

$$\sin(2\alpha - \beta) = 1$$

$$2\alpha - \beta = 90^\circ$$

Tedy, když platí:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$

V takovém případě:

$$v_0^2 = \frac{gL\cos\beta}{1 - \sin\beta}$$

Platí:

$$\cos\beta = \frac{L}{\sqrt{H^2 + L^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + L^2}}$$

s použitím $H = h_1 - h_2$:

$$\cos\beta = \frac{L}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2}}$$

Pak:

$$v_0^2 = \frac{\frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}}}{1-\frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}}} = \frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}-H} = g\left(\sqrt{H^2+L^2}+H\right)$$

S použitím $H = h_1 - h_2$:

$$v_0^2 = g\left(\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}+(h_1-h_2)\right)$$

Číselně pro zadané hodnoty:

$$\sin\beta = \frac{3{,}05-2{,}45}{\sqrt{(3{,}05-2{,}45)^2+5{,}425^2}}$$

Z toho:

$$\beta \doteq 6^\circ$$

Pak:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha \doteq 48^\circ$$

Dále:

$$v_0^2 = 9{,}81\left(\sqrt{(3{,}05-2{,}45)^2+5{,}425^2}+(3{,}05-2{,}45)\right)\ \mathrm{m^2.s^{-2}}$$

$$v_0 \doteq 7{,}7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

- **Odpověď:**

Optimální elevační úhel je:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2} \quad ,$$

kde:

$$\sin\beta = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2}}$$

Pro zadané hodnoty:

$$\alpha \doteq 48^\circ$$

Příslušná velikost počáteční rychlosti míče je:

$$v_0^2 = g\left(\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2} + (h_1 - h_2)\right)$$

Pro zadané hodnoty:

$$v_0 \doteq 7{,}7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Beruška na válci

Válec o poloměru R a výšce h se otáčí rovnoměrně kolem vlastní osy ve směru otáčení hodinových ručiček tak, že vykoná jednu otočku za čas T. Po povrchové přímce válce slézá beruška stálou rychlostí v vzhledem k válci.

a) Určete průběh polohového vektoru berušky, byla-li v čase t = 0 s na horním okraji válce.

b) Určete průběh velikosti rychlosti berušky.

c) Určete závislost velikosti tečného a normálového zrychlení berušky na čase.

d) Jaká křivka je trajektorií pohybu? Určete její poloměr křivosti.

e) Jakou dráhu beruška opíše, než doleze až ke spodnímu okraji válce?

Řešte z pohledu pevného pozorovatele stojícího vedle válce.

Soustavu souřadnic volte tak, že osa z je osou válce, osy x a y leží v jeho dolní podstavě.

- **Nápověda 1 pro a): Obrázek situace**

Počátek souřadné soustavy zvolte ve středu spodní podstavy válce a počáteční polohu berušky B_0 na obvodě horní podstavy válce.

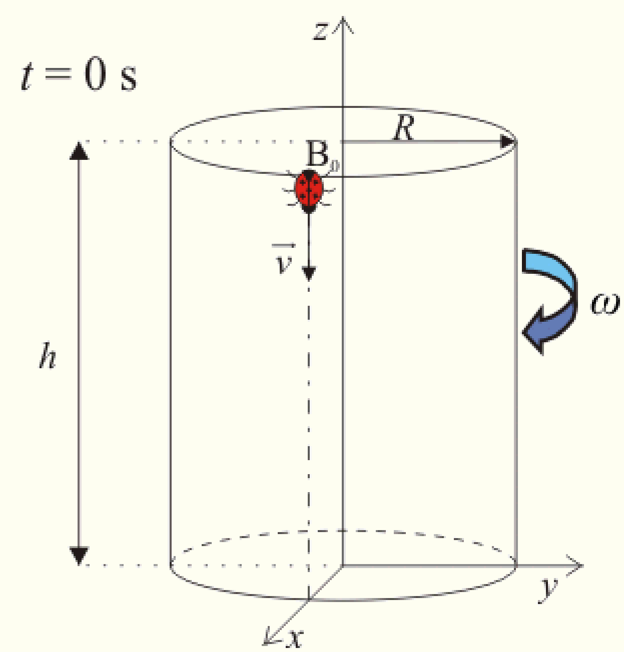
Nakreslete situaci pro čas t = 0 s a vyznačte polohu berušky B_0.

Pak nakreslete situaci pro čas t a vyznačte polohu berušky B, kam za čas t na válci popolezla.

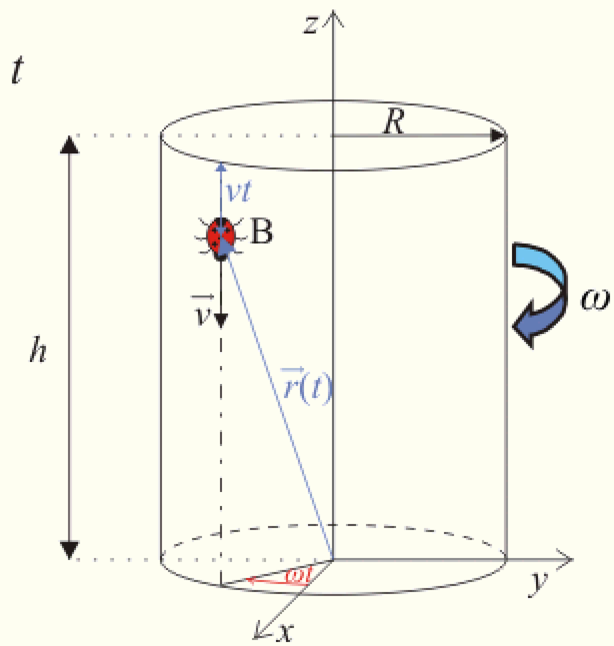
Vyznačte do obrázku i polohový vektor berušky v čase t a jeho průmět do roviny xy.

  - **► Řešení k nápovědě 1**

Obrázek 1:



Obrázek 2:



- **Nápověda 2 pro a): Průběh polohového vektoru berušky**

Pohyb berušky si rozložte na pohyb ve směru osy *z* a pohyb v rovině *xy*.

O jaké pohyby se jedná?

Zapište, jak se s časem budou měnit souřadnice *x*, *y*, *z* berušky, a pak s jejich pomocí vyjádřete polohový vektor.

  - **► Řešení k nápovědě 2**

Pohyb rozložíme na pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti *v* (ve směru osy *z*) a pohyb po kružnici s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (v rovině *x*, *y*):

$$x(t) = R\cos\omega t = R\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$y(t) = -R\sin\omega t = -R\sin\frac{2\pi}{T}t$$
$$z(t) = h - vt$$

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = R\cos\frac{2\pi}{T}t\,\vec{i} - R\sin\frac{2\pi}{T}t\,\vec{j} + (h - vt)\vec{k},$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

- **Nápověda 3 pro b): Průběh velikosti rychlosti berušky**

Vyjádřete si nejprve složky rychlosti v_x, v_y, v_z. Jakým způsobem je získáte z parametrických rovnic ve směru souřadnicových os?

Pak zapište průběh velikosti rychlosti berušky.

  - **► Řešení k nápovědě 3**

Složky rychlosti získáme derivací souřadnic podle času:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\omega t) = -R\omega\sin\omega t = -R\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-R\sin\omega t) = -R\omega\cos\omega t = -R\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h - vt) = -v$$

Průběh velikosti rychlosti berušky je:

$$v_v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) + v^2} =$$

$$= \sqrt{v^2 + R^2\omega^2} = \sqrt{v^2 + R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2} + v^2}$$

- **Nápověda 4 pro c): Velikost tečného a normálového zrychlení berušky**

Velikost tečného zrychlení snadno zjistíte, znáte-li velikost rychlosti berušky z předchozí nápovědy.

Pro velikost normálového zrychlení budete potřebovat kromě velikosti tečného také velikost celkového zrychlení berušky (to získáte opět ze složek a_x, a_y, a_z). Rozmyslete si, jaký mezi nimi platí vztah.

  - **► Řešení k nápovědě 4**

Velikost tečného zrychlení a_t berušky:

$$a_t(t) = \frac{\mathrm{d}v_v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v^2 + R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

$$a_t = 0$$

Vztah mezi velikostí tečného a_t, normálového a_n a celkového zrychlení a berušky je:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = a$

Velikost celkového zrychlení berušky *a*:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-R\omega \sin\omega t) = -R\omega^2 \cos\omega t$$

$$a_x(t) = -R\frac{4\pi^2}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-R\omega \cos\omega t) = R\omega^2 \sin\omega t = R\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$a_z(t) = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-v) = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t + R^2\omega^4\sin^2\omega t + 0}$$

$$a = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

Velikost normálového zrychlení a_n berušky:

$$a_n = a = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

- **Nápověda 5 pro d): Trajektorie pohybu berušky, poloměr křivosti**

Rozmyslete si, jaká křivka by byla trajektorií pohybu berušky, kdyby se válec otáčel a beruška by byla na válci v klidu. Pak k tomu připojte pohyb berušky.

Jaká křivka je trajektorií pohybu?

Pozn.: Uvědomte si, že úlohu řešíte z pohledu pevného pozorovatele stojícího vedle válce.

Jaký je vztah mezi poloměrem křivosti trajektorie, velikostí rychlosti a normálového zrychlení berušky?

  - **► Řešení k nápovědě 5**

Trajektorie pohybu:

Beruška se pohybuje po šroubovici.

Poloměr křivosti *ρ*:

$$a_n = \frac{v_v^2}{\rho}$$

Tedy:

$$\rho = \frac{v_v^2}{a_n}$$

$$\rho = \frac{R^2\omega^2 + v^2}{R\omega^2},$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Tedy:

$$\rho = \frac{R^2\frac{4\pi^2}{T^2} + v^2}{R\frac{4\pi^2}{T^2}} = R + \frac{v^2T^2}{4\pi^2R}$$

- **Nápověda 6 pro e): Dráha berušky pro případ e)**

Dráhu berušky snadno určíte pomocí velikosti rychlosti berušky, kterou znáte, a času, za který doleze odshora na spodní okraj válce. Ten si musíte vyjádřit. Uvědomte si, že znáte výšku válce a rychlost berušky vzhledem k válci.

  - **► Řešení k nápovědě 6**

Rychlost berušky vzhledem k okolí je konstantní, takže pro hledanou dráhu *l* platí:

$$l = v_v t,$$

kde

$$v_v = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2}$$

$$t = \frac{h}{v}$$

$$l = \left(\frac{h}{v}\right)\sqrt{R^2\omega^2+v^2},$$

kde

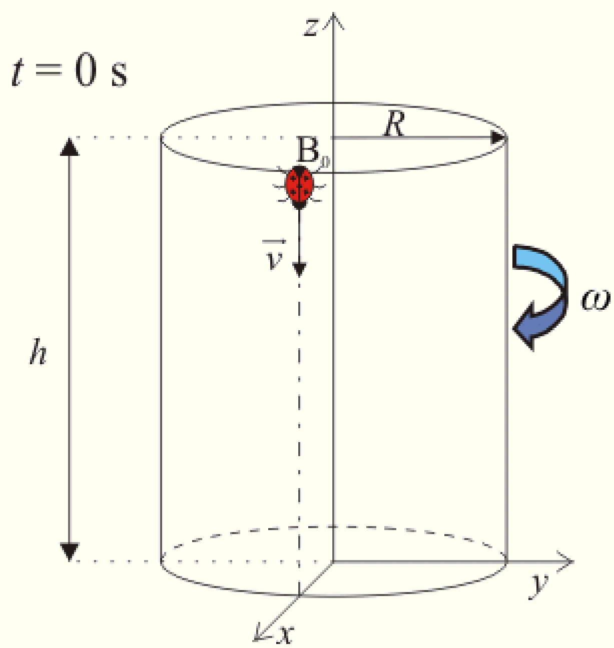
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Tedy:

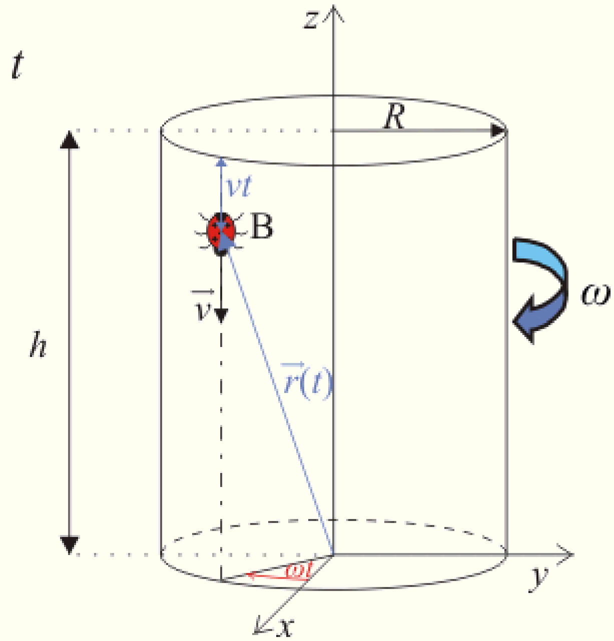
$$l = \left(\frac{h}{v}\right)\sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2}+v^2}$$

- **CELKOVÉ ŘEŠENÍ**

Obrázek 1:



Obrázek 2:



a)

Pohyb rozložíme na pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti *v* (ve směru osy *z*) a pohyb po kružnici s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (v rovině *x*, *y*):

$$x(t) = R\cos\omega t = R\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$y(t) = -R\sin\omega t = -R\sin\frac{2\pi}{T}t$$
$$z(t) = h - vt$$

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = R\cos\frac{2\pi}{T}t\,\vec{i} - R\sin\frac{2\pi}{T}t\,\vec{j} + (h - vt)\vec{k} \;,$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

b)

Složky rychlosti získáme derivací souřadnic podle času:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\omega t) = -R\omega\sin\omega t = -R\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-R\sin\omega t) = -R\omega\cos\omega t = -R\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h - vt) = -v$$

Průběh velikosti rychlosti berušky je:

$$v_v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) + v^2} =$$

$$= \sqrt{v^2 + R^2\omega^2} = \sqrt{v^2 + R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2} + v^2}$$

c)

Velikost tečného zrychlení a_t berušky:

$$a_t(t) = \frac{\mathrm{d}v_v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v^2 + R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

$$a_t = 0$$

Vztah mezi velikostí tečného a_t, normálového a_n a celkového zrychlení a berušky je:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = a$$

Velikost celkového zrychlení berušky a:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-R\omega\sin\omega t) = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$a_x(t) = -R\frac{4\pi^2}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-R\omega\cos\omega t) = R\omega^2\sin\omega t = R\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$a_z(t) = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-v) = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t + R^2\omega^4\sin^2\omega t + 0}$$

$$a = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

Velikost normálového zrychlení a_n berušky:

$$a_n = a = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

d)

Trajektorie pohybu:

Beruška se pohybuje po šroubovici.

Poloměr křivosti ρ:

$$a_n = \frac{v_v^2}{\rho}$$

Tedy:

$$\rho = \frac{v_v^2}{a_n}$$

$$\rho = \frac{R^2\omega^2+v^2}{R\omega^2} \quad ,$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Tedy:

$$\rho = \frac{R^2\frac{4\pi^2}{T^2}+v^2}{R\frac{4\pi^2}{T^2}} = R+\frac{v^2T^2}{4\pi^2R}$$

e) Dráha l:

Rychlost berušky vzhledem k okolí je konstantní, takže pro hledanou dráhu l platí:

$$l = v_v t \quad ,$$

kde

$$v_v = \sqrt{R^2\omega^2+v^2}$$
$$t = \frac{h}{v}$$

$$l = \left(\frac{h}{v}\right)\sqrt{R^2\omega^2+v^2}$$,

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Tedy:

$$l = \left(\frac{h}{v}\right)\sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2}+v^2}$$

- **Odpověď**

a) Průběh polohového vektoru berušky je:

$$\vec{r}(t) = R\cos\frac{2\pi}{T}t\vec{i} - R\sin\frac{2\pi}{T}t\vec{j} + (h-vt)\vec{k}$$,

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

b) Průběh velikosti rychlosti berušky je:

$$v_v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v^2+R^2\omega^2} = \sqrt{v^2+R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2}+v^2}$$

c) Velikost tečného zrychlení a_t berušky je:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v_v}{\mathrm{d}t} = 0$$

Velikost normálového zrychlení a_n berušky je konstantní a na čase nezávisí:

$$a_n = \sqrt{a^2-a_t^2} = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

d) Trajektorie pohybu:

Beruška se pohybuje po šroubovici.

Poloměr křivosti ρ je:

$$\rho = \frac{v_v^2}{a_n}$$

$$\rho = \frac{R^2\omega^2+v^2}{R\omega^2} = R+\frac{v^2T^2}{4\pi^2R}$$

e) Dráha *l* je:

$$l = \frac{h}{v}\sqrt{R^2\omega^2+v^2} = \frac{h}{v}\sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2}+v^2}$$