Brouk na desce

K popisu pohybu brouka lezoucího po dřevěné desce jsme si na desku nakreslili mřížku. Z mřížky jsme vyčetli, že se pohyboval po přímce dané rovnicí $y = 2x + 3$.

Napište parametrické rovnice pohybu brouka pro případ:

a) Brouk se pohyboval rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí o velikosti 2 cm s^{-1} a v čase 0 s se nacházel v bodě o souřadnicích [0; 3] cm.

b) Brouk se pohyboval rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti 0,25 cm s^{-2}. V čase 0 s byla velikost počáteční rychlosti brouka 1,5 cm s^{-1} a brouk se nacházel v bodě [0; 3] cm.

Poznámka: Parametrické rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.:

$$y = 1\ \mathrm{m} - 2\ \mathrm{m\ s^{-1}} \cdot t$$

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

Zápis

$y = 2x+3$	rovnice přímky, po které se pohyboval brouk
$[x, y] = [0, 3]$ cm	souřadnice brouka v čase $t = 0$ s
a) $v = 2$ cm s^{-1}	rychlost brouka při rovnoměrném přímočarém pohybu
b) $a = 0{,}25$ cm s^{-2}	zrychlení brouka při rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu
b) $v_0 = 1{,}5$ cm s^{-1}	počáteční rychlost brouka v čase $t = 0$ s

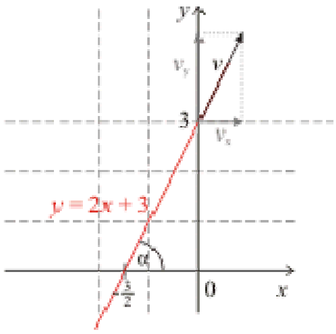
Nápověda 1 pro a): Grafické znázornění pohybu brouka

Zakreslete si danou přímku do grafu a vyznačte počáteční polohu brouka. Pak vyznačte, kde se bude brouk nacházet za okamžik t (pozor, jsou dvě možnosti).

► Řešení k nápovědě 1:

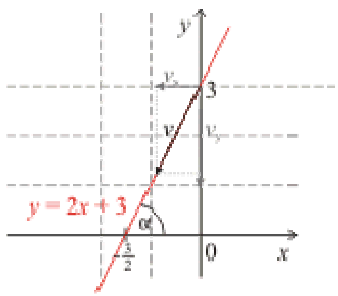
Obrázek 1:

Brouk se vydá po přímce směrem doprava



Obrázek 2:

Brouk se vydá po přímce směrem doleva



Nápověda 2 pro a): Pohyb brouka ve směru os x a y

Varianta 1:

Jakou dráhu brouk za čas *t* ulezl? Jaká je jeho *x*-ová a *y*-ová souřadnice v čase *t*?

(Úhel, který svírá přímka s osou *x* zjistíte z jejích průsečíků s osami *x* a *y*.)

Varianta 2:

Úlohu můžete řešit také tak, že si pohyb brouka rovnou rozložíte do směru osy *x* a *y*. Jakým pohybem se pohybuje ve směru osy *x* a jakou rychlostí? Jak se bude s časem měnit jeho *x*-ová souřadnice?

Jakým pohybem se pohybuje ve směru osy *y* a jakou rychlostí a jak se bude s časem měnit jeho *y*-ová souřadnice?

► Řešení k nápovědě 2:

Jedná se o pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti $v = 2\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$.

Složka rychlosti ve směru osy *x* je rovna:

$$v_x = v\cos\alpha$$

Souřadnice *x* se s časem bude měnit podle vztahu (brouk může lézt doprava nebo doleva):

$$x(t) = \pm v_x t$$
$$x(t) = \pm(v\cos\alpha)t \qquad (1)$$

Složka rychlosti ve směru osy *y* je rovna:

$$v_y = v\sin\alpha$$

Souřadnice *y* se s časem bude měnit podle vztahu (brouk může lézt doprava nebo doleva):

$$y(t) = \pm v_y t + 3$$
$$y(t) = \pm(v\sin\alpha)t + 3 \qquad (2)$$

Z *obrázku 1,2*:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad (3)$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad (4)$$

Dosazením do vztahu (1) za *v* a cos*α*:

$$x(t) = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}t$$

Dosazením do vztahu (2) za *v* a sin*α*:

$$y(t) = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}t+3$$

Nápověda 3 pro b): Pohyb brouka ve směru os x a y

Obdobně postupujte u řešení úkolu b). Rozložte si pohyb brouka do směru osy *x* a *y*. Jakým pohybem se pohybuje ve směru osy *x* a jakou počáteční rychlostí? Jaké bude jeho zrychlení ve směru osy *x*? Jak se bude s časem měnit jeho *x*-ová souřadnice?

Jakým pohybem se pohybuje ve směru osy *y* a jakou počáteční rychlostí? Jaké bude jeho zrychlení ve směru osy *y*? Jak se bude s časem měnit jeho *y*-ová souřadnice?

► Řešení k nápovědě 3:

Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti a = 0,25 cm s^{-2} a s počáteční rychlostí o velikosti v_0 = 1,5 cm s^{-1}.

Složky počáteční rychlosti ve směru os *x* a *y* jsou:

$$v_{0_x} = \pm v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0_y} = \pm v_0 \sin\alpha$$

Dosadíme za v_0, cosα (viz vztah 3) a sinα (viz vztah 4):

$$v_{0_x} = \pm 1{,}5\frac{\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{cm.s}^{-1} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{10}\,\mathrm{cm.s}^{-1}$$
$$v_{0_y} = \pm 1{,}5\frac{2\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{cm.s}^{-1} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{cm.s}^{-1}$$

Složky zrychlení ve směru os *x* a *y* jsou:

$$a_x = \pm a\cos\alpha$$
$$a_y = \pm a\sin\alpha$$

Dosadíme za a, cosα (viz vztah 3) a sinα (viz vztah 4):

$$a_x = \pm 0{,}25\frac{\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{cm.s}^{-2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{20}\,\mathrm{cm.s}^{-2}$$
$$a_y = \pm 0{,}25\frac{2\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{cm.s}^{-2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{10}\,\mathrm{cm.s}^{-2}$$

Složky rychlosti se s časem budou měnit podle vztahů:

$$v_x(t) = \int a_x(t)dt = \pm(v_{0_x}+a_x t)$$

$$v_y(t) = \int a_y(t)dt = \pm(v_{0_y}+a_y t)$$

Pro souřadnice *x* a *y* pak platí:

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \pm v_{0_x} t \pm \frac{1}{2} a_x t^2 + x_0$$

$$y(t) = \int v_y(t)dt = \pm v_{0_y} t \pm \frac{1}{2} a_y t^2 + y_0$$

Dosadíme číselně za v_{0x}, v_{0y}, a_x, a_y, x_0, y_0:

$$x(t) = \pm\frac{\sqrt{5}}{40}t^2 \pm \frac{3\sqrt{5}}{10}t$$

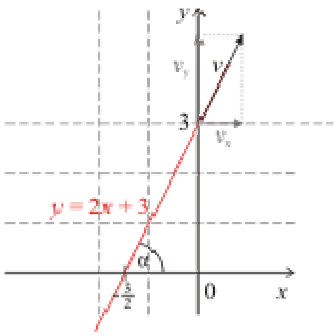
$$y(t) = \pm\frac{\sqrt{5}}{20}t^2 \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}t + 3$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Nakreslíme obrázek situace:

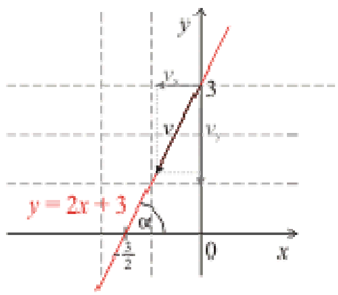
Obrázek 1:

Brouk se vydá po přímce směrem doprava



Obrázek 2:

Brouk se vydá po přímce směrem doleva



a)

Jedná se o pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti v = 2 cm s^{-1}.

Složka rychlosti ve směru osy *x* je rovna:

$$v_x = v\cos\alpha$$

Souřadnice *x* se s časem bude měnit podle vztahu (brouk může lézt doprava nebo doleva):

$$x(t) = \pm v_x t$$

$$x(t) = \pm(v\cos\alpha)t \qquad (1)$$

Složka rychlosti ve směru osy *y* je rovna:

$$v_y = v\sin\alpha$$

Souřadnice y se s časem bude měnit podle vztahu (brouk může lézt doprava nebo doleva):

$$y(t) = \pm v_y t + 3$$
$$y(t) = \pm(v\,\sin\alpha)t + 3 \qquad (2)$$

Z *obrázku 1,2*:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3^2+(\frac{3}{2})^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad (3)$$
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+(\frac{3}{2})^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad (4)$$

Dosazením do vztahu (1) za v a cosα:

$$x(t) = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}t$$

Dosazením do vztahu (2) za v a sinα:

$$y(t) = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}t + 3$$

b)

Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti a = 0,25 cm s^{-2} a s počáteční rychlostí o velikosti v_0 = 1,5 cm s^{-1}.

Složky počáteční rychlosti ve směru os x a y jsou:

$$v_{0_x} = \pm v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0_y} = \pm v_0 \sin\alpha$$

Dosadíme za v_0, cosα (viz vztah 3) a sinα (viz vztah 4):

$$v_{0_x} = \pm 1{,}5\frac{\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{cm\ s^{-1}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{10}\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$$
$$v_{0_y} = \pm 1{,}5\frac{2\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{cm\ s^{-1}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$$

Složky zrychlení ve směru os x a y jsou:

$$a_x = \pm a\cos\alpha$$
$$a_y = \pm a\sin\alpha$$

Dosadíme za a, cosα (viz vztah 3) a sinα (viz vztah 4):

$$a_x = \pm 0{,}25\frac{\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{cm\,s^{-2}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{20}\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$$
$$a_y = \pm 0{,}25\frac{2\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{cm\,s^{-2}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{10}\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$$

Složky rychlosti se s časem budou měnit podle vztahů:

$$v_x(t) = \int a_x(t)dt = \pm(v_{0_x}+a_x t)$$
$$v_y(t) = \int a_y(t)dt = \pm(v_{0_y}+a_y t)$$

Pro souřadnice *x* a *y* pak platí:

$$x(t) = \int v_x(t)dt = \pm v_{0_x}t\pm\frac{1}{2}a_x t^2+x_0$$
$$y(t) = \int v_y(t)dt = \pm v_{0_y}t\pm\frac{1}{2}a_y t^2+y_0$$

Dosadíme číselně za v_{0x}, v_{0y}, a_x, a_y, x_0, y_0:

$$x(t) = \pm\frac{\sqrt{5}}{40}t^2\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}t$$
$$y(t) = \pm\frac{\sqrt{5}}{20}t^2\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}t+3$$

Odpověď

a) Parametrické rovnice pohybu brouka v případě, kdy se pohyboval rovnoměrně přímočaře, jsou:

$$x(t) = \pm(v\cos\alpha)t = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}t$$
$$y(t) = \pm(v\sin\alpha)t+3 = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}t+3$$

b) Parametrické rovnice pohybu brouka v případě, kdy se pohyboval rovnoměrně zrychleně, jsou:

$$x(t) = \pm v_{0_x}t\pm\frac{1}{2}a_x t^2+x_0 = \pm\frac{\sqrt{5}}{40}t^2\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}t$$
$$y(t) = \pm v_{0_y}t\pm\frac{1}{2}a_y t^2+y_0 = \pm\frac{\sqrt{5}}{20}t^2\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}t+3$$

Náboj ve vakuu

Náboj byl vystřelen ve vakuu vodorovně rychlostí o velikosti v_0. Určete závislost velikosti rychlosti v a velikosti tečného a_t a normálového zrychlení a_n na čase t tohoto pohybu.

Odvoďte i průběh poloměru křivosti ρ trajektorie v závislosti na čase t.

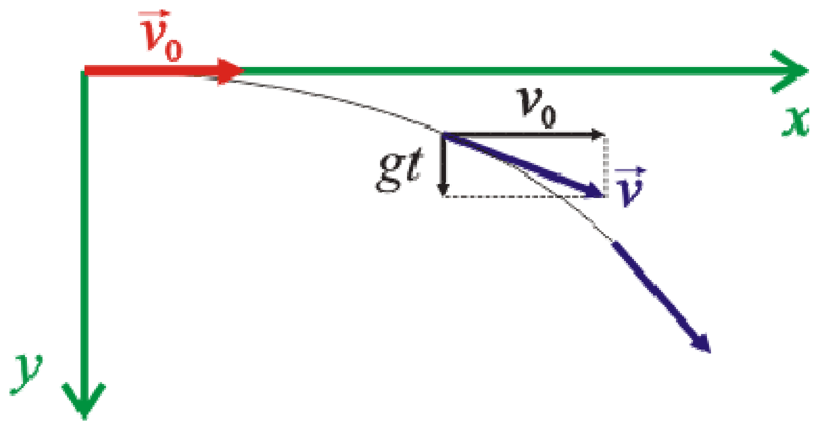
Nápověda 1: Obrázek situace

Nakreslete obrázek situace a označte si souřadnicové osy x a y.

Do obrázku vyznačte vektor počáteční rychlosti náboje $\vec{v}_0$ a jeho rychlost $\vec{v}$ v libovolném bodě pohybu i její složky ve směru souřadnicových os.

▶ Řešení k nápovědě 1

Obrázek situace:



Nápověda 2: Průběh velikosti rychlosti

Rozmyslete si, jakým pohybem se náboj pohybuje ve směru souřadnicových os.

Vyjádřete si nejprve složky rychlosti náboje v_x, v_y. Z nich pak snadno zjistíte průběh velikosti rychlosti náboje.

▶ Řešení k nápovědě 2

Ve směru osy *x*: Rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí o velikosti v_0.

Ve směru osy *y*: Volný pád.

Složky rychlosti (ve směru osy x a osy y):

$$v_x = v_0$$
$$v_y = gt$$

Průběh velikosti rychlosti:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\,.$$

Nápověda 3: Velikost tečného zrychlení

Využijte znalost průběhu velikosti rychlosti náboje z předchozí nápovědy. Jak z něj vyjádříte velikost tečného zrychlení náboje?

▶ Řešení k nápovědě 3

Velikost tečného zrychlení získáme časovou derivací velikosti celkové rychlosti:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Nápověda 4: Velikost normálového zrychlení

Pro určení velikosti normálového zrychlení náboje budete potřebovat kromě velikosti jeho tečného zrychlení (znáte z předchozí nápovědy) také velikost jeho celkového zrychlení. To získáte ze složek zrychlení a_x , a_y ve směru souřadnicových os.

Víte, jaký platí vztah mezi celkovým, tečným a normálovým zrychlením náboje?

▶ Řešení k nápovědě 4

Složky zrychlení:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{dt} = \frac{\mathrm{d}(v_0)}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(gt)}{\mathrm{d}t} = g$$

$$a_c = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g$$

Velikost normálového zrychlení získáme ze vztahu:

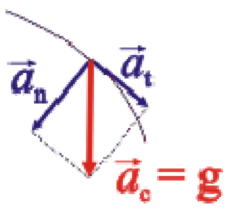
$$a_c = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Odtud:

$$a_n = \sqrt{a_c^2 - a_t^2}$$

$$a_n = \sqrt{g^2 - \frac{g^4t^2}{v_0^2 + g^2t^2}} = \sqrt{\frac{g^2v_0^2}{v_0^2 + g^2t^2}}$$

$$a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$



Nápověda 5: Poloměr křivosti trajektorie

Trajektorii pohybu náboje máte naznačenu v obrázku situace.

Jaký je vztah mezi poloměrem křivosti trajektorie, velikostí rychlosti a normálového zrychlení náboje?

▶ Řešení k nápovědě 5:

Pro velikost normálového zrychlení platí:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Pro poloměr křivosti trajektorie pak platí:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n},$$

kde

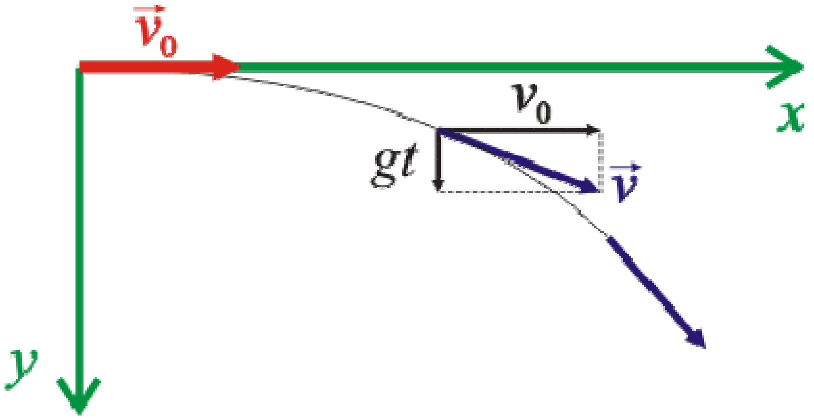
$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2},$$

$$a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

$$\rho(t) = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}{gv_0} = \frac{\sqrt{(v_0^2 + g^2t^2)^3}}{gv_0}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

Obrázek situace:



Ve směru osy x: Rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí o velikosti v_0.

Ve směru osy y: Volný pád.

Velikost rychlosti:

Složky rychlosti (ve směru osy x a osy y):

$$v_x = v_0$$

$$v_y = gt$$

Průběh velikosti rychlosti:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

Velikost tečného zrychlení:

Velikost tečného zrychlení získáme časovou derivací velikosti celkové rychlosti:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Velikost normálového zrychlení:

Velikost normálového zrychlení získáme ze vztahu:

$$a_c = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\,.$$

Odtud:

$$a_n = \sqrt{a_c^2 - a_t^2}\,.$$

Složky celkového zrychlení:

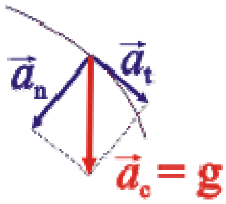
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v_0)}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(gt)}{\mathrm{d}t} = g$$

$$a_c = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g$$

$$a_n = \sqrt{g^2 - \frac{g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}} = \sqrt{\frac{g^2 v_0^2}{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

$$a_n = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$



Poloměr křivosti trajektorie:

Pro velikost normálového zrychlení platí:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}\,.$$

Pro poloměr křivosti trajektorie pak platí:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}\,,$$

kde

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\,,$$

$$a_n = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\,.$$

$$\rho(t) = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}{g v_0} = \frac{\sqrt{(v_0^2 + g^2 t^2)^3}}{g v_0}$$

Odpověď

Průběh velikosti rychlosti náboje je

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\,.$$

Velikost tečného zrychlení náboje je

$$a_t(t) = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\,.$$

Velikost normálového zrychlení náboje je

$$a_n(t) = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\,.$$

Pro poloměr křivosti trajektorie náboje platí

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{(v_0^2+g^2t^2)^3}}{v_0 g}\,.$$

Pozorování letadla

Ve vzdálenosti 1 m od okna širokého 50 cm sleduje pozorovatel letadlo. Nad obzorem ho vidí po dobu 3 s. Pokud předpokládáme, že letadlo má stálou rychlost o velikosti 340 m·s^{-1}, v jak velké přímé vzdálenosti od pozorovatele se nachází?

Zápis

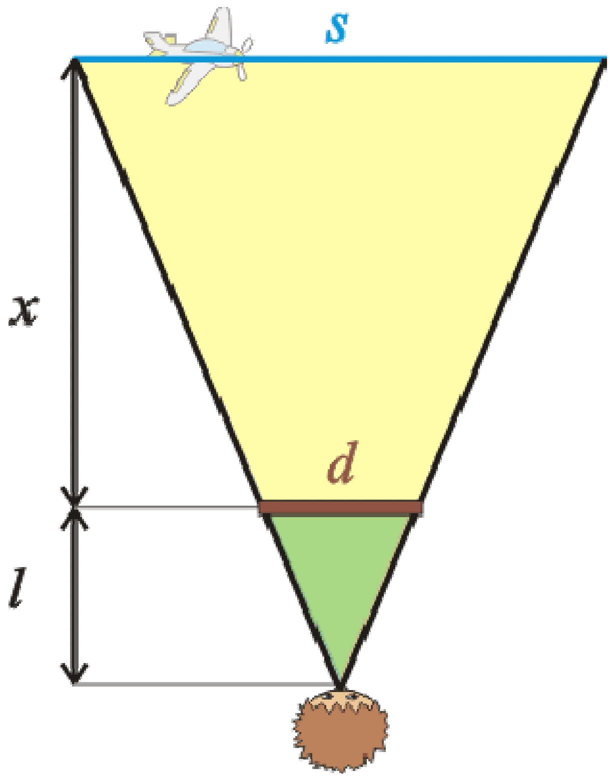
l = 1 m	vzdálenost letadla od okna
d = 50 cm	šířka okna
t = 3 s	doba, po kterou je letadlo vidět nad obzorem
v = 340 m·s^{-1}	rychlost letadla
l_1 = ? (m)	přímá vzdálenost letadla od pozorovatele

Nápověda 1: Obrázek situace

Nakreslete si obrázek situace.

► Řešení k nápovědě 1

Obrázek :



Nápověda 2: Dráha letadla

Předpokládejte, že letadlo se po celou dobu pohybuje přímočaře. Jakou dráhu urazí od doby, kdy se objeví za oknem, až do doby, kdy pozorovateli zmizí z dohledu? Všechny k tomu potřebné údaje máte v zadání úlohy.

▶ Řešení k nápovědě 2

Během pozorování urazí letadlo dráhu:

$$s = vt$$

Nápověda 3: Vzdálenost pozorovatele

K vyjádření vzdálenosti pozorovatele použijte podobnost trojúhelníků.

▶ Řešení k nápovědě 3

Z podobnosti zeleného a žlutého trojúhelníku na *obrázku* (viz nápověda 1) vyplývá:

$$\frac{l}{d} = \frac{x+l}{s}$$

$$x+l = l_1$$

Pro vzdálenost l_1 dostaneme:

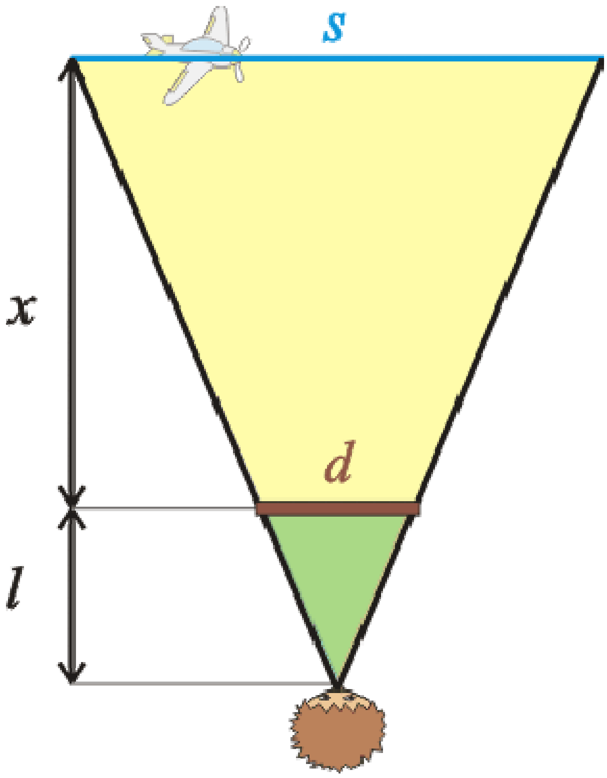
$$l_1 = x+l = \frac{ls}{d} = \frac{lvt}{d}$$

Číselně (převedeme d = 50 cm = 0,5 m):

$$l_1 = \frac{(1\cdot 340\cdot 3)}{0{,}5}\,\mathrm{m} = 2\,040\,\mathrm{m}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Obrázek :



Budeme předpokládat, že letadlo se pohybuje po dobu *t* , kdy ho pozorovatel vidí nad obzorem, přímočaře. Během pozorování urazí dráhu:

$$s = vt$$

Z podobnosti zeleného a žlutého trojúhelníku na obrázku vyplývá:

$$\frac{l}{d} = \frac{x+l}{s}$$

$$x+l = l_1$$

Pro vzdálenost l_1 dostaneme:

$$l_1 = x+l = \frac{ls}{d} = \frac{lvt}{d}$$

Číselně (převedeme d = 50 cm = 0,5 m):

$$l_1 = \frac{(1\cdot 340\cdot 3)}{0{,}5}\,\mathrm{m} = 2\,040\,\mathrm{m}$$

Odpověď

Letadlo se od pozorovatele nachází ve vzdálenosti l_1 , pro kterou platí:

$$l_1 = \frac{lvt}{d}$$

Číselně:

$$l_1 = 2\,040\,\mathrm{m}$$

Kutálení kuličky

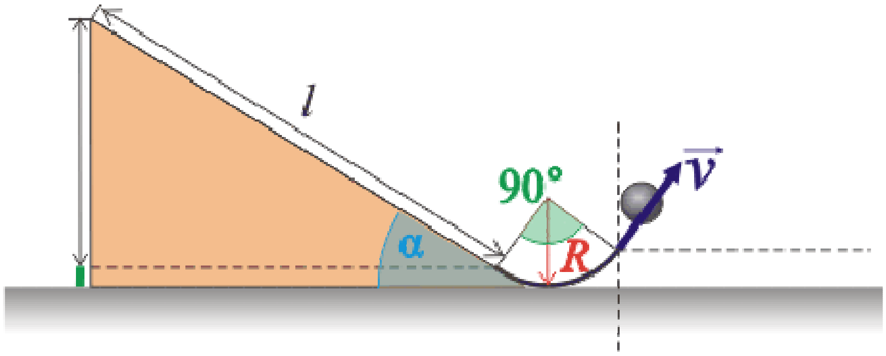
Malá kulička se skutálela po dráze tvaru nakloněné roviny délky $l = 2$ m , svírající s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 30°$ a zakončené obloukem o poloměru $R = 0{,}4$ m a středovém úhlu 90° (*viz obrázek*).

Velikost rychlosti, se kterou kulička opustila konec oblouku, byla $v = 3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Určete maximální výšku H nad vodorovnou rovinou, do které se kulička dostane po opuštění dráhy.

b) Určete dobu T , po kterou se kulička nachází ve vzduchu po opuštění dráhy.

c) Určete vodorovnou vzdálenost L , ve které kulička dopadne, od místa, kde opustí oblouk.



Nápověda 1: Obrázek situace

Jak můžete charakterizovat pohyb kuličky po opuštění dráhy?

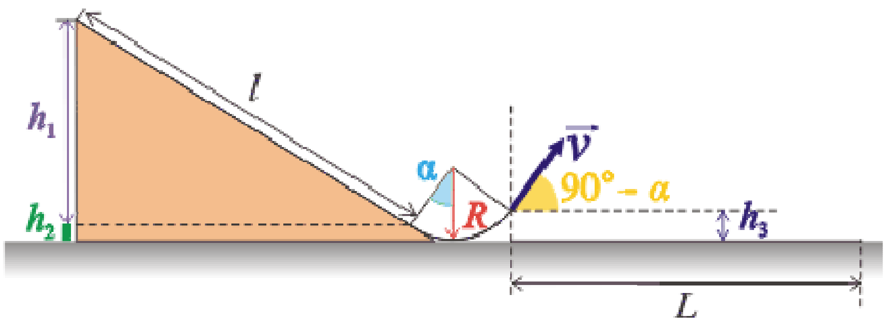
Nakreslete si obrázek a vyznačte v něm veličiny, které budete k výpočtům potřebovat.

Napište si všechny potřebné vztahy mezi těmito veličinami, které vyplývají z obrázku.

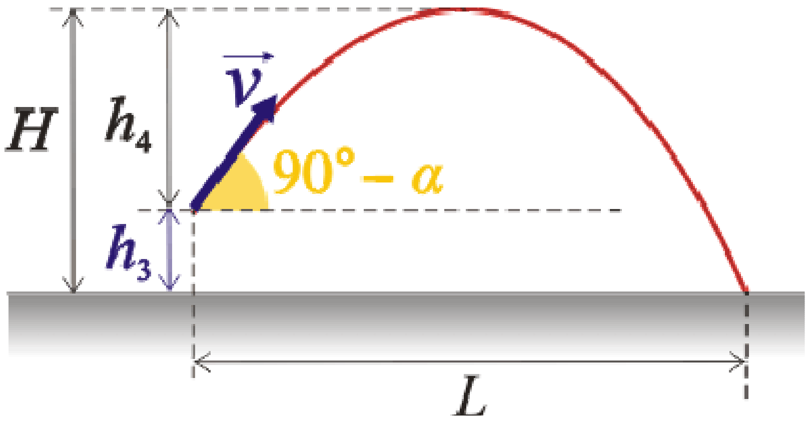
► Řešení k nápovědě 1

Jedná se o vrh šikmo vzhůru z počáteční výšky h_3 nad vodorovnou rovinou pod úhlem $90° - \alpha$ s počáteční rychlostí $\vec{v}$ (*viz obrázek 1*).

Obrázek 1:



Obrázek 2:



Z *obrázků 1,2* vyplývá několik vztahů pro úhel α a dané hodnoty:

$$h_1 = l\sin\alpha$$
$$h_2 = R(1-\cos\alpha)$$
$$h_3 = R\left[1-\cos(90^\circ-\alpha)\right] = R(1-\sin\alpha)$$
$$H = h_3 + h_4$$

Nápověda 2 pro a): Maximální výška

Jaké vztahy (pro souřadnice a složky rychlosti) platí pro vrh šikmo vzhůru s počáteční rychlostí velikosti v a elevačním úhlem $90^\circ - \alpha$?

Jak z těchto vztahů vyjádříte maximální výšku, do které se kulička dostane po opuštění dráhy?

► Řešení k nápovědě 2

Pro vrh šikmo vzhůru s počáteční rychlostí v a elevačním úhlem $90^\circ - \alpha$ pak dostáváme:

$$v_x = v\cos(90^\circ-\alpha) = v\sin\alpha$$
$$v_y = v\sin(90^\circ-\alpha)-gt = v\cos\alpha-gt$$
$$x = vt\sin\alpha$$
$$y = vt\cos\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

Pro maximální výšku:

$$v_y = 0$$
$$t_v = \frac{v\cos\alpha}{g}$$
$$h_4 = vt_v\cos\alpha-\frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2\cos^2\alpha}{g}-\frac{gv^2\cos^2\alpha}{2g^2} = \frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}$$
$$H = h_3+h_4 = R\,(1-\sin\alpha)+\frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}$$

Číselně:

$$H = \left[0{,}4\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{3{,}5^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot 9{,}81}\right]\mathrm{m}$$

$$H \doteq 0{,}67\ \mathrm{m}$$

Nápověda 3 pro b): Doba letu kuličky

Celková doba, po kterou se kulička nachází ve vzduchu, se skládá z doby stoupání kuličky a z doby klesání kuličky.

Jak tyto doby vypočítáte?

▶ Řešení k nápovědě 3

Doba stoupání:

$$t_v = T_1 = \frac{v\cos\alpha}{g}$$

Doba klesání (kulička padá z výšky *H*):

$$H = \frac{1}{2} g T_2^2$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Celková doba letu:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{v\cos\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Číselně:

$$T = \left[\frac{3{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9{,}81} + \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}67}{9{,}81}}\right]\mathrm{s}$$

$$T \doteq 0{,}68\ \mathrm{s}$$

Nápověda 4 pro c): Délka letu

Vodorovnou vzdálenost od místa, kde kulička opustí oblouk, si označte *L* a vyznačte si ji v obrázku.

Jak ji vypočítáte?

▶ Řešení k nápovědě 4

Ve vodorovném směru se kulička pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $v\sin\alpha$ po dobu *T*.

Vodorovná vzdálenost *L* od místa, kde kulička opustí oblouk je tedy:

$$L = vT\sin\alpha$$

Číselně:

$$L = \left(3{,}5\cdot 0{,}68\cdot\frac{1}{2}\right)\mathrm{m}$$

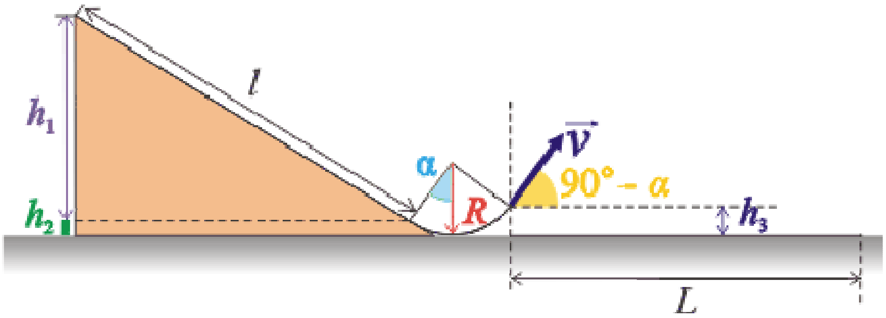
$$L \doteq 1{,}19\ \mathrm{m}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

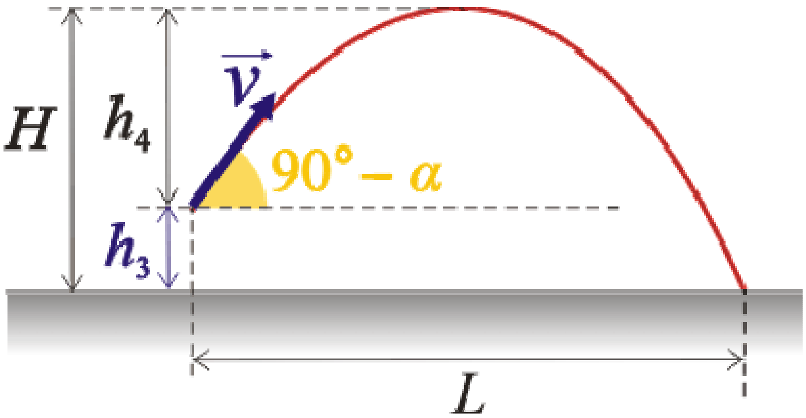
a)Výška výstupu

Jedná se o vrh šikmo vzhůru z počáteční výšky h_3 nad vodorovnou rovinou pod úhlem $90° - \alpha$ s počáteční rychlostí $\vec{v}$ (*viz obrázek 1*).

Obrázek 1:



Obrázek 2:



Z *obrázků 1,2* vyplývá několik vztahů pro úhel α a dané hodnoty:

$$h_1 = l\sin\alpha$$

$$h_2 = R(1 - \cos\alpha)$$

$$h_3 = R\left[1 - \cos(90° - \alpha)\right] = R(1 - \sin\alpha)$$

$$H = h_3 + h_4$$

Pro vrh šikmo vzhůru s počáteční rychlostí v a elevačním úhlem $90° - \alpha$ pak dostáváme:

$$v_x = v\cos(90° - \alpha) = v\sin\alpha$$

$$v_y = v\sin(90° - \alpha) - gt = v\cos\alpha - gt$$

$$x = vt\sin\alpha$$

$$y = vt\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Pro maximální výšku:

$$v_y = 0$$

$$t_v = \frac{v\cos\alpha}{g}$$

$$h_4 = vt_v\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2\cos^2\alpha}{g} - \frac{gv^2\cos^2\alpha}{2g^2} = \frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}$$

$$H = h_3 + h_4 = R(1 - \sin\alpha) + \frac{v^2\cos^2\alpha}{2g}$$

Číselně:

$$H = \left[0{,}4\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{3{,}5^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot 9{,}81}\right]\mathrm{m}$$
$$H \doteq 0{,}67\ \mathrm{m}$$

b)Doba letu

Doba stoupání:

$$t_v = T_1 = \frac{v\cos\alpha}{g}$$

Doba klesání (kulička padá z výšky *H*):

$$H = \frac{1}{2}gT_2^2$$
$$T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Celková doba letu:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{v\cos\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Číselně:

$$T = \left[\frac{3{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9{,}81} + \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}67}{9{,}81}}\right]\mathrm{s}$$
$$T \doteq 0{,}68\ \mathrm{s}$$

c)Délka letu

Ve vodorovném směru se kulička pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $v\sin\alpha$ po dobu *T*.

Vodorovná vzdálenost *L* od místa, kde kulička opustí oblouk je tedy:

$$L = vT\sin\alpha$$

Číselně:

$$L = \left(3{,}5\cdot 0{,}68\cdot\frac{1}{2}\right)\mathrm{m}$$
$$L \doteq 1{,}19\ \mathrm{m}$$

Odpověď

a) Pro maximální výšku nad vodorovnou rovinou, do které se kulička dostane po opuštění dráhy, platí:

$$H = R(1-\sin\alpha) + \frac{v^2\cos^2\alpha}{2g} \doteq 0{,}67\ \mathrm{m}$$

b) Doba, po kterou se kulička nachází ve vzduchu po opuštění dráhy, je:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{v\cos\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g}} \doteq 0{,}68\ \mathrm{s}$$

c) Vodorovná vzdálenost od místa, kde kulička opustí oblouk, je:

$$L = vT\sin\alpha \doteq 1{,}19\ \mathrm{m}$$

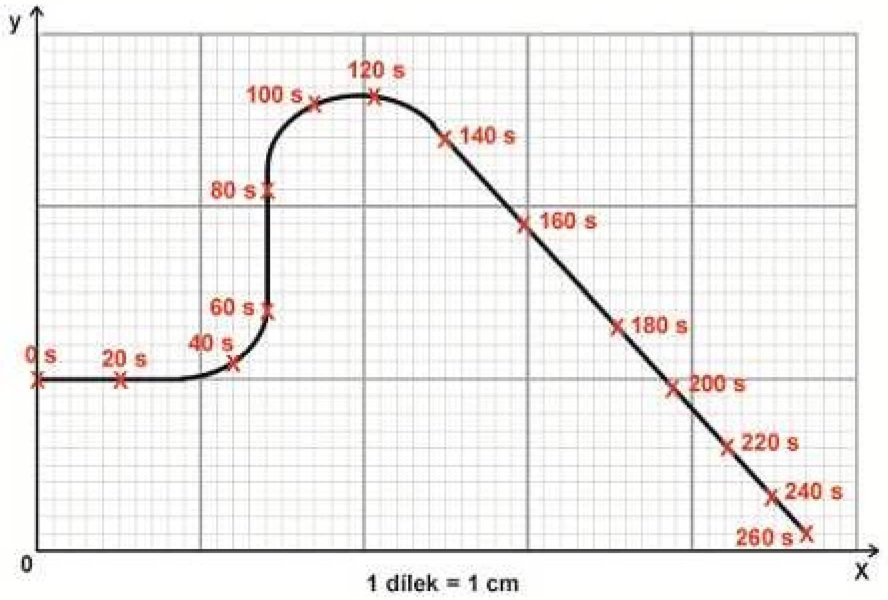
Zápis

$l = 2$ m	délka nakloněné roviny
$\alpha = 30°$	úhel, který svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou
$R = 0{,}4$ m	poloměr oblouku
$v = 3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	rychlost, se kterou kulička opustila konec oblouku
$H = ?$ (m)	maximální výška, do které se kulička dostane
$T = ?$ (s)	doba, po kterou se kulička nachází ve vzduchu
$L = ?$ (m)	vzdálenost, ve které kulička dopadne
Z tabulek	
$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$	tíhové zrychlení

Housenka

Na obrázku je zaznamenaná stopa housenky s časovými údaji, kdy kde byla.

Obrázek:



a) Sestavte podle obrázku tabulku závislosti ulezené dráhy na čase a nakreslete graf.

b) Odpovězte na následující otázky:

1. Jakou vzdálenost housenka přibližně ulezla? (Zakřivené úseky dráhy můžete odměřit například pomocí niti.)
2. Jakou vzdálenost ulezla mezi 20.s a 40.s a mezi 100.s a 120.s?
3. Mezi kterými dvěma měřeními byla ulezená vzdálenost největší a mezi kterými nejmenší?
4. Poznáte z grafu, zda housenka někdy stála? Podle čeho?

c) Určete souřadnice housenky v čase 0 s, 20 s, 80 s, 120 s, 140 s, 260 s.

d) Určete průměrnou rychlost housenky během doby, co jste ji sledovali.

e) Určete průměrné rychlosti housenky v jednotlivých dvacetisekundových intervalech a zapište je do tabulky. Údaje vyneste do grafu.

f) Kdy lezla housenka nejrychleji a kdy nejpomaleji? Jak to poznáte z grafu rychlosti a jak z grafu dráhy?

Nápověda 1 pro a):

Uvědomte si, co obrázek představuje a kde je v něm schovaná dráha.

Tabulku závislosti ulezené dráhy housenky na čase i graf pak snadno sestavíte.

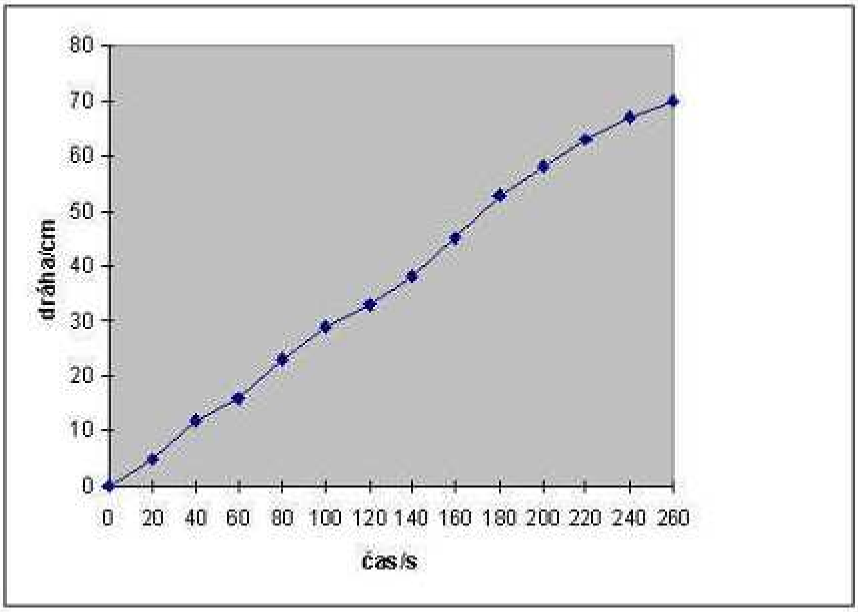
▶ Řešení k nápovědě 1

V obrázku je zachycená křivka, po které housenka lezla (trajektorie). Abychom zjistili ulezenou dráhu v daném čase, musíme změřit nebo pomocí čtvercové sítě v obrázku odhadnout délku této křivky od nuly do daného času.

Tabulka závislosti ulezené dráhy housenky na čase:

čas/s	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
dráha/cm	0	5	12	16	23	29	33	38	45	52	58	63	67	70

Graf závislosti ulezené dráhy housenky na čase:



Nápověda 2 pro b)1:

Vzdálenost, kterou housenka ulezla, můžete na obrázku odměřit například pomocí niti nebo ji můžete zjistit rovnou z grafu (resp.z tabulky) z bodu a).

▶ Řešení k nápovědě 2

Z grafu závislosti ulezené dráhy na čase (z bodu a)) nebo rovnou z tabulky závislosti ulezené dráhy na čase (z bodu a)) vidíme, že housenka ulezla vzdálenost přibližně 70 cm.

Nápověda 3 pro b)2:

V tabulce z bodu a) máte zaznamenanou ulezenou dráhu housenky v jednotlivých časech.

Snadno v ní najdete vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi 20.s a 40.s nebo mezi 100.s a 120.s.

▶ Řešení k nápovědě 3

Z tabulky z bodu a) závislosti ulezené dráhy housenky na čase odečteme:

Ve dvacáté sekundě měla housenka ulezeno 5 cm, ve čtyřicáté sekundě měla housenka ulezeno 12 cm, mezi dvacátou a čtyřicátou sekundou tedy ulezla 7 cm.

Obdobně ve sté sekundě měla housenka ulezeno 29 cm a ve stodvacáté 33 cm, mezi stou a stodvacátou sekundou housenka tedy ulezla 4 cm.

Nápověda 4 pro b)3:

Hledané úseky najdete snadno pohledem na stopu housenky.

Najít je můžete i v tabulce z bodu a), kde máte zaznamenanou ulezenou dráhu housenky v jednotlivých časech. Je třeba zjistit, mezi kterými dvěma měřeními byla ulezená vzdálenost housenky největší a mezi kterými nejmenší.

▶ Řešení k nápovědě 4

Z tabulky z bodu a) závislosti ulezené dráhy housenky na čase lze vyčíst:

Největší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, a to 8 cm.

Nejmenší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, a to 3 cm.

Nápověda 5 pro b)4:

Jak by vypadala křivka v grafu závislosti ulezené dráhy housenky na čase (z bodu a)), kdyby housenka v libovolném dvacetisekundovém intervalu stála? Jaká by byla její ulezená vzdálenost?

Promyslete si, jestli by se z grafu dalo poznat, kdyby housenka stála třeba jen 10 s.

▶ Řešení k nápovědě 5

Pokud by housenka stála celých dvacet sekund, byla by křivka v grafu závislosti ulezené dráhy housenky na čase (z bodu a)) v daném úseku vodorovná. Ulezená vzdálenost housenky v daném dvacetisekundovém úseku by byla nulová.

Housenka ale mohla stát třeba jen deset sekund a pak kus ulézt, a to z grafu nepoznáme.

Nápověda 6 pro c):

Souřadnice housenky v jednotlivých časových okamžicích určíte z obrázku ze zadání. Na vodorovné ose odečtete x-ovou souřadnici, na svislé ose pak y-ovou souřadnici housenky.

► Řešení k nápovědě 6

Souřadnice housenky v jednotlivých časových okamžicích určíme z obrázku ze zadání. Na vodorovné ose odečteme x-ovou souřadnici, na svislé ose pak y-ovou souřadnici housenky.

Platí:

V čase 0 s měla housenka souřadnice:

$$x = 0\ \text{cm}$$
$$y = 10\ \text{cm}$$

V čase 20 s měla housenka souřadnice:

$$x = 5\ \text{cm}$$
$$y = 10\ \text{cm}$$

V čase 80 s měla housenka souřadnice:

$$x = 14\ \text{cm}$$
$$y = 21\ \text{cm}$$

V čase 140 s měla housenka souřadnice:

$$x = 25\ \text{cm}$$
$$y = 24\ \text{cm}$$

V čase 260 s měla housenka souřadnice:

$$x = 47\ \text{cm}$$
$$y = 1\ \text{cm}$$

Nápověda 7 pro d):

Z tabulky závislosti ulezené dráhy housenky na čase (z bodu a)) zjistěte celkovou dobu, po kterou jsme pohyb housenky sledovali, a celkovou dráhu, kterou za celkovou dobu ulezla.

Jak z těchto údajů určíte průměrnou rychlost housenky?

► Řešení k nápovědě 7

Z tabulky závislosti ulezené dráhy housenky na čase (z bodu a)) zjistíme celkovou dobu, po kterou jsme pohyb housenky sledovali, a označíme si ji t_c. Dále z tabulky zjistíme celkovou dráhu, kterou housenka za celkovou dobu ulezla, a označíme ji s_c.

Platí:

$$t_c = 260\ \mathrm{s}$$
$$s_c = 70\ \mathrm{cm}$$

Z těchto údajů určíme průměrnou rychlost housenky během doby, co jsme ji sledovali:

$$v_p = \frac{s_c}{t_c}$$
$$v_p = \frac{70\ \mathrm{cm}}{260\ \mathrm{s}} = 0{,}27\ \mathrm{cm.s^{-1}} = 2{,}7\ \mathrm{mm.s^{-1}}$$

Nápověda 8 pro e):

Z tabulky závislosti ulezené dráhy housenky na čase (z bodu a)) zjistěte přírůstky dráhy housenky v jednotlivých dvacetisekundových intervalech.

Znáte-li dráhu ulezenou v daném časovém intervalu a jeho délku spočítáte příslušnou průměrnou rychlost podobně jako v předchozím bodě.

► Řešení k nápovědě 8

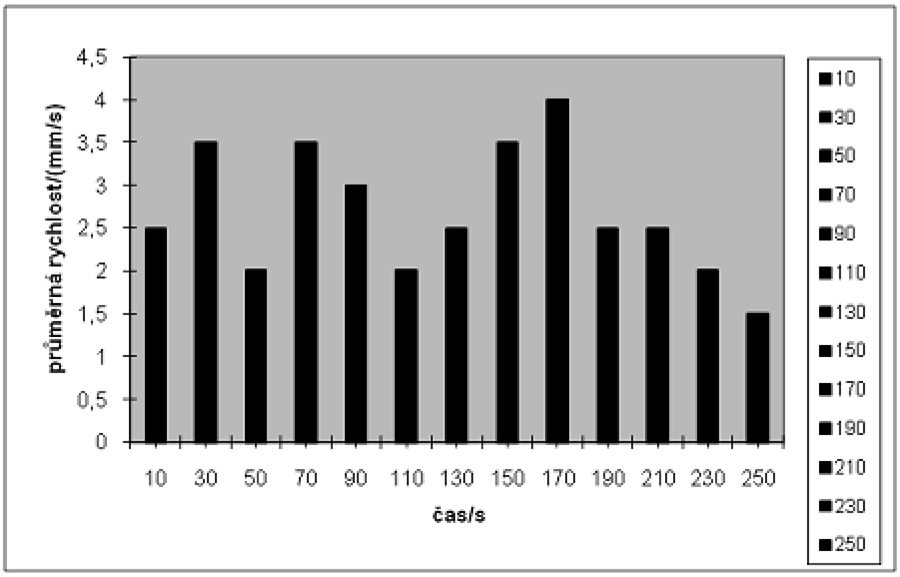
Z tabulky závislosti ulezené dráhy housenky na čase (bod a)) zjistíme, jakou dráhu ulezla housenka v jednotlivých dvacetisekundových intervalech.

Průměrnou rychlost v daném intervalu (v mm/s) spočítáme tak, že vydělíme dráhu ulezenou v příslušném intervalu (v mm) časem 20 s.

Tabulka ulezené dráhy v závislosti na čase, přírůstků dráhy a průměrných rychlostí v jednotlivých časových intervalech:

čas/s	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
dráha/cm	0	5	12	16	23	29	33	38	45	52	58	63	67	70
přírůstek dráhy/cm		5	7	4	7	6	4	5	7	8	5	5	4	3
průměrná rychlost/(mm/s)		2,5	3,5	2,0	3,5	3,0	2,0	2,5	3,5	4,0	2,5	2,5	2,0	1,5

Graf průměrných rychlostí housenky v jednotlivých dvacetisekundových intervalech :



Nápověda 9 pro f):

Ke zjištění, kdy lezla housenka nejrychleji nebo nejpomaleji, vám pomůže odpověď na otázku b) 3 či tabulka z předchozí nápovědy nebo pohled do grafů.

Uvědomte si, že lezla-li housenka v daném dvacetisekundovém intervalu nejrychleji (resp.nejpomaleji), byla v tomto intervalu její průměrná rychlost největší (resp.nejmenší). Rozmyslete si, jak to ovlivní tvar křivky grafu závislosti ulezené dráhy housenky na čase.

► Řešení k nápovědě 9

Určení z tabulky:

Z tabulky z bodu e) (řešení předchozí nápovědy 8) lze vyčíst:

Největší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, a to 8 cm. Protože měření provádíme ve stále stejném dvacetisekundovém intervalu, znamená to, že v této době byla její průměrná rychlost nejvyšší.

Housenka tedy lezla nejrychleji mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou.

Nejmenší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, a to 3 cm. Protože měření provádíme ve stále stejném dvacetisekundovém intervalu, znamená to, že v této době byla její průměrná rychlost nejnižší.

Housenka tedy lezla nejpomaleji mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou.

Určení z grafu:

Jak již bylo řečeno, lezla-li housenka v daném dvacetisekundovém intervalu nejrychleji (resp.nejpomaleji), byla v tomto intervalu její průměrná rychlost největší (resp.nejmenší).

Z grafu průměrné rychlosti housenky v jednotlivých dvacetisekundových intervalech tedy vyplývá:

Housenka lezla nejrychleji mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, protože sloupec v grafu průměrných rychlostí je nejvyšší.

Housenka lezla nejpomaleji mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, protože sloupec v grafu průměrných rychlostí je nejnižší.

Z grafu závislosti ulezené dráhy housenky na čase vyplývá:

Housenka lezla nejrychleji mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, protože křivka v grafu dráhy je nejstrmější.

Housenka lezla nejpomaleji mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, protože křivka v grafu dráhy je nejméně strmá.

CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

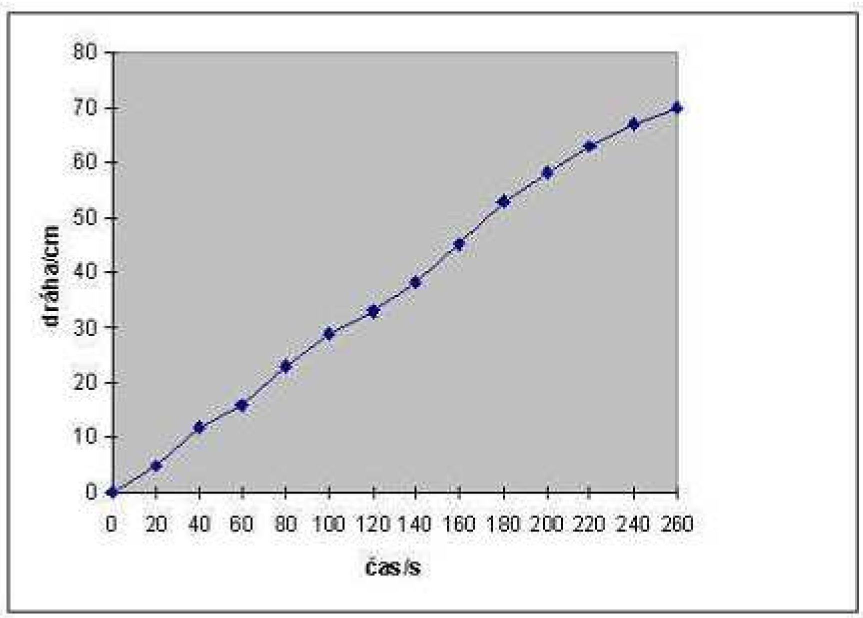
a):

V obrázku je zachycená křivka, po které housenka lezla (trajektorie). Abychom zjistili ulezenou dráhu v daném čase, musíme změřit nebo pomocí čtvercové sítě v obrázku odhadnout délku této křivky od nuly do daného času.

Tabulka závislosti ulezené dráhy housenky na čase:

čas/s	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
dráha/cm	0	5	12	16	23	29	33	38	45	52	58	63	67	70

Graf závislosti ulezené dráhy housenky na čase:



b) 1:

Z grafu závislosti ulezené dráhy na čase (z bodu a)) nebo rovnou z tabulky závislosti ulezené dráhy na čase (z bodu a)) vidíme, že housenka ulezla vzdálenost přibližně 70 cm.

b) 2:

Z tabulky z bodu a) závislosti ulezené dráhy housenky na čase odečteme:

Ve dvacáté sekundě měla housenka ulezeno 5 cm, v čtyřicáté sekundě měla housenka ulezeno 12 cm, mezi dvacátou a čtyřicátou sekundou tedy ulezla 7 cm.

Obdobně ve sté sekundě měla housenka ulezeno 29 cm a ve stodvacáté 33 cm, mezi stou a stodvacátou sekundou housenka tedy ulezla 4 cm.

b) 3:

Z tabulky z bodu a) závislosti ulezené dráhy housenky na čase lze vyčíst:

Největší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, a to 8 cm.

Nejmenší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, a to 3 cm.

b) 4:

Pokud by housenka stála celých dvacet sekund, byla by křivka v grafu závislosti ulezené dráhy housenky na čase (z bodu a)) v daném úseku vodorovná. Ulezená vzdálenost housenky v daném dvacetisekundovém úseku by byla nulová.

Housenka ale mohla stát třeba jen deset sekund a pak kus ulézt, a to z grafu nepoznáme.

c):

Souřadnice housenky v jednotlivých časových okamžicích určíme z obrázku ze zadání. Na vodorovné ose odečteme x-ovou souřadnici, na svislé ose pak y-ovou souřadnici housenky.

Platí:

V čase 0 s měla housenka souřadnice:

$$x = 0\ \mathrm{cm}$$
$$y = 10\ \mathrm{cm}$$

V čase 20 s měla housenka souřadnice:

$$x = 5\ \mathrm{cm}$$
$$y = 10\ \mathrm{cm}$$

V čase 80 s měla housenka souřadnice:

$$x = 14\ \mathrm{cm}$$

$$y = 21\ \text{cm}$$

V čase 140 s měla housenka souřadnice:

$$x = 25\ \text{cm}$$
$$y = 24\ \text{cm}$$

V čase 260 s měla housenka souřadnice:

$$x = 47\ \text{cm}$$
$$y = 1\ \text{cm}$$

d):

Z tabulky závislosti ulezené dráhy housenky na čase (z bodu a)) zjistíme celkovou dobu, po kterou jsme pohyb housenky sledovali, a označíme si ji t_c. Dále z tabulky zjistíme celkovou dráhu, kterou housenka za celkovou dobu ulezla, a označíme ji s_c.

Platí:

$$t_c = 260\ \text{s}$$
$$s_c = 70\ \text{cm}$$

Z těchto údajů určíme průměrnou rychlost housenky během doby, co jsme ji sledovali:

$$v_p = \frac{s_c}{t_c}$$
$$v_p = \frac{70\ \text{cm}}{260\ \text{s}} = 0{,}27\ \text{cm.s}^{-1} = 2{,}7\ \text{mm.s}^{-1}$$

e):

Z tabulky závislosti ulezené dráhy housenky na čase (bod a)) zjistíme, jakou dráhu ulezla housenka v jednotlivých dvacetisekundových intervalech.

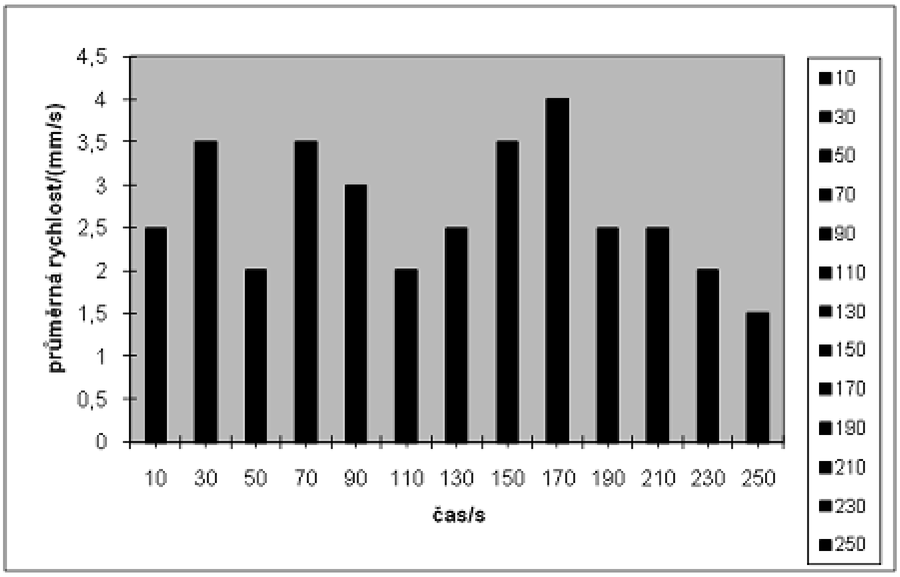
Průměrnou rychlost v daném intervalu (v mm/s) spočítáme tak, že vydělíme dráhu ulezenou v příslušném intervalu (v mm) časem 20 s.

Tabulka ulezené dráhy v závislosti na čase, přírůstků dráhy a průměrných rychlostí v jednotlivých časových intervalech:

čas/s	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
dráha/cm	0	5	12	16	23	29	33	38	45	52	58	63	67	70
přírůstek dráhy/cm		5	7	4	7	6	4	5	7	8	5	5	4	3

průměrná rychlost/(mm/s)		2,5	3,5	2,0	3,5	3,0	2,0	2,5	3,5	4,0	2,5	2,5	2,0	1,5

Graf průměrných rychlostí housenky v jednotlivých dvacetisekundových intervalech :



f):

Ke zjištění, kdy lezla housenka nejrychleji nebo nejpomaleji, pomůže odpověď na otázku b) 3 či tabulka z předchozí nápovědy nebo pohled do grafů.

Určení z tabulky:

Z tabulky z bodu e) (řešení předchozí nápovědy 8) lze vyčíst:

Největší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou a to 8 cm. Protože měření provádíme ve stále stejném dvacetisekundovém intervalu, znamená to, že v této době byla její průměrná rychlost nejvyšší.

Housenka tedy lezla nejrychleji mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou.

Nejmenší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou a to 3 cm. Protože měření provádíme ve stále stejném dvacetisekundovém intervalu, znamená to, že v této době byla její průměrná rychlost nejnižší.

Housenka tedy lezla nejpomaleji mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou.

Určení z grafu:

Jak již bylo řečeno, lezla-li housenka v daném dvacetisekundovém intervalu nejrychleji (resp.nejpomaleji), byla v tomto intervalu její průměrná rychlost největší (resp.nejmenší).

Z grafu průměrné rychlosti housenky v jednotlivých dvacetisekundových intervalech tedy vyplývá:

Housenka lezla nejrychleji mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, protože sloupec v grafu průměrných rychlostí je nejvyšší.

Housenka lezla nejpomaleji mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, protože sloupec v grafu průměrných rychlostí je nejnižší.

Z grafu závislosti ulezené dráhy housenky na čase vyplývá:

Housenka lezla nejrychleji mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, protože křivka v grafu dráhy je nejstrmější.

Housenka lezla nejpomaleji mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, protože křivka v grafu dráhy je nejméně strmá.

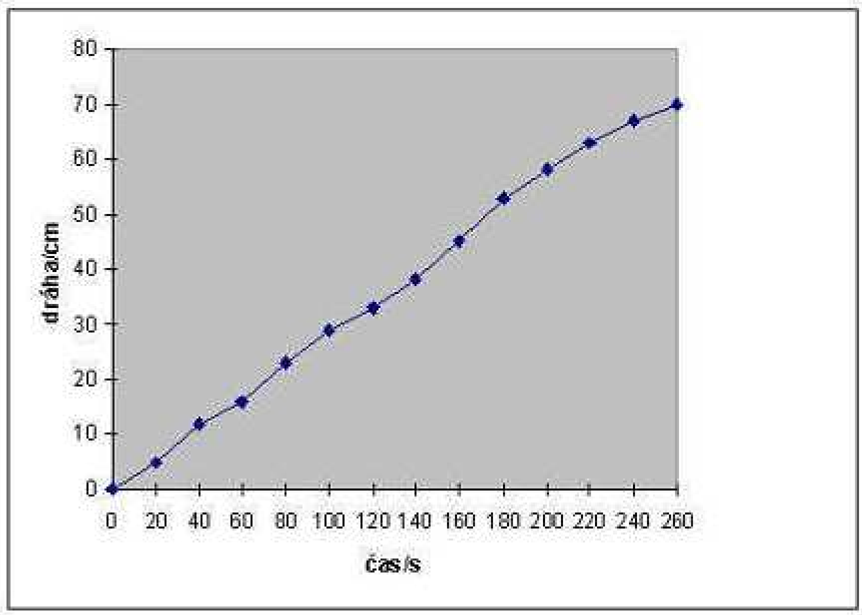
Odpověď:

a):

Tabulka závislosti ulezené dráhy housenky na čase:

čas/s	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
dráha/cm	0	5	12	16	23	29	33	38	45	52	58	63	67	70

Graf závislosti ulezené dráhy housenky na čase:



b) 1:

Housenka ulezla vzdálenost přibližně 70 cm.

b) 2:

Mezi dvacátou a čtyřicátou sekundou housenka ulezla 7 cm.

Mezi stou a stodvacátou sekundou housenka ulezla 4 cm.

b) 3:

Největší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, a to 8 cm.

Nejmenší vzdálenost, kterou housenka ulezla mezi dvěma měřeními, byla vzdálenost mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, a to 3 cm.

b) 4:

Pokud by housenka stála celých dvacet sekund, byla by křivka v grafu závislosti ulezené dráhy housenky na čase (z bodu a)) v daném úseku vodorovná. Ulezená vzdálenost housenky v daném dvacetisekundovém úseku by byla nulová.

Housenka ale mohla stát třeba jen deset sekund a pak kus ulézt, a to z grafu nepoznáme.

c):

V čase 0 s měla housenka souřadnice:

$$x = 0 \text{ cm}$$
$$y = 10 \text{ cm}$$

V čase 20 s měla housenka souřadnice:

$$x = 5 \text{ cm}$$
$$y = 10 \text{ cm}$$

V čase 80 s měla housenka souřadnice:

$$x = 14 \text{ cm}$$
$$y = 21 \text{ cm}$$

V čase 140 s měla housenka souřadnice:

$$x = 25 \text{ cm}$$
$$y = 24 \text{ cm}$$

V čase 260 s měla housenka souřadnice:

$$x = 47 \text{ cm}$$
$$y = 1 \text{ cm}$$

d):

Průměrná rychlost housenky během doby, co jsme ji sledovali, byla:

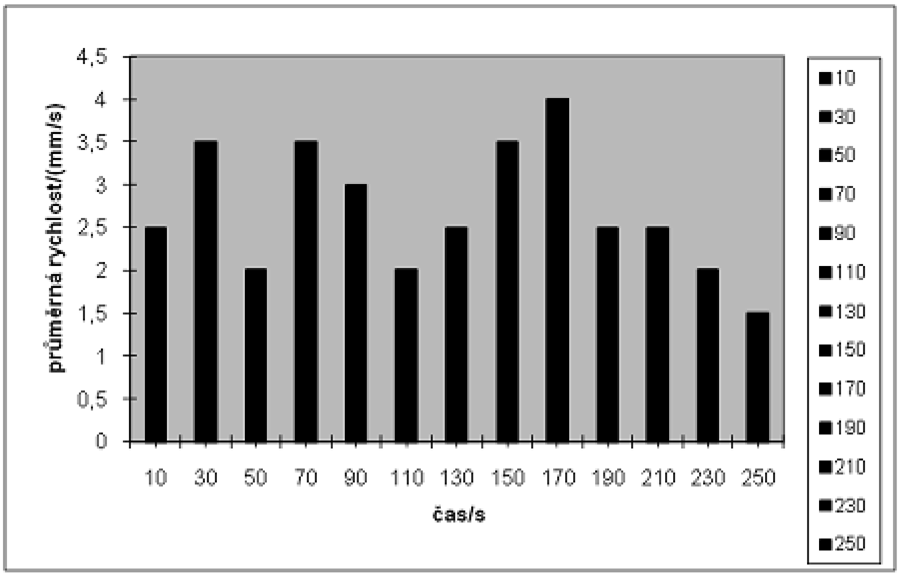
$$v_p = \frac{s_c}{t_c} = \frac{70 \text{ cm}}{260 \text{ s}} = 2{,}7 \text{ mm.s}^{-1}$$

e):

Tabulka ulezené dráhy v závislosti na čase, přírůstků dráhy a průměrných rychlostí v jednotlivých časových intervalech:

čas/s	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
dráha/cm	0	5	12	16	23	29	33	38	45	52	58	63	67	70
přírůstek dráhy/cm		5	7	4	7	6	4	5	7	8	5	5	4	3
průměrná rychlost/(mm/s)		2,5	3,5	2,0	3,5	3,0	2,0	2,5	3,5	4,0	2,5	2,5	2,0	1,5

Graf průměrných rychlostí housenky v jednotlivých dvacetisekundových intervalech :



f):

Určení z tabulky:

Housenka lezla nejrychleji mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou.

Housenka lezla nejpomaleji mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou.

Určení z grafu:

Housenka lezla nejrychleji mezi stošedesátou a stoosmdesátou sekundou, protože schod v grafu průměrných rychlostí je nejvyšší a křivka v grafu dráhy je nejstrmější.

Housenka lezla nejpomaleji mezi dvěstěčtyřicátou a dvěstěšedesátou sekundou, protože schod v grafu průměrných rychlostí je nejnižší a křivka v grafu dráhy je nejméně strmá.

Pohyb kapky

Kužel výšky h se otáčí kolem své osy ve směru otáčení hodinových ručiček stálou úhlovou rychlostí ω. Povrchová přímka svírá s osou kužele úhel α. Od vrcholu kužele začne v čase $t = 0$ s stékat po povrchové přímce kapka stálou rychlostí v vzhledem ke kuželu. V pevném souřadném systému x, y, z zvoleném tak, že osa z je osou kužele a osy x, y leží v jeho podstavě, popište průběh polohového vektoru kapky a průběh velikosti její rychlosti.

Nápověda 1: Obrázek situace

Počátek souřadné soustavy zvolte ve středu podstavy kužele a počáteční polohu kapky na vrcholu kužele.

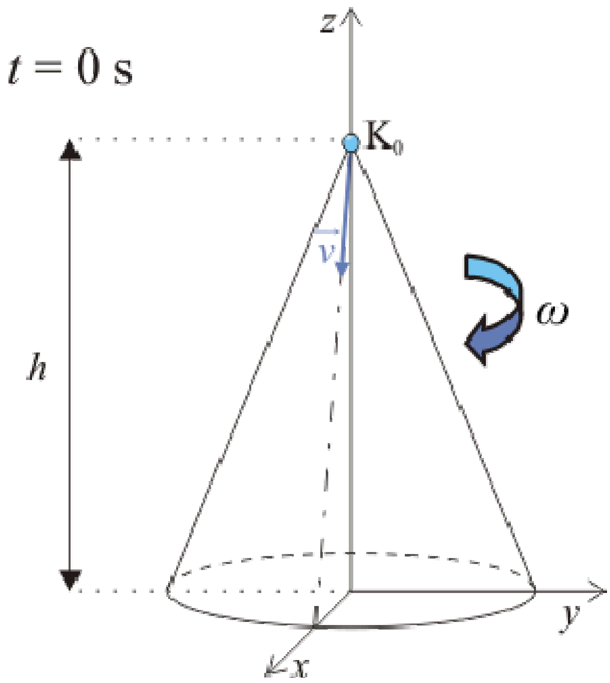
Nakreslete situaci pro čas $t = 0$ s a vyznačte polohu kapky.

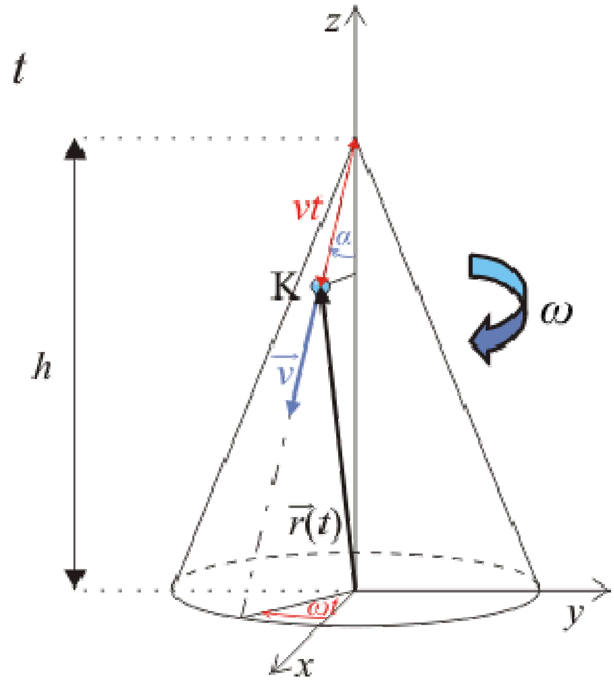
Pak nakreslete situaci pro čas t, vyznačte polohu kapky, kam až se za čas t na kuželi dostala, i její polohový vektor.

Do obrázku vyznačte i průmět polohového vektoru do osy z a do roviny x, y.

► Řešení k nápovědě 1

Obrázek 1:





Nápověda 2 : Průběh polohového vektoru kapky

Z obrázku z předchozí nápovědy sestavte rovnice pro průmět polohového vektoru kapky do osy *z* a průmět *m* polohového vektoru kapky do roviny *xy*.

Dále zapište rovnice průmětu *m* do os *x* a *y*.

Z těchto rovnic pak napište průběh polohového vektoru kapky.

▶ Řešení k nápovědě 2

Průmět polohového vektoru do osy *z*:

$$z = h - vt\cos\alpha$$

Průmět polohového vektoru do roviny *xy*:

$$m = vt\sin\alpha$$

Průmět *m* do os *x* a *y*:

$$x = m\cos\omega t = vt\sin\alpha\cos\omega t$$
$$y = -m\sin\omega t = -vt\sin\alpha\sin\omega t$$

Průběh polohového vektoru kapky:

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = vt\sin\alpha\cos\omega t\,\vec{i} - vt\sin\alpha\,\omega t\,\vec{j} + (h - vt\cos\alpha)\,\vec{k}$$

Kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Nápověda 3: Průběh velikost rychlosti kapky

Vyjádřete si nejprve složky rychlosti v_x, v_y, v_z. Jakým způsobem je z parametrických rovnic ve směru souřadnicových os získáte?

Pak zapište průběh velikosti rychlosti kapky.

► Řešení k nápovědě 3

Složky rychlosti získáme derivací souřadnic podle času:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(vt\sin\alpha\cos\omega t) = v\sin\alpha\cos\omega t - v\omega t\sin\alpha\sin\omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-vt\sin\alpha\sin\omega t) =$$
$$= -v\sin\alpha\sin\omega t - v\omega t\sin\alpha\cos\omega t$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(h - vt\cos\alpha) = -v\cos\alpha$$

Průběh velikosti rychlosti kapky:

$$\left|\vec{v}_v(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v_x^2 = (v\sin\alpha\cos\omega t - v\omega t\sin\alpha\sin\omega t)^2 =$$
$$= v^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t - 2v^2\omega t\sin^2\alpha\sin\omega t\cos\omega t +$$
$$+ v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t$$

$$v_y^2 = (-v\sin\alpha\sin\omega t - v\omega t\sin\alpha\cos\omega t)^2 =$$
$$= v^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t + 2v^2\omega t\sin^2\alpha\sin\omega t\cos\omega t +$$
$$+ v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t$$

$$v_z^2 = (-v\cos\alpha)^2 = v^2\cos^2\alpha$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t + v^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t +$$

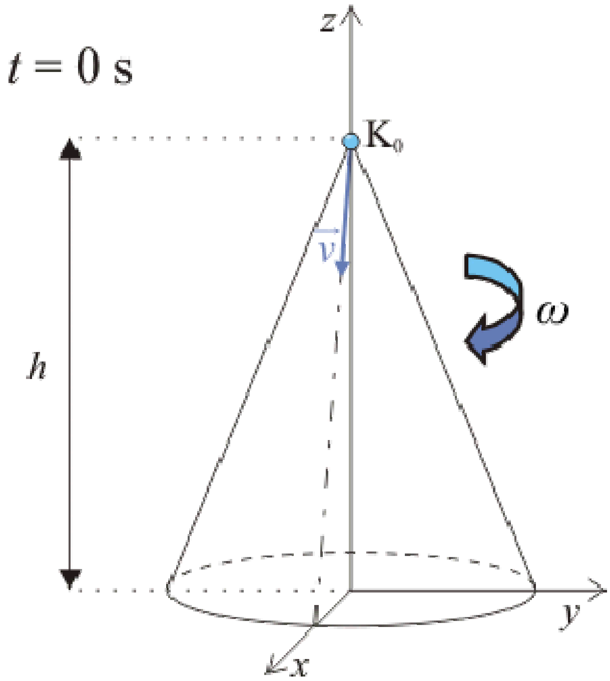
$$+v^2\omega^2t^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t+v^2\omega^2t^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t+v^2\cos^2\alpha =$$
$$= v^2\sin^2\alpha+v^2\omega^2t^2\sin^2\alpha+v^2\cos^2\alpha =$$
$$= v^2\sin^2\alpha+v^2\cos^2\alpha+v^2\omega^2t^2\sin^2\alpha =$$
$$= v^2+v^2\omega^2t^2\sin^2\alpha$$

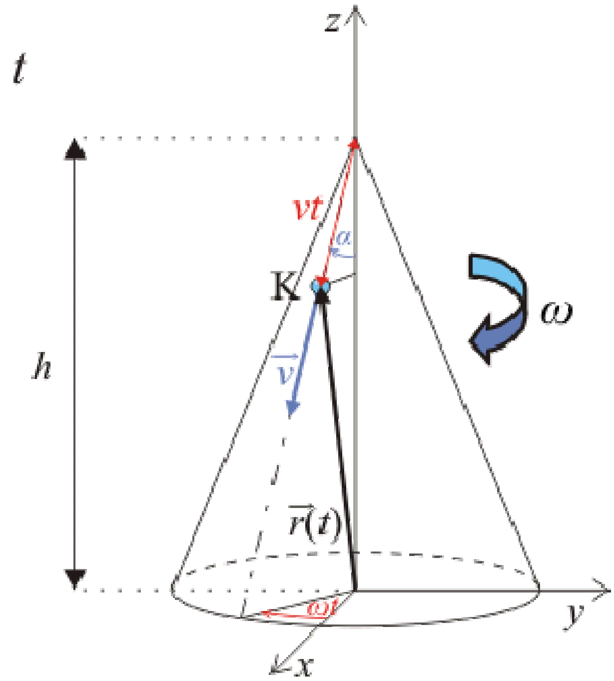
$$\left|\vec{v}_v(t)\right| = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \sqrt{v^2+v^2\omega^2t^2\sin^2\alpha}$$

$$\left|\vec{v}_v(t)\right| = \sqrt{v^2+(vt\omega\sin\alpha)^2}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Obrázek 1:





Průmět polohového vektoru do osy *z*:

$$z = h - vt\cos\alpha$$

Průmět polohového vektoru do roviny *xy*:

$$m = vt\sin\alpha$$

Průmět *m* do os *x* a *y*:

$$x = m\cos\omega t = vt\sin\alpha\cos\omega t$$
$$y = -m\sin\omega t = -vt\sin\alpha\sin\omega t$$

Průběh polohového vektoru kapky:

$$\vec{r}(t) = vt\sin\alpha\cos\omega t\,\vec{i} - vt\sin\alpha\omega t\,\vec{j} + (h - vt\cos\alpha)\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory.

Složky rychlosti získáme derivací souřadnic podle času:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(vt\sin\alpha\cos\omega t) = v\sin\alpha\cos\omega t - v\omega t\sin\alpha\sin\omega t$$
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-vt\sin\alpha\sin\omega t) =$$
$$= -v\sin\alpha\sin\omega t - v\omega t\sin\alpha\cos\omega t$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h - vt\cos\alpha) = -v\cos\alpha$$

Průběh velikosti rychlosti kapky:

$$\left|\vec{v}_v(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v_x^2 = (v\sin\alpha\cos\omega t - v\omega t\sin\alpha\sin\omega t)^2 =$$
$$= v^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t - 2v^2\omega t\sin^2\alpha\sin\omega t\cos\omega t +$$
$$+ v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t$$

$$v_y^2 = (-v\sin\alpha\sin\omega t - v\omega t\sin\alpha\cos\omega t)^2 =$$
$$= v^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t + 2v^2\omega t\sin^2\alpha\sin\omega t\cos\omega t +$$
$$+ v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t$$

$$v_z^2 = (-v\cos\alpha)^2 = v^2\cos^2\alpha$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t + v^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t +$$
$$+ v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t + v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t + v^2\cos^2\alpha =$$
$$= v^2\sin^2\alpha + v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha + v^2\cos^2\alpha =$$
$$= v^2\sin^2\alpha + v^2\cos^2\alpha + v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha =$$
$$= v^2 + v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha$$

$$\left|\vec{v}_v(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v^2 + v^2\omega^2 t^2\sin^2\alpha}$$

$$\left|\vec{v}_v(t)\right| = \sqrt{v^2 + (vt\omega\sin\alpha)^2}$$

Odpověď

Průběh polohového vektoru kapky je:

$$\vec{r}(t) = vt\sin\alpha\cos\omega t\,\vec{i} - vt\sin\alpha\omega t\,\vec{j} + (h - vt\cos\alpha)\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory.

Průběh velikosti rychlosti kapky:

$$\left|\vec{v}_v(t \to) \to\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v^2 + (vt\omega \sin\alpha)^2}$$

Pohyb částice I

Polohový vektor částice se mění s časem podle vztahu:

$$\vec{r}(t) = 15\ \mathrm{m\ s^{-2}} \cdot t^2 \vec{i} + (4\ \mathrm{m} - 20\ \mathrm{m\ s^{-2}} \cdot t^2) \vec{j}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os x a y.

Prozkoumejte pohyb částice podle následujících bodů:

a) Jakými vztahy je popsán pohyb částice ve směrech souřadnicových os x, y, z?

b) V jakém čase přechází částice osu y?

c) V jakém čase přechází částice osu x?

d) Jak se mění rychlost částice a její složky s časem?

e) Jaké pohyby vykonává částice ve směrech os x, y, z?

f) Jak se mění velikost rychlosti částice s časem?

g) Je pohyb částice rovnoměrný?

h) Jak se mění zrychlení částice a jeho složky s časem?

i) Jak se mění velikost zrychlení částice s časem?

j) Jak velkou rychlost a zrychlení bude mít částice v okamžiku, kdy bude procházet osou:

1) x 2) y?

Poznámka: Parametrické rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.:

$$y = 1\ \mathrm{m} - 2\ \mathrm{m\ s^{-1}} \cdot t$$

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

Zápis

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$	jednotkové vektory ve směru souřadnicových os x, y, z
$\vec{r}(t) = 15\ t^2 \vec{i} + (4 - 20t^2) \vec{j}$	polohový vektor částice v čase t
t_1 = ? (s)	čas, v kterém částice přechází osu y
t_2 = ? (s)	čas, v kterém částice přechází osu x
v = ? (m s^{-1})	rychlost částice v okamžiku, kdy přechází osu x (resp. y)
a = ? (m s^{-2})	zrychlení částice v okamžiku, kdy přechází osu x (resp. y)

Nápověda 1 pro a): Pohyb částice ve směrech souřadnicových os

Jednotlivé vztahy pro pohyb částice ve směrech souřadnicových os získáte snadno z polohového vektoru v zadání.

▶ Řešení k nápovědě 1

Polohový vektor můžeme zapsat jako:

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Odtud:

$$x(t) = 15t^2$$
$$y(t) = 4 - 20t^2$$
$$z(t) = 0$$

Nápověda 2 pro b): Čas, ve kterém částice přechází osu *y*

Jak zjistíte čas t_1, ve kterém bude částice přecházet osu y?

Jaká bude v tom okamžiku hodnota souřadnice x?

▶ Řešení k nápovědě 2

Částice bude přecházet osu y v okamžiku, kdy bude její x-ová souřadnice rovna 0:

$$x(t) = 15t^2$$
$$0 = 15t_1^2$$
$$t_1 = 0\,\mathrm{s}$$

Nápověda 3 pro c): Čas, ve kterém částice přechází osu *x*

Jak zjistíte čas t_2, ve kterém bude částice přecházet osu x?

Jaká bude v tom okamžiku hodnota souřadnice y?

▶ Řešení k nápovědě 3

Částice bude přecházet osu x v okamžiku, kdy bude její y-ová souřadnice rovna 0:

$$y(t) = 4 - 20t^2$$
$$0 = 4 - 20t_2^2$$
$$t_2^2 = \frac{1}{5}$$
$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{s}$$

(Matematické řešení $t_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{s}$ nemá fyzikální smysl.)

Nápověda 4 pro d): Rychlost částice

Znáte příslušné vztahy popisující pohyb částice ve směrech souřadnicových os.

Jak z nich a z definice rychlosti získáte průběh rychlosti částice?

▶ Řešení k nápovědě 4

Z definice rychlosti dostáváme:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(15t^2) = 30t$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4-20t^2) = -40t$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

$$\vec{v}(t) = 30t\,\vec{i} + (-40t)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Nápověda 5 pro e): Pohyb částice ve směrech souřadnicových os

Jaké pohyby vykonává částice ve směrech os *x*, *y*, *z*?

Podívejte se, jakými vztahy je pohyb částice ve směrech souřadnicových os popsán a jak se mění s časem souřadnice rychlosti.

▶ Řešení k nápovědě 5

V *x*-ovém směru:

$$x(t) = 15t^2$$
$$v_x(t) = 30t$$

Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený.

V *y*-ovém směru:

$$y(t) = 4-20t^2$$
$$v_y(t) = -40t$$

Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený v opačném směru.

V *z*-ovém směru:

$$z(t) = 0$$
$$v_z(t) = 0$$

Částice je v klidu.

Nápověda 6 pro f): Velikost rychlosti částice

Znáte průběh rychlosti částice a jejích souřadnic. Jak zjistíte průběh její velikosti?

▶ Řešení k nápovědě 6

Z definice velikosti rychlosti dostáváme:

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)+v_z^2(t)}$$
$$v(t) = \sqrt{(900t^2+1600t^2)} = \sqrt{(2500t^2)} = 50|t| = 50t$$

(čas nabývá nezáporných hodnot)

$$v(t) = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t$$

Nápověda 7 pro g): Rovnoměrnost pohybu částice

Uvědomte si, kdy je pohyb částice rovnoměrný. Co platí pro velikost její rychlosti?

▶ Řešení k nápovědě 7

Částice vykonává rovnoměrný pohyb, je-li velikost vektoru rychlosti konstantní.

V našem případě je velikost rychlosti lineární funkcí času:

$$v = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t$$

Pohyb částice tedy není rovnoměrný (jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený).

Nápověda 8 pro h): Zrychlení částice

Znáte složky rychlosti částice ve směrech souřadnicových os.

Jak z nich a z definice zrychlení získáte průběh zrychlení částice?

▶ Řešení k nápovědě 8

Z definice zrychlení dostáváme:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(30t) = 30$$
$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-40t) = -40$$
$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$
$$\vec{a}(t) = 30\,\vec{i} + (-40)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Nápověda 9 pro i): Velikost zrychlení částice

Znáte průběh zrychlení částice a jeho souřadnic. Jak zjistíte průběh jeho velikosti?

▶ Řešení k nápovědě 9

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{(a_x^2(t)+a_y^2(t)+a_z^2)}$$

$$a(t) = \sqrt{(900+1600)} = \sqrt{(2500)} = 50$$

$$a(t) = 50\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

Nápověda 10 pro j): Rychlost a zrychlení částice při průchodu osami

Pro výpočet velikosti rychlosti částice stačí znát vztah popisující průběh velikosti rychlosti a příslušný čas, ve kterém bude částice přecházet osu *x* (resp. osu *y*). Obojí znáte z předchozích nápověd (3 a 6).

Obdobně pro výpočet velikosti zrychlení. Potřebujete i v tomto případě znát časy průchodů osami?

▶ Řešení k nápovědě 10

1) Částice prochází osu *x* v okamžiku, kdy:

$$t = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$$

Ze vztahu pro velikost rychlosti a zrychlení dostáváme:

$$v = 50t$$

$$v = 50\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$v = 10\sqrt{5}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

$$a = 50\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

Velikost zrychlení je konstantní, čas průchodu osou znát tedy nepotřebujeme.

2) Částice prochází osu *y* v okamžiku, kdy:

$$t = 0\ \mathrm{s}.$$

Obdobně jako u 1):

$$v = 50\cdot 0$$

$$v = 0\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

$$a = 50\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

Velikost zrychlení je konstantní, čas průchodu osou znát nepotřebujeme.

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

a)

Polohový vektor můžeme zapsat jako:

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Odtud:

$$x(t) = 15t^2$$
$$y(t) = 4-20t^2$$
$$z(t) = 0$$

b)

Částice bude přecházet osu *y* v okamžiku, kdy bude její *x*-ová souřadnice rovna 0:

$$x(t) = 15t^2$$
$$0 = 15t_1^2$$
$$t_1 = 0\ \mathrm{s}$$

c)

Částice bude přecházet osu *x* v okamžiku, kdy bude její *y*-ová souřadnice rovna 0:

$$y(t) = 4-20t^2$$
$$0 = 4-20t_2^2$$
$$t_2^2 = \frac{1}{5}$$
$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$$

(Matematické řešení $t_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$ nemá fyzikální smysl.)

d)

Z definice rychlosti dostáváme:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(15t^2) = 30t$$
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4-20t^2) = -40t$$
$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$
$$\vec{v}(t) = 30t\,\vec{i} + (-40t)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

e)

V *x*-ovém směru:

$$x(t) = 15t^2$$
$$v_x(t) = 30t$$

Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený.

V *y*-ovém směru:

$$y(t) = 4 - 20t^2$$
$$v_y(t) = -40t$$

Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený v opačném směru.

V *z*-ovém směru:

$$z(t) = 0$$
$$v_z(t) = 0$$

Částice je v klidu.

f)

Z definice velikosti rychlosti dostáváme:

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$
$$v(t) = \sqrt{(900t^2 + 1600t^2)} = \sqrt{(2500t^2)} = 50|t| = 50t$$

(čas nabývá nezáporných hodnot)

$$v(t) = 50\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t$$

g)

Částice vykonává rovnoměrný pohyb, je-li velikost vektoru rychlosti konstantní.

V našem případě je velikost rychlosti lineární funkcí času:

$$v = 50\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t$$

Pohyb částice tedy není rovnoměrný (jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený).

h)

Z definice zrychlení dostáváme:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(30t) = 30$$
$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-40t) = -40$$
$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$
$$\vec{a}(t) = 30\vec{i} + (-40)\vec{j} + 0\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

i)

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{\left(a_x^2(t)+a_y^2(t)+a_z^2\right)}$$
$$a(t) = \sqrt{(900+1600)} = \sqrt{(2500)} = 50$$
$$a(t)_1 = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

j)

1) Částice prochází osu *x* v okamžiku, kdy:

$$t = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$$

Ze vztahu pro velikost rychlosti a zrychlení dostáváme:

$$v = 50t$$
$$v = 50\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$v = 10\sqrt{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$a = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Velikost zrychlení je konstantní, čas průchodu osou znát tedy nepotřebujeme.

2) Částice prochází osu *y* v okamžiku, kdy:

$$t = 0\ \mathrm{s}$$

Obdobně jako u 1):

$$v = 50\cdot 0$$
$$v = 0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$a = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Velikost zrychlení je konstantní, čas průchodu osou znát nepotřebujeme.

Odpověď

Poznámka: Pro přehlednost zápisu nepíšeme ve vztazích jednotky.

a)

$$x(t) = 15t^2$$
$$y(t) = 4-20t^2$$
$$z(t) = 0$$

b)

Částice bude přecházet osu *y* v okamžiku:

$$t_1 = 0\ \mathrm{s}$$

c)

Částice bude přecházet osu *x* v okamžiku:

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{s} \doteq 0{,}45\ \mathrm{s}$$

d)

$$v_x(t) = 30t$$
$$v_y(t) = -40t$$
$$v_z(t) = 0$$
$$\vec{v}(t) = 30t\,\vec{i} + (-40t)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

e)

V *x*-ovém směru: pohyb rovnoměrně zrychlený.

V *y*-ovém směru: pohyb rovnoměrně zrychlený v opačném směru.

V *z*-ovém směru: částice je v klidu.

f)

$$v(t) = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}}t$$

g)

Velikost rychlosti je lineární funkcí času:

$$v = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}}\cdot t$$

Pohyb částice tedy není rovnoměrný (jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený).

h)

$$a_x = 30$$
$$a_y = -40$$
$$a_z = 0$$
$$\vec{a}(t) = 30\,\vec{i} + (-40)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

i)

$$a(t) = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

j)

1) Částice prochází osu *x* v okamžiku, kdy:

$$t = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$$

Tedy:

$$v = 10\sqrt{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$a = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

2) Částice prochází osu *y* v okamžiku, kdy:

$$t = 0\ \mathrm{s}$$

Tedy:

$$v = 0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$a = 50\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Výtah

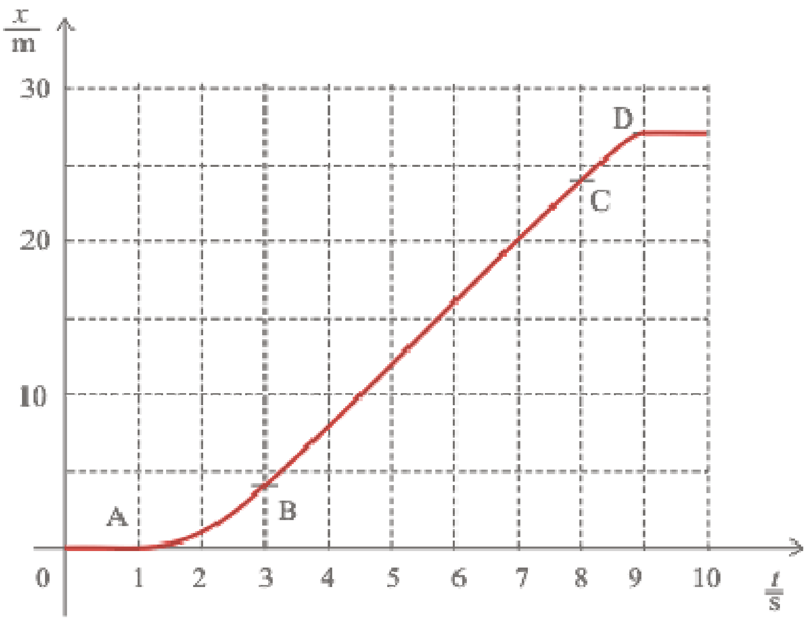
Na obrázku je zakreslena časová závislost *x(t)* polohy kabiny výtahu.

a) Popište slovně pohyb kabiny.

b) Nakreslete závislost souřadnice rychlosti kabiny na čase.

c) Nakreslete závislost souřadnice zrychlení kabiny na čase.

d) U stropu kabiny visí pružina a na ní kulička. Popište chování pružiny během pohybu výtahu.



Bod A: poloha x = 0 m v čase t = 1 s

Bod B: poloha x = 4 m v čase t = 3 s

Bod C: poloha x = 24 m v čase t = 8 s

Bod D: poloha x = 27 m v čase t = 9 s

Nápověda 1 pro a): Popis pohybu

Rozdělte si pohyb kabiny výtahu na dílčí úseky mezi počátkem a bodem A, bodem A a bodem B, bodem B a bodem C, bodem C a bodem D a mezi bodem D a koncem. O jaké typy pohybu se v těchto úsecích jedná, zjistíte podle tvaru křivek odpovídajících závislosti *x*-ové souřadnice výtahu na čase.

► Řešení k nápovědě 1

Mezi počátkem a bodem A se souřadnice výtahu nemění (je nulová), kabina je tedy v klidu, stojí v dolním patře.

Mezi body A a B má závislost souřadnice na čase tvar paraboly, souřadnice kvadraticky roste. Výtah se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem nahoru.

V úseku BC je grafem závislosti x-ové souřadnice na čase přímka, výtah se pohybuje konstantní rychlostí, kterou dosáhl v bodě B.

V úseku CD je grafem opět část paraboly, souřadnice sice narůstá, ale čím dál tím méně. Jde o rovnoměrně zpomalený pohyb, kabina brzdí až do zastavení.

Od bodu D se souřadnice nemění, kabina je v klidu, stojí.

Nápověda 2 pro b): Souřadnice rychlosti

Z předchozí části víte, o jaký typ pohybu v jednotlivých úsecích jde, takže již máte představu o tom, zda se velikost rychlosti kabiny výtahu mění a jak, či se nemění.

Pro pohyb kabiny před bodem A a za bodem D je určení velikosti rychlosti kabiny snadné.

Mezi body A a B a mezi body C a D se výtah pohybuje rovnoměrně zrychleným (resp.zpomaleným) pohybem. Víte také pro oba případy, jaká je počáteční a konečná hodnota rychlosti. Její průběh do grafu již snadno zakreslíte.

Víte, že mezi body B a C se jedná o pohyb rovnoměrný přímočarý. Velikost rychlosti kabiny výtahu určíte z grafu ze zadání úlohy.

► Řešení k nápovědě 2

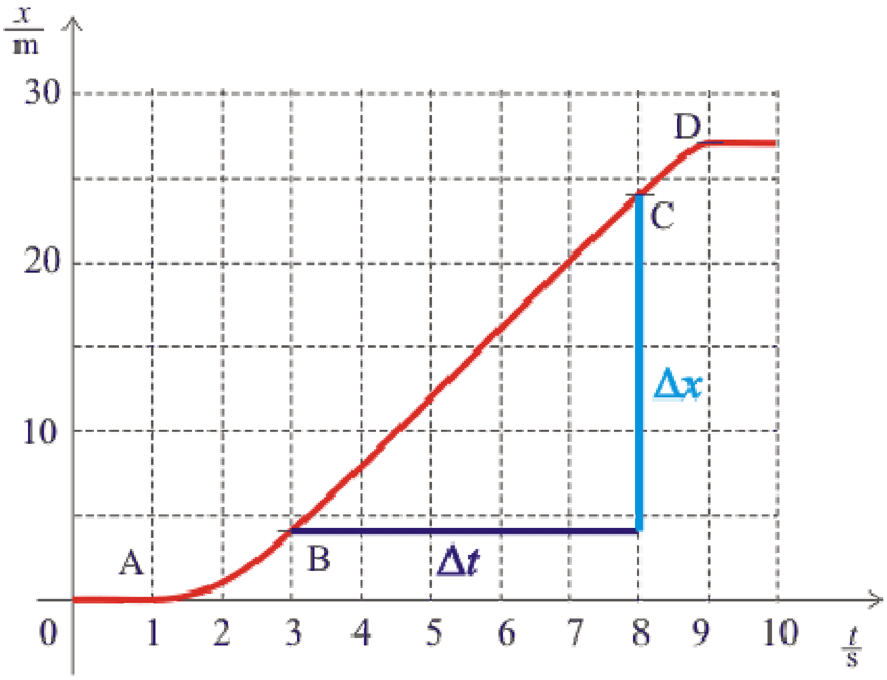
Platí, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj.

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Úseky grafu před bodem A a za bodem D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová.

V úseku mezi body B a C se kabina pohybuje konstantní rychlostí, kterou určíme jako směrnici přímky BC:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(24-4)\ \mathrm{m}}{(8-3)\ \mathrm{s}} = 4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$



Bod A: poloha x = 0 m v čase t = 1 s

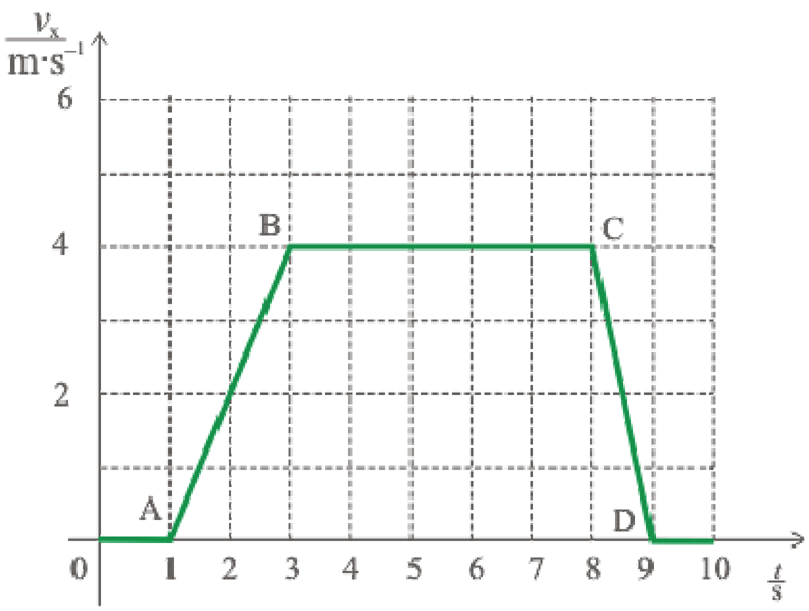
Bod B: poloha x = 4 m v čase t = 3 s

Bod C: poloha x = 24 m v čase t = 8 s

Bod D: poloha x = 27 m v čase t = 9 s

Při rozjezdu (úsek AB) a opětovném zastavení (úsek CD), tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění. Předpokládáme-li, že se výtah rozjíždí a brzdí rovnoměrně, bude závislost rychlosti na čase lineární (úsečky AB a CD).

Závislost rychlosti kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



Komentář

Zamyslete se, zda by bylo možné opačně z grafu $v_x(t)$ určit průběh polohy $x(t)$.

Řešení této úlohy není jednoznačné. Graf funkce $v_x(t)$ dává totiž informaci pouze o změnách polohy, nikoli o poloze samotné. Z grafu určíme změnu polohy v libovolném časovém intervalu jako

$$\int_{t_1}^{t_2} v_x(t)$$

což odpovídá obsahu plochy pod křivkou v grafu $v_x(t)$ omezenou počátečním a koncovým bodem časového intervalu. K tomu, abychom určili, jaká byla poloha na začátku a na konci tohoto intervalu, ale potřebujeme další údaj, např. polohu v čase $t = 0$ s .

Nápověda 3 pro c): Souřadnice zrychlení

Víte již, jak se mění s časem souřadnice rychlosti výtahu.

Uvědomte si, jaké bude zrychlení v úsecích, kde se rychlost nemění.

V úsecích AB, resp. CD, rychlost lineárně narůstá, resp. klesá, velikost zrychlení určíte z grafu $v_x(t)$. Uvědomte si, jaký směr bude mít zrychlení v těchto úsecích.

► Řešení k nápovědě 3

Platí, že $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj.

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

Úseky grafu před bodem A a za bodem D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu, má tedy nulové zrychlení.

Mezi body B a C je opět zrychlení nulové, protože kabina se pohybuje konstantní rychlostí.

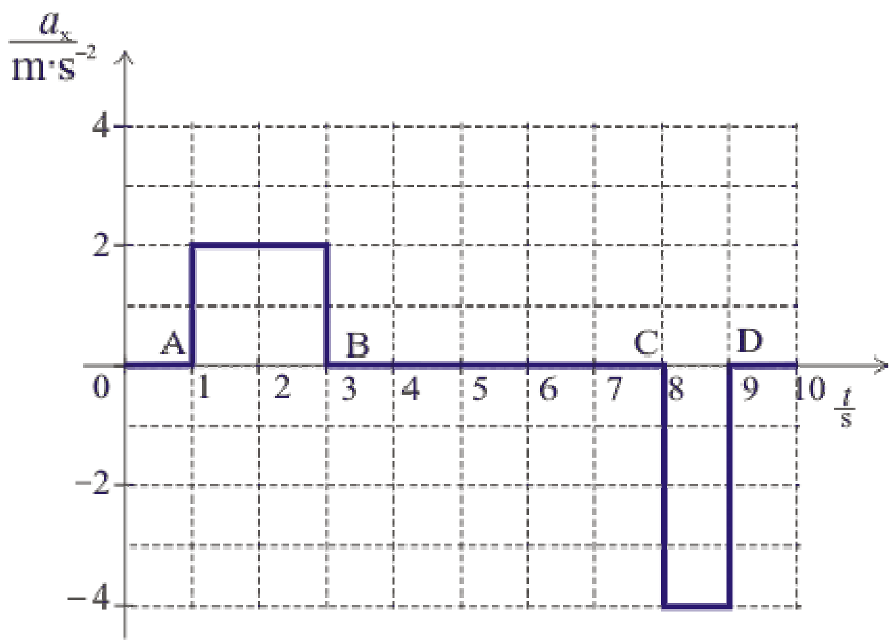
Mezi body A a B rychlost lineárně narůstá, zrychlení bude tedy konstantní, bude kladné a jeho velikost určíme z grafu $v_x(t)$jako směrnici přímky AB:

$$a_{AB} = \frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{(4-0)\ \mathrm{m}}{(3-1)\ \mathrm{s}^2} = 2\ \mathrm{m.s}^{-2}$$

Mezi body C a D rychlost lineárně klesá, zrychlení bude tedy konstantní, bude záporné a jeho velikost určíme z grafu $v_x(t)$jako směrnici přímky CD:

$$a_{CD} = \frac{\Delta v_{CD}}{\Delta t_{CD}} = \frac{(0-4)\ \mathrm{m}}{(9-8)\ \mathrm{s}^2} = -4\ \mathrm{m.s}^{-2}$$

Závislost souřadnice zrychlení kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



Nápověda 4 pro d): Pružina s kuličkou

Uvědomte si, jaké síly působí na kuličku (z pohledu pozorovatele, který zůstane stát v přízemí)a co platí pro jejich výslednici v jednotlivých úsecích. Jak souvisí výsledná síla se zrychlením, říká 2. Newtonův zákon.

► Řešení k nápovědě 4

Na kuličku působí Země gravitační silou a pružina, na které je zavěšena.

V úsecích před bodem A, BC a za bodem D, kde je zrychlení kabiny nulové, jsou tyto dvě síly v rovnováze, jejich výslednice je nulová.

V úseku AB musí pružina zatáhnout o něco více, aby udělila kuličce zrychlení směrem vzhůru – pružina se protáhne.

Naopak v úseku CD, kdy výtah zpomaluje, směřuje zrychlení dolů proti směru pohybu. Pružina musí tahat za kuličku méně než v klidovém stavu (nebo při rovnoměrném přímočarém pohybu), aby výslednice sil směřovala dolů – pružina se zkrátí.

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

a)

Mezi počátkem a bodem A se souřadnice výtahu nemění (je nulová), kabina je tedy v klidu, stojí v dolním patře.

Mezi body A a B má závislost souřadnice na čase tvar paraboly, souřadnice kvadraticky roste. Výtah se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem nahoru.

V úseku BC je grafem závislosti x-ové souřadnice na čase přímka, výtah se pohybuje konstantní rychlostí, kterou dosáhl v bodě B.

V úseku CD je grafem opět část paraboly, souřadnice sice narůstá, ale čím dál tím méně. Jde o rovnoměrně zpomalený pohyb, kabina brzdí až do zastavení.

Od bodu D se souřadnice nemění, kabina je v klidu, stojí.

b)

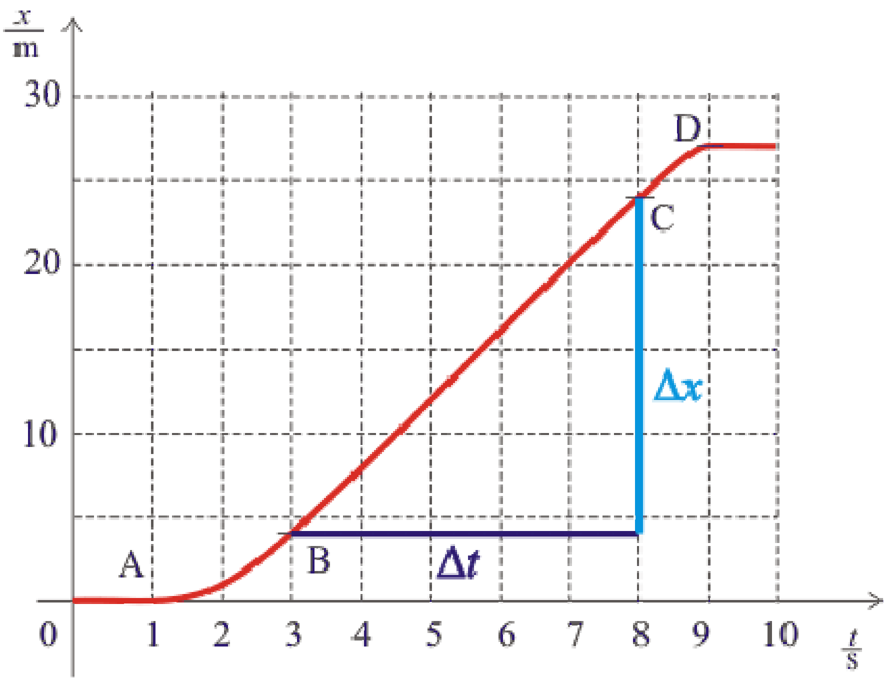
Platí, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj.

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

Úseky grafu před bodem A a za bodem D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová.

V úseku mezi body B a C se kabina pohybuje konstantní rychlostí, kterou určíme jako směrnici přímky BC:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(24-4)\ \mathrm{m}}{(8-3)\ \mathrm{s}} = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$



Bod A: poloha x = 0 m v čase t = 1 s

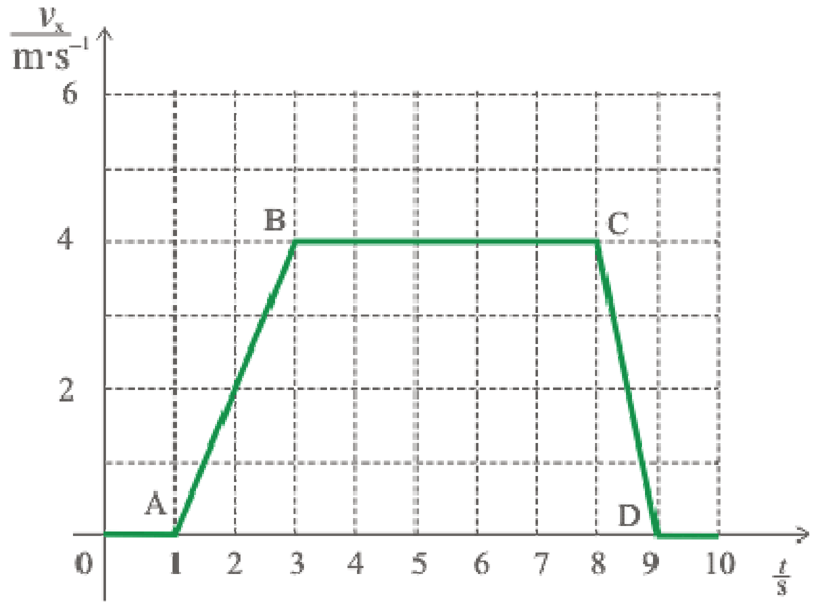
Bod B: poloha x = 4 m v čase t = 3 s

Bod C: poloha x = 24 m v čase t = 8 s

Bod D: poloha x = 27 m v čase t = 9 s

Při rozjezdu (úsek AB) a opětovném zastavení (úsek CD), tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění. Předpokládáme-li, že se výtah rozjíždí a brzdí rovnoměrně, bude závislost rychlosti na čase lineární (úsečky AB a CD).

Závislost rychlosti kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



c)

Platí, že $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj.

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

Úseky grafu před bodem A a za bodem D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu, má tedy nulové zrychlení.

Mezi body B a C je opět zrychlení nulové, protože kabina se pohybuje konstantní rychlostí.

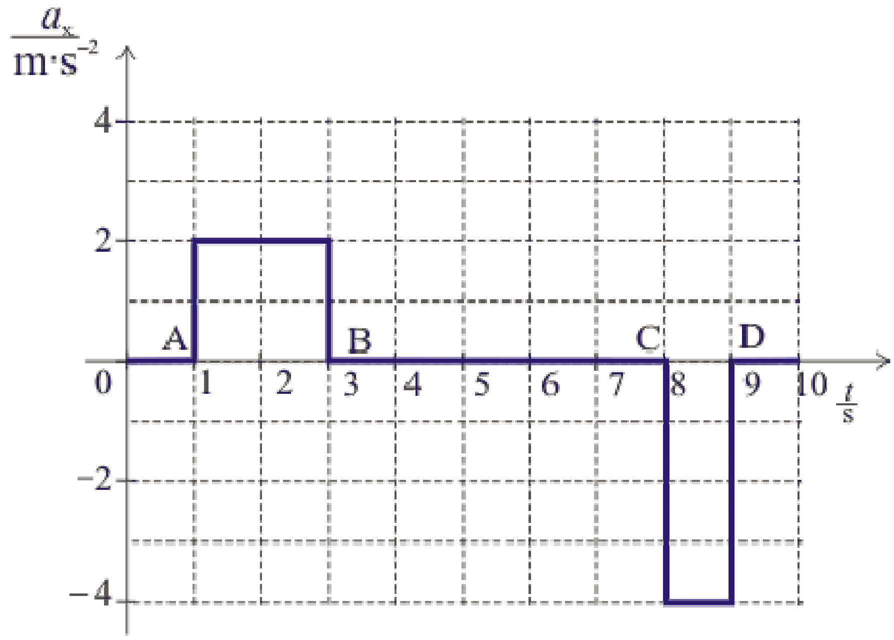
Mezi body A a B rychlost lineárně narůstá, zrychlení bude tedy konstantní, bude kladné a jeho velikost určíme z grafu $v_x(t)$jako směrnici přímky AB:

$$a_{AB} = \frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{(4-0)\ \mathrm{m}}{(3-1)\ \mathrm{s}^2} = 2\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Mezi body C a D rychlost lineárně klesá, zrychlení bude tedy konstantní, bude záporné a jeho velikost určíme z grafu $v_x(t)$jako směrnici přímky CD:

$$a_{CD} = \frac{\Delta v_{CD}}{\Delta t_{CD}} = \frac{(0-4)\ \mathrm{m}}{(9-8)\ \mathrm{s}^2} = -4\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Závislost souřadnice zrychlení kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



d)

Na kuličku působí Země gravitační silou a pružina, na které je zavěšena.

V úsecích před bodem A, BC a za bodem D, kde je zrychlení kabiny nulové, jsou tyto dvě síly v rovnováze, jejich výslednice je nulová.

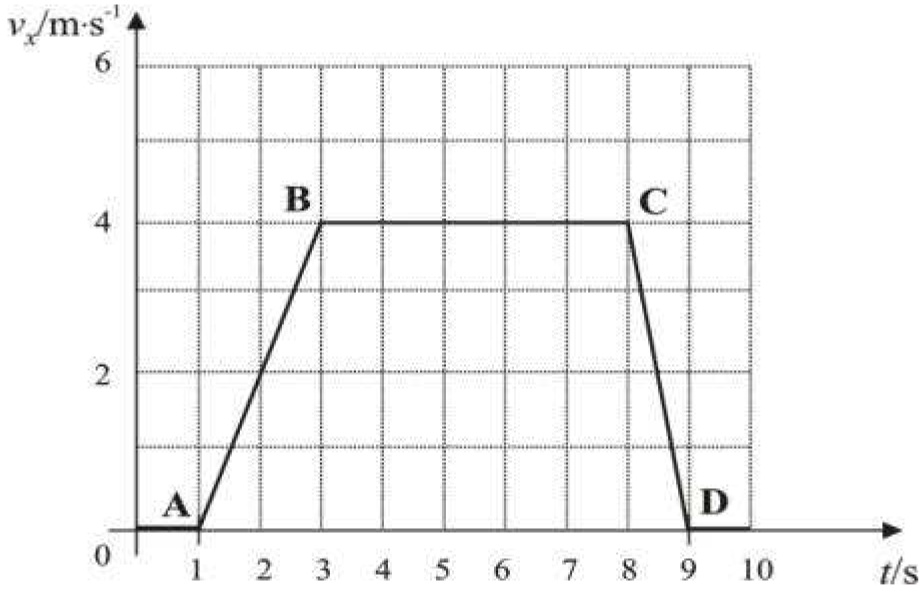
V úseku AB musí pružina zatáhnout o něco více, aby udělila kuličce zrychlení směrem vzhůru – pružina se protáhne.

Naopak v úseku CD, kdy výtah zpomaluje, směřuje zrychlení dolů proti směru pohybu. Pružina musí tahat za kuličku méně než v klidovém stavu (nebo při rovnoměrném přímočarém pohybu), aby výslednice sil směřovala dolů – pružina se zkrátí.

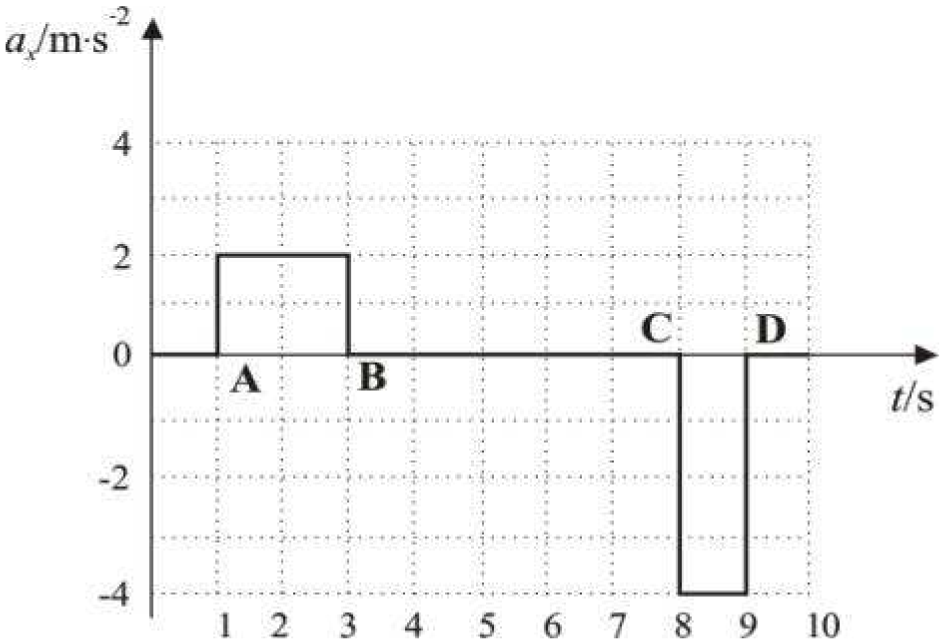
Odpověď

a) Kabina nejprve stojí v dolním patře, je tedy v klidu - tomu odpovídá v grafu křivka mezi počátkem a bodem A. Pak se rozjíždí směrem vzhůru (kladný směr souřadnicové osy), pohybuje se rovnoměrně zrychleným pohybem, až dosáhne určité rychlosti – tomu odpovídá v grafu křivka mezi body A a B. Touto konstantní rychlostí se kabina určitou dobu pohybuje (rovnoměrný přímočarý pohyb) - tomu odpovídá v grafu křivka mezi body B a C. Nakonec začne kabina brzdit, pohybuje se rovnoměrně zpomaleným pohybem, až se zastaví – tomu odpovídá v grafu křivka mezi body C a D. Křivka od bodu D opět odpovídá tomu, že je kabina v klidu.

b) Závislost souřadnice rychlosti kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



c) Závislost souřadnice zrychlení kabiny na čase je znázorněna v následujícím grafu:



d) V případech, kdy je kabina v klidu (úseky grafu před bodem A a za bodem D) nebo se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem (úsek grafu mezi body B a C) je protažení pružiny stále stejné. Při rozjíždění kabiny (úsek grafu mezi body A a B) dochází oproti klidovému stavu kabiny k delšímu protažení pružiny. Naopak při zpomalování kabiny (úsek grafu mezi body C a D) dochází oproti klidovému stavu kabiny ke zkrácení pružiny.

Sprinter

Sprinter měl při tréninku na trati délky 100 m vymezený úsek, na kterém se měl rozbíhat rovnoměrně zrychleným pohybem a dosaženou rychlostí pak pokračovat do cíle. Trenér nejprve stanovil délku zrychleného úseku na 36 m a naměřil na něm čas 9 s, podruhé stanovil délku tohoto úseku na 30 m a naměřil na něm čas 7 s.

a) Určete dosažené maximální rychlosti při prním a druhém rozběhu a konečné časy na celé dráze 100 m při prvním a druhém rozběhu.

b) Určete maximální rychlost, které by při třetím rozběhu musel sprinter dosáhnout na stejném úseku jako při druhém rozběhu a poté udržet do cíle, aby doběhl v konečném čase 12 s.

c) Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti rychlosti na čase všech tří běhů.

d) Určete zrychlení sprintera při rozbíhání v každém z uvedených běhů.

Poznámka: Přesněji bychom měli mluvit o velikosti rychlosti a velikosti zrychlení. Vzhledem k tomu, že jde o přímočarý pohyb, kde se směr těchto veličin nemění, píšeme pro přehlednost a zkrácení textu jen rychlost a zrychlení.

Zápis

$s = 100\ \mathrm{m}$	celková dráha
$s_1 = 36\ \mathrm{m}$	délka zrychleného úseku při 1. rozběhu
$t_1 = 9\ \mathrm{s}$	čas na zrychleném úseku při 1. rozběhu
$s_2 = 30\ \mathrm{m}$	délka zrychleného úseku při 2. rozběhu
$t_2 = 7\ \mathrm{s}$	čas na zrychleném úseku při 2. rozběhu
a)	
$v_{m1} = ?\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	maximální rychlost při 1. rozběhu
$v_{m2} = ?\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	maximální rychlost při 2. rozběhu
$t_{k1} = ?\ (\mathrm{s})$	celkový čas při 1. rozběhu
$t_{k2} = ?\ (\mathrm{s})$	celkový čas při 2. rozběhu
b)	
$s_3 = s_2 = 30\ \mathrm{m}$	délka zrychleného úseku při 3. rozběhu
$t_{k3} = 12\ \mathrm{s}$	celkový čas při 3. rozběhu
$t_3 = ?\ (\mathrm{s})$	čas na na zrychleném úseku při 3. rozběhu
$v_{m3} = ?\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	maximální rychlost při 3. rozběhu
d)	
$a_1 = ?\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$	zrychlení na zrychleném úseku při 1. rozběhu
$a_2 = ?\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$	zrychlení na zrychleném úseku při 2. rozběhu

$a_3 = ?\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$ zrychlení na zrychleném úseku při 3. rozběhu

Nápověda 1 pro a): Maximální rychlosti

Uvědomte si, jaké vztahy platí pro rychlost a dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu. Spojením těchto vztahů snadno určíte dosaženou maximální rychlost v_{m1} a v_{m2}.

▶ Řešení k nápovědě 1

Pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu platí:

$$v_{m1} = a_1 t_1 .$$

Odtud:

$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} .$$

Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu platí:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 .$$

Dosadíme za a_1:

$$s_1 = \frac{v_{m1} t_1}{2} .$$

Odtud:

$$v_{m1} = \frac{2 s_1}{t_1} . \qquad (1)$$

Číselně:

$$v_{m1} = \frac{2 \cdot 36}{9}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} .$$

Analogicky pro druhý běh:

$$v_{m2} = \frac{2 s_2}{t_2} .$$

Číselně:

$$v_{m2} = \frac{2 \cdot 30}{7}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 8{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} .$$

Nápověda 2 pro a): Konečné časy na dráze

Pro určení konečného času si stačí uvědomit, že čas na zrychleném úseku známe a čas sprintera na úseku, kde se pohyboval rovnoměrně, snadno určíme z délky daného úseku a výše určené dosažené maximální rychlosti.

▶ Řešení k nápovědě 2

Čas dosažený na celé dráze při prvním běhu je:

(2)

$$t_{k1} = t_1 + t_1'\,.$$

Kde:

$$t_1' = \frac{s - s_1}{v_{m1}}\,.$$

Dosadíme za v_{m1} z (1):

$$t_1' = \frac{(s - s_1)t_1}{2s_1}\,.$$

Dosadíme do (2):

$$t_{k1} = t_1 + \frac{(s - s_1)t_1}{2s_1} = \frac{2s_1 t_1 + s t_1 - s_1 t_1}{2s_1} = \frac{s + s_1}{2s_1}\,t_1\,.$$

Číselně:

$$t_{k1} = \frac{100 + 36}{2 \cdot 36} \cdot 9\ \mathrm{s} = 17\ \mathrm{s}\,.$$

Analogicky čas dosažený na celé dráze při druhém běhu platí:

$$t_{k2} = \frac{s + s_2}{2s_2}\,t_2\,.$$

Číselně:

$$t_{k2} = \frac{100 + 30}{2 \cdot 30} \cdot 7\ \mathrm{s} \doteq 15{,}2\ \mathrm{s}\,.$$

Nápověda 3 pro b): Maximální rychlost pro třetí běh

Víte, jaký platí vztah mezi dráhou, dobou a rychlostí rovnoměrného pohybu?

Dráhu, na které se sprinter pohyboval rovnoměrně, snadno odvodíte, stejně tak dobu, kterou tento úsek běžel, a jeho rychlost je zadána. Pro neznámý čas běhu sprintera na zrychleném úseku pak stačí budˇ použít vztah z předchozí úlohy nebo si uvědomit, jak se dá vyjádřit doba rovnoměrně zrychleného pohybu.

▶ Řešení k nápovědě 3

Při třetím běhu platí pro úsek, kde sprinter běžel rovnoměrně:

$$s_3' = s - s_3 = v_{m3} t_3'\,. \tag{3}$$

Kde:

$$t_3' = t_{k3} - t_3\,.$$

t_3…doba zrychleného pohybu

Pro maximální rychlost v_{m3} můžeme psát analogicky podle (1):

$$v_{m3} = \frac{2s_3}{t_3}\,.$$

Odtud:

(4)

$$t_3 = \frac{2s_3}{v_{m3}}.$$

Dosadíme do (3):

$$s - s_3 = v_{m3}(t_{k3} - t_3) = v_{m3}\left(t_{k3} - \frac{2s_3}{v_{m3}}\right)$$

$$s - s_3 = v_{m3}t_{k3} - 2s_3$$

Odtud:

$$v_{m3} = \frac{s + s_3}{t_{k3}}. \qquad (5)$$

Číselně:

$$v_{m3} = \frac{100+30}{12}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 10{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Nápověda 4 pro c): Grafy závislosti rychlosti na čase

K sestrojení grafů musíte dopočítat čas t_3. Vztah pro jeho výpočet znáte z předchozí části úlohy.

Které veličiny ještě k sestrojení grafů potřebujete? Znáte je všechny?

► Řešení k nápovědě 4

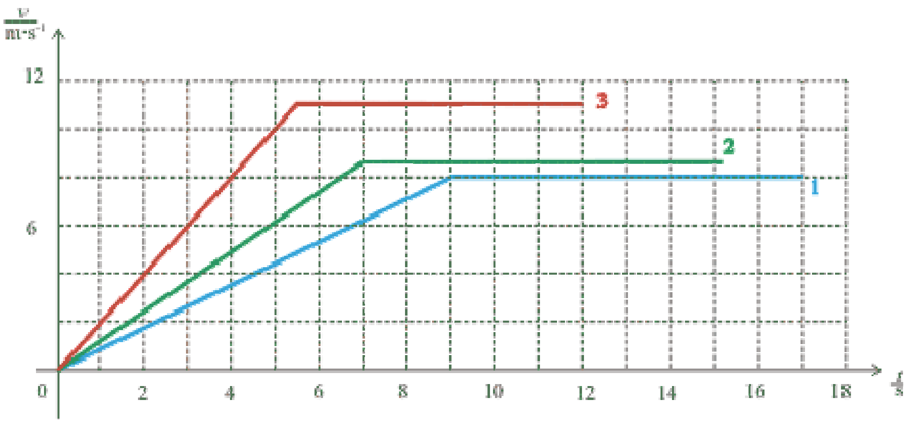
K sestrojení grafů je tedy nutné dopočítat čas t_3, to lze udělat ze vztahu (4) a (5):

$$t_3 = \frac{2s_3}{v_{m3}} = \frac{2s_3}{s+s_3}t_{k3}$$

Číselně:

$$t_3 = \frac{2\cdot 30}{100+30}\cdot 12\,\mathrm{s} \doteq 5{,}5\,\mathrm{s}.$$

Zbývající veličiny t_1, t_2, t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, v_{m1}, v_{m2} a v_{m3} už známe.



Nápověda 5 pro d): Zrychlení sprintera při rozbíhání

Stačí vyjít ze vztahu mezi zrychlením a rychlostí rovnoměrně zrychleného pohybu.

Všechny veličiny pak již znáte.

▶ Řešení k nápovědě 5

Zrychlení při rozbíhání při jednotlivých pohybech jsou následující:

$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} = \frac{2s_1}{{t_1}^2}$$

$$a_2 = \frac{v_{m2}}{t_2} = \frac{2s_2}{{t_2}^2}$$

$$a_3 = \frac{v_{m3}}{t_3} = \frac{2s_3}{{t_3}^2} = \frac{(s+s_3)^2}{2s_3{t_{k3}}^2}$$

Číselně:

$$a_1 = \frac{2\cdot 36}{9^2}\,\mathrm{m\dot{s}^{-2}} \doteq 0{,}89\,\mathrm{m\dot{s}^{-2}}$$

$$a_2 = \frac{2\cdot 30}{7^2}\,\mathrm{m\dot{s}^{-2}} \doteq 1{,}2\,\mathrm{m\dot{s}^{-2}}$$

$$a_3 = \frac{(100+30)^2}{2\cdot 30\cdot 12^2}\,\mathrm{m\dot{s}^{-2}} \doteq 2\,\mathrm{m\dot{s}^{-2}}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

a) Z rovnic

$$v_{m1} = a_1 t_1$$

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

plyne:

$$v_{m1} = \frac{2s_1}{t_1}\,.$$

Číselně:

$$v_{m1} = \frac{2\cdot 36}{9}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Čas dosažený na celé dráze při prvním běhu je:

$$t_{k1} = t_1 + \frac{s-s_1}{v_{m1}} = \frac{s+s_1}{2s_1} t_1\,.$$

Číselně:

$$t_{k1} = \frac{100+36}{2\cdot 36}\cdot 9\,\mathrm{s} \doteq 17\,\mathrm{s}\,.$$

Analogicky pro druhý běh:

$$v_{m2} = \frac{2s_2}{t_2}\,.$$

Číselně:

$$v_{m2} = \frac{2{\cdot}30}{7}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 8{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro čas dosažený na celé dráze při druhém běhu platí:

$$t_{k2} = \frac{s+s_2}{2s_2}t_2.$$

Číselně:

$$t_{k2} = \frac{100+30}{2{\cdot}30}{\cdot}7\,\mathrm{s} \doteq 15{,}2\,\mathrm{s}$$

b) Při třetím běhu platí:

$$s - s_3 = v_{m3}(t_{k3}-t_3) = v_{m3}\left(t_{k3}-\frac{2s_3}{v_{m3}}\right) = v_{m3}t_{k3} - 2s_3$$

$$v_{m3} = \frac{s+s_3}{t_{k3}}$$

Číselně:

$$v_{m3} = \frac{100+30}{12}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 10{,}8\,\mathrm{m.s{-}1}.$$

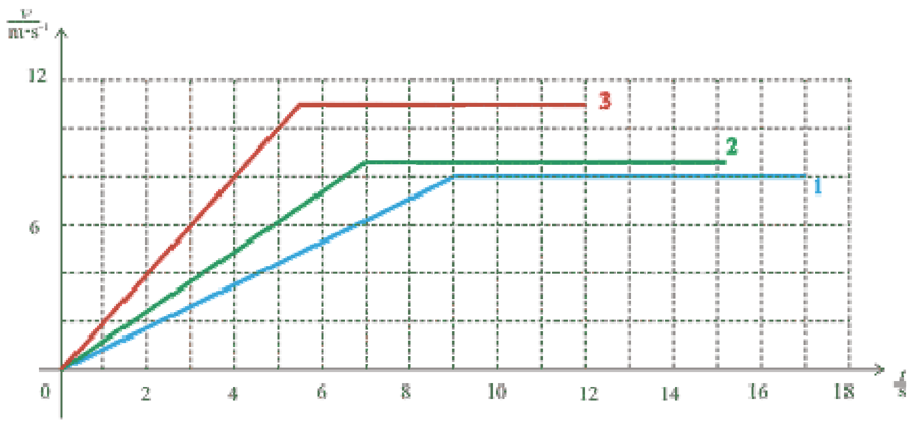
c) K sestrojení grafů je nutné dopočítat čas t_3 :

$$t_3 = \frac{2s_3}{v_{m3}} = \frac{2s_3}{s+s_3}t_{k3}.$$

Číselně:

$$t_3 = \frac{2{\cdot}30}{100+30}{\cdot}12\,\mathrm{s} = 5{,}5\,\mathrm{s}.$$

Zbývající veličiny t_1, t_2, t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, v_{m1}, v_{m2} a v_{m3} už známe.



d) Zrychlení při rozbíhání při jednotlivých pohybech jsou následující:

$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} = \frac{2s_1}{t_1^2},$$

$$a_2 = \frac{v_{m2}}{t_2} = \frac{2s_2}{t_2{}^2},$$

$$a_3 = \frac{v_{m3}}{t_3} = \frac{2s_3}{t_3{}^2} = \frac{(s+s_3)^2}{2s_3 t_{k3}{}^2}.$$

Číselně:

$$a_1 = \frac{2\cdot 36}{9^2}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 0{,}89\,\mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_2 = \frac{2\cdot 30}{7^2}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 1{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_3 = \frac{(100+30)^2}{2\cdot 30\cdot 12^2}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Odpověď

a) Dosažené maximální rychlosti jsou

$$v_{m1} = \frac{2s_1}{t_1} = 8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$v_{m2} = \frac{2s_2}{t_2} \doteq 8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Konečné časy na celé dráze jsou

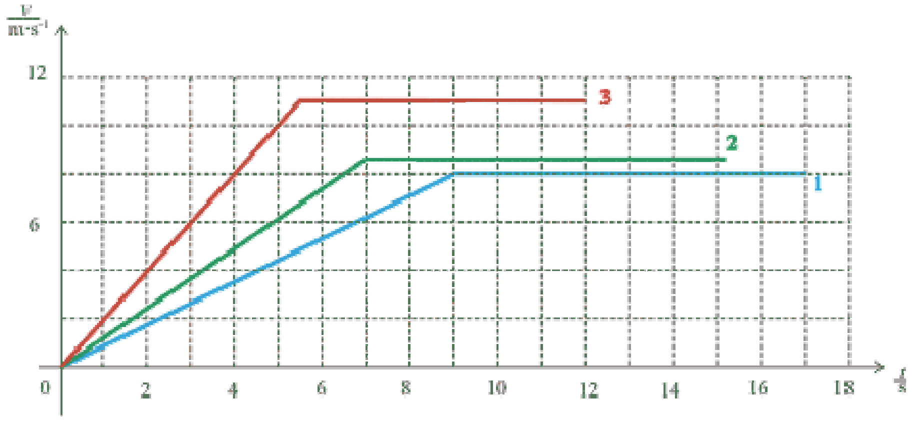
$$t_{k1} = \frac{s+s_1}{2s_1}t_1 \doteq 17\,\mathrm{s},$$

$$t_{k2} = \frac{s+s_2}{2s_2}t_2 \doteq 15{,}2\,\mathrm{s}.$$

b) Maximální dosažená rychlost při třetím běhu je

$$v_{m3} = \frac{s+s_3}{t_{k3}} \doteq 10{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

c) Grafy závislosti rychlosti na čase u všech tří běhů:



d) Zrychlení sprintera při rozbíhání v každém z uvedených běhů jsou

$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} \doteq 0{,}89\,\mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_2 = \frac{v_{m2}}{t_2} \doteq 1{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_3 = \frac{v_{m3}}{t_3}, \doteq 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Ocelová kulička

Ocelovou kuličku pustíme z klidu po hladké nakloněné rovině, na které se pohybuje se zrychlením 0,5 m·s^{-2}. Potom přejde na vodorovnou dráhu. Celkově ujede dráhu 20 metrů za čas 12 sekund . Jak dlouho se pohybuje po nakloněné rovině?

Tření a odpor prostředí zanedbejte.

Zápis

a = 0,5 m·s^{-2}	zrychlení kuličky
s = 20 m	celková dráha kuličky
t = 12 s	celková doba pohybu kuličky
t_1 = ? (s)	doba pohybu kuličky po nakloněné rovině

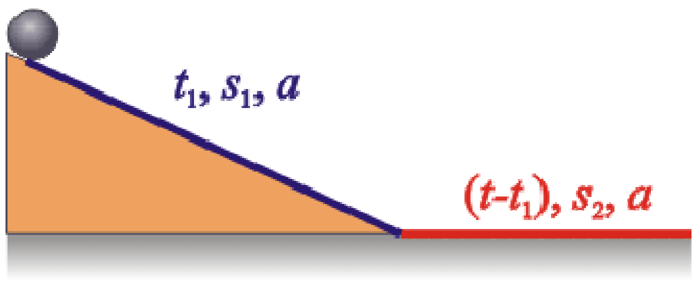
Nápověda 1: Dráha a rychlost kuličky na nakloněné rovině

Nakreslete si obrázek situace a označte potřebné veličiny.

Jakou dráhu urazí kulička po nakloněné rovině a jaké rychlosti při tom dosáhne?

► Řešení k nápovědě 1

Obrázek:



Kulička se po nakloněné rovině pohybuje rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem a na vodorovné rovině pohybem rovnoměrným přímočarým. Na nakloněné rovině se kulička pohybuje po dobu t_1 s daným zrychlením a. Za tento čas ujede dráhu

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2$$

a dosáhne rychlosti

$$v = at_1 .$$

Nápověda 2: Pohyb kuličky po vodorovné dráze

Jakým pohybem se pohybuje kulička po vodorovné části dráhy?

Jakou má při tom rychlost?

Jakou dráhu urazí?

▶ Řešení k nápovědě 2

Po vodorovné části dráhy se kulička pohybuje pohybem rovnoměrným přímočarým.

Pohybuje se rychlostí, kterou dosáhla při pohybu na nakloněné rovině, tedy v.

Touto rychlostí se pohybuje po vodorovné rovině po dobu $t - t_1$ a ujede dráhu s_2:

$$s_2 = v(t - t_1) = at_1(t - t_1)\,.$$

Nápověda 3: Celková dráha kuličky

Vyjádřete celkovou dráhu, kterou kulička urazila.

Řešte získanou kvadratickou rovnici pro hledaný čas t_1 a zvažte, který kořen vyhovuje podmínkám úlohy.

▶ Řešení k nápovědě 3

Celková dráha bude:

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1(t - t_1)\,.$$

Po roznásobení závorky:

$$s = -\frac{1}{2}at_1^2 + at_1t\,.$$

A po úpravě:

$$t_1^2 - 2tt_1 + \frac{2s}{a} = 0\,.$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme dva kořeny (ozn. t_1, t_2), z nichž vyhovuje pouze:

$$t_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}}\,.$$

Protože:

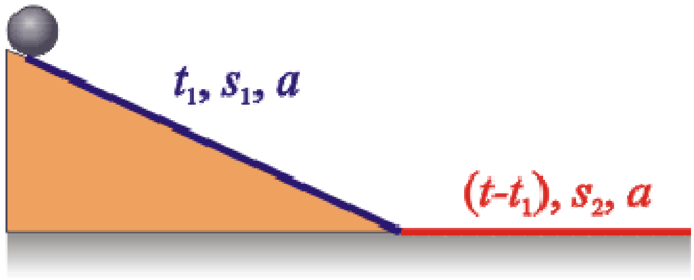
$$t_1 < t\,.$$

Číselně:

$$t_1 = \left(12 - \sqrt{(12)^2 - \frac{2\cdot 20}{0{,}5}}\right)\mathrm{s} = 4\,\mathrm{s}\,.$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Obrázek a označení veličin:



Kulička se po nakloněné rovině pohybuje rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem a na vodorovné rovině pohybem rovnoměrným přímočarým. Na nakloněné rovině se kulička pohybuje po dobu t_1 s daným zrychlením a . Za tento čas ujede dráhu:

$$s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 .$$

A dosáhne rychlosti:

$$v = a t_1 .$$

Touto rychlostí se pohybuje po vodorovné rovině po dobu $t - t_1$ a ujede dráhu:

$$s_2 = v(t - t_1) = a t_1 (t - t_1) .$$

Celková dráha bude:

$$s = \frac{1}{2} a t_1^2 + a t_1 (t - t_1) .$$

Po roznásobení závorky:

$$s = -\frac{1}{2} a t_1^2 + a t_1 t .$$

A po úpravě:

$$t_1^2 - 2 t t_1 + \frac{2s}{a} = 0 .$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme dva kořeny (ozn. t_1, t_2), z nichž vyhovuje pouze:

$$t_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}} .$$

Protože:

$$t_1 < t .$$

Číselně:

$$t_1 = \left(12 - \sqrt{(12)^2 - \frac{2 \cdot 20}{0{,}5}}\right) \mathrm{s} = 4 \mathrm{\ s}$$

Odpověď

Ocelová kulička se pohybuje po nakloněné rovině po dobu:

$$t_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}} = 4 \mathrm{\ s} .$$

Chataři od Lančovské zátoky

Obyvatelé Lančovské zátoky mají postavené chatky blízko řeky Dyje, která je v úseku zátoky široká L. Když se chtějí sousedé navštívit, použijí k dopravě loďku.

Chatař Nesnídal vlastní loďku, která jezdí na klidné vodě konstantní rychlostí o velikosti v_l. Rozhodne se, že spolu se svým sousedem Nekvapilem navštíví chataře Nesvačila.

Určete, jak dlouho jim celá plavba potrvá, víte-li následující:

Nesnídal pojede nejprve pro Nekvapila, který bydlí na téže straně řeky proti proudu řeky ve vzdálenosti x od něj. Poté oba poplují k Nesvačilově chatce, která se nachází na druhém břehu přímo proti Nekvapilově chatě.

Předpokládejte, že rychlost proudu řeky je konstantní a má velikost v_r.

Řešte pro hodnoty: $L = 200$ m, $v_l = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_r = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $x = 500$ m.

Nápověda 1: Čas t_1 od Nesnídala k Nekvapilovi

Určete čas t_1, za který dopluje Nesnídal k Nekvapilovi.

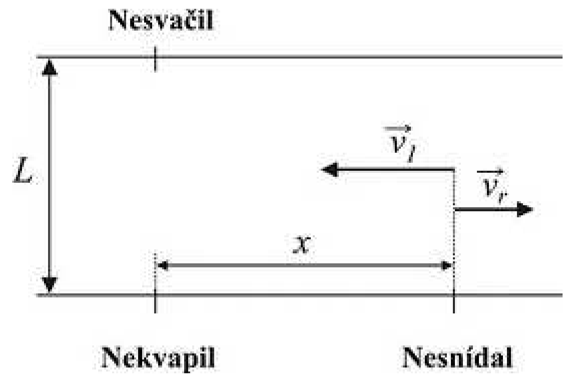
Znáte délku trasy. Jak velkou rychlostí v_1 plul Nesnídal k Nekvapilovi?

Nakreslete si obrázek situace.

▶ Řešení k nápovědě 1

Čas t_1:

Obrázek 1:



Velikost rychlosti v_1 loďky vzhledem k břehu, pluje-li proti proudu, je daná rozdílem rychlosti loďky vzhledem ke klidné vodě v_l a rychlosti proudu v_r:

$$v_1 = v_l - v_r$$

Touto rychlostí má loďka uplout vzdálenost x. Potrvá jí to čas t_1:

$$t_1 = \frac{x}{v_l - v_r}$$

Nápověda 2 : Čas t_2 od Nekvapila k Nesvačilovi

Určete čas t_2, za který Nesnídal s Nekvapilem doplují k Nesvačilovi.

Délku trasy opět znáte. Jakým způsobem poplují? Mohou si to namířit přímo k Nesvačilově chatě?

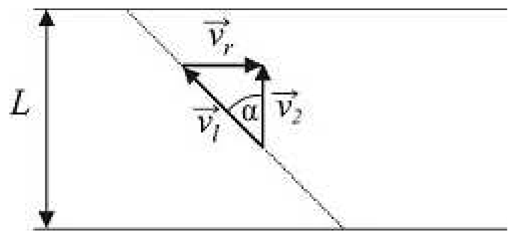
Jak velkou rychlostí v_2 poplují? Nakreslete si obrázek.

▶ Řešení k nápovědě 2

Čas t_2:

Chtějí-li Nesnídal s Nekvapilem přistát u Nesvačilovy chaty, nemohou si to namířit přímo na ni (proud by je snesl), ale tak, jak je naznačeno na obrázku:

Obrázek 2:



Výsledná rychlost:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - v_r^2}$$

Čas t_2:

$$t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{L}{\sqrt{v_1^2 - v_r^2}}$$

Nápověda 3: Výsledná doba *t* plavby

Co platí pro výslednou dobu t celé plavby? Stačí vám k jejímu vyjádření předchozí výpočty?

▶ Řešení k nápovědě 3

Určili jsme čas t_1, za který doplul Nesnídal k Nekvapilovi a poté čas t_2, za který oba dopluli k Nesvačilovi.

Sečtením obou časů získáme výslednou dobu t celé plavby:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{x}{v_1 - v_r} + \frac{L}{\sqrt{v_1^2 - v_r^2}}$$

Číselně:

$$t = \left(\frac{500}{2-1} + \frac{200}{\sqrt{3}}\right)\,\mathrm{s} = 615\,\mathrm{s}$$

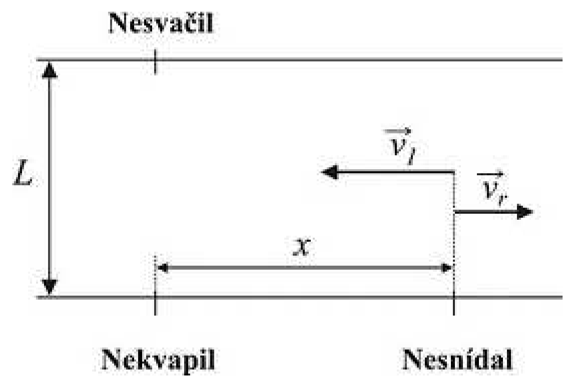
CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

Nejprve určíme čas t_1, za který dopluje Nesnídal k Nekvapilovi a poté čas t_2, za který oba doplují k Nesvačilovi. Sečtením obou časů získáme výslednou dobu celé plavby:

$$t = t_1 + t_2$$

Čas t_1 od Nesnídala k Nekvapilovi:

Obrázek 1:



Velikost rychlosti v_1 loďky vzhledem k břehu, pluje-li proti proudu, je daná rozdílem rychlosti loďky vzhledem ke klidné vodě v_l a rychlosti proudu v_r:

$$v_1 = v_l - v_r$$

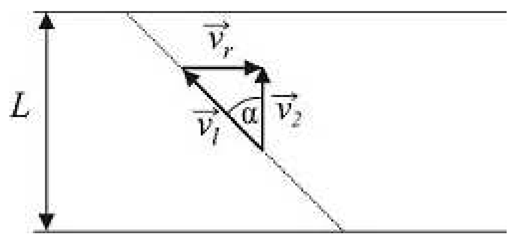
Touto rychlostí má loďka uplout vzdálenost x. Potrvá jí to čas t_1:

$$t_1 = \frac{x}{v_l - v_r}$$

Čas t_2 od Nekvapila k Nesvačilovi:

Chtějí-li Nesnídal s Nekvapilem přistát u Nesvačilovy chaty, nemohou si to namířit přímo na ni (proud by je snesl), ale tak, jak je naznačeno na obrázku:

Obrázek 2:



Výsledná rychlost:

$$v_2 = \sqrt{v_l^2 - v_r^2}$$

Čas t_2:

$$t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{L}{\sqrt{v_l^2 - v_r^2}}$$

Určili jsme čas t_1, za který doplul Nesnídal k Nekvapilovi a poté čas t_2, za který oba dopluli k Nesvačilovi.

Sečtením obou časů získáme výslednou dobu t celé plavby:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{x}{v_l - v_r} + \frac{L}{\sqrt{v_l^2 - v_r^2}}$$

Číselně:

$$t = \left(\frac{500}{2-1} + \frac{200}{\sqrt{3}}\right)\,\mathrm{s} = 615\ \mathrm{s}$$

Odpověď

Chataři Nesnídal a Nekvapil doplují k chataři Nesvačilovi za dobu t :

$$t = \frac{x}{v_l - v_r} + \frac{L}{\sqrt{v_l^2 - v_r^2}}$$

Číselně:

$$t = 615\ \mathrm{s}$$

Beruška na válci

Válec o poloměru R a výšce h se otáčí rovnoměrně kolem vlastní osy ve směru otáčení hodinových ručiček tak, že vykoná jednu otočku za čas T. Po povrchové přímce válce slézá beruška stálou rychlostí v vzhledem k válci.

a) Určete průběh polohového vektoru berušky, byla-li v čase t = 0 s na horním okraji válce.

b) Určete průběh velikosti rychlosti berušky.

c) Určete závislost velikosti tečného a normálového zrychlení berušky na čase.

d) Jaká křivka je trajektorií pohybu? Určete její poloměr křivosti.

e) Jakou dráhu beruška opíše, než doleze až ke spodnímu okraji válce?

Řešte z pohledu pevného pozorovatele stojícího vedle válce.

Soustavu souřadnic volte tak, že osa z je osou válce, osy x a y leží v jeho dolní podstavě.

Nápověda 1 pro a): Obrázek situace

Počátek souřadné soustavy zvolte ve středu spodní podstavy válce a počáteční polohu berušky B_0 na obvodě horní podstavy válce.

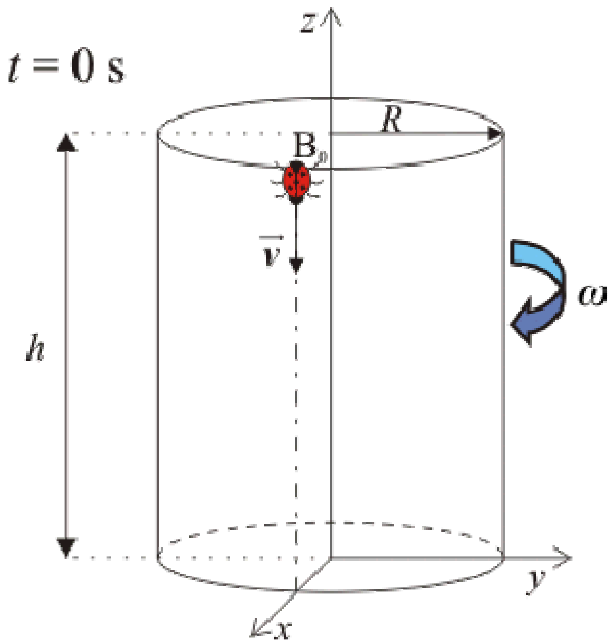
Nakreslete situaci pro čas t = 0 s a vyznačte polohu berušky B_0.

Pak nakreslete situaci pro čas t a vyznačte polohu berušky B, kam za čas t na válci popolezla.

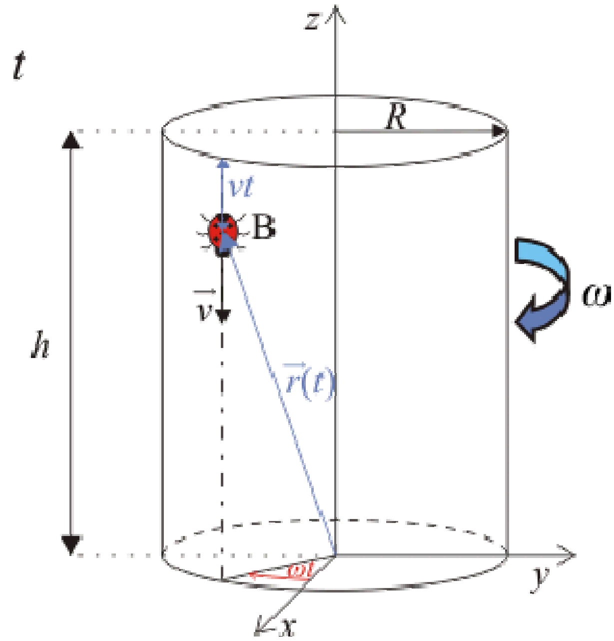
Vyznačte do obrázku i polohový vektor berušky v čase t a jeho průmět do roviny xy.

► Řešení k nápovědě 1

Obrázek 1:



Obrázek 2:



Nápověda 2 pro a): Průběh polohového vektoru berušky

Pohyb berušky si rozložte na pohyb ve směru osy *z* a pohyb v rovině *xy*.

O jaké pohyby se jedná?

Zapište, jak se s časem budou měnit souřadnice *x*, *y*, *z* berušky, a pak s jejich pomocí vyjádřete polohový vektor.

▶ Řešení k nápovědě 2

Pohyb rozložíme na pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti *v* (ve směru osy *z*) a pohyb po kružnici s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (v rovině *x*, *y*):

$$x(t) = R\cos\omega t = R\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$y(t) = -R\sin\omega t = -R\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$z(t) = h - vt$$

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = R\cos\frac{2\pi}{T}t\,\vec{i} - R\sin\frac{2\pi}{T}t\,\vec{j} + (h - vt)\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Nápověda 3 pro b): Průběh velikosti rychlosti berušky

Vyjádřete si nejprve složky rychlosti v_x, v_y, v_z. Jakým způsobem je získáte z parametrických rovnic ve směru souřadnicových os?

Pak zapište průběh velikosti rychlosti berušky.

▶ Řešení k nápovědě 3

Složky rychlosti získáme derivací souřadnic podle času:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\omega t) = -R\omega\sin\omega t = -R\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-R\sin\omega t) = -R\omega\cos\omega t = -R\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(h-vt) = -v$$

Průběh velikosti rychlosti berušky je:

$$v_v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)+v^2}$$
$$v_v = \sqrt{v^2+R^2\omega^2} = \sqrt{v^2+R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2}+v^2}$$

Nápověda 4 pro c): Velikost tečného a normálového zrychlení berušky

Velikost tečného zrychlení snadno zjistíte, znáte-li velikost rychlosti berušky z předchozí nápovědy.

Pro velikost normálového zrychlení budete potřebovat kromě velikosti tečného také velikost celkového zrychlení berušky (to získáte opět ze složek a_x, a_y, a_z). Rozmyslete si, jaký mezi nimi platí vztah.

► Řešení k nápovědě 4

Velikost tečného zrychlení a_t berušky:

$$a_t(t) = \frac{dv_v}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v^2+R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$
$$a_t = 0$$

Vztah mezi velikostí tečného a_t, normálového a_n a celkového zrychlení a berušky je:

$$a = \sqrt{a_t^2+a_n^2}$$
$$a_n = \sqrt{a^2-a_t^2} = a$$

Velikost celkového zrychlení berušky a:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-R\omega\sin\omega t) = -R\omega^2\cos\omega t$$
$$a_x(t = -R\frac{4\pi^2}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-R\omega\cos\omega t) = R\omega^2\sin\omega t = R\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$a_z(t) = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-v) = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t+R^2\omega^4\sin^2\omega t+0}$$

$$a = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

Velikost normálového zrychlení a_n berušky:

$$a_n = a = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

Nápověda 5 pro d): Trajektorie pohybu berušky, poloměr křivosti

Rozmyslete si, jaká křivka by byla trajektorií pohybu berušky, kdyby se válec otáčel a beruška by byla na válci v klidu. Pak k tomu připojte pohyb berušky.

Jaká křivka je trajektorií pohybu?

Pozn.: Uvědomte si, že úlohu řešíte z pohledu pevného pozorovatele stojícího vedle válce.

Jaký je vztah mezi poloměrem křivosti trajektorie, velikostí rychlosti a normálového zrychlení berušky?

▶ Řešení k nápovědě 5

Trajektorie pohybu:

Beruška se pohybuje po šroubovici.

Poloměr křivosti ρ:

$$a_n = \frac{v_v^2}{\rho}$$

tedy:

$$\rho = \frac{v_v^2}{a_n}$$

$$\rho = \frac{R^2\omega^2+v^2}{R\omega^2}$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

tedy:

$$\rho = \frac{R^2\frac{4\pi^2}{T^2}+v^2}{R\frac{4\pi^2}{T^2}} = R+\frac{v^2T^2}{4\pi^2R}$$

Nápověda 6 pro e): Dráha berušky pro případ e)

Dráhu berušky snadno určíte pomocí velikosti rychlosti berušky, kterou znáte, a času, za který doleze odshora na spodní okraj válce. Ten si musíte vyjádřit. Uvědomte si, že znáte výšku válce a rychlost berušky vzhledem k válci.

► Řešení k nápovědě 6

Rychlost berušky vzhledem k okolí je konstantní, takže pro hledanou dráhu *l* platí:

$$l = v_v t$$

kde

$$v_v = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2}$$

$$t = \frac{h}{v}$$

$$l = \left(\frac{h}{v}\right)\sqrt{R^2\omega^2 + v^2}$$

kde

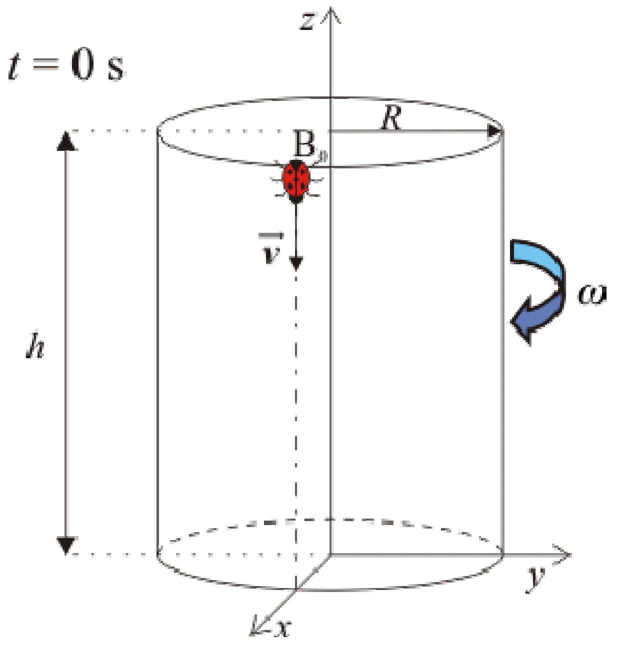
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

tedy:

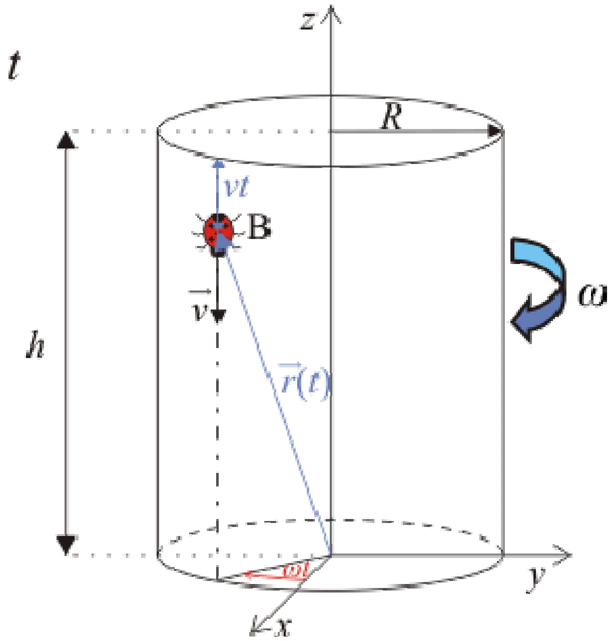
$$l = \left(\frac{h}{v}\right)\sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2} + v^2}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Obrázek 1:



Obrázek 2:



a) Pohyb rozložíme na pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti *v* (ve směru osy *z*) a pohyb po kružnici s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (v rovině *x*, *y*):

$$x = R\cos\omega t = R\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$y = -R\sin\omega t = -R\sin\frac{2\pi}{T}t$$
$$z = h - vt$$
$$\vec{r}(t) = R\cos\frac{2\pi}{T}t\,\vec{i} - R\sin\frac{2\pi}{T}t\,\vec{j} + (h - vt)\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory.

b) Složky rychlosti získáme derivací souřadnic podle času:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\cos\omega t) = -R\omega\sin\omega t = -R\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$$
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-R\sin\omega t) = -R\omega\cos\omega t = -R\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h - vt) = -v$$

Průběh velikosti rychlosti berušky je:

$$v_v = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) + v^2}$$
$$v_v = \sqrt{v^2 + R^2\omega^2} = \sqrt{v^2 + R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2} + v^2}$$

c) Velikost tečného zrychlení a_t berušky:

$$a_t(t) = \frac{\mathrm{d}v_v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v^2+R^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$
$$a_t = 0$$

Vztah mezi velikostí tečného a_t, normálového a_n a celkového zrychlení a berušky je:

$$a = \sqrt{a_t^2+a_n^2}$$
$$a_n = \sqrt{a^2-a_t^2} = a$$

Velikost celkového zrychlení berušky a:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-R\omega\sin\omega t) = -R\omega^2\cos\omega t$$
$$a_x(t) = -R\frac{4\pi^2}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-R\omega\cos\omega t) = R\omega^2\sin\omega t = R\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t$$
$$a_z(t) = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-v) = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t+R^2\omega^4\sin^2\omega t+0}$$
$$a = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

Velikost normálového zrychlení a_n berušky:

$$a_n = a = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

d) Trajektorie pohybu:

Beruška se pohybuje po šroubovici.

Poloměr křivosti ρ:

$$a_n = \frac{v_v^2}{\rho}$$

tedy:

$$\rho = \frac{v_v^2}{a_n}$$

$$\rho = \frac{R^2\omega^2 + v^2}{R\omega^2}$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

tedy:

$$\rho = \frac{R^2\frac{4\pi^2}{T^2} + v^2}{R\frac{4\pi^2}{T^2}} = R + \frac{v^2T^2}{4\pi^2R}$$

e) Dráha *l*:

Rychlost berušky vzhledem k okolí je konstantní, takže pro hledanou dráhu *l* platí:

$$l = v_v t$$

kde

$$v_v = \sqrt{(R^2\omega^2 + v^2)}$$

$$t = \frac{h}{v}$$

$$l = \left(\frac{h}{v}\right)\sqrt{(R^2\omega^2 + v^2)}$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

tedy:

$$l = \left(\frac{h}{v}\right)\sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2} + v^2}$$

Odpověď

a) Průběh polohového vektoru berušky je:

$$\vec{r}(t) = R\cos\frac{2\pi}{T}t\,\vec{i} - R\sin\frac{2\pi}{T}t\,\vec{j} + (h - vt)\,\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

b) Průběh velikosti rychlosti berušky je:

$$v_v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v^2 + R^2\omega^2} = \sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2} + v^2}$$

c) Velikost tečného zrychlení a_t berušky je:

$$a_t = \frac{dv_v}{dt} = 0$$

Velikost normálového zrychlení a_n berušky je konstantní a na čase nezávisí:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = R\omega^2 = 4R\frac{\pi^2}{T^2}$$

d) Trajektorie pohybu:

Beruška se pohybuje po šroubovici.

Poloměr křivosti ρ je:

$$\rho = \frac{v_v^2}{a_n}$$

$$\rho = \frac{R^2\omega^2 + v^2}{R\omega^2} = R + \frac{v^2T^2}{4\pi^2R}$$

e) Dráha l je:

$$l = \frac{h}{v}\sqrt{R^2\omega^2 + v^2} = \frac{h}{v}\sqrt{4\pi^2\frac{R^2}{T^2} + v^2}$$

Basketbalista

Obroučka koše na basketbal se nachází ve výšce h_1 nad podlahou. Střed koše je ve vodorovné vzdálenosti L od čáry trestného hodu. Basketbalista hází trestné hody, přičemž míč opouští jeho ruku v poloze, kdy jeho střed je přesně nad čárou trestného hodu ve výšce h_2 nad podlahou.

Optimální elevační úhel α je takový, při němž střed míče projde středem obroučky a přitom je zapotřebí co nejmenší počáteční rychlost míče. Dokažte obecně, že tento úhel má velikost $\alpha = 45^\circ + \beta/2$, kde β je *záměrný úhel* , tj. odchylka spojnice středu obroučky a počátečního bodu vrhu od vodorovné roviny.

Určete optimální elevační úhel pro zadané hodnoty a vypočtěte příslušnou velikost počáteční rychlosti míče.

Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešte pro hodnoty: $h_1 = 3{,}05$ m, $L = 5{,}425$ m, $h_2 = 2{,}45$ m, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

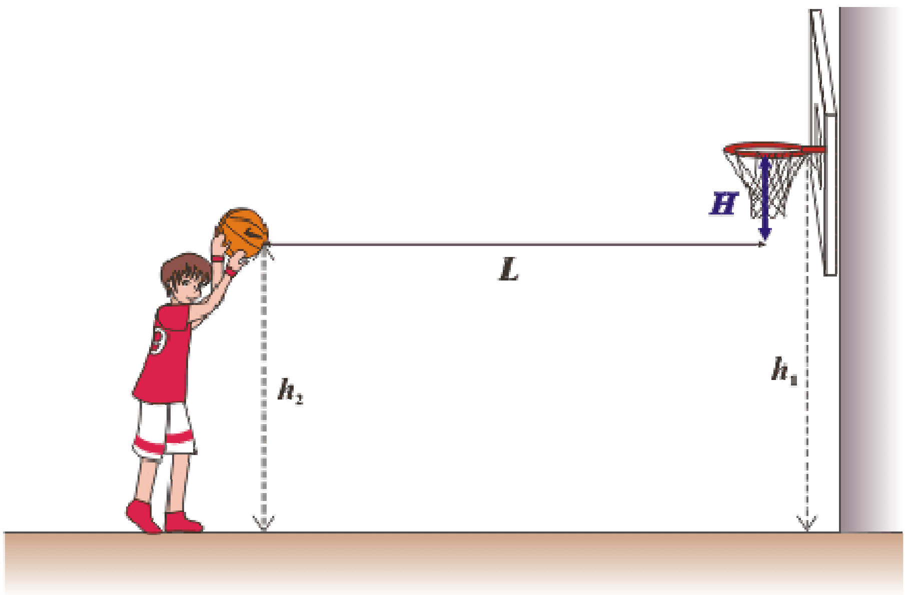
Nápověda 1: Obrázek situace

Nakreslete obrázek zachycující danou situaci, vyznačte do něj elevační a záměrný úhel, vzdálenost L a výšku obroučky koše nad místem, ze kterého házíme míč.

► Řešení k nápovědě 1:

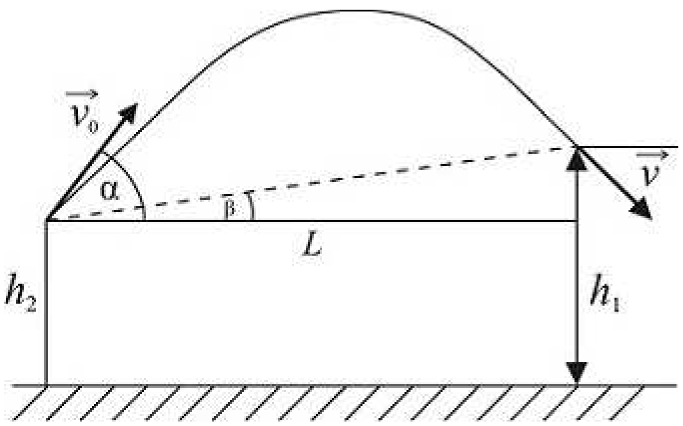
Označíme si L a H vodorovnou a svislou vzdálenost středu obroučky od počátečního bodu vrhu, α elevační úhel, t dobu letu, v_0 počáteční rychlost míče, v rychlost míče při průletu košem (*viz obrázek 1,2*).

Obrázek 1:



$$H = h_1 - h_2$$

Obrázek 2:



Nápověda 2: Pohyb míče ve vodorovném a svislém směru

Jaký pohyb vykonává míč ve vodorovném směru? Jaký pohyb vykonává míč ve svislém směru?

► Řešení k nápovědě 2:

Ve vodorovném směru vykonává míč rovnoměrný přímočarý pohyb. Ve svislém směru se jedná o vrh svislý vzhůru.

Nápověda 3: Rychlost míče ve vodorovném a svislém směru

Jaká je rychlost míče ve vodorovném směru a jak se mění s časem *x-ová* souřadnice míče?

Jaká je rychlost míče ve svislém směru a jak se mění s časem *y-ová* souřadnice míče?

Jaké hodnoty budou mít souřadnice *x* a *y* v okamžiku, kdy míč doletí do obroučky koše? Napište příslušné vztahy a vyjádřete z nich druhou mocninu počáteční rychlosti v_0^2(využijte ještě vztah tgβ = *H/L*).

► Řešení k nápovědě 3:

Platí:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

V okamžiku, kdy míč doletí do obroučky koše, bude platit:

$$x = L = v_0 t\cos\alpha, \quad \text{tedy:} \quad t = \frac{L}{v_0\cos\alpha}$$

$$y = H = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = Ltg\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

Odtud:

$$\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = Ltg\alpha - H$$

$$\frac{gL^2}{Ltg\alpha - H} = 2v_0^2\cos^2\alpha$$

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(Ltg\alpha - H)\cos^2\alpha} = \frac{gL^2}{2(L\sin\alpha\cos\alpha - H\cos^2\alpha)}$$

Po dosazení $H = Ltg\beta$ a úpravě dostaneme:

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(L\sin\alpha\cos\alpha - Ltg\beta\cos^2\alpha)} = \frac{gL}{\sin 2\alpha - tg\beta(1+\cos 2\alpha)}$$

$$v_0^2 = \frac{gL\cos\beta}{\sin 2\alpha\cos\beta - \sin\beta - \sin\beta\cos 2\alpha} = \frac{gL\cos\beta}{\sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta}$$

Poznámka: Při úpravách jsme použili následující goniometrické vztahy:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha - \beta) = \sin 2\alpha\cos\beta - \cos 2\alpha\sin\beta$$

Nápověda 4: Minimální hodnota výrazu

Pro jaký úhel α bude hodnota výrazu pro v_0^2 minimální?

► Řešení nápovědy 4:

Hodnota výrazu bude minimální, jestliže bude maximální hodnota jmenovatele, tedy jestliže:

$$\sin(2\alpha - \beta) = 1$$

$$2\alpha - \beta = 90^\circ$$

tedy, když platí:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$

Nápověda 5: Počáteční rychlost pro optimální úhel

Spočítejte počáteční rychlost v_0 pro optimální úhel α, tedy pro případ, kdy $\sin(2\alpha-\beta) = 1$. Sinus a cosinus úhlu β vyjádřete pomocí vzdáleností H a L.

► Řešení k nápovědě 5:

V takovém případě:

$$v_0^2 = \frac{gL\cos\beta}{1-\sin\beta}$$

Platí:

$$\cos\beta = \frac{L}{\sqrt{H^2+L^2}}$$
$$\sin\beta = \frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}}$$

s použitím $H = h_1 - h_2$:

$$\cos\beta = \frac{L}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}}$$
$$\sin\beta = \frac{h_1-h_2}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}}$$

Pak:

$$v_0^2 = \frac{\frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}}}{1-\frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}}} = \frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}-H} = g\left(\sqrt{H^2+L^2}+H\right)$$

s použitím $H = h_1 - h_2$:

$$v_0^2 = g\left(\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}+(h_1-h_2)\right)$$

Číselně pro zadané hodnoty:

$$\sin\beta = \frac{3{,}05-2{,}45}{\sqrt{(3{,}05-2{,}45)^2+5{,}425^2}}$$

Z toho:

$$\beta \doteq 6^\circ$$

Pak:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$
$$\alpha \doteq 48^\circ$$

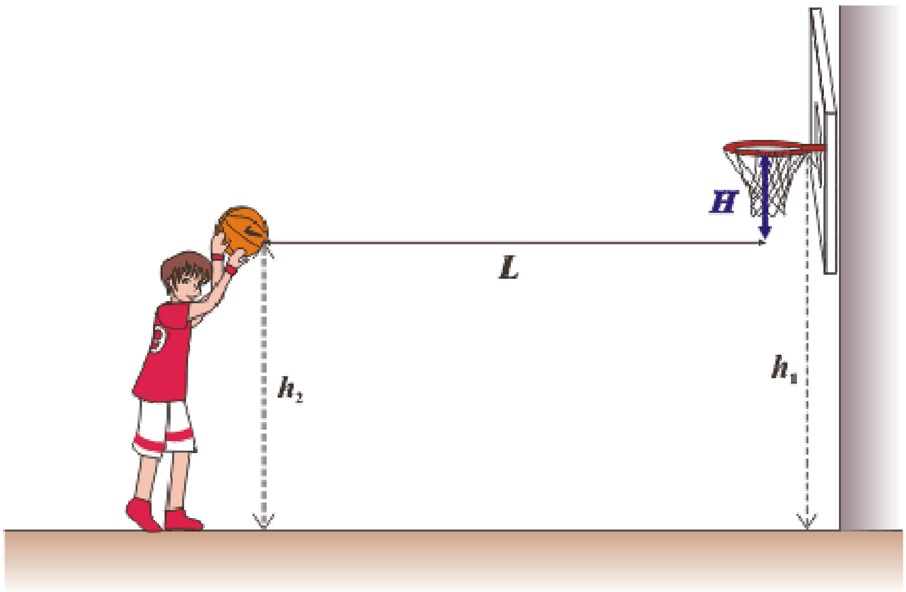
Dále:

$$v_0^2 = 9{,}81\left(\sqrt{(3{,}05-2{,}45)^2+5{,}425^2}+(3{,}05-2{,}45)\right)\ \mathrm{m^2.s^{-2}}$$
$$v_0 \doteq 7{,}7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

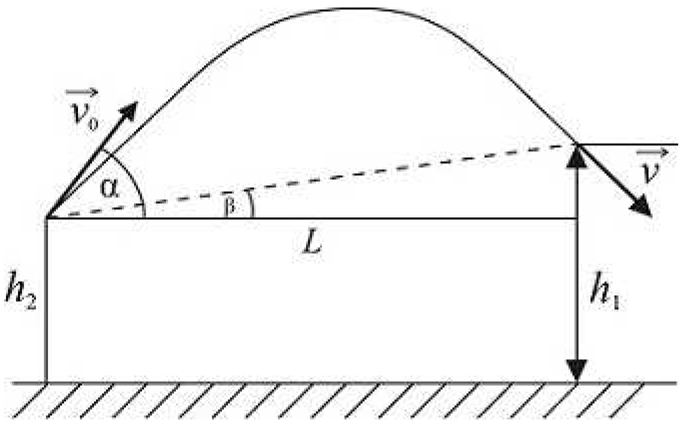
Označíme si L a H vodorovnou a svislou vzdálenost středu obroučky od počátečního bodu vrhu, α elevační úhel, t dobu letu, v_0 počáteční rychlost míče, v rychlost míče při průletu košem (*viz obrázek 1,2*).

Obrázek 1:



$$H = h_1 - h_2$$

Obrázek 2:



Ve vodorovném směru vykonává míč rovnoměrný přímočarý pohyb.Ve svislém směru vykonává míč vrh svislý vzhůru.

Platí:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$
$$x = v_0 t \cos\alpha$$
$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

V okamžiku, kdy míč doletí do obroučky koše, bude platit:

$$x = L = v_0 t \cos\alpha$$

Tedy:

$$t = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}$$
$$y = H = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = L tg\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Odtud:

$$\frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = L tg\alpha - H$$
$$\frac{gL^2}{L tg\alpha - H} = 2v_0^2 \cos^2\alpha$$
$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(L tg\alpha - H)\cos^2\alpha} = \frac{gL^2}{2(L \sin\alpha \cos\alpha - H \cos^2\alpha)}$$

Po dosazení $H = L tg\beta$ a úpravě dostaneme:

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(L \sin\alpha \cos\alpha - L tg\beta \cos^2\alpha)} = \frac{gL}{\sin 2\alpha - tg\beta(1 + \cos 2\alpha)}$$
$$v_0^2 = \frac{gL \cos\beta}{\sin 2\alpha \cos\beta - \sin\beta - \sin\beta \cos 2\alpha} = \frac{gL \cos\beta}{\sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta}$$

Poznámka: Při úpravách jsme použili následující goniometrické vztahy:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(2\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \cos\beta - \cos 2\alpha \sin\beta$$

Hodnota výrazu bude minimální, jestliže bude maximální hodnota jmenovatele, tedy jestliže:

$$\sin(2\alpha - \beta) = 1$$
$$2\alpha - \beta = 90^\circ$$

Tedy, když platí:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$

V takovém případě:

$$v_0^2 = \frac{gL\cos\beta}{1 - \sin\beta}$$

Platí:

$$\cos\beta = \frac{L}{\sqrt{H^2 + L^2}}$$
$$\sin\beta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + L^2}}$$

s použitím $H = h_1 - h_2$:

$$\cos\beta = \frac{L}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2}}$$
$$\sin\beta = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2}}$$

Pak:

$$v_0^2 = \frac{\frac{gL^2}{\sqrt{H^2 + L^2}}}{1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + L^2}}} = \frac{gL^2}{\sqrt{H^2 + L^2} - H} = g\left(\sqrt{H^2 + L^2} + H\right)$$

s použitím $H = h_1 - h_2$:

$$v_0^2 = g\left(\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}+(h_1-h_2)\right)$$

Číselně pro zadané hodnoty:

$$\sin\beta = \frac{3{,}05-2{,}45}{\sqrt{(3{,}05-2{,}45)^2+5{,}425^2}}$$

Z toho:

$$\beta \doteq 6^\circ$$

Pak:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha \doteq 48^\circ$$

Dále:

$$v_0^2 = 9{,}81\left(\sqrt{(3{,}05-2{,}45)^2+5{,}425^2}+(3{,}05-2{,}45)\right)\ \mathrm{m^2.s^{-2}}$$

$$v_0 \doteq 7{,}7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Odpověď:

Optimální elevační úhel je:

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2} \quad , \text{ kde } \quad \sin\beta = \frac{h_1-h_2}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}}$$

Pro zadané hodnoty:

$$\alpha \doteq 48^\circ$$

Příslušná velikost počáteční rychlosti míče je:

$$v_0^2 = g\left(\sqrt{(h_1-h_2)^2+L^2}+(h_1-h_2)\right)$$

Pro zadané hodnoty:

$$v_0 \doteq 7{,}7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Zápis

$h_1 = 3{,}05\ \mathrm{m}$	výška obroučky koše nad podlahou
$L = 5{,}425\ \mathrm{m}$	vodorovná vzdálenost středu koše od čáry trestného hodu
$h_2 = 2{,}45\ \mathrm{m}$	výška středu míče nad podlahou ve chvíli, kdy je střed míče přesně nad čárou trestného hodu
$\alpha = ?$	optimální elevační úhel
$v_0 = ?\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$	příslušná velikost počáteční rychlosti míče k optimálnímu elevačnímu úhlu

Z tabulek:

$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$	tíhové zrychlení

Anička na výletě

Anička si vyjela na kole na výlet. Nejprve stoupala do kopce přibližně konstantní rychlostí o velikosti 10 km·h^{-1} – tak ujela šestinu celkové trasy. Na dalším úseku rovném jedné třetině celkové trasy už měla před sebou rovnou silnici, ale protože projížděla nádhernou krajinou, kterou si chtěla prohlédnout, zrychlila jen mírně a pohybovala se nyní konstantní rychlostí o velikosti 20 km·h^{-1}. Zbývající část své trasy už pospíchala do cíle, proto ujížděla zhruba konstantní rychlostí o velikosti 30 km·h^{-1}.

a) Jak velká byla její průměrná rychlost na celé trase?

b) Jak velká by byla průměrná rychlost Aničky v případě, kdyby se šestinu celkové doby pohybu pohybovala rychlostí velikosti 10 km·h^{-1}, třetinu celkové doby rychlostí velikosti 20 km·h^{-1} a zbytek rychlostí velikosti 30 km·h^{-1}?

Poznámka: Průměrnou rychlost užíváme ve smyslu průměrné velikosti rychlosti.

Zápis

v_1 = 10 km·h^{-1}	rychlost Aničky na prvním úseku
v_2 = 20 km·h^{-1}	rychlost Aničky na druhém úseku
v_3 = 30 km·h^{-1}	rychlost Aničky na třetím úseku
v_p = ? (km·h^{-1})	

Nápověda 1 pro a): Průměrná rychlost na celé trase

Vyjádřete si, za jaké časy Anička urazila jednotlivé úseky cesty. Jaký byl celkový čas, za který ujela celou dráhu? Jak s pomocí celkové dráhy a celkového času určíte průměrnou rychlost?

► Řešení k nápovědě 1

Celkovou dráhu označíme s, jednotlivé úseky pak s_1, s_2, s_3.

Platí, že:

$$s_1 = \frac{s}{6}, \qquad s_2 = \frac{s}{3}, \qquad s_3 = \frac{s}{2}.$$

Dále platí, že:

$$s_1 = v_1 t_1, \qquad s_2 = v_2 t_2, \qquad s_3 = v_3 t_3.$$

Odtud:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{6v_1}, \qquad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{3v_2}, \qquad t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s}{2v_3}.$$

Průměrnou rychlost určíme jako celkovou uraženou dráhu za celkovou dobu pohybu:

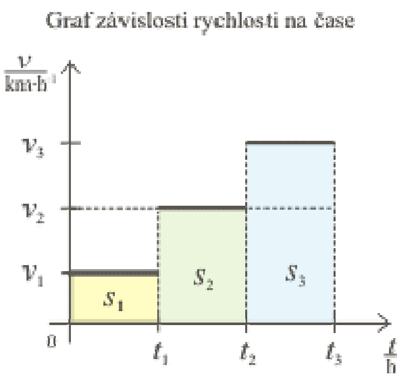
$$v_p = \frac{s}{t_1+t_2+t_3} = \frac{s}{\frac{s}{6v_1}+\frac{s}{3v_2}+\frac{s}{2v_3}} = \frac{6v_1v_2v_3}{3v_1v_2+2v_1v_3+v_2v_3}\,.$$

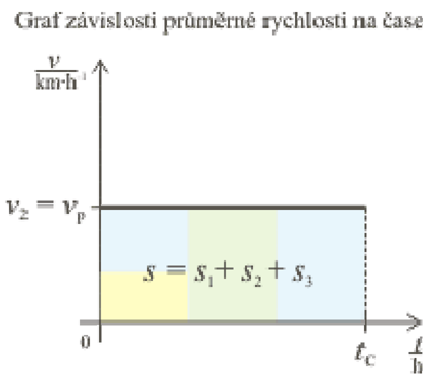
Číselně:

$$v_p = \frac{(6\cdot 10\cdot 20\cdot 30)\ \mathrm{km}}{(3\cdot 10\cdot 20+2\cdot 10\cdot 30+20\cdot 30)\ \mathrm{h}} = 20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

Poznámka:

Úlohu můžeme řešit i graficky. Nakreslíme graf závislosti rychlosti na čase ($t_1 = t_2 = t_3$) a graf závislosti průměrné rychlosti na čase.





Plocha pod křivkami v obou grafech má význam celkové uražené dráhy a musí být stejná. Z grafů je zřejmé, že $v_p = v_2$.

Nápověda 2 pro b): Průměrná rychlost v případě b)

Vyjádřete si opět délky jednotlivých úseků pomocí rychlosti a času. Pak vyjádřete celkovou dráhu, kterou Anička ujela. Průměrnou rychlost pak už snadno určíte jako v předchozí části.

► Řešení k nápovědě 2

Označíme si s_1, s_2, s_3 délky úseků dráhy projeté rychlostmi o velikostech v_1, v_2, v_3 za časy t_1, t_2, t_3 a t_c celkovou dobu pohybu.

Podle zadání platí:

$$t_1 = \frac{t_c}{6}\,,\qquad t_2 = \frac{t_c}{3}\,,\qquad t_3 = \frac{t_c}{2}\,.$$

Pro úseky dráhy pak platí:

$$s_1 = \frac{v_1 t_c}{6}\,,\qquad s_2 = \frac{v_2 t_c}{3}\,,\qquad s_3 = \frac{v_3 t_c}{2}$$

Průměrnou rychlost v_p vypočteme následovně:

$$v_p = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_c} = \frac{\frac{v_1t_c}{6}+\frac{v_2t_c}{3}+\frac{v_3t_c}{2}}{t_c} = \frac{v_1+2v_2+3v_3}{6}\,.$$

Číselně:

$$v_p = \frac{(10+2\cdot 20+3\cdot 30)}{6}\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} \doteq 23{,}33\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Průměrnou rychlost bereme jako celkovou uraženou dráhu za celkovou dobu pohybu

ad a)

Celkovou dráhu označíme s, jednotlivé úseky pak s_1, s_2, s_3.

Platí, že:

$$s_1 = \frac{s}{6}\,, \qquad s_2 = \frac{s}{3}\,, \qquad s_3 = \frac{s}{2}\,.$$

Dále platí, že:

$$s_1 = v_1 t_1\,, \qquad s_2 = v_2 t_2\,, \qquad s_3 = v_3 t_3\,.$$

Odtud:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{6v_1}\,, \qquad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{3v_2}\,, \qquad t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s}{2v_3}\,.$$

Průměrnou rychlost určíme jako celkovou uraženou dráhu za celkovou dobu pohybu:

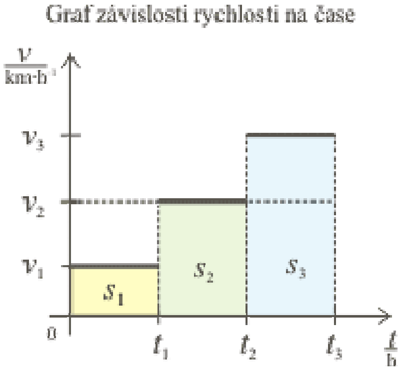
$$v_p = \frac{s}{t_1+t_2+t_3} = \frac{s}{\frac{s}{6v_1}+\frac{s}{3v_2}+\frac{s}{2v_3}} = \frac{6v_1v_2v_3}{3v_1v_2+2v_1v_3+v_2v_3}\,.$$

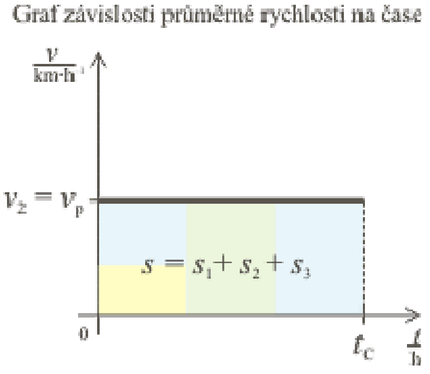
Číselně:

$$v_p = \frac{(6\cdot 10\cdot 20\cdot 30)\ \mathrm{km}}{(3\cdot 10\cdot 20+2\cdot 10\cdot 30+20\cdot 30)\ \mathrm{h}} = 20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

Poznámka:

Úlohu můžeme řešit i graficky. Nakreslíme graf závislosti rychlosti na čase ($t_1 = t_2 = t_3$) a graf závislosti průměrné rychlosti na čase.





Plocha pod křivkami v obou grafech má význam celkové uražené dráhy a musí být stejná. Z grafů je zřejmé, že $v_p = v_2$.

ad b)

Označíme si s_1, s_2, s_3 délky úseků dráhy projeté rychlostmi o velikostech v_1, v_2, v_3 za časy t_1, t_2, t_3 a t_c celkovou dobu pohybu.

Podle zadání platí:

$$t_1 = \frac{t_c}{6}, \qquad t_2 = \frac{t_c}{3}, \qquad t_3 = \frac{t_c}{2}.$$

Pro úseky dráhy pak platí:

$$s_1 = \frac{v_1 t_c}{6}, \qquad s_2 = \frac{v_2 t_c}{3}, \qquad s_3 = \frac{v_3 t_c}{2}.$$

Průměrnou rychlost v_p vypočteme následovně:

$$v_p = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_c} = \frac{\frac{v_1 t_c}{6}+\frac{v_2 t_c}{3}+\frac{v_3 t_c}{2}}{t_c} = \frac{v_1+2v_2+3v_3}{6}.$$

Číselně:

$$v_p = \frac{(10+2\cdot 20+3\cdot 30)}{6}\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} \doteq 23{,}33\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Odpověď

a) Průměrná rychlost Aničky na celé trase je:

$$v_p = \frac{6v_1v_2v_3}{3v_1v_2+2v_1v_3+v_2v_3}$$

Číselně:

$$v_p = 20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

b) Průměrná rychlost Aničky v případě, že se šestinu celkové doby pohybu pohybovala rychlostí velikosti v_1, třetinu celkové doby rychlostí velikosti v_2 a zbytek rychlostí velikosti v_3, je:

$$v_p = \frac{v_1+2v_2+3v_3}{6}$$

Číselně:

$$v_p \doteq 23{,}33\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

Hod míčem

Míč byl hozen svisle vzhůru počáteční rychlostí 10 m·s^{-1}. Do jaké maximální výšky vystoupá, jestliže zanedbáme odpor vzduchu? Jak dlouho mu potrvá výstup do výšky, která je rovna právě polovině maximální výšky vrhu?

Zápis

$v_0 = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$	počáteční rychlost míče
$h_{max} = ?\ (\mathrm{m})$	maximální výška
$t_1 = ?\ (\mathrm{s})$	doba, za kterou míč vyletí do poloviny maximální výšky
Z tabulek:	
$g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$	tíhové zrychlení

Nápověda 1: Pohyb míče

Jaký typ pohybu míč při pohybu vzhůru vykonává? Jak se mění s časem rychlost míče? Jak se s časem mění výška vrhu?

▶ Řešení k nápovědě 1:

Jedná se o vrh svislý vzhůru. Pro závislost rychlosti míče a výšky vrhu na čase platí:

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Nápověda 2: Bod obratu

Jakou rychlost bude mít míč v bodě obratu, tedy v maximální výšce? Za jaký čas vystoupí do bodu obratu? Jakou dráhu přitom urazí?

▶ Řešení k nápovědě 2:

V bodě obratu se míč zastaví, $v = 0$:

$$0 = v_0 - g t_v \,.$$

Doba výstupu je rovna:

$$t_v = \frac{v_0}{g} \,.$$

Výška výstupu je rovna:

$$h_{max} = v_0 t_v - \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$h_{max} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g v_0^2}{2 g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Číselně:

$$t_v = \frac{10}{10}\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{s}$$

$$h_{max} = \frac{10^2}{2\cdot 10}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$$

Nápověda 3: Výška vrhu

Víte, jak se mění s časem výška vrhu a znáte i hodnotu poloviny maximální výšky. Jak zjistíte, za jaký čas této výšky míč dosáhne?

▶ Řešení k nápovědě 3:

Víme, že pro okamžitou výšku vrhu platí:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

kde

$$h = \frac{h_{max}}{2} = \frac{v_0^2}{4g}.$$

Tedy:

$$\frac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \frac{1}{2}\, g t^2.$$

Vynásobíme 4*g*:

$$v_0^2 = 4 v_0 t g - 2 g^2 t^2.$$

Jedná se o kvadratickou rovnici, v níž neznámou je čas *t*:

$$2 g^2 t^2 - 4 v_0 t g + v_0^2 = 0.$$

Jejím řešením je:

$$t_{1,2} = \frac{4 v_0 g \pm \sqrt{8 v_0^2 g^2}}{4 g^2}$$

$$t_{1,2} = \frac{2 v_0 \pm \sqrt{2} v_0}{2g} = \frac{v_0}{g}\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Po dosazení zadaných hodnot pak dostáváme dvě reálná řešení:

$$t_1 = \frac{v_0}{g}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 0{,}3\,\mathrm{s}$$

$$t_2 = \frac{v_0}{g}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 1{,}7\,\mathrm{s}$$

Nápověda 4: Řešení kvadratické rovnice

Řešením kvadratické rovnice pro čas dostanete dvě hodnoty. Která je řešením úlohy a jaký význam má druhá hodnota?

▶ Řešení nápovědy 4:

První řešení odpovídá první polovině vrhu, kdy míč stoupá směrem vzhůru pohybem rovnoměrně zpomaleným, druhý čas pak přísluší již zpáteční cestě, kdy se míč vrací zpět k zemi volným pádem. Povšimněte si, že obě řešení vycházejí symetricky vzhledem k času t_v = 1 s (době výstupu).

CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

Jedná se o vrh svislý vzhůru. Pro závislost rychlosti míče a výšky vrhu na čase platí:

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

1. Maximální výška

V bodě obratu se míč zastaví, $v = 0$:

$$0 = v_0 - g t_v \, .$$

Doba výstupu je rovna:

$$t_v = \frac{v_0}{g} \, .$$

Výška výstupu je rovna:

$$h_{max} = v_0 t_v - \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$h_{max} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Číselně:

$$t_v = \frac{10}{10}\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{s}$$

$$h_{max} = \frac{10^2}{2 \cdot 10}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$$

2. Čas výstupu do poloviny maximální výšky

Víme, že pro okamžitou výšku vrhu platí:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \, ,$$

kde

$$h = \frac{h_{max}}{2} = \frac{v_0^2}{4g} \, .$$

Tedy:

$$\frac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \, .$$

Vynásobíme $4g$:

$$v_0^2 = 4v_0 tg - 2g^2t^2 \,.$$

Jedná se o kvadratickou rovnici, v níž neznámou je čas *t*:

$$2g^2t^2 - 4v_0 tg + v_0^2 = 0 \,.$$

Jejím řešením je:

$$t_{1,2} = \frac{4v_0 g \pm \sqrt{8v_0^2 g^2}}{4g^2}$$

$$t_{1,2} = \frac{2v_0 \pm \sqrt{2}v_0}{2g} = \frac{v_0}{g}\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Po dosazení zadaných hodnot pak dostáváme dvě reálná řešení:

$$t_1 = \frac{v_0}{g}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 0{,}3\ \mathrm{s}$$

$$t_2 = \frac{v_0}{g}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 1{,}7\ \mathrm{s}$$

První řešení odpovídá první polovině vrhu, kdy těleso stoupá směrem vzhůru pohybem rovnoměrně zpomaleným, druhý čas pak přísluší již zpáteční cestě, kdy se těleso vrací zpět k zemi volným pádem. Povšimněte si, že obě řešení vycházejí symetricky vzhledem k času $t_v = 1\ \mathrm{s}$ (době výstupu).

Odpověď:

Míč vystoupá do maximální výšky vrhu

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \doteq 5\ \mathrm{m} \,.$$

Výstup do poloviny maximální výšky vrhu míči potrvá

$$t_1 = \frac{v_0}{g}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 0{,}3\ \mathrm{s} \,.$$

Průměrná rychlost auta

Rychlost auta v prudkém stoupání je 30 km·h^{-1}. V následujícím stejně dlouhém sjezdu jede rychlostí 90 km·h^{-1}. Určete, jak velká je průměrná velikost rychlosti auta.

Zápis

v_1 = 30 km·h^{-1}	rychlost při stoupání
v_2 = 90 km·h^{-1}	rychlost při sjezdu
v_p = ? (km·h^{-1})	průměrná rychlost

Nápověda 1: Čas potřebný k jízdě

Napište, jaký vztah platí pro čas potřebný k jízdě do kopce a k jízdě z kopce.

Dráhu, kterou auto ujelo do kopce, a dráhu, kterou ujelo z kopce, sice neznáte, ale víte, že je stejná. Tato informace bude k dalším výpočtu stačit.

► Řešení k nápovědě 1

Důležitá informace v zadání úlohy je, že dráha nahoru i dolů je stejně dlouhá, my ji sice neznáme, ale počítat s ní budeme muset – označme si ji s .

Čas t_1 potřebný k jízdě do kopce pak bude:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}\,.$$

Čas t_2 potřebný k následné jízdě z kopce dolů pak bude:

$$t_2 = \frac{s}{v_2}\,.$$

Nápověda 2: Průměrná velikost rychlosti auta

Uvědomte si, co je to průměrná velikost rychlosti auta, tedy, jaký pro ni platí vztah.

Nenechte se zmást úvahou, že jde o aritmetický průměr velikostí rychlostí v_1 a v_2.

► Řešení k nápovědě 2

Průměrnou velikost rychlosti bereme jako celkovou uraženou dráhu dělenou celkovou dobu pohybu. (Srovnej s definicí průměrné rychlosti jako změny posunutí za celkový čas.)

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Číselně:

$$v_p = \frac{(2 \cdot 30 \cdot 90)\ \mathrm{km}}{(30+90)\ \mathrm{h}} = 45\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Průměrná velikost rychlosti auta je tedy jen 45 km·h^{-1}; všimněte si, že je bližší nižší rychlosti, kterou se auto pohybuje déle. V našem případě (stejná dráha nahoru i dolů) musí dokonce platit, že:

$$\frac{v_p - v_1}{v_2 - v_p} = \frac{v_1}{v_2}$$

Číselně:

$$\frac{30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}}{90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}} = \frac{1}{3}$$

Poznámka: Zadání úlohy svádí k okamžité (ale chybné) odpovědi, že to musí být 60 km·h^{-1} (aritmetický průměr obou hodnot). Ale pozor – rychlostí v_1 = 30 km·h^{-1} jede auto třikrát delší čas než rychlostí v_2 = 90 km·h^{-1} !!!

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Důležitá informace v zadání úlohy je, že dráha nahoru i dolů je stejně dlouhá, my ji sice neznáme, ale počítat s ní budeme muset – označme si ji s .

Čas t_1 potřebný k jízdě do kopce pak bude:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}$$

Čas t_2 potřebný k následné jízdě z kopce dolů pak bude:

$$t_2 = \frac{s}{v_2}$$

Průměrnou velikost rychlosti určíme jako celkovou uraženou dráhu dělenou celkovou dobu pohybu (srovnej s definicí průměrné rychlosti jako změny posunutí za celkový čas).

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Číselně:

$$v_p = \frac{(2.30.90)\ \mathrm{km}}{(30+90)\ \mathrm{h}} = 45\ \mathrm{km.h^{-1}}$$

Průměrná velikost rychlosti auta je tedy jen 45 km·h^{-1} ; všimněte si, že je bližší nižší rychlosti, kterou se auto pohybuje déle. V našem případě (stejná dráha nahoru i dolů) musí dokonce platit, že:

$$\frac{v_p - v_1}{v_2 - v_p} = \frac{v_1}{v_2}$$

Číselně:

$$\frac{30\ \mathrm{km.h^{-1}}}{90\ \mathrm{km.h^{-1}}} = \frac{1}{3}$$

Poznámka: Zadání úlohy svádí k okamžité (ale chybné) odpovědi, že to musí být 60 km·h^{-1} (aritmetický průměr obou hodnot). Ale pozor – rychlostí v_1 = 30 km·h^{-1} jede auto třikrát delší čas než rychlostí v_2 = 90 km·h^{-1} !!!

Odpověď

Průměrná velikost rychlosti auta je:

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Číselně:

$$v_p = \frac{(2\cdot 30\cdot 90)\ \mathrm{km}}{(30+90)\ \mathrm{h}} = 45\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

Myš a kočka

Myš se pohybuje rovnoměrně přímočaře z bodu A = [0; 1] m rychlostí $\vec{v}_m = (3; -2)\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a kočka rovnoměrně přímočaře z bodu B = [0; −1] m rychlostí $\vec{v}_k = (4; 1)\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

a) Určete místo, kde se jejich cesty protnou. Setkají se zde?

b) Určete čas, kdy jsou si kočka a myš nejblíže.

c) Určete nejmenší vzdálenost kočky a myši.

Poznámka: Parametrické rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.

$$y = 1\ \mathrm{m} - 2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}{\cdot}t$$

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

Nápověda 1 pro a): Průsečík cest kočky a myši

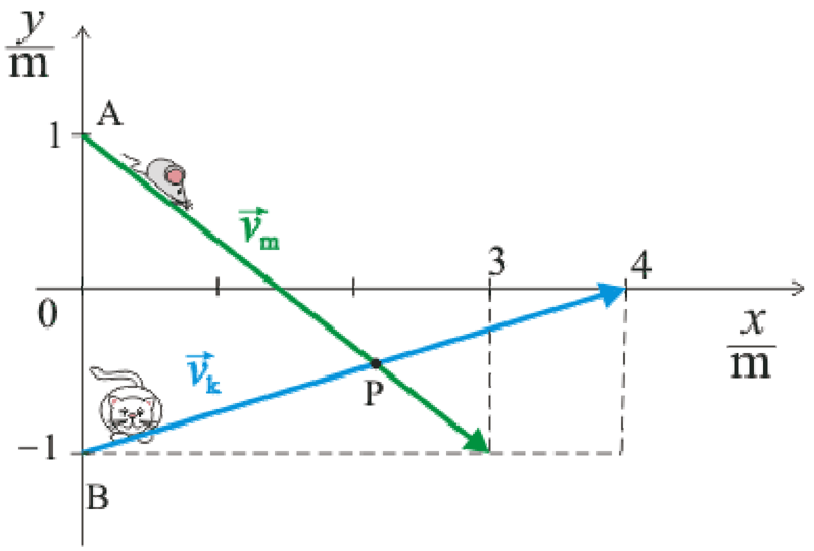
Do souřadného systému vyznačte počáteční polohu kočky a myši. Dokážete nakreslit přímky, po kterých se pohybují, když znáte směry jejich rychlostí? Pokud jste rýsovali přesně, průsečík přímek snadno odečtete z obrázku.

Průsečík můžete také spočítat, pokud si napíšete rovnice přímek, po kterých se kočka a myš pohybují. U každé znáte jeden bod, kterým prochází, a směrnici.

▶ **Řešení k nápovědě 1**

Grafické řešení:

Obrázek 1:



$$A = [0; 1]\ \mathrm{m} \qquad v_m = (3; -2)\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

$$B = [0; -1]\ \mathrm{m} \qquad v_k = (4; 1)\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Početní řešení:

Parametrické rovnice přímky, po které se pohybuje myš:

$$x_m = 0 + 3t_m$$
$$y_m = 1 - 2t_m$$

Vyloučením parametru t_m získáme rovnici trajektorie, po které se pohybuje myš.

$$t_m = \frac{x_m}{3}$$

Trajektorie pro myš:

$$y_m = 1 - 2\frac{x_m}{3}$$
$$3y_m = 3 - 2x_m$$

Parametrické rovnice přímky, po které se pohybuje kočka:

$$x_k = 0 + 4t_k$$
$$y_k = -1 + t_k$$

Vyloučením parametru t_k získáme rovnici trajektorie, po které se pohybuje kočka.

$$t_k = \frac{x_k}{4}$$

Trajektorie pro kočku:

$$y_k = -1 + \frac{x_k}{4}$$
$$4y_k = x_k - 4$$

Průsečík trajektorií:

$$x_m = x_k = x$$
$$y_m = y_k = y$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y:

$$3y = 3 - 2x \quad (1)$$
$$4y = x - 4 \quad (2)$$

Z (2):

$$x = 4y + 4\,.$$

Dosadíme do (1):

$$3y = 3 - 8y - 8\,.$$

Odtud:

$$y = -\frac{5}{11}\,,$$
$$x = \frac{24}{11}\,.$$

Souřadnice průsečíku P:

$$\boldsymbol{P} = \left[\frac{24}{11}; -\frac{5}{11}\right] \mathrm{m}\,.$$

Nápověda 2 pro a): Setkání kočky a myši

Za jakou dobu dorazí do bodu P myš a za jakou kočka? Je čas stejný?

▶ Řešení k nápovědě 2

Myš se v bodě P

$$\left[\frac{24}{11}; -\frac{5}{11}\right] \mathrm{m}$$

ocitne v čase

$$t_m = \frac{x}{3} = \frac{24}{11 \cdot 3}\ \mathrm{s} = \frac{8}{11}\ \mathrm{s}.$$

Kočka se v bodě P

$$\left[\frac{24}{11}; -\frac{5}{11}\right] \mathrm{m}$$

ocitne v čase

$$t_k = \frac{x}{4} = \frac{24}{11 \cdot 4}\ \mathrm{s} = \frac{6}{11}\ \mathrm{s}.$$

Časy jsou různé, to znamená, že se v tomto bodě nesetkají.

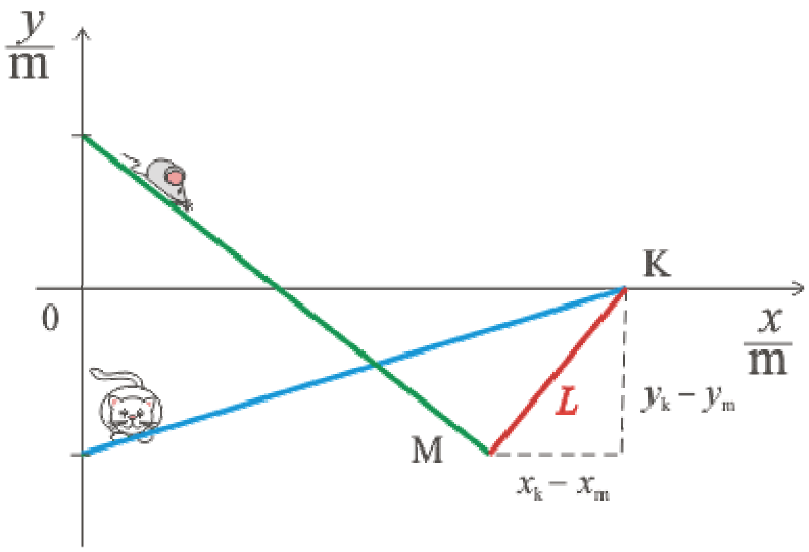
Nápověda 3: Závislost vzdálenosti kočky a myši na čase

Víte, jak se s časem mění souřadnice kočky a myši. Dokážete vyjádřit, jak se s časem mění jejich vzdálenost? Vztah pro výpočet vzdáleností dvou bodů snadno odvodíte z obrázku nebo se podívejte do tabulek.

▶ Řešení k nápovědě 3

Závislost vzdálenosti kočky a myši na čase *L*(*t*) můžeme odvodit z obrázku.

Obrázek 2:



$$x_k - x_m = 4t - 3t = t$$

$$y_k - y_m = t - 1 + 2t - 1 = 3t - 2$$

Z Pythagorovy věty:

$$L(t) = \sqrt{(x_k - x_m)^2 + (y_k - y_m)^2} = \sqrt{10t^2 - 12t + 4}$$

Nápověda 4 pro b): Čas, kdy jsou si myš a kočka nejblíže

Víte, jak se s časem mění vzdálenost kočky a myši. Jak najdete minimum této funkce?

▶ Řešení nápovědy 4

Najít čas, kdy jsou si kočka a myš nejblíže, znamená najít minimum funkce $L(t)$.

Zderivujeme funkci $L(t)$ podle času t a zjistíme extrém:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{20t_{min} - 12}{\sqrt{10t_{min}^2 - 12t_{min} + 4}} = 0$$

$$20t_{min} - 12 = 0$$

$$t_{min} = \frac{3}{5}\,\mathrm{s}$$

Tedy čas, kdy jsou si myš a kočka nejblíže, je:

$$t_{min} = 0{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

Nápověda 5 pro c): Nejmenší vzdálenost kočky a myši

Znáte čas, kdy jsou si kočka s myší nejblíže i jak se mění s časem jejich vzdálenost. Jak určíte nejmenší vzdálenost?

▶ Řešení k nápovědě 5

Čas, kdy jsou si myš a kočka nejblíže, je:

$$t_{min} = 0{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

Po dosazení této hodnoty do funkce $L(t)$ získáme nejmenší vzdálenost myši a kočky.

$$L_{min} = \sqrt{10t_{min}^2 - 12t_{min} + 4}$$

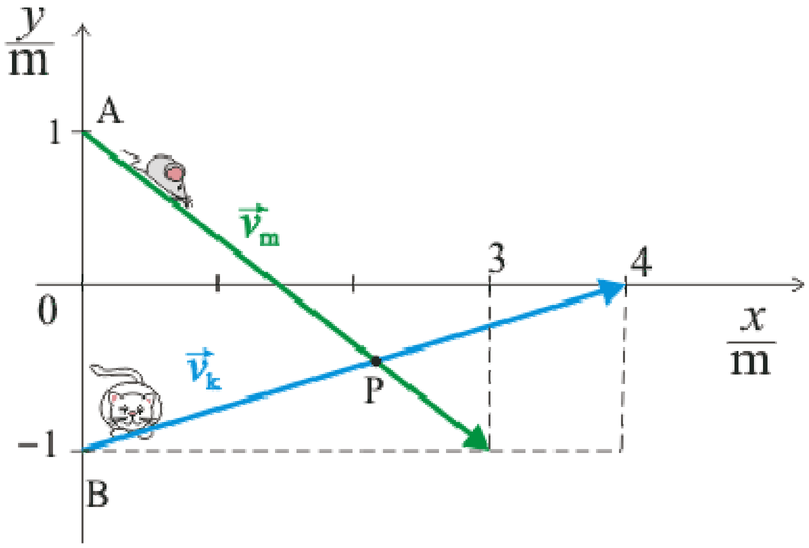
$$L_{min} = \sqrt{10 \cdot 0{,}6^2 - 12 \cdot 0{,}6 + 4}\,\mathrm{m} = \sqrt{0{,}4}\,\mathrm{m} = 0{,}63\,\mathrm{m}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

a)

Grafické řešení:

Obrázek 1:



$$A = [0; 1]\,\mathrm{m} \qquad v_m = (3; -2)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$B = [0; -1]\,\mathrm{m} \qquad v_k = (4; 1)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Početní řešení:

Parametrické rovnice přímky, po které se pohybuje myš:

$$x_m = 0 + 3t_m$$
$$y_m = 1 - 2t_m$$

Vyloučením parametru t_m získáme rovnici trajektorie, po které se pohybuje myš.

$$t_m = \frac{x_m}{3}$$

Trajektorie pro myš:

$$y_m = 1 - 2\frac{x_m}{3}$$
$$3y_m = 3 - 2x_m$$

Parametrické rovnice přímky, po které se pohybuje kočka:

$$x_k = 0 + 4t_k$$
$$y_k = -1 + t_k$$

Vyloučením parametru t_k získáme rovnici trajektorie, po které se pohybuje kočka.

$$t_k = \frac{x_k}{4}$$

Trajektorie pro kočku:

$$y_k = -1 + \frac{x_k}{4}$$
$$4y_k = x_k - 4$$

Průsečík trajektorií:

$$x_m = x_k = x$$
$$y_m = y_k = y$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *x*, *y*:

$$3y = 3 - 2x \qquad (1)$$

$$4y = x - 4 \qquad (2)$$

Z (2):

$$x = 4y + 4\,.$$

Dosadíme do (1):

$$3y = 3 - 8y - 8\,.$$

Odtud:

$$y = -\frac{5}{11}\,,$$

$$x = \frac{24}{11}\,.$$

Souřadnice průsečíku P:

$$P = \left[\frac{24}{11}; -\frac{5}{11}\right]\mathrm{m}\,.$$

Myš se v bodě P

$$\left[\frac{24}{11}; -\frac{5}{11}\right]\mathrm{m}$$

ocitne v čase

$$t_m = \frac{x}{3} = \frac{24}{11\cdot 3}\ \mathrm{s} = \frac{8}{11}\,\mathrm{s}.$$

Kočka se v bodě P

$$\left[\frac{24}{11}; -\frac{5}{11}\right]\mathrm{m}$$

ocitne v čase

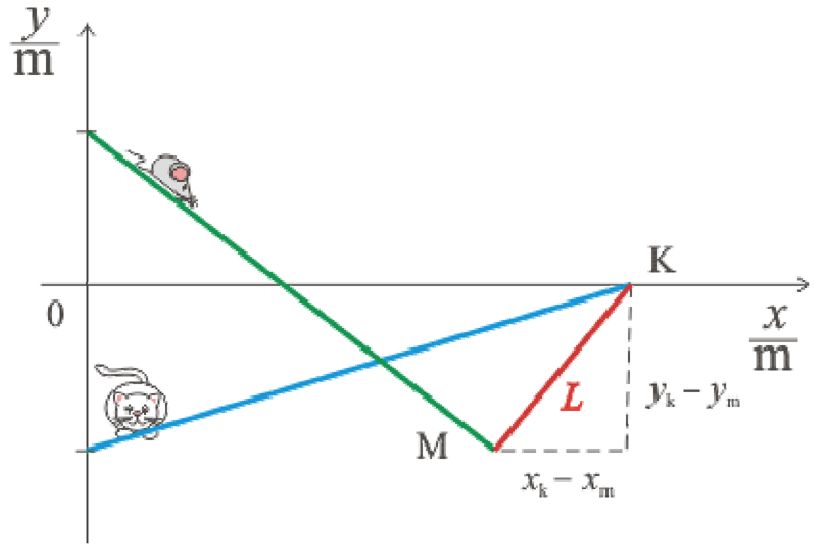
$$t_k = \frac{x}{4} = \frac{24}{11\cdot 4}\ \mathrm{s} = \frac{6}{11}\,\mathrm{s}.$$

Časy jsou různé, to znamená, že se v tomto bodě nesetkají.

b)

Závislost vzdálenosti kočky a myši na čase *L(t)* můžeme odvodit z obrázku.

Obrázek 2:



$$x_k - x_m = 4t - 3t = t$$

$$y_k - y_m = t - 1 + 2t - 1 = 3t - 2$$

Z Pythagorovy věty:

$$L(t) = \sqrt{(x_k - x_m)^2 + (y_k - y_m)^2} = \sqrt{10t^2 - 12t + 4}$$

Najít čas, kdy jsou si kočka a myš nejblíže, znamená najít minimum funkce $L(t)$.

Zderivujeme funkci $L(t)$ podle času t a zjistíme extrém:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{20t_{min} - 12}{\sqrt{10t_{min}^2 - 12t_{min} + 4}} = 0$$

$$20t_{min} - 12 = 0$$

$$t_{min} = \frac{3}{5}\,\mathrm{s}$$

Tedy čas, kdy jsou si myš a kočka nejblíže, je:

$$t_{min} = 0{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

Odpověď

a) Cesty myši a kočky se protnou v bodě:

$$P = \left[\frac{24}{11}; -\frac{5}{11}\right]\mathrm{m}\,.$$

Myš a kočka se v bodě P nesetkají, protože myš se v tomto bodě ocitne v čase

$$t_m = \frac{8}{11}\,\mathrm{s}$$

a kočka se v tomto bodě ocitne v čase

$$t_k = \frac{6}{11}\,\mathrm{s}\,.$$

b) Čas, kdy jsou si myš a kočka nejblíže, je:

$$t_{min} = 0{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

c) Nejmenší vzdálenost myši a kočky je:

$$L_{min} = \sqrt{10t_{min}^2 - 12t_{min} + 4} = 0{,}63\ \mathrm{m}\ .$$

Volně padající kámen

Volně padající kámen má v jednom bodě své dráhy okamžitou rychlost 5 m·s^{-1} a v jiném, níže položeném bodě, má rychlost 8 m·s^{-1}. Za jaký čas doletí kámen z prvního bodu do druhého a jak daleko jsou oba dva body od sebe vzdálené?

Zápis

v_1 = 5 m·s^{-1}	rychlost kamenu v jednom bodě
v_2 = 8 m·s^{-1}	rychlost kamenu v níže položeném bodě
t = ? (s)	čas, za který kámen doletí z prvního bodu do druhého
s = ? (m)	vzdálenost bodů
Z tabulek:	
g = 9,81 m·s^{-2}	tíhové zrychlení

Nápověda 1: Čas doletu tělesa z prvního bodu do druhého

Jakým pohybem se kámen pohybuje? Připomeňte si, jaký vztah platí mezi velikostí rychlosti a dobou tohoto pohybu.

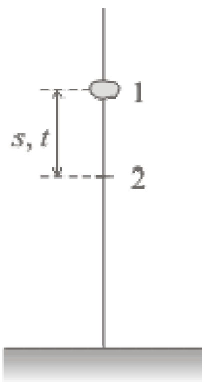
Jak vyjádříte čas doletu kamene z jednoho bodu své dráhy do druhého? Znáte všechny veličiny, které k výpočtu potřebujete?

► Řešení k nápovědě 1

Kámen se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem.

Pro závislost rychlosti volného na čase platí:

$$v(t) = gt$$



Čas t, za který se přemístí kámen z jednoho bodu do druhého, se rovná rozdílu časů, ve kterých byl kámen v bodě 2 a v bodě 1 (*viz obrázek*), tedy:

$$t = t_2 - t_1$$

Ze zadání víme, že se jedná o volný pád. Rychlost v bodě 1 je rovna:

$$v_1 = gt_1 .$$

Odtud:

$$t_1 = \frac{v_1}{g}\,. \qquad (1)$$

Rychlost v bodě 2 je rovna:

$$v_2 = gt_2\,.$$

Odtud:

$$t_2 = \frac{v_2}{g}\,. \qquad (2)$$

Pro čas *t* dostaneme:

$$t = \frac{v_2}{g} - \frac{v_1}{g} = \frac{v_2 - v_1}{g}\,.$$

Číselně:

$$t = \frac{8-5}{9{,}81}\,\mathrm{s} \doteq 0{,}3\,\mathrm{s}\,.$$

Nápověda 2 : Vzdálenost bodů

Víte, že se kámen pohyboval volným pádem. Jak zjistíte vzdálenost dvou bodů, kterými proletěl, neboli dráhu, kterou uletěl z prvního bodu do druhého?

Při výpočtu využijte vztahy (1), (2) z minulé nápovědy.

► Řešení k nápovědě 2

Pro závislost dráhy volného pádu na čase platí:

$$s = \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Vzdálenost bodů 1 a 2 určíme jako rozdíl dráhy, kterou kámen urazil do bodu 2 a dráhy, kterou urazil do bodu 1.

$$s = s_2 - s_1 = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

Za t_2 a t_1 dosadíme ze vztahů (1) a (2).

$$s = \frac{g}{2}\left(\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{v_1^2}{g^2}\right) = \frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Číselně:

$$s = \frac{1}{2\cdot 9{,}81}\cdot\left(8^2 - 5^2\right)\,\mathrm{m} \doteq 2\,\mathrm{m}\,.$$

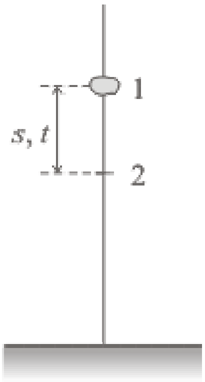
CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Čas letu z bodu 1 do bodu 2

Kámen se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem.

Pro závislost rychlosti volného na čase platí:

$$v(t) = gt$$



Čas *t*, za který se přemístí kámen z jednoho bodu do druhého, se rovná rozdílu časů, ve kterých byl kámen v bodě 2 a v bodě 1 (*viz obrázek*), tedy:

$$t = t_2 - t_1$$

Ze zadání víme, že se jedná o volný pád. Rychlost v bodě 1 je rovna:

$$v_1 = g t_1 .$$

Odtud:

$$t_1 = \frac{v_1}{g} . \qquad (1)$$

Rychlost v bodě 2 je rovna:

$$v_2 = g t_2 .$$

Odtud:

$$t_2 = \frac{v_2}{g} . \qquad (2)$$

Pro čas *t* dostaneme:

$$t = \frac{v_2}{g} - \frac{v_1}{g} = \frac{v_2 - v_1}{g} .$$

Číselně:

$$t = \frac{8 - 5}{9{,}81}\,\mathrm{s} \doteq 0{,}3\,\mathrm{s} .$$

Vzdálenost bodů 1 a 2

Pro závislost dráhy volného pádu na čase platí:

$$s = \frac{1}{2} g t^2 .$$

Vzdálenost bodů 1 a 2 určíme jako rozdíl dráhy, kterou kámen urazil do bodu 2 a dráhy, kterou urazil do bodu 1.

$$s = s_2 - s_1 = \frac{g t_2^2}{2} - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{g}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

Za t_2 a t_1 dosadíme ze vztahů (1) a (2).

$$s = \frac{g}{2}\left(\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{v_1^2}{g^2}\right) = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2)$$

Číselně:

$$s = \frac{1}{2\cdot 9{,}81}\cdot(8^2 - 5^2)\ \mathrm{m} \doteq 2\ \mathrm{m}\,.$$

Odpověď

Kámen doletí z prvního do druhého bodu za čas

$$t = \frac{v_2 - v_1}{g} \doteq 0{,}3\ \mathrm{s}\,.$$

Vzdálenost dvou bodů, kterými kámen proletěl, je

$$s = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) \doteq 2\ \mathrm{m}\,.$$

Řemenice

Úhlová dráha bodu na obvodu řemenice závisí při otáčení na čase číselnou rovnicí :

$$\{\psi(t)\} = 1 + \{t\} + \{t\}^2 + \{t\}^3$$
$$t \in \langle 0, \infty \rangle \, \mathrm{s}$$

Určete poloměr řemenice R, víte-li, že v okamžiku t_1 byla velikost obvodové rychlosti řemenice $v(t_1)$. Jak velké bylo v tomto okamžiku tečné zrychlení $a_t(t_1)$ a kolik otáček N řemenice vykonala během prvních t_1 sekund?

Řešte pro hodnoty: $t_1 = 2$ s, $v(t_1) = 20{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Poznámka: Pro přehlednější zápis píšeme vztahy zjednodušeně bez jednotek a bez složených závorek.

Nápověda 1: Poloměr řemenice

Vyjděte ze vztahů pro obvodovou a úhlovou rychlost pohybu po kružnici.

Znáte velikost obvodové rychlosti řemenice $v(t_1)$ v okamžiku t_1 a úhlovou rychlost snadno odvodíte z průběhu úhlové dráhy bodu na obvodu řemenice.

▶ Řešení k nápovědě 1

Potřebné vztahy pro velikost obvodové rychlosti v a úhlové rychlosti ω jsou:

$$v = \omega \cdot R$$
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$
$$v = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} R$$
$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(1+t+t^2+t^3\right)}{\mathrm{d}t} = 1+2t+3t^2$$
$$v = \left(1+2t+3t^2\right) R$$

Potom:

$$R = \frac{v}{1+2t+3t^2} \tag{1}$$

V čase t_1:

$$R = \frac{v(t_1)}{1+2t_1+3t_1^2} = \frac{20{,}4}{17}\ \mathrm{m} \doteq 1{,}2\ \mathrm{m}$$

Nápověda 2: Velikost tečného zrychlení v čase t_1

Vyjděte ze vztahů pro tečné a úhlové zrychlení pohybu po kružnici.

Znáte velikost poloměru řemenice z předchozí nápovědy a úhlové zrychlení snadno odvodíte z průběhu úhlové dráhy bodu na obvodu řemenice.

Pak stačí jen doplnit do průběhu tečného zrychlení čas t_1.

▶ Řešení k nápovědě 2

Pro velikost tečného a úhlového zrychlení platí:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\omega R)}{\mathrm{d}t}$$
$$a_t = \epsilon R$$
$$\epsilon = \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2(1+t+t^2+t^3)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}(1+2t+3t^2)}{\mathrm{d}t}$$
$$\epsilon = 2+6t$$
$$a_t = (2+6t)R$$

Za R dosadíme z (1):

$$a_t = \frac{(2+6t)v}{1+2t+3t^2}$$

Potom pro velikost tečného zrychlení v čase t_1:

$$a_t(t_1) = \frac{(2+6t_1)v(t_1)}{1+2t_1+3t_1^2} = \frac{14\cdot 20{,}4}{17}\,\mathrm{ms}^{-2} \doteq 16{,}8\,\mathrm{ms}^{-2}$$

Nápověda 3: Počet otáček řemenice

Počet otáček řemenice zjistíte přímo ze zadání úlohy.

Jaký je vztah mezi počtem otáček řemenice a úhlovou dráhou bodu na obvodu řemenice?

▶ Řešení k nápovědě 3

Počet otáček N vypočítáme přímo z úhlu $\psi \in \langle 0, t_1 \rangle$, o který se řemenice otočila do okamžiku t_1:

$$N = \frac{\psi(t_1)}{2\pi} = \frac{t_1^3+t_1^2+t_1+1}{2\pi} = \frac{15}{2\pi} \doteq 2{,}4\ \text{ot.}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Poloměr řemenice:

Potřebné vztahy pro velikost obvodové rychlosti v a úhlové rychlosti ω jsou:

$$v = \omega \cdot R$$
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

$$v = \frac{d\psi}{dt} R$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\left(1+t+t^2+t^3\right)}{dt} = 1+2t+3t^2$$

$$v = \left(1+2t+3t^2\right) R$$

Potom:

$$R = \frac{v}{1+2t+3t^2} \qquad (1)$$

V čase t_1:

$$R = \frac{v(t_1)}{1+2t_1+3t_1^2} = \frac{20{,}4}{17}\ \mathrm{m} \doteq 1{,}2\ \mathrm{m}$$

Tečné zrychlení:

Pro velikost tečného a úhlového zrychlení platí:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt}$$

$$a_t = \epsilon R$$

$$\epsilon = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2\left(1+t+t^2+t^3\right)}{dt^2} = \frac{d\left(1+2t+3t^2\right)}{dt}$$

$$\epsilon = 2+6t$$

$$a_t = (2+6t) R$$

Za R dosadíme z (1):

$$a_t = \frac{(2+6t)v}{1+2t+3t^2}$$

Potom pro velikost tečného zrychlení v čase t_1:

$$a_t(t_1) = \frac{(2+6t_1)v(t_1)}{1+2t_1+3t_1^2} = \frac{14\cdot 20{,}4}{17}\ \mathrm{ms}^{-2} \doteq 16{,}8\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Počet otáček:

Počet otáček N vypočítáme přímo z úhlu $\psi \in \langle 0,\ t_1 \rangle$, o který se řemenice otočila do okamžiku t_1:

$$N = \frac{\psi(t_1)}{2\pi} = \frac{t_1^3+t_1^2+t_1+1}{2\pi} = \frac{15}{2\pi} \doteq 2{,}4\ \text{ot.}$$

Odpověď

Velikost poloměru řemenice je

$$R = \frac{v(t_1)}{1+2t_1+3t_1^2} \doteq 1{,}2\ \mathrm{m}\,.$$

Velikost tečného zrychlení v čase t_1 je

$$a_t(t_1) = \frac{(2+6t_1)v}{1+2t_1+3t_1^2} \doteq 16{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Počet otáček řemenice během prvních t_1 sekund je

$$N = \frac{t_1^3+t_1^2+t_1+1}{2\pi} \doteq 2{,}4\ \mathrm{ot}\,.$$

Jedoucí kolo

Kolo o poloměru R jede rovnoměrně přímočaře rychlostí v_0. V systému souřadnic spojeném se zemí určete:

a) průběh polohového vektoru bodu X na obvodu kola,

b) průběh rychlosti bodu X a průběh její velikosti,

c) pomocí výsledku a) načrtněte tvar trajektorie a vypočtěte délku jednoho jejího oblouku,

d) určete délku uražené dráhy v závislosti na čase.

Nápověda 1: Obrázek situace

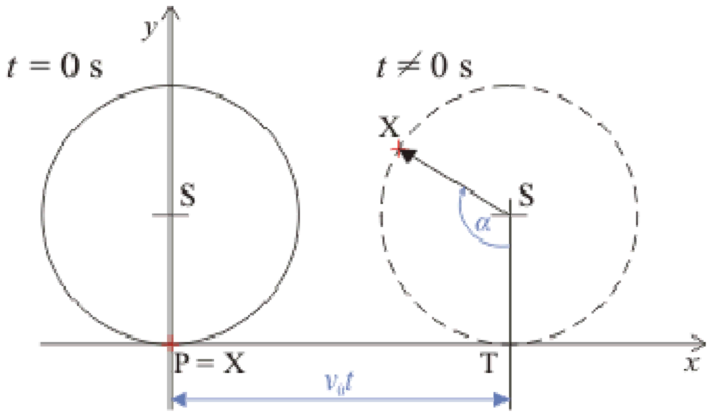
Zvolte vhodně souřadnicové osy a počátek soustavy souřadnic.

Nakreslete situaci pro čas t = 0 s. Počáteční polohu bodu X volte v počátku soustavy souřadnic.

Pak nakreslete situaci pro čas t a vyznačte polohu bodu X, kam až se za čas t dostal.

Vyznačte do obrázku dráhu, o kterou se kolo odvalilo za čas t. Jak je dlouhá?

▶ Řešení k nápovědě 1



Stopky spustíme (t = 0 s) například v okamžiku, kdy se bod X dotýká vozovky. Tento bod na vozovce zvolíme za počátek P systému souřadnic. Osu x namíříme ve směru pohybu kola podél vozovky, osu y kolmo vzhůru.

Situaci v čase t = 0 s znázorňuje obrázek.

Za čas t se kolo odvalí o v_0t ve směru osy x a vznikne situace znázorněná druhým obrázkem.

Z počátku P se bod X přemístí vlevo nahoru. Jestliže kolo neprokluzuje, je oblouk TX stejně dlouhý jako odvalená dráha v_0t. Orientovaný úhel TSX je roven:

$$\alpha = -\omega t = -\frac{v_0 t}{R}$$

Nápověda 2 pro a): Průběh polohového vektoru

Pohyb bodu X si rozložte na na pohyb ve směru osy x a rotaci kolem bodu S.

Zkuste najít tři jednodušší vektory, s jejichž pomocí můžete polohový vektor $\overrightarrow{PX}$ zapsat.

► Řešení k nápovědě 2

Polohový vektor $\overrightarrow{PX} = \vec{r}(t)$ se poměrně složitě mění. Natahuje se doprava a střídavě se zvedá vzhůru a opět klesá. Tento vektor můžeme složit ze tří vektorů, které se chovají mnohem jednodušeji:

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SX}$$

$\overrightarrow{PX}$ … se natahuje podél osy *x* rychlostí v_0: $\overrightarrow{PT} = v_0 t\,\vec{i}$

$\overrightarrow{TS}$ …ční ve směru osy *y*: $\overrightarrow{TS} = R\,\vec{j}$

$\overrightarrow{SX}$ … rovnoměrně rotuje ve směru hodinových ručiček kolem bodu S.

$$\overrightarrow{SX} = R\cos\left(-\frac{v_0 t}{R} - \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + R\sin\left(-\frac{v_0 t}{R} - \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$

kde $\left(-\frac{v_0 t}{R} - \frac{\pi}{2}\right)$ je orientovaný úhel, který svírá vektor $\overrightarrow{SX}$ s osou *x* .

Dosazením do vztahu:

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SX}$$

a použitím vztahů:

$$\cos\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$

$$\sin\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$$

dostáváme pro polohový vektor $\vec{r}(t) = \overrightarrow{PX}$:

$$\overrightarrow{PX} = \left(v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}\right)\vec{i} + \left(R - R\cos\frac{v_0 t}{R}\right)\vec{j}$$

případně ve složkách:

$$x = v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}$$

$$y = R - R\cos\frac{v_0 t}{R}$$

$$z = 0$$

Nápověda 3 pro b): Průběh rychlosti a velikosti rychlosti

Jakým způsobem získáte z průběhu polohového vektoru bodu X průběh vektoru rychlosti bodu X? Zapište jej.

Jak z něj zjistíte průběh velikosti rychlosti bodu X?

► Řešení k nápovědě 3

Průběh vektoru rychlosti $\vec{v}(t)$ určíme derivováním funkce $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{PX} = \left(v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}\right)\vec{i} + \left(R - R\cos\frac{v_0 t}{R}\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left(v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}\right)}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}\left(R - R\cos\frac{v_0 t}{R}\right)}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

Po zderivování obdržíme pro průběh rychlosti:

$$\vec{v}(t) = \left(v_0 - v_0\cos\frac{v_0 t}{R}\right)\vec{i} + v_0\sin\frac{v_0 t}{R}\vec{j}$$

Velikost rychlosti je absolutní hodnotou tohoto vektoru:

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} =$$

$$= \sqrt{\left(v_0 - v_0\cos\frac{v_0 t}{R}\right)^2 + \left(v_0\sin\frac{v_0 t}{R}\right)^2}$$

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 - 2v_0^2\cos^2\left(\frac{v_0 t}{R}\right) + v_0^2\left(\cos^2\left(\frac{v_0 t}{R}\right) + \sin^2\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right)}$$

$$v(t) = \sqrt{2v_0^2 - 2v_0^2\cos^2\left(\frac{v_0 t}{R}\right)}$$

$$v(t) = 2v_0\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{v_0 t}{R}}{2}}$$

Nebo použitím vztahu: $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ zjednodušeně:

$$v(t) = 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|$$

Nápověda 4 pro c): Trajektorie pohybu, délka oblouku

Tvar trajektorie určete z průběhu polohového vektoru bodu X.

Nakreslete obrázek.

Znáte průběh velikosti rychlosti, jak spočtete délku jednoho oblouku, tedy dráhu uraženou za jednu otočku?

▶ Řešení k nápovědě 4:

Trajektorii určíme nejpohodlněji například ze složek vektoru $\overrightarrow{PX}$:

$$x = v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}$$

$$y = R - R\cos\frac{v_0 t}{R}$$

$$z = 0$$

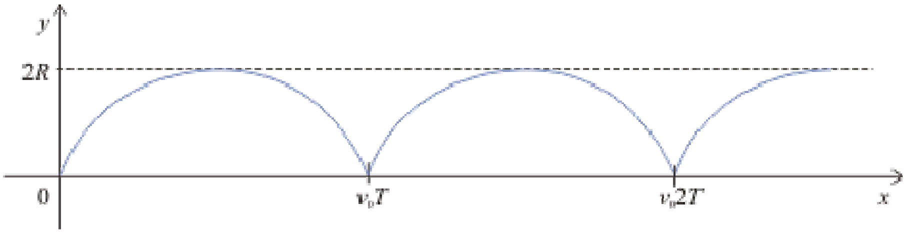
Určíme několik bodů (x, y) trajektorie například pro časy 0, $\frac{T}{6}$, $\frac{2T}{6}$, $\frac{3T}{6}$ atd.

Pro zjednodušení numerického výpočtu předpokládáme $R = 1\ \mathrm{m}$ a $v = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Ze vztahů

$$x = v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}$$
$$y = R - R\cos\frac{v_0 t}{R}$$
$$z = 0$$

pak dostáváme:



x	0	0,18	1,23	3,13	5,05	6,10	6,28
y	0	0,5	1,5	2,0	1,5	0,5	0

Délka jednoho oblouku je rovna dráze uražené bodem za jednu periodu, tedy:

$$s_T = \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$$

kde $v(t) = 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|$

Jedna perioda je rovna $T = \frac{2\pi R}{v_0}$. V intervalu od 0 do T nabývá $\sin\frac{v_0}{2R}t$ kladných hodnot, takže není třeba psát absolutní hodnotu.

$$s_T = \int_0^T \left(2v_0\sin\frac{v_0}{2R}t\right)\mathrm{d}t = 2v_0\frac{2R}{v_0}\left[-\cos\frac{v_0 t}{2R}\right]_0^T$$
$$s_T = 4R\left(-\cos\frac{v_0 2\pi R}{2Rv_0}+1\right) = 8R$$

Délka jednoho oblouku je tedy: $s_T = 8R$.

Nápověda 5 pro d): Uražená dráha v závislosti na čase

Víte, jakou dráhu urazí bod X za jednu periodu.

Dráhu uraženou za čas $t < T$ umíte spočítat s pomocí vztahu pro průběh velikosti rychlosti.

Jak potom vyjádříte celkovou dráhu uraženou za libovolný čas t?

► Řešení k nápovědě 5

Pro odkutálení o víc než jednu obrátku získáme celou dráhu jako součet drah celých otoček a zbytku.

Víme, že délka jednoho oblouku je $s_T = 8R$.

Dráha celých otoček je rovna:

$$s_c = \left(INT\frac{t}{T}\right)\cdot 8R$$

kde $INT\frac{t}{T}$ je celočíselná část podílu $\frac{t}{T}$.

Zbylou dráhu spočítáme ze vztahu:

$$s_z = \int_0^{t_z} v(t)\,\mathrm{d}t$$

kde $v(t) = 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|$

Jedna periode je rovna $T = \frac{2\pi R}{v_0}$. V intervalu od 0 do T nabývá $\sin\frac{v_0}{2R}t$ kladných hodnot a $t_z < T$, takže není třeba psát absolutní hodnotu.

$$s_z = \int_0^{t_z} 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|\mathrm{d}t = 2v_0\frac{2R}{v_0}\left[-\cos\frac{v_0t}{2R}\right]_0^{t_z}$$

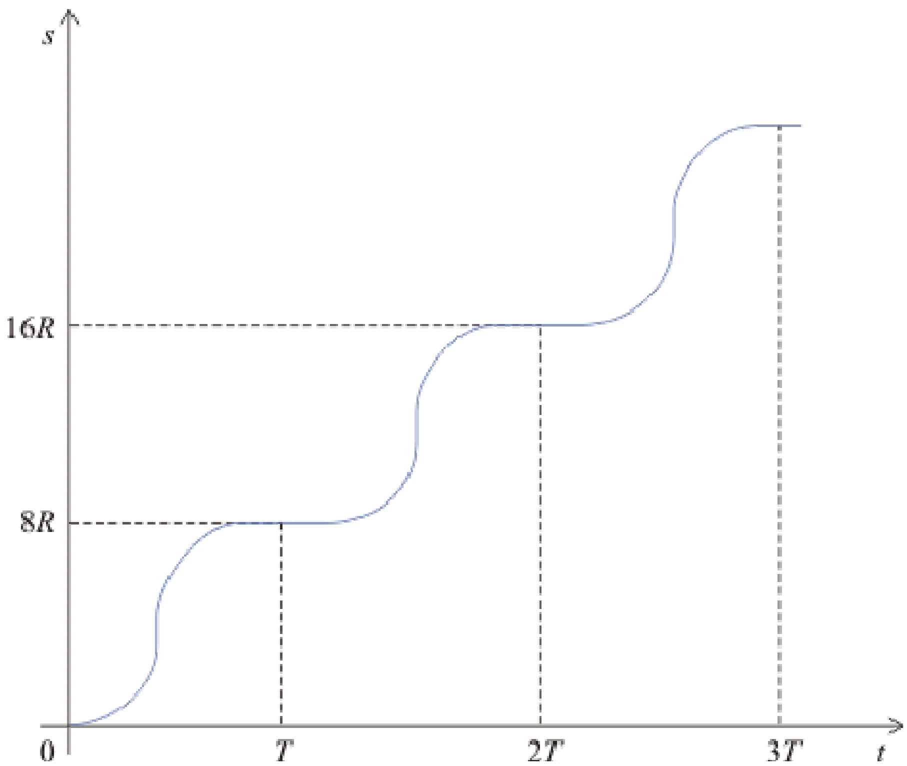
$$s_z = 4R\left(1-\cos\frac{v_0t_z}{2R}\right) = 8R\sin^2\frac{v_0t_z}{4R}$$

Celá dráha uražená za čas t je pak rovna:

$$s(t) = \left(INT\frac{t}{T}\right)\cdot 8R + 8R\sin^2\frac{v_0t_z}{4R}$$

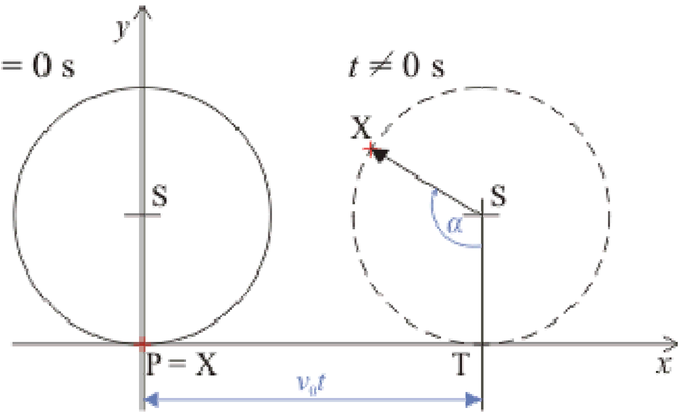
První člen zde představuje součty celých obloučků, druhý člen příslušnou část posledního, neúplného obloučku.

Graf funkce $s(t) = \left(INT\frac{t}{T}\right)\cdot 8R + 8R\sin^2\frac{v_0t_z}{4R}$ má tento průběh:



CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

Obrázek situace:



Stopky spustíme (t = 0 s) například v okamžiku, kdy se bod X dotýká vozovky. Tento bod na vozovce zvolíme za počátek P systému souřadnic. Osu x namíříme ve směru pohybu kola podél vozovky, osu y kolmo vzhůru.

Situaci v čase t = 0 s znázorňuje obrázek.

Za čas t se kolo odvalí o $v_0 t$ ve směru osy x a vznikne situace znázorněná druhým obrázkem.

Z počátku P se bod X přemístí vlevo nahoru. Jestliže kolo neprokluzuje, je oblouk TX stejně velký jako odvalená dráha v_0t. Orientovaný úhel TSX je roven:

$\alpha = -\omega t = -\frac{v_0 t}{R}$.

a) Polohový vektor

Polohový vektor $\overrightarrow{PX} = \vec{r}(t)$ se poměrně složitě mění. Natahuje se doprava a střídavě se zvedá vzhůru a opět klesá. Tento vektor můžeme složit ze tří vektorů, které se chovají mnohem jednodušeji:

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SX}$$

$\overrightarrow{PX}$ … se natahuje podél osy x rychlostí v_0: $\overrightarrow{PT} = v_0 t \vec{i}$

$\overrightarrow{TS}$ … ční ve směru osy y: $\overrightarrow{TS} = R\vec{j}$

$\overrightarrow{SX}$ … rovnoměrně rotuje ve směru hodinových ručiček kolem bodu S.

$$\overrightarrow{SX} = R\cos\left(-\frac{v_0 t}{R} - \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + R\sin\left(-\frac{v_0 t}{R} - \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$

kde $\left(-\frac{v_0 t}{R} - \frac{\pi}{2}\right)$ je orientovaný úhel, který svírá vektor $\overrightarrow{SX}$ s osou x.

Dosazením do vztahu:

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SX}$$

a použitím vztahů:

$$\cos\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$

$$\sin\left(-\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$$

dostáváme pro polohový vektor $\vec{r}(t) = \overrightarrow{PX}$:

$$\overrightarrow{PX} = \left(v_0t-R\sin\frac{v_0t}{R}\right)\vec{i}+\left(R-R\cos\frac{v_0t}{R}\right)\vec{j}$$

případně ve složkách:

$$x = v_0t-R\sin\frac{v_0t}{R}$$

$$y = R-R\cos\frac{v_0t}{R}$$

$$z = 0$$

b) Průběh vektoru rychlosti a velikosti rychlosti

Průběh vektoru rychlosti $\vec{v}(t)$ určíme derivováním funkce $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{PX} = \left(v_0t-R\sin\frac{v_0t}{R}\right)\vec{i}+\left(R-R\cos\frac{v_0t}{R}\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left(v_0t-R\sin\frac{v_0t}{R}\right)}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}\left(R-R\cos\frac{v_0t}{R}\right)}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

Po zderivování obdržíme pro průběh rychlosti:

$$\vec{v}(t) = \left(v_0-v_0\cos\frac{v_0t}{R}\right)\vec{i}+v_0\sin\frac{v_0t}{R}\vec{j}$$

Velikost rychlosti je absolutní hodnotou tohoto vektoru:

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} =$$

$$= \sqrt{\left(v_0-v_0\cos\frac{v_0t}{R}\right)^2+\left(v_0\sin\frac{v_0t}{R}\right)^2}$$

$$v(t) = \sqrt{v_0^2-2v_0^2\cos^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)+v_0^2\left(\cos^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)+\sin^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right)}$$

$$v(t)=\sqrt{2v_0^2-2v_0^2\cos^2(\frac{v_0t}{R})}$$

$$v(t) = 2v_0\sqrt{\frac{1-\cos\frac{v_0t}{R}}{2}}$$

Nebo použitím vztahu $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ zjednodušeně:

$$v(t) = 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|$$

c) Trajektorie a délka jednoho oblouku

Trajektorii určíme nejpohodlněji například ze složek vektoru $\overrightarrow{PX}$:

$$x = v_0t-R\sin\frac{v_0t}{R}$$

$$y = R - R\cos\frac{v_0 t}{R}$$
$$z = 0$$

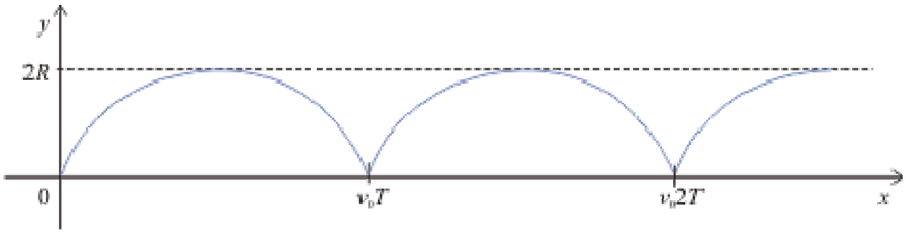
Určíme několik bodů (x, y) trajektorie například pro časy 0, $\frac{T}{6}$, $\frac{2T}{6}$, $\frac{3T}{6}$ atd.

Pro zjednodušení numerického výpočtu předpokládáme $R = 1\ \mathrm{m}$ a $v = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Ze vztahů

$$x = v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}$$
$$y = R - R\cos\frac{v_0 t}{R}$$
$$z = 0$$

pak dostáváme:



x	0	0,18	1,23	3,13	5,05	6,10	6,28
y	0	0,5	1,5	2,0	1,5	0,5	0

Délka jednoho oblouku je rovna dráze uražené bodem za jednu periodu, tedy:

$$s_T = \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$$

kde $v(t) = 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|$

Jedna perioda je rovna $T = \frac{2\pi R}{v_0}$. V intervalu od 0 do *T* nabývá $\sin\frac{v_0}{2R}t$ kladných hodnot, takže není třeba psát absolutní hodnotu.

$$s_T = \int_0^T \left(2v_0\sin\frac{v_0}{2R}t\right)\mathrm{d}t = 2v_0\frac{2R}{v_0}\left[-\cos\frac{v_0 t}{2R}\right]_0^T$$

$$s_T = 4R\left(-\cos\frac{v_0 2\pi R}{2Rv_0}+1\right) = 8R$$

Délka jednoho oblouku je tedy: $s_T = 8R$

d) Uražená dráha v závislosti na čase

Pro odkutálení o víc než jednu obrátku získáme celou dráhu jako součet drah celých otoček a zbytku.

Víme, že délka jednoho oblouku je $s_T = 8R$

Dráha celých otoček je rovna:

$$s_c = \left(INT\frac{t}{T}\right) \cdot 8R$$

kde $INT\frac{t}{T}$ je celočíselná část podílu $\frac{t}{T}$.

Zbylou dráhu spočítáme ze vztahu:

$$s_z = \int_0^{t_z} v(t)\,\mathrm{d}t$$

kde $v(t) = 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|$

Jedna perioda je rovna $T = \frac{2\pi R}{v_0}$. V intervalu od 0 do T nabývá $\sin\frac{v_0}{2R}t$ kladných hodnot a $t_z < T$, takže není třeba psát absolutní hodnotu.

$$s_z = \int_0^{t_z} 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|\mathrm{d}t = 2v_0\frac{2R}{v_0}\left[-\cos\frac{v_0 t}{2R}\right]_0^{t_z}$$

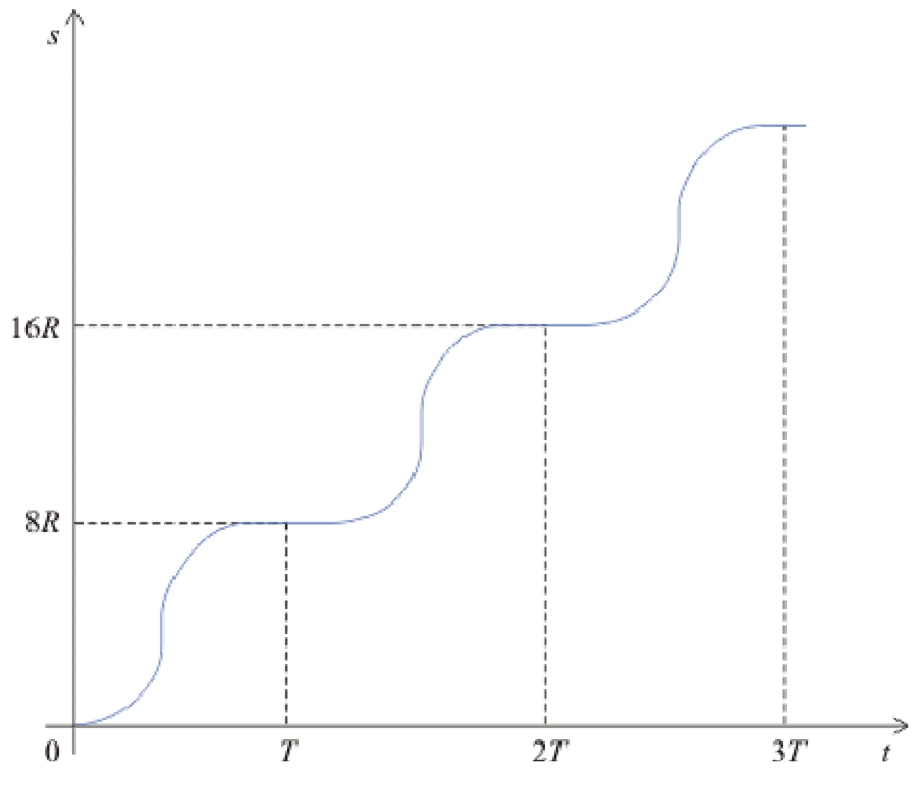
$$s_z = 4R\left(1-\cos\frac{v_0 t_z}{2R}\right) = 8R\sin^2\frac{v_0 t_z}{4R}$$

Celá dráha uražená za čas t je pak rovna:

$$s(t) = \left(INT\frac{t}{T}\right) \cdot 8R + 8R\sin^2\frac{v_0 t_z}{4R}$$

První člen zde představuje součty celých obloučků, druhý člen příslušnou část posledního, neúplného obloučku.

Graf funkce $s(t) = \left(INT\frac{t}{T}\right) \cdot 8R + 8R\sin^2\frac{v_0 t_z}{4R}$ má tento průběh:



Odpověď

a) Pro průběh polohového vektoru bodu X na obvodu kola platí:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{PX} = \left(v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}\right)\vec{i} + \left(R - R\cos\frac{v_0 t}{R}\right)\vec{j}$$

případně ve složkách:

$$x(t) = v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R}$$

$$y(t) = R - R\cos\frac{v_0 t}{R}$$

$$z(t) = 0$$

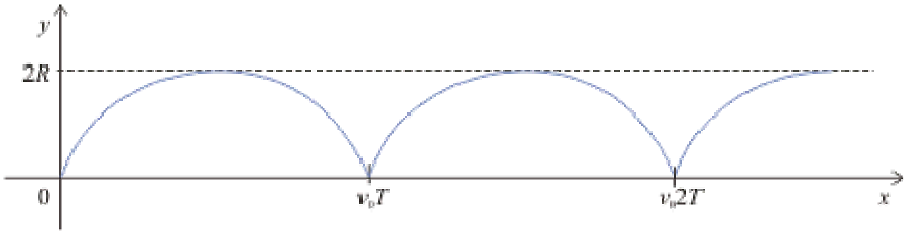
b) Pro průběh rychlosti bodu X platí:

$$\vec{v}(t) = \left(v_0 - v_0\cos\frac{v_0 t}{R}\right)\vec{i} + v_0\sin\frac{v_0 t}{R}\vec{j}$$

Velikost rychlosti bodu X je:

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 2v_0\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|$$

c) Tvar trajektorie je:



Délka jednoho oblouku je: $s_T = 8R$

d) Délka uražené dráhy v závislosti na čase je:

$$s(t) = \left(INT\frac{t}{T}\right)\cdot 8R + 8R\sin^2\frac{v_0 t_z}{4R}$$

kde $INT\frac{t}{T}$ je celočíselná část podílu $\frac{t}{T}$ a $t_z = t - \left(INT\frac{t}{T}\right)T$

(První člen zde představuje součty celých obloučků, druhý člen příslušnou část posledního, neúplného obloučku.)

Malý Pavlík

Malý Pavlík se rozjel na kole po přímé cestě. Závislost jeho zrychlení na čase udává následující tabulka:

t / 10^{-1}s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a / m s^{-2}	4,0	3,7	3,3	3,0	2,6	2,3	1,9	1,6	1,2	0,8	0,4

Narýsujte graf a určete tvar funkce $a(t)$. Určete odtud průběh rychlosti a polohy Pavlíka v závislosti na čase.

Předpokládejte, že v čase t = 0 s byl Pavlík v klidu a v počátku soustavy souřadnic.

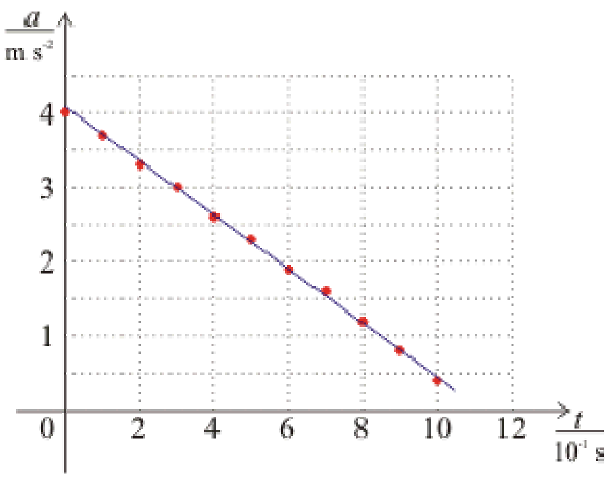
Poznámka: Přesněji bychom měli mluvit o velikosti zrychlení a velikosti rychlosti. Vzhledem k tomu, že se jedná o přímočarý pohyb a jejich směr se nemění, píšeme jen zrychlení a rychlost.

Nápověda 1: Graf závislosti zrychlení Pavlíka na čase

Ze zadané tabulky si nejprve nakreslete graf závislosti zrychlení Pavlíka na čase.

Co je grafem dané závislosti?

► Řešení k nápovědě 1



Hodnotami v grafu proložíme přímku.

Grafem závislosti zrychlení Pavlíka na čase je přímka.

Nápověda 2: Vyjádření funkce *a*(*t*)

Pro vyjádření funkce $a(t)$ použijte směrnicový tvar přímky.

► Řešení k nápovědě 2

Poznámka: Rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.

$$y = 1\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t$$

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

Použijeme směrnicový tvar přímky pro vyjádření funkce *a*(*t*):

$$a(t) = -kt+q$$

$q = 4$ (průsečík se svislou osou)

$k = tg\alpha$ (směrnice)

$$tg\alpha = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{4-0{,}4}{1} = 3{,}6$$

(α je úhel, který přímka svírá s osou *x*)

Platí:

$$a(t) = -3{,}6t+4$$

Nápověda 3: Průběh rychlosti Pavlíka

Víte, jak se s časem mění zrychlení Pavlíka. Jak odtud zjistíte závislost jeho rychlosti na čase?

► Řešení k nápovědě 3

Průběh rychlosti získáme integrací vztahu *a*(*t*):

$$v(t) = \int a(t)dt = \int(-3{,}6t+4)dt$$

$$v(t) = -\frac{3{,}6}{2}t^2+4t+C = -1{,}8^2+4t+C$$

Konstantu *C* zjistíme z počátečních podmínek:

pro $t = 0$ s je $v = 0$ m s^{-1},

tedy $C = 0$.

Platí:

$$v(t) = -1{,}8t^2+4t$$

Nápověda 4: Průběh polohy Pavlíka

Průběh rychlosti Pavlíka již znáte.

Jakým způsobem odvodíte průběh závislosti jeho polohy na čase?

► Řešení k nápovědě 4

Průběh polohy získáme integrací vztahu *v*(*t*):

$$s(t) = \int v(t)dt = \int(-1{,}8t^2+4t)dt = -\frac{1{,}8}{3}t^3+\frac{4}{2}t^2+D$$

$$s(t) = -0{,}6t^3+2t^2+D$$

Konstantu *D* zjistíme z počátečních podmínek:

pro $t = 0$ s je $s = 0$ m,

tedy $D = 0$.

Platí:

$$s(t) = -0{,}6t^3+2t^2$$

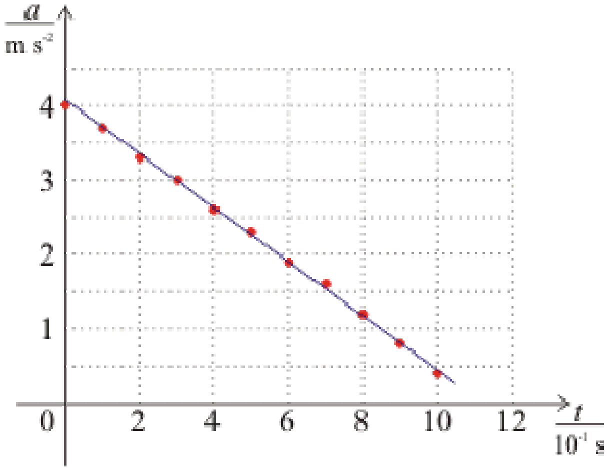
CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Poznámka: Rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.

$$y = 1\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}\cdot t$$

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

Podle zadané tabulky nakreslíme graf závislosti zrychlení Pavlíka na čase:



Grafem je přímka.

Pro vyjádření funkce *a*(*t*) použijeme směrnicový tvar přímky:

$$a(t) = -kt+q$$

$q = 4$ (průsečík se svislou osou)

$k = tg\alpha$ (směrnice)

$$tg\alpha = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{4-0{,}4}{1} = 3{,}6$$

(α je úhel, který přímka svírá s osou *x*)

Platí:

$$a(t) = -3{,}6t+4$$

Průběh rychlosti získáme integrací vztahu *a*(*t*):

$$v(t) = \int a(t)dt = \int(-3{,}6t+4)dt$$

$$v(t) = -\frac{3{,}6}{2}t^2+4t+C = -1{,}8^2+4t+C$$

Konstantu *C* zjistíme z počátečních podmínek:

pro $t = 0$ s je $v = 0$ m s^{-1},

tedy $C = 0$

Platí:

$$v(t) = -1{,}8t^2+4t$$

Průběh polohy získáme integrací vztahu $v(t)$:

$$s(t) = \int v(t)dt = \int(-1{,}8t^2+4t)dt$$

$$s(t) = -\frac{1{,}8}{3}t^3+\frac{4}{2}t^2+D = -0{,}6t^3+2t^2+D$$

Konstantu *D* zjistíme z počátečních podmínek:

pro $t = 0$ s je $s = 0$ m,

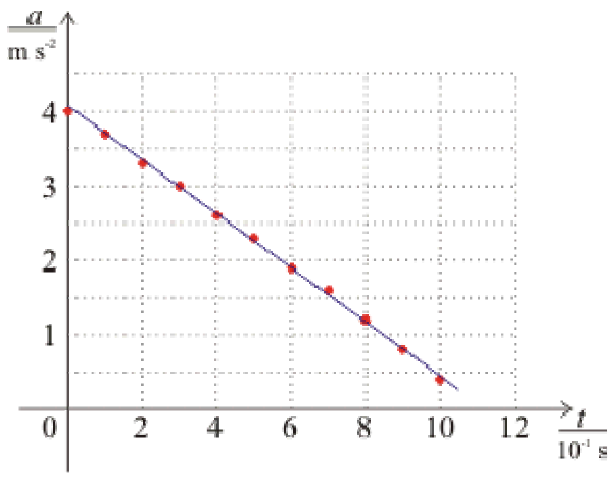
tedy $D = 0$

Platí:

$$s(t) = -0{,}6t^3+2t^2$$

Odpověď

Graf závislosti zrychlení Pavlíka na čase:



Vyjádření funkce $a(t)$ je:

$$a(t) = -3{,}6t+4$$

Průběh rychlosti $v(t)$ je:

$$v(t) = -1{,}8t^2 + 4t$$

Průběh polohy $s(t)$ je:

$$s(t) = -0{,}6t^3 + 2t^2$$

Brusný kotouč

Brusný kotouč o poloměru R se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením ε okolo vodorovné osy x v kladném smyslu. V čase 0 s se bod B ležící na jeho okraji nachází v poloze B_0 = [0, R] nad osou.

a) Určete závislost polohového vektoru $\vec{r}(t)$ bodu B a jeho rychlosti $\vec{v}(t)$ a zrychlení $\vec{a}(t)$ na čase.

b) Určete závislost tečného zrychlení $\vec{a}_t(t)$ bodu B na čase.

c) Určete závislost normálového zrychlení $\vec{a}_n(t)$ bodu B na čase.

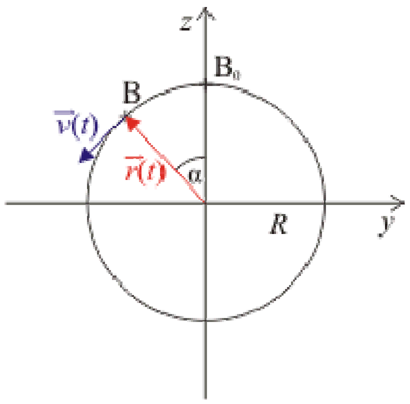
d) Určete úhel, který svírá celkové a normálové zrychlení bodu B.

Nápověda 1 pro a): Obrázek situace

Nakreslete si obrázek, vyznačte počáteční polohu bodu B_0 a polohu bodu B za okamžik t. Vyznačte i úhel α, o který se bod B za čas t pootočil. Zapište souřadnice bodu B v čase t s pomocí poloměru kola a úhlu α.

▶ Řešení k nápovědě 1:

Obrázek 1:



Souřadnice bodu B :

$$y = -R \sin\alpha$$
$$z = R \cos\alpha$$

Nápověda 2 pro a): Úhlová rychlost otáčení kotouče

Kotouč se roztáčí s konstantním úhlovým zrychlením ε. Jak se mění s časem úhlová rychlost ω a jak úhel α?

▶ Řešení k nápovědě 2:

Výpočet velikosti úhlové rychlosti ω a úhlu α:

$$\varepsilon = \text{konst.}$$
$$\omega = \int \varepsilon \, \mathrm{d}t = \varepsilon t + C$$

Konstantu C určíme z počátečních podmínek.

Pro t = 0 je $\omega = 0$, a tedy:

$$0 = 0 + C$$

Odtud C = 0.

$$\omega = \varepsilon t$$

Pro úhel α platí:

$$\alpha = \int \omega \,\mathrm{d}t = \int \varepsilon t \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2 + K$$

Konstantu K určíme z počátečních podmínek.

Pro t = 0 je $\alpha = 0$, a tedy:

$$0 = 0 + K$$

Odtud K = 0.

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2 \qquad (1)$$

Nápověda 3 pro a): Polohový vektor bodu B

Víte, jak se mění s časem souřadnice bodu B. Zapište s jejich pomocí jeho polohový vektor.

▶ Řešení k nápovědě 3:

Polohový vektor bodu B:

$$\vec{r}(t) = y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os y a z.

$$\vec{r}(t) = -R\,\sin\alpha\,\vec{j} + R\,\cos\alpha\,\vec{k}$$

Dosadíme za α ze vztahu (1):

$$\vec{r}(t) = -R\,\sin\tfrac{\varepsilon t^2}{2}\,\vec{j} + R\,\cos\tfrac{\varepsilon t^2}{2}\,\vec{k} \qquad (2)$$

Nápověda 4 pro a):Rychlost bodu B

Jak od souřadnice $x(t)$ a $y(t)$ přejdete ke složkám rychlosti $v_x(t)$ a $v_y(t)$? S jejich pomocí pak zapište vektor rychlosti $\vec{v}(t)$.

▶ Řešení nápovědy 4:

Pro průběh rychlosti bodu B na obvodu kotouče platí:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-R\,\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) = -R\varepsilon\}\,\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) = -R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\vec{v}(t) = v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = -R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\,\vec{j} - R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\,\vec{k} \tag{3}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Pro velikost rychlosti platí:

$$v(t) = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = R\varepsilon t\sqrt{\cos^2\frac{\varepsilon t^2}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon t^2}{2}} = R\varepsilon t \tag{4}$$

Nápověda 5 pro a): Celkové zrychlení bodu B

Obdobně jako jste došli od souřadnic k složkám rychlosti, přejděte od složek rychlosti ke složkám celkového zrychlení. Pomocí složek pak zapište vektor zrychlení.

► Řešení k nápovědě 5:

Průběh zrychlení:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)$$

$$a_y = -R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) a_z = -R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon^2 t^2\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\vec{a}(t) = a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \left(R\varepsilon^2 t^2\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)\vec{j} - \left(R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)\vec{k}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Nápověda 6 pro b): Tečné zrychlení

Spočítejte nejprve velikost tečného zrychlení.

Jakým směrem míří tečné zrychlení?

Jak zapíšete jednotkový vektor ve směru rychlosti?

Znáte-li velikost tečného zrychlení a jednotkový vektor v jeho směru, zapíšete již snadno vektor tečného zrychlení.

► Řešení k nápovědě 6:

Velikost tečného zrychlení:

$$a_t(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\varepsilon t) = R\varepsilon$$

Tečné zrychlení má směr rychlosti:

$$\vec{a}_t = a_t \vec{v}_{ok}$$

kde $\vec{v}_{ok}$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti.

Jednotkový vektor získáme, když vektor vydělíme jeho velikostí, tedy:

$$\vec{v}_{ok} = \frac{\vec{v}}{v}$$

Podílem vztahu (3) a (4) dostaneme:

$$\vec{v}_{ok} = \frac{\vec{v}}{v} = -\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} - \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Tečné zrychlení je pak rovno:

$$\vec{a}_t(t) = a_t \vec{v}_{ok} = -R\varepsilon \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} - R\varepsilon \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k}$$

Nápověda 7 pro c): Normálové zrychlení

Spočítejte nejprve velikost normálového zrychlení.

Jakým směrem míří normálové zrychlení?

Jak zapíšete jednotkový vektor ve směru polohového vektoru?

Znáte-li velikost normálového zrychlení a jednotkový vektor v jeho směru, zapíšete již snadno vektor normálového zrychlení.

► Řešení k nápovědě 7:

Velikost normálového zrychlení:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\varepsilon^2 t^2}{R} = R\varepsilon^2 t^2$$

Normálové zrychlení má směr polohového vektoru, ale je opačně orientované:

$$\vec{a}_n(t) = a_n\left(-\vec{r}_o\right)$$

kde $\vec{r}_o$ je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru.

Jednotkový vektor získáme, když vektor vydělíme jeho velikostí, tedy:

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}$$

Vydělením vztahu (2) poloměrem *R* dostaneme:

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r} = -\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} + \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Normálové zrychlení je pak rovno:

$$\vec{a}_n(t) = a_n\left(-\vec{r}_o\right) = R\varepsilon^2 t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} - R\varepsilon^2 t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k}$$

Poznámka: Tečné a normálové zrychlení jsou na sebe kolmá. Jednotkový vektor ve směru normálového zrychlení lze také získat tak, že napíšeme vektor kolmý na jednotkový vektor ve směru tečného zrychlení.

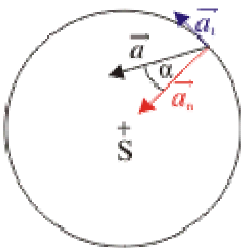
Nápověda 8 pro d): Úhelmezi celkovým a normálovým zrychlením

Nakreslete obrázek, ve kterém vyznačíte normálové, celkové a tečné zrychlení a hledaný úhel. Jaká goniometrická funkce je spojuje, jistě snadno objevíte.

K výpočtu budete potřebovat ještě velikost celkového zrychlení. Pomůže vám buď znalost a_t a a_n nebo a_y a a_z.

► Řešení k nápovědě 8:

Obrázek 2:



Pro úhel α platí:

$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} \tag{5}$$

Výpočet velikosti celkového zrychlení a:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(R\varepsilon)^2 + (R\varepsilon^2 t^2)^2} = R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}$$

Dosadíme do (5):

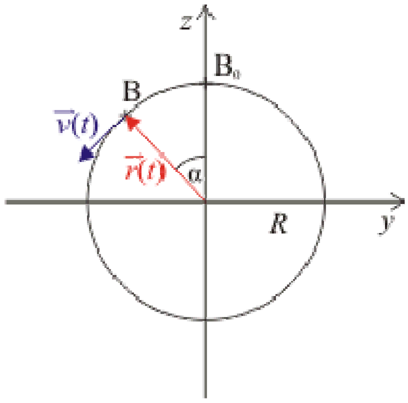
$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} = \frac{R\varepsilon^2 t^2}{R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}} = \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2 t^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

a) Polohový vektor bodu B

Nakreslíme obrázek situace.

Obrázek 1:



Souřadnice bodu B :

$$y = -R\sin\alpha$$
$$z = R\cos\alpha$$

Výpočet velikosti úhlové rychlosti ω a úhlu α:

$$\varepsilon = \text{konst.}$$
$$\omega = \int \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon t + C$$

Konstantu C určíme z počátečních podmínek.

Pro $t = 0$ je $\omega = 0$, a tedy:

$$0 = 0 + C$$

Odtud $C = 0$.

$$\omega = \varepsilon t$$

Pro úhel α platí:

$$\alpha = \int \omega\,\mathrm{d}t = \int (\varepsilon t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + K$$

Konstantu K určíme z počátečních podmínek.

Pro $t = 0$ je $\alpha = 0$, a tedy:

$$0 = 0 + K$$

Odtud $K = 0$.

$$\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \qquad (1)$$

Polohový vektor bodu B:

$$\vec{r}(t) = y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os y a z

$$\vec{r}(t) = -R\sin\alpha\,\vec{j} + R\cos\alpha\,\vec{k}$$

Dosadíme za α ze vztahu (1):

$$\vec{r}(t) = -R\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} + R\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k} \qquad (2)$$

a) Rychlost bodu B

Pro průběh rychlosti bodu B na obvodu kotouče platí:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-R\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) = -R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) = -R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\vec{v}(t) = v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = -R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} - R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k} \qquad (3)$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Pro velikost rychlosti platí:

$$v(t) = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = R\varepsilon t\sqrt{\cos^2\frac{\varepsilon t^2}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon t^2}{2}} = R\varepsilon t \qquad (4)$$

a) Zrychlení bodu B

Průběh zrychlení:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)$$

$$a_y = -R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)$$

$$a_z = -R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon^2 t^2\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\vec{a}(t) = a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \left(R\varepsilon^2 t^2\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)\vec{j} - \left(R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)\vec{k}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

b) Tečné zrychlení bodu B

Velikost tečného zrychlení:

$$a_t(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\varepsilon t) = R\varepsilon$$

Tečné zrychlení má směr rychlosti:

$$\vec{a}_t = a_t \vec{v}_{ok}$$

kde $\vec{v}_{ok}$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti.

Jednotkový vektor získáme, když vektor vydělíme jeho velikostí, tedy:

$$\vec{v}_{ok} = \frac{\vec{v}}{v}$$

Podílem vztahu (3) a (4) dostaneme:

$$\vec{v}_{ok} = \frac{\vec{v}}{v} = -\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} - \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Tečné zrychlení je pak rovno:

$$\vec{a}_t(t) = a_t \vec{v}_{ok} = -R\varepsilon \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} - R\varepsilon \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k}$$

c) Normálové zrychlení bodu B

Velikost normálového zrychlení:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\varepsilon^2 t^2}{R} = R\varepsilon^2 t^2$$

Normálové zrychlení má směr polohového vektoru, ale je opačně orientované:

$$\vec{a}_n(t) = a_n\left(-\vec{r}_o\right)$$

kde $\vec{r}_o$ je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru.

Jednotkový vektor získáme, když vektor vydělíme jeho velikostí, tedy:

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}$$

Vydělením vztahu (2) poloměrem *R* dostaneme:

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r} = -\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} + \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k}$$

kde $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

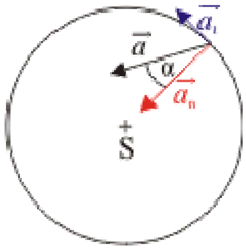
Normálové zrychlení je pak rovno:

$$\vec{a}_n(t) = a_n\left(-\vec{r}_o\right) = R\varepsilon^2 t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{j} - R\varepsilon^2 t^2 \cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec{k}$$

Poznámka: Tečné a normálové zrychlení jsou na sebe kolmá. Jednotkový vektor ve směru normálového zrychlení lze také získat tak, že napíšeme vektor kolmý na jednotkový vektor ve směru tečného zrychlení.

d)Úhel *α*, který svírá celkové a normálové zrychlení

Obrázek 2:



Pro úhel α platí:

$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} \qquad (5)$$

Výpočet velikosti celkového zrychlení a:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(R\varepsilon)^2 + \left(R\varepsilon^2 t^2\right)^2} = R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}$$

Dosadíme do (5):

$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} = \frac{R\varepsilon^2 t^2}{R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}} = \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2 t^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Odpověď

a) Polohový vektor bodu B:

$$\vec r(t) = -R\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec j + R\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec k$$

Průběh rychlosti bodu B:

$$\vec v(t) = -R\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec j - R\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec k$$

Průběh zrychlení bodu B:

$$\vec a(t) = \left(R\varepsilon^2 t^2 \sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)\vec j - \left(R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} + R\varepsilon^2 t^2\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)\vec k$$

kde $\vec j$, $\vec k$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

b) Tečné zrychlení:

$$\vec a_t(t) = -R\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec j - R\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec k$$

kde $\vec j$, $\vec k$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

c) Normálové zrychlení:

$$\vec a_n(t) = \varepsilon^2 R t^2\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec j - \varepsilon^2 R t^2\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\vec k$$

kde $\vec j$, $\vec k$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

d) Úhel α, který svírá celkové a normálové zrychlení:

$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} = \frac{R\varepsilon^2 t^2}{R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}} = \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2 t^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Srážka aut

Dvě auta jedou přímo proti sobě. První rychlostí o velikosti 20 m·s^{-1}, druhé rychlostí o velikosti 30 m·s^{-1}. Obě auta jsou schopna zastavit z rychlosti o velikosti 25 m·s^{-1} za 5 s.

a) Jak daleko musí být od sebe auta, aby se nesrazila?

b) Jak daleko by auta musela být, kdybychom započetli reakční dobu řidičů, která je rovna asi 0,2 s?

Zápis

v_1 = 20 m·s^{-1}	rychlost jízdy prvního auta
v_2 = 30 m·s^{-1}	rychlost jízdy druhého auta
v_0 = 25 m·s^{-1}	počáteční rychlost aut
t_0 = 5 s	čas, za který auta zastaví z rychlosti v_0
t_r = 0,2 s	reakční doba řidičů
a) s = ? (m)	vzdálenost aut
b) s_r = ? (m)	vzdálenost aut při započtení reakční doby

Nápověda 1 pro a): Grafické řešení-graf závislosti rychlosti na čase

Zkuste úlohu vyřešit nejprve graficky.

Nakreslete si grafy závislostí rychlostí obou aut na čase při jejich zastavování.

Předpokládejte, že pokles rychlosti obou aut je rovnoměrný.

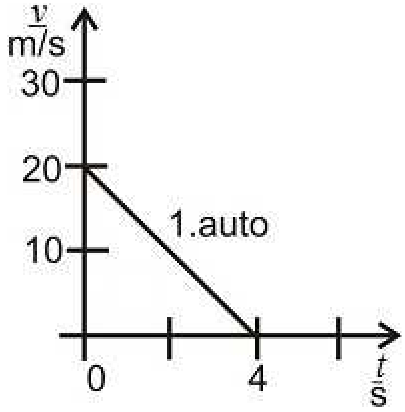
▶ Řešení k nápovědě 1

Předpokládáme, že pokles rychlosti je rovnoměrný.

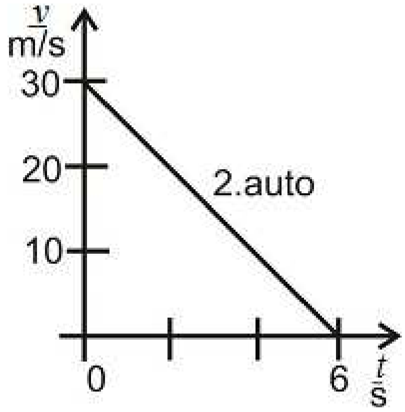
Velikosti rychlostí obou aut se tedy sníží za 1 s o 5 m·s^{-1}.

První auto tak zastaví za 4 s, druhé auto zastaví za 6 s.

Obrázek 1 - Graf závislosti rychlosti prvního auta na čase:



Obrázek 2 - Graf závislosti rychlosti druhého auta na čase:

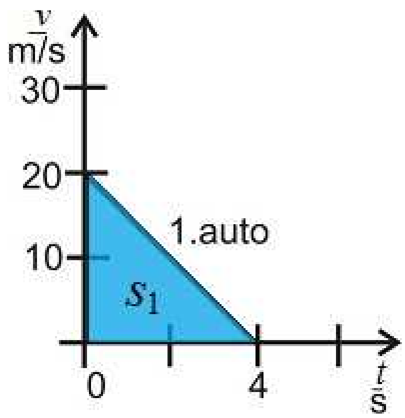


Nápověda 2 pro a): Grafické řešení-dráha zastavení

Kde je v grafech z předchozí nápovědy schovaná dráha zastavení obou aut?

► Řešení k nápovědě 2

Obrázek 1 - Graf závislosti rychlosti prvního auta na čase:

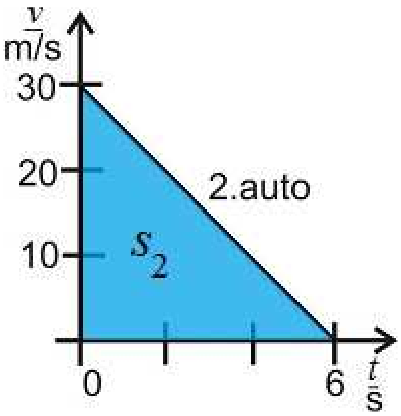


Dráha zastavení prvního auta odpovídá ploše pod křivkou prvního grafu.

Pro dráhu s_1 zastavení prvního auta platí:

$$s_1 = \frac{20.4}{2}\ \mathrm{m} = 40\ \mathrm{m}$$

Obrázek 2 - Graf závislosti rychlosti druhého auta na čase:



Dráha zastavení druhého auta odpovídá ploše pod křivkou druhého grafu.

Pro dráhu s_2 zastavení druhého auta platí:

$$s_2 = \frac{30.6}{2}\ \mathrm{m} = 90\ \mathrm{m}$$

Aby se auta nesrazila, musela by být od sebe vzdálena:

$$s = s_1 + s_2 = 130\ \mathrm{m}$$

Nápověda 3 pro a): Početní řešení-dráhy zastavení

Nyní budeme řešit úlohu početně s využitím vztahů pro rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb.

Znáte velikosti rychlostí obou aut a za předpokladu, že pokles rychlosti obou aut je rovnoměrný, znáte i jejich zrychlení.

Jak vypočtete dráhy zastavení obou aut?

► Řešení k nápovědě 3

Velikosti rychlostí aut:

$$v_1 = 20 \text{ m.s}^{-1}$$
$$v_2 = 30 \text{ m.s}^{-1}$$

Zrychlení aut:

Obě auta jsou schopna zastavit z rychlosti 25 m·s^{-1} za 5 s. Za 1 s se rychlost sníží při rovnoměrném brzdění o 5 m·s^{-1}. Velikost zrychlení aut je tedy:

$$a = \frac{v_0}{t_0} = 5 \text{ m.s}^{-2}$$

Výpočet dráhy zastavení:

Rychlost a dráha rovnoměrně zpomaleného přímočarého pohybu se s časem mění podle níže uvedených vztahů, známých ze střední školy:

$$v = v_p - at \qquad (1)$$
$$s = v_p t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad (2)$$

kde v_p je počáteční rychlost, ze které se začíná brzdit.

V okamžiku zastavení bude rychlost auta nulová. Ze vztahu (1) pro rychlost zjistíme čas zastavení t_z. Platí:

$$0 = v_p - a t_z$$

Odtud:

$$t_z = \frac{v_p}{a}$$

Dráhu zastavení s_z dostaneme dosazením za čas zastavení do vztahu (2):

$$s_z = v_p t_z - \frac{1}{2} a t_z^2 = v_p \left(\frac{v_p}{a}\right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_p}{a}\right)^2$$
$$s_z = \frac{v_p^2}{2a}$$

Dráha zastavení prvního auta:

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a}$$
$$s_1 = \frac{20^2}{2.5} \text{ m} = 40 \text{ m}$$

Dráha zastavení druhého auta:

$$s_2 = \frac{v_2^2}{2a}$$

$$s_2 = \frac{30^2}{2.5}\ \mathrm{m} = 90\ \mathrm{m}$$

Aby se auta nesrazila, musela by být od sebe vzdálena:

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2a} = 130\ \mathrm{m}$$

Nápověda 4 pro b): Reakční doba řidičů

Je třeba započítat reakční dobu řidičů.

K dráze vypočítané v bodě a) musíme tedy připočítat dráhu, kterou oba řidiči ujedou než stačí zareagovat.

Jak ji zjistíme?

► Řešení k nápovědě 4

Vzdálenost aut (tak, aby se nesrazila) vypočítaná v bodě a):

$$s_1 + s_2 = (40 + 90)\ \mathrm{m} = 130\ \mathrm{m}$$

K tomu je třeba ještě připočítat dráhu, kterou oba řidiči ujedou, než stačí zareagovat a začnou brzdit.

Reakční dobu si označíme t_r:

$$t_r = 0{,}2\ \mathrm{s}$$

Dráha, kterou ujede první auto, než řidič zareaguje, je:

$$s_{r1} = v_1 . t_r = (20 . 0{,}2)\ \mathrm{m} = 4\ \mathrm{m}$$

Dráha, kterou ujede druhé auto, než řidič zareaguje, je:

$$s_{r2} = v_2 . t_r = (30 . 0{,}2)\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{m}$$

Celková vzdálenost aut by pak musela být:

$$s_r = (s_1 + s_2 + s_{r1} + s_{r2}) = (40 + 90 + 6 + 4)\ \mathrm{m} = 140\ \mathrm{m}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

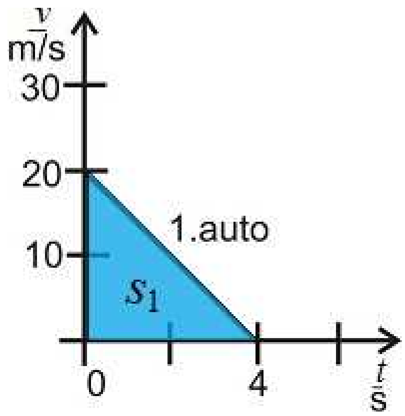
a) *Grafické řešení*:

Předpokládáme, že pokles rychlosti je rovnoměrný.

Velikosti rychlostí obou aut se tedy sníží za 1 s o 5 m·s^{-1}.

První auto tak zastaví za 4 s, druhé auto zastaví za 6 s.

Obrázek 1 - Graf závislosti rychlosti prvního auta na čase:

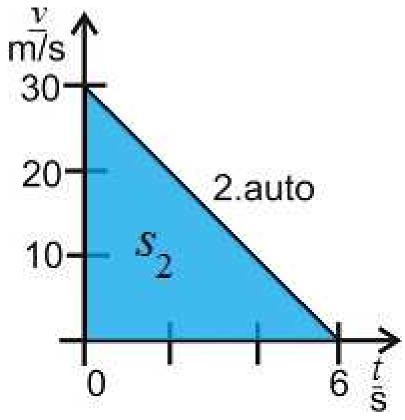


Dráha zastavení prvního auta odpovídá ploše pod křivkou prvního grafu.

Pro dráhu s_1 zastavení prvního auta platí:

$$s_1 = \frac{20.4}{2}\ \mathrm{m} = 40\ \mathrm{m}$$

Obrázek 2 - Graf závislosti rychlosti druhého auta na čase:



Dráha zastavení druhého auta odpovídá ploše pod křivkou druhého grafu.

Pro dráhu s_2 zastavení druhého auta platí:

$$s_2 = \frac{30.6}{2}\ \mathrm{m} = 90\ \mathrm{m}$$

Aby se auta nesrazila, musela by být od sebe vzdálena:

$$s = s_1 + s_2 = 130\ \mathrm{m}$$

a) *Početní řešení*:

Velikosti rychlostí aut:

$$v_1 = 20\ \mathrm{m.s^{-1}}$$
$$v_2 = 30\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Zrychlení aut:

Obě auta jsou schopna zastavit z rychlosti 25 m·s^{-1} za 5 s. Za 1 s se rychlost sníží při rovnoměrném brzdění o 5 m·s^{-1}. Velikost zrychlení aut je tedy:

$$a = \frac{v_0}{t_0} = 5\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Výpočet dráhy zastavení:

Rychlost a dráha rovnoměrně zpomaleného přímočarého pohybu se s časem mění podle níže uvedených vztahů, známých ze střední školy:

$$v = v_p - at \qquad (1)$$

$$s = v_p t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad (2)$$

kde v_p je počáteční rychlost, ze které se začíná brzdit.

V okamžiku zastavení bude rychlost auta nulová. Ze vztahu (1) pro rychlost zjistíme čas zastavení t_z. Platí:

$$0 = v_p - a t_z$$

Odtud:

$$t_z = \frac{v_p}{a}$$

Dráhu zastavení s_z dostaneme dosazením za čas zastavení do vztahu (2):

$$s_z = v_p t_z - \frac{1}{2} a t_z^2 = v_p \left(\frac{v_p}{a}\right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_p}{a}\right)^2$$

$$s_z = \frac{v_p^2}{2a}$$

Dráha zastavení prvního auta:

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a}$$

$$s_1 = \frac{20^2}{2.5}\ \mathrm{m} = 40\ \mathrm{m}$$

Dráha zastavení druhého auta:

$$s_2 = \frac{v_2^2}{2a}$$

$$s_2 = \frac{30^2}{2.5}\ \mathrm{m} = 90\ \mathrm{m}$$

Aby se auta nesrazila, musela by být od sebe vzdálena:

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2a} = 130\ \mathrm{m}$$

b) *Početní řešení se započtením reakční doby řidičů*:

Vzdálenost aut (tak, aby se nesrazila) vypočítaná v bodě a):

$$s_1 + s_2 = (40 + 90)\ \mathrm{m} = 130\ \mathrm{m}$$

K tomu je třeba ještě připočítat dráhu, kterou oba řidiči ujedou, než stačí zareagovat a začnou brzdit.

Reakční dobu si označíme t_r:

$$t_r = 0{,}2\ \mathrm{s}$$

Dráha, kterou ujede první auto, než řidič zareaguje, je:

$$s_{r1} = v_1 . t_r = (20.0{,}2)\ \mathrm{m} = 4\ \mathrm{m}$$

Dráha, kterou ujede druhé auto, než řidič zareaguje, je:

$$s_{r2} = v_2 . t_r = (30.0{,}2)\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{m}$$

Celková vzdálenost aut by pak musela být:

$$s_r = (s_1 + s_2 + s_{r1} + s_{r2}) = (40 + 90 + 6 + 4)\ \mathrm{m} = 140\ \mathrm{m}$$

Odpověď

a) Aby se auta nesrazila, musela by být od sebe vzdálena:

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2a} = 130\ \mathrm{m}$$
$$(a = \frac{v_0}{t_0} = 5\ \mathrm{m.s^{-2}})$$

b) Se započtením reakční doby řidičů by celková vzdálenost aut (aby nedošlo ke srážce) musela být:

$$s_r = (s_1 + s_2 + s_{r1} + s_{r2}) = (\frac{v_1^2 + v_2^2}{2a} + v_1 t_r + v_2 t_r)\ \mathrm{m} = 140\ \mathrm{m}$$

Kamínek na římse

Kamínek sklouzne z římsy, která je ve výšce *h* nad povrchem země, a volně padá k zemi. Rozdělte výšku *h* na *n* částí tak, aby čas pádu kamínku v každé z nich byl stejný.

Zanedbejte odpor vzduchu.

Řešte pro hodnoty: $h = 245$ m, $n = 5$.

Nápověda 1: Označení

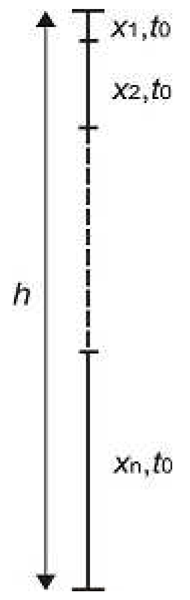
Označte si jednotlivé části, na které budete výšku *h* dělit, a označte si čas pádu v jednotlivých částech, který bude pro všechny stejný.

▶ Řešení k nápovědě 1

Jednotlivé části pádu kamínku si označíme takto:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Čas pádu, stejný pro všechny části, označíme t_0.



Nápověda 2 : Dráha pohybu

Jednotlivé části můžete považovat za dílčí dráhy, které kamínek uletěl při volném pádu z římsy dolů. Čemu je roven jejich součet?

Jaký vztah platí mezi dráhou volného pádu a dobou pádu? Napište ho nejprve pro první úsek, pak pro první dva úseky a pak obecně pro *n* úseků.

▶ Řešení k nápovědě 2

Jednotlivé části můžeme považovat za dílčí dráhy, které kamínek uletěl při volném pádu z římsy dolů.

Pro jejich součet platí: $h=x_1+x_2+...+x_n$.

Čas pádu, stejný pro všechny části, máme označen t_0.

Platí:

$$x_1=\frac{gt_0^2}{2} \quad (1)$$

$$x_1+x_2=\frac{g(2t_0)^2}{2} \quad (2)$$

$$h=x_1+x_2+...+x_n=\frac{g(nt_0)^2}{2} \quad (3)$$

Nápověda 3: Doba pádu

Ze vztahu (3)z minulé nápovědy snadno vyjádříte dobu pádu t_0 pro každou jednotlivou část (je pro všechny části stejná).

► Řešení k nápovědě 3

Doba pádu t_0 pro každou jednotlivou část vyjádřená ze vztahu (3) je:

$$t_0^2=\frac{2h}{g}\frac{1}{n^2} \quad (4)$$

Nápověda 4: Rozdělení výšky pádu na části

Využijte vztah (4) pro dobu pádu z minulé nápovědy a vyjádřete jednotlivé úseky pádu x_i pomocí výšky pádu h a počtu částí n.

► Řešení k nápovědě 4

Pro čas t_0 platí:

$$t_0^2=\frac{2h}{g}\frac{1}{n^2} \quad (4)$$

Dosadíme za t_0 do vztahu (1) pro 1. úsek dráhy:

$$x_1=\frac{gt_0^2}{2}=\frac{h}{n^2}$$

Druhý úsek dráhy vyjádříme ze vztahu (2) a opět dosadíme za t_0:

$$x_2=\frac{g(2t_0)^2}{2}-x_1=h\left(\frac{2}{n}\right)^2-h\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{3h}{n^2}$$

Pro i-tý úsek dráhy bude platit:

$$x_i = \frac{1}{2}g(it_0)^2 - \frac{1}{2}g[(i-1)t_0]^2 = \frac{gt_0^2}{2}(2i-1) = \frac{g}{2}\cdot\frac{2h}{g}\cdot\frac{1}{n^2}(2i-1)$$

$$x_i = \frac{2i-1}{n^2}h$$

Číselně:

pro: $i = 1,2,...,5$, $h = 245$ m, $n = 5$ dostaneme:

$$x_1 = \frac{245}{25}\ \mathrm{m} = 9{,}8\ \mathrm{m}$$

$$x_2 = \frac{3.245}{25}\ \mathrm{m} = 29{,}4\ \mathrm{m}$$

$$x_3 = \frac{5.245}{25}\ \mathrm{m} = 49{,}0\ \mathrm{m}$$

$$x_4 = \frac{7.245}{25}\ \mathrm{m} = 68{,}6\ \mathrm{m}$$

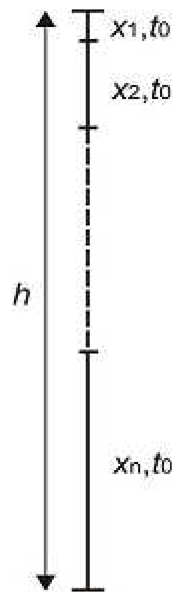
$$x_5 = \frac{9.245}{25}\ \mathrm{m} = 88{,}2\ \mathrm{m}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Jednotlivé části pádu kamínku si označíme:

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

Čas pádu, stejný pro všechny části, označíme t_0.



Jednotlivé části můžeme považovat za dílčí dráhy, které kamínek uletěl při volném pádu z římsy dolů.

Pro jejich součet platí: $h=x_1+x_2+...+x_n$.

Platí:

$$x_1=\frac{gt_0^2}{2} \tag{1}$$

$$x_1+x_2=\frac{g(2t_0)^2}{2} \tag{2}$$

$$h=x_1+x_2+...+x_n=\frac{g(nt_0)^2}{2} \tag{3}$$

Doba pádu t_0 pro každou jednotlivou část vyjádřená ze vztahu (3) je:

$$t_0^2=\frac{2h}{g}\frac{1}{n^2} \tag{4}$$

Dosadíme za t_0 do vztahu (1) pro 1. úsek dráhy:

$$x_1=\frac{gt_0^2}{2}=\frac{h}{n^2}$$

Druhý úsek dráhy vyjádříme ze vztahu (2) a opět dosadíme za t_0:

$$x_2=\frac{g(2t_0)^2}{2}-x_1=h\left(\frac{2}{n}\right)^2-h\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{3h}{n^2}$$

Pro i-tý úsek dráhy bude platit:

$$x_i=\frac{1}{2}g(it_0)^2-\frac{1}{2}g[(i-1)t_0]^2=\frac{gt_0^2}{2}(2i-1)=\frac{g}{2}\cdot\frac{2h}{g}\cdot\frac{1}{n^2}(2i-1)$$

$$x_i=\frac{2i-1}{n^2}h$$

Číselně:

pro: $i=1,2,...,5$, $h=245\ \mathrm{m}$, $n=5$ dostaneme:

$$x_1=\frac{245}{25}\ \mathrm{m}=9{,}8\ \mathrm{m}$$

$$x_2=\frac{3.245}{25}\ \mathrm{m}=29{,}4\ \mathrm{m}$$

$$x_3=\frac{5.245}{25}\ \mathrm{m}=49{,}0\ \mathrm{m}$$

$$x_4=\frac{7.245}{25}\ \mathrm{m}=68{,}6\ \mathrm{m}$$

$$x_5=\frac{9.245}{25}\ \mathrm{m}=88{,}2\ \mathrm{m}$$

Odpověď

Pro jednotlivé úseky pádu kamínku z římsy platí:

$$x_1 = \frac{h}{n^2}$$

$$x_2 = \frac{3h}{n^2}$$

$$x_i = \frac{2i-1}{n^2}h$$

Pro $i = 1,2,...,5$; $h = 245$ m; $n = 5$ dostaneme:

$$x_1 = 9{,}8 \text{ m}$$

$$x_2 = 29{,}4 \text{ m}$$

$$x_3 = 49{,}0 \text{ m}$$

$$x_4 = 68{,}6 \text{ m}$$

$$x_5 = 88{,}2 \text{ m}$$

Pohyb částice II

Polohový vektor částice se mění s časem podle vztahu:

$$\vec{r}(t) = 15\ \mathrm{m\,s^{-2}}t^2\,\vec{i} + (4\ \mathrm{m} - 20\ \mathrm{m\,s^{-2}}t^2)\,\vec{j}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os *x* a *y*.

Řešte následující úkoly:

a) Jaká je trajektorie částice? Napište její rovnici.

b) Nakreslete trajektorii částice.

c) Určete dráhu, kterou částice urazí v libovolném časovém intervalu (t_{k1}, t_{k2}).

d) Určete, jakou dráhu částice urazila na úseku trajektorie mezi osou *x* a *y*.

e) Za jakou dobu částice urazila dráhu na úseku mezi osami *x*, *y*?

f) Jaká je průměrná velikost rychlosti na úseku mezi osami *x*, *y*?

g) Lze v tomto případě vypočítat průměrnou velikost rychlosti částice podle vzorce $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$, kde v_1 je počáteční a v_2 je konečná velikost rychlosti pohybu? Odpověď zdůvodněte.

Poznámka: Parametrické rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.

$$y = 1\ \mathrm{m} - 2\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t$$

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

Nápověda 1 pro a): Rovnice trajektorie částice

Jakými vztahy je popsán pohyb částice ve směrech souřadnicových os *x*, *y*, *z*?

(Můžete vyjít z vyřešených úkolů v úloze Pohyb částice I

Jak z parametrických rovnic *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) získáte rovnici trajektorie částice?

► Řešení k nápovědě 1

Pohyb částice je ve směru jednotlivých souřadnicových os popsán vztahy:

$$x(t) = 15t^2 \qquad (1)$$

$$y(t) = 4 - 20t^2 \qquad (2)$$

$$z(t) = 0 \qquad (3)$$

Trajektorii získáme tak, že z rovnic *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) vyloučíme parametr *t*.

Z (1):

$$t^2 = \frac{x}{15}$$

Dosadíme do (2):

$$y = 4 - \left(\frac{20}{15}\right)x = 4 - \left(\frac{4}{3}\right)x$$

$$x \geq 0$$
$$z = 0$$

Trajektorií je přímka v rovině *xy*.

Nápověda 2 pro b): Trajektorie částice

Je třeba nakreslit přímku popsanou rovnicí $y = 4 - \left(\frac{4}{3}\right)x$. Stačí najít dva body, kterými prochází. Zjistěte např., ve kterém bodě protíná osu *x* a ve kterém osu *y*.

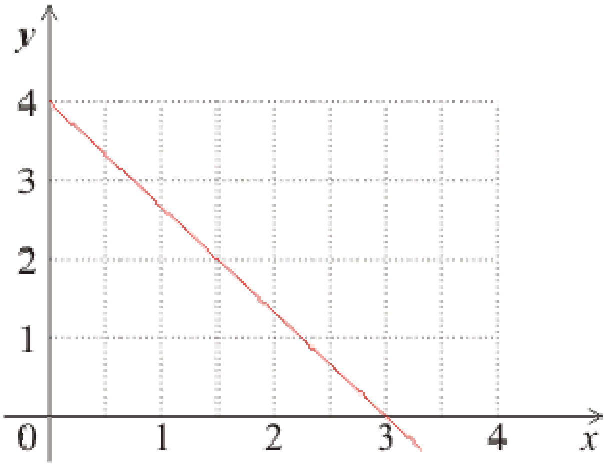
▶ Řešení k nápovědě 2

Průsečík s osou *y*: $x = 0$; $y = 4$

Průsečík s osou *x*: $y = 0$; $4 = 4x/3$ $x = 3$

Přímka prochází body o souřadnicích: [0;4] a [3;0].

Trajektorie částice:



Nápověda 3 pro c): Dráha částice v čas.intervalu (t_{k1}, t_{k2})

Z úlohy Pohyb částice I znáte, jak se s časem mění velikost rychlosti částice:

$$v(t) = 50t$$

Jaký je vztah mezi dráhou částice a velikostí její rychlosti?

Dráhu vymezte pro časový úsek (t_{k1}; t_{k2}).

▶ Řešení k nápovědě 3

Dráhu částice vypočítáme z velikosti její rychlosti jako:

$$s = \int v(t)\mathrm{d}t$$

Pro dráhu částice v časové intervalu (t_{k1}, t_{k2}) platí:

$$s = \int_{t_{k1}}^{t_{k2}} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_{k1}}^{t_{k2}} 50t\,\mathrm{d}t = \left[25t^2\right]_{t_{k1}}^{t_{k2}} = 25\left(t_{k2}^2 - t_{k1}^2\right)$$

Nápověda 4 pro d): Dráha částice na úseku trajektorie mezi osou *x* a *y*

Můžete vyjít z řešení bodu c) (viz předchozí nápověda). K tomu potřebujete znát ještě časy průchodu částice osami *x* a *y*. Tento úkol je řešen v úloze Pohyb částice I.

Při určení dráhy můžete také vyjít z obrázku trajektorie částice.

▶ Řešení k nápovědě 4

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} 50t\,\mathrm{d}t = \left[25t^2\right]_{t_1}^{t_2} = 25\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

Kde:

$t_1 = 0\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou *y* (viz úloha Pohyb částice I)

$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou *x* (viz úloha Pohyb částice I)

$$s = 25 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 25 \cdot 0$$

$$s = 5\ \mathrm{m}$$

Dráhu můžeme určit i z obrázku trajektorie částice:

$$s = \sqrt{4^2 + 3^2}\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$$

Nápověda 5 pro e): Doba, za kterou částice urazila dráhu na úseku mezi osami *x* a *y*

Uvědomte si, že znáte čas průchodu částice osami *x* a *y*.

▶ Řešení k nápovědě 5:

Dobu, za kterou částice urazila dráhu na úseku mezi osami *x* a *y* určíme jako:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Kde:

$t_1 = 0\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou *y*

$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou *x*

Pak platí:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$$

Nápověda 6 pro f): Průměrná velikost rychlosti na úseku mezi osami *x* a *y*

Jak je definovaná průměrná velikost rychlosti?

Znáte všechny veličiny, které k výpočtu potřebujete?

► Řešení k nápovědě 6

Velikost průměrné rychlosti částice na úseku mezi osami *x*, *y* definujeme jako celkovou uraženou dráhu na tomto úseku dělenou celkovou dobou pohybu. Celkovou dráhu i celkovou dobu pohybu na tomto úseku známe z řešení bodu d) a e).

Tedy:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 5\sqrt{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Nápověda 7 pro g): Výpočet průměrné velikosti rychlosti částice

Zkuste, zda můžete velikost průměrné rychlosti částice vyjádřit jako aritmetický průměr počáteční rychlosti pohybu v_1 a konečné rychlosti pohybu v_2 v případě, kdy velikost rychlosti je lineární funkcí času.

Lze tento vzorec použít obecně pro jakoukoli funkci velikosti rychlosti $v(t)$?

► Řešení k nápovědě 7

Průměrná velikost rychlosti je dána vztahem:

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$$

V případě, že velikost rychlosti je lineární funkcí času $v(t) = k \cdot t$, pak platí:

$$v_p = \frac{\int_{t_1}^{t_2} k.t\ dt}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}kt_2^2 - \frac{1}{2}kt_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{k}{2}(t_2+t_1)(t_2-t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$v_p = \frac{k}{2}(t_2+t_1) = \frac{v_1+v_2}{2}$$

Uvedený vzorec je platný pro jakoukoli funkci $v(t)$, která je lineární funkcí času.

Lze ho tedy použít i pro náš konkrétní případ:

$$v_1 = 50t_1 = 50 \cdot 0\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$v_2 = 50t_2 = 50 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{50}{\sqrt{5}}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 10\sqrt{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$v_p = \frac{(v_1+v_2)}{2} = \frac{10\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Pro funkce $v(t)$, které nejsou lineárními funkcemi času, nelze uvedený vztah obecně použít.

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Poznámka: Pro přehlednost zápisu nepíšeme ve vztazích jednotky.

Vycházíme z vyřešených úkolů z úlohy Pohyb částice I:

a)

Pohyb částice je ve směru jednotlivých souřadnicových os popsán vztahy:

$$x(t) = 15t^2 \quad (1)$$

$$y(t) = 4 - 20t^2 \quad (2)$$

$$z(t) = 0 \quad (3)$$

Trajektorii získáme tak, že z rovnic $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$: vyloučíme parametr t.

Z (1):

$$t^2 = \frac{x}{15}$$

Dosadíme do (2):

$$y = 4 - \left(\frac{20}{15}\right)x = 4 - \left(\frac{4}{3}\right)x$$

$$x \geq 0$$

$$z = 0$$

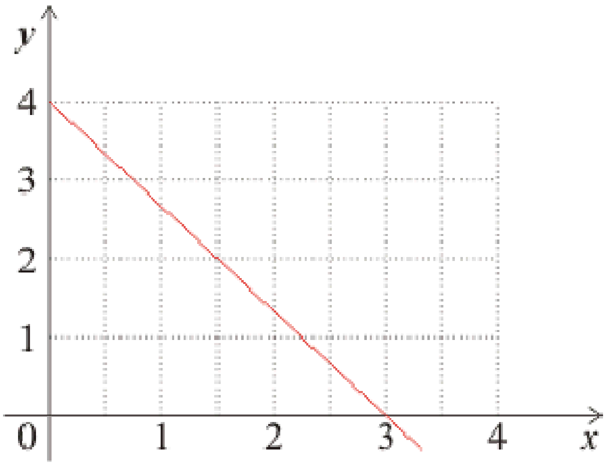
b)

Průsečík přímky s osou y: $x = 0$; $y = 4$

Průsečík přímky s osou x: $y = 0$; $4 = 4x/3$ $x = 3$

Přímka prochází body o souřadnicích: [0;4] a [3;0].

Trajektorie částice:



c)

Dráhu částice vypočítáme z velikosti její rychlosti jako:

$$s = \int v(t) \mathrm{d}t$$

Pro dráhu částice v časové intervalu (t_{k1}, t_{k2}) platí:

$$s = \int_{t_{k1}}^{t_{k2}} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_{k1}}^{t_{k2}} 50t\,\mathrm{d}t = \left[25t^2\right]_{t_{k1}}^{t_{k2}} = 25\left({t_k}_2^2 - {t_k}_1^2\right)$$

d)

Můžeme vyjít z řešení bodu c). K tomu potřebujeme znát ještě časy průchodu částice osami x a y.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} 50t\,\mathrm{d}t = \left[25t^2\right]_{t_1}^{t_2} = 25\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

Kde:

$t_1 = 0\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou y (viz úloha Pohyb částice I)

$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou x (viz úloha Pohyb částice I)

$$s = 25\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 25\cdot 0$$
$$s = 5\ \mathrm{m}$$

Dráhu můžeme určit i z obrázku trajektorie částice:

$$s = \sqrt{4^2+3^2}\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$$

e)

Dobu, za kterou částice urazila dráhu na úseku mezi osami *x* a *y* určíme jako:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Kde:

$t_1 = 0\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou *y*

$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou *x*

Pak platí:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$$

f)

Velikost průměrné rychlosti částice na úseku mezi osami *x*, *y* definujeme jako celkovou uraženou dráhu na tomto úseku dělenou celkovou dobou pohybu. Celkovou dráhu i celkovou dobu pohybu na tomto úseku známe z řešení bodu d) a e).

Tedy:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 5\sqrt{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

g)

Průměrná velikost rychlosti je dána vztahem:

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$$

V případě, že velikost rychlosti je lineární funkcí času $v(t) = k{\cdot}t$, pak platí:

$$v_p = \frac{\int_{t_1}^{t_2} k.t \; dt}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}kt_2^2 - \frac{1}{2}kt_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{k}{2}(t_2+t_1)(t_2-t_1)}{t_2-t_1}$$

$$v_p = \frac{k}{2}(t_2+t_1) = \frac{v_1+v_2}{2}$$

Uvedený vzorec je tedy obecně platný pro jakoukoli funkci $v(t)$, která je lineární funkcí času.

Lze ho tedy použít i pro náš konkrétní případ:

$$v_1 = 50t_1 = 50{\cdot}0 \text{ m s}^{-1} = 0 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_2 = 50t_2 = 50{\cdot}\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ m s}^{-1} = \frac{50}{\sqrt{5}} \text{ m s}^{-1} = 10\sqrt{5} \text{ m s}^{-1}$$

$$v_p = \frac{(v_1+v_2)}{2} = \frac{10\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5} \text{ m s}^{-1}$$

Odpověď

a)

Rovnice trajektorie pohybu částice:

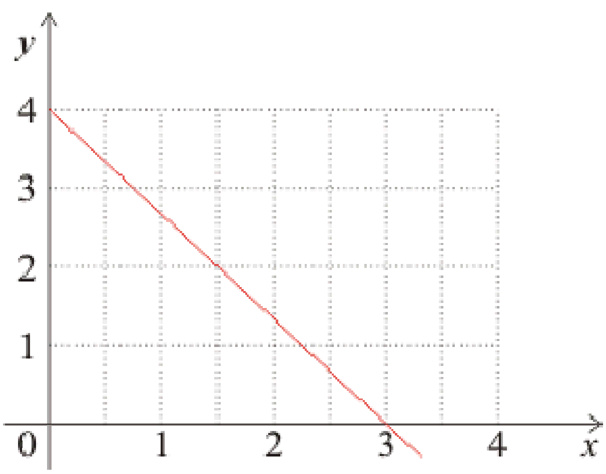
$$y = 4 - \left(\frac{4}{3}\right)x$$

$$x \geq 0$$

$$z = 0$$

Trajektorií je přímka v rovině *xy*.

b)



c)

$$s = 25\left(t_{k2}^{2} - t_{k1}^{2}\right)$$

d)

$$s = 25\left(t_2^2 - t_1^2\right) = 5\ \mathrm{m}$$

Kde:

$t_1 = 0\ \mathrm{s}$ čas průchodu osou *y*

$t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$ je čas průchodu osou *x*

Nebo z obrázku trajektorie:

$$s = \sqrt{4^2 + 3^2}\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$$

e)

$$\Delta t = t_2 - t_1$$
$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$$

f)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 5\sqrt{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

g)

Uvedený vzorec je obecně platný pro jakoukoli funkci *v*, která je lineární funkcí času.

Pro náš případ uvedený vztah lze tedy použít:

$$v_p = \frac{(v_1 + v_2)}{2} = 5\sqrt{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Nezodpovědný řidič

Nákladní dodávka jede po přímé silnici stálou rychlostí 86 km·h^{-1}. Po ujetí dráhy 10,4 km náhle dojde palivo. Řidič pokračuje pěšky v původním směru. Za 27 min dojde k čerpací stanici, vzdálené od odstavené dodávky 2,4 km. Jaká je průměrná rychlost v_p řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa, až do okamžiku příchodu k čerpací stanici?

Řešte výpočtem i graficky.

Poznámka: Průměrnou rychlost užíváme ve smyslu průměrné velikosti rychlosti.

Zápis

v = 86 km·h^{-1}	rychlost dodávky
x_1 = 10,4 km	dráha, kterou ujela dodávka
x_c = 2,4 km	vzdálenost čerpací stanice od dodávky
t_2 = 27 min	doba, za kterou došel řidič na čerpací stanici
v_p = ? (km·h^{-1})	průměrná rychlost řidiče

Nápověda 1: Početní řešení

Jak daleko je čerpací stanice od místa, z kterého dodávka vyjela, a jak dlouho jel řidič, než mu došel benzín? Jak dlouho řidiči trvalo (z místa vyjetí), než se k čerpací stanici dostal?

Jak spočítáte průměrnou rychlost, znáte-li celkovou dráhu a celkový čas?

► Řešení k nápovědě 1

Pro výpočet průměrné rychlosti v_p musíme znát celkovou dráhu Δx a dobu Δt . Je výhodné položit počátek souřadnicové osy x do místa, odkud automobil vyrazil (tedy x_0 = 0 km) a orientovat osu tak, aby směr jízdy byl kladný.

Poloha čerpací stanice na takto zvolené ose je:

$$x_2 = x_1 + x_c$$

A tedy:

$$\Delta x = x_2 - x_0 = x_2 = x_1 + x_c$$

Dobu jízdy určíme z rovnice:

$$t_1 = \frac{x_1 - x_0}{v} = \frac{x_1}{v}$$

Celková doba cesty řidiče (jízda i chůze) je:

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{x_1}{v} + t_2 ,$$

kde t_1 je doba jízdy a t_2 je doba chůze.

Dosadíme do vzorce pro výpočet průměrné rychlosti:

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 + x_2}{\frac{x_1}{v} + t_2}$$

Číselně (převedeme t_2 = 27 min = 0,45 h):

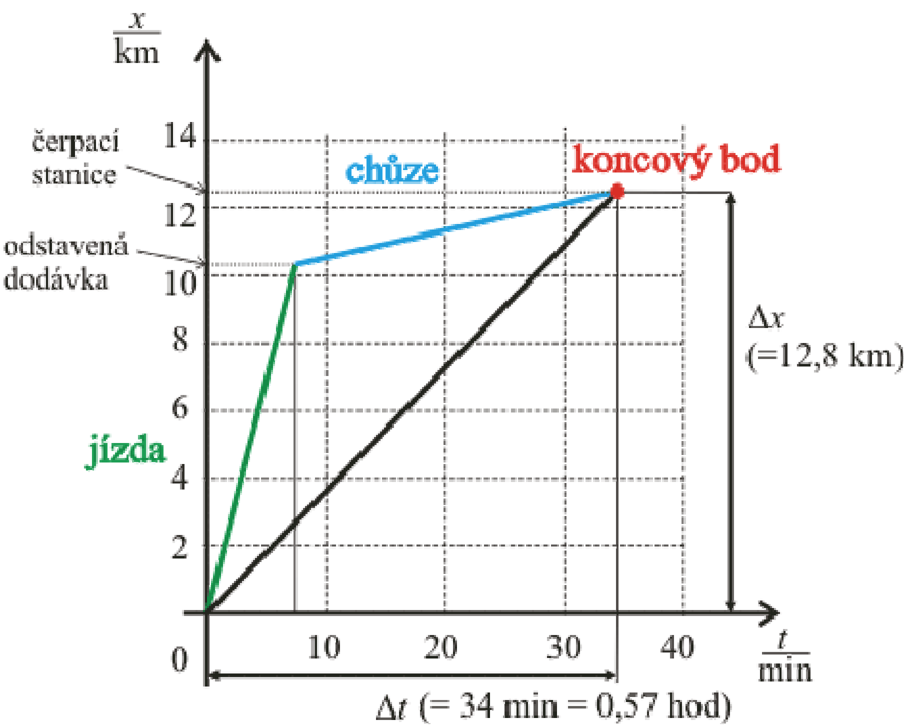
$$v_p = \frac{(10{,}4+2{,}4)\ \mathrm{km}}{(\frac{10{,}4}{86}+0{,}45)\ \mathrm{h}} \doteq 22\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

Nápověda 2: Grafické řešení

Úlohu můžete řešit i graficky. Nakreslete si závislost $x(t)$ pro oba úseky do jednoho grafu. Spojte koncový bod s počátkem. Jaký význam má směrnice této přímky? Jak ji určíte?

► Řešení k nápovědě 2

Grafické řešení:



Průměrnou rychlost v_p zjistíme také graficky.

Nejprve narýsujeme graf funkce $x(t)$ (*viz obrázek*). Výchozí bod splývá s počátkem.

Průměrná rychlost je směrnicí přímky spojující výchozí bod a koncový bod. Z délek úseček Δt a Δx je zřejmé, že směrnice má hodnotu:

$$v_p = \frac{(12{,}8)\ \mathrm{km}}{(0{,}57)\ \mathrm{h}} \doteq 22\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Pro výpočet průměrné rychlosti v_p musíme znát celkovou dráhu Δx a dobu Δt . Je výhodné položit počátek souřadnicové osy x do místa, odkud automobil vyrazil (tedy x_0 = 0 km) a orientovat osu tak, aby směr jízdy byl kladný.

Poloha čerpací stanice na takto zvolené ose je:

$$x_2 = x_1 + x_c$$

A tedy:

$$\Delta x = x_2 - x_0 = x_2 = x_1 + x_c$$

Dobu jízdy určíme z rovnice:

$$t_1 = \frac{x_1 - x_0}{v} = \frac{x_1}{v}$$

Celková doba cesty řidiče (jízda i chůze) je:

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{x_1}{v} + t_2\,,$$

kde:

t_1…je doba jízdy,

t_2…je doba chůze.

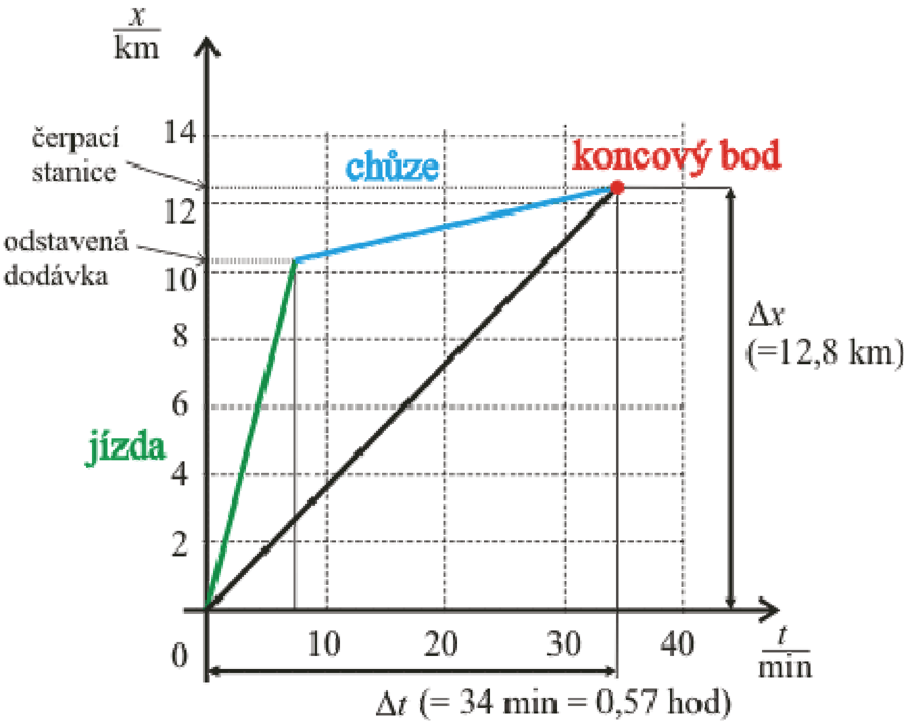
Dosadíme do vzorce pro výpočet průměrné rychlosti:

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 + x_c}{\frac{x_1}{v} + t_2}$$

Číselně (převedeme t_2 = 27 min = 0,45 h):

$$v_p = \frac{(10{,}4 + 2{,}4)\ \mathrm{km}}{(\frac{10{,}4}{86} + 0{,}45)\ \mathrm{h}} = 22\ \mathrm{km.h^{-1}}$$

Grafické řešení:



Průměrnou rychlost v_p zjistíme také graficky.

Nejprve narýsujeme graf funkce *x(t)* (*viz obrázek*). Výchozí bod splývá s počátkem.

Průměrná rychlost je směrnicí přímky spojující výchozí bod a koncový bod.
Z délek úseček Δt a Δx je zřejmé, že směrnice má hodnotu:

$$v_p = \frac{(12{,}8)\ \mathrm{km}}{(0{,}57)\ \mathrm{h}} \doteq 22\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

Odpověď

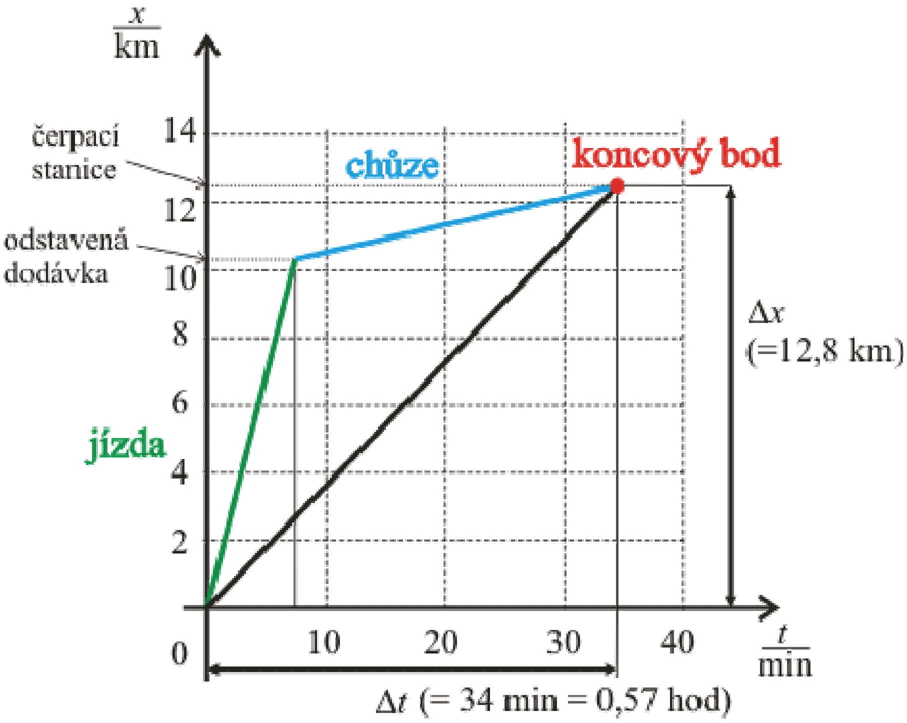
Průměrná rychlost v_p řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa, až do okamžiku příchodu k čerpací stanici, je:

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 + x_c}{\frac{x_1}{v} + t_2}$$

Číselně (převedeme t_2 = 27 min = 0,45 h):

$$v_p \doteq 22\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

Grafické řešení:



Průměrná rychlost je směrnicí přímky spojující výchozí bod a koncový bod:

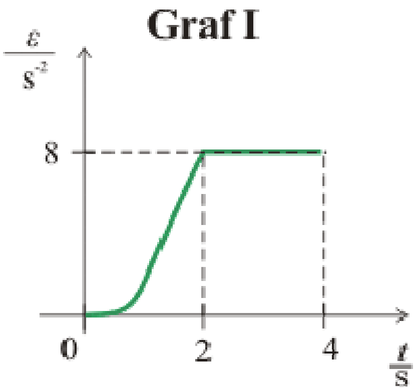
$$v_p = \frac{(12{,}8)\ \mathrm{km}}{(0{,}57)\ \mathrm{h}} \doteq 22\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

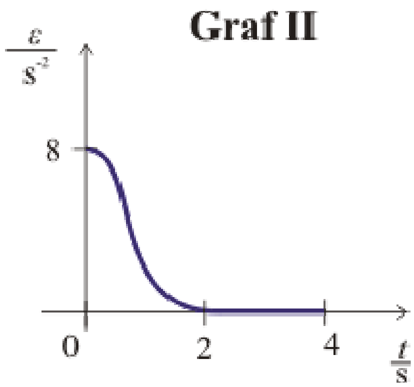
Pohyb daný graficky III

Kruhový kotouč se otáčí s úhlovým zrychlením ε, jehož závislost na čase je zadaná v grafech I a II. Bod A leží na okraji kotouče. Určete pro něj průběhy $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$, $\alpha(t)$ analyticky pro časový interval <0; 4s>.

V čase t = 0 s byl bod A v klidu a měl nulovou výchylku.

Graf I tvoří část paraboly a přímka, graf II sinusoida a přímka.





Poznámka: Parametrické rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.:

$$y(t) = 1\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}{\cdot}t$$

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

Nápověda 1 pro graf č. I: Závislost $\varepsilon(t)$

Rozdělte si průběh $\varepsilon(t)$ na dva intervaly.

Jaké funkce popisují na těchto intervalech průběh $\varepsilon(t)$?

Napište rovnice těchto funkcí. K tomu potřebujete alespoň dva body grafu, jejichž souřadnice znáte. Které to jsou?

► Řešení k nápovědě 1

Rozdělíme si průběh $\varepsilon(t)$ na dva intervaly,

interval <0 s; 2 s> a interval (2 s; 4 s>.

Graf č.I, interval <0 s; 2 s>:

Jedná se o graf funkce:

$$\varepsilon(t) = at^2$$

(parabola procházející počátkem).

Bod [2; 8] leží na parabole, platí tedy:

$$8 = a2^2$$
$$a = 2$$

Průběh funkce $\varepsilon(t)$ je tedy:

$$\varepsilon(t) = 2t^2$$

Graf č.I, interval (2 s; 4 s>:

Jedná se o graf funkce:

$$\varepsilon(t) = 8$$

Nápověda 2 pro graf č.I: Závislosti *ω*(*t*) a *α*(*t*)

Znáte závislost *ε(t)* úhlového zrychlení na čase. Jak odtud určíte závislost úhlové rychlosti na čase *ω(t)*? Postup je analogický jako u přímočarého pohybu.

Ze známé závislosti úhlové rychlosti na čase pak obdobným postupem určíte závislost úhlové výchylky na čase *α(t)* .

► Řešení k nápovědě 2

I. Graf č.I, interval <0 s; 2 s>:

Známe průběh funkce $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = 2t^2$$

Dále víme, že pro $\omega(t)$ platí:

$$\omega(t) = \int \varepsilon(t) dt$$

Tedy:

$$\omega(t) = \int 2t^2 dt = 2\frac{t^3}{3} + C$$

Konstantu *C* určíme z počátečních podmínek:

$$t = 0\,\mathrm{s}, \quad \omega(0) = 0$$
$$0 = 0 + C$$
$$C = 0$$

$$\omega(t) = \frac{2}{3}t^3$$

Pro $\alpha(t)$ platí:

$$\alpha(t) = \int \omega(t) dt$$

$$\alpha(t) = \int \frac{2}{3}t^3 dt = \frac{2}{3}\frac{t^4}{4} + C$$

Konstantu *C* určíme z počátečních podmínek:

$$t = 0\,\mathrm{s}, \quad \alpha(0) = 0$$

$$0 = 0 + C$$
$$C = 0$$

$$\alpha(t) = \frac{t^4}{6}$$

Graf č.I, interval (2 s; 4 s>:

Známe průběh funkce $\varepsilon(t)$ na tomto intervalu:

$$\varepsilon(t) = 8$$

Dále víme, že pro $\omega(t)$ platí:

$$\omega(t) = \int \varepsilon(t)dt$$

$$\omega(t) = \int 8dt = 8t + C$$

Známe průběh $\omega(t)$ na intervalu <0 s; 2 s>, z něj dostáváme hodnotu $\omega(2)$ v čase 2 s:

$$\omega(2) = \frac{2}{3} \cdot 2^3 = \frac{16}{3}$$

Pro konstantu *C* pak z počátečních podmínek platí:

$$t = 2\,\mathrm{s}, \quad \omega(2) = \frac{16}{3}$$
$$\frac{16}{3} = 8 \cdot 2 + C$$
$$C = -\frac{32}{3}$$

$$\omega(t) = 8t - \frac{32}{3}$$

Stejným způsobem pro $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \int \omega(t)dt$$

$$\alpha(t) = \int 8t - \frac{32}{3}dt = 4t^2 - \frac{32}{3}t + C$$

Známe průběh $\alpha(t)$ na intervalu <0 s; 2 s>, z něj dostáváme hodnotu $\alpha(2)$ v čase 2 s:

$$\alpha(2) = \frac{2^4}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Pro konstantu *C* pak z počátečních podmínek platí:

$$t = 2\,\mathrm{s}, \quad \alpha(2) = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3} = 4 \cdot 2^2 - \frac{32}{3} \cdot 2 + C$$
$$C = 8$$

$$\alpha(t) = 4t^2 - \frac{32}{3}t + 8$$

Nápověda 3 pro graf č.II: Závislost *ε*(*t*)

Postupujte podobně jako u grafu I. Rozdělte si průběh $\varepsilon(t)$ na dva intervaly.

Jaké funkce popisují na těchto intervalech průběh $\varepsilon(t)$?

Napište rovnice těchto funkcí.

▶ Řešení k nápovědě 3

Rozdělíme si průběh $\epsilon(t)$ na dva intervaly,

interval <0 s; 2 s> a interval (2 s; 4 s>.

Graf č.II, interval <0 s; 2 s>:

Jedná se o graf funkce cosinus. Obecně je popsán rovnicí:

$$\epsilon(t) = A\cos\frac{2\pi}{T}(t - C) + D$$

kde A je amplituda, T je perioda, C posunutí po vodorovné ose, D posunutí po svislé ose.

V našem konkrétním případě: A = 4 s^{-2}, T = 4 s, C = 0, D = 4 s^{-2}, a tedy:

$$\epsilon(t) = 4\cos\frac{\pi}{2}t + 4$$

Graf č.II, interval (2 s; 4 s>:

Jedná se o graf funkce:

$$\epsilon(t) = 0$$

Nápověda 4 pro graf č.II: Závislosti *ω*(*t*) a *α*(*t*)

Znáte závislost $\varepsilon(t)$ úhlového zrychlení na čase. Jak odtud určíte závislost úhlové rychlosti na čase $\omega(t)$? Postup je analogický jako u přímočarého pohybu.

Ze známé závislosti úhlové rychlosti na čase pak obdobným postupem určíte závislost úhlové výchylky na čase $\alpha(t)$.

Postup je stejný jako u grafu I.

▶ Řešení k nápovědě 4

Postupujeme analogicky jako u grafu č.I a nápovědy 2.

II. Graf č.II, interval <0 s, 2 s>:

Známe průběh funkce $\epsilon(t)$:

$$\epsilon(t) = 4\cos\frac{\pi}{2}t + 4$$

Dále víme, že pro $\omega(t)$ platí:

$$\omega(t) = \int \epsilon(t) dt$$

$$\omega(t) = \int (4\cos\frac{\pi}{2}t + 4) dt = \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t + 4t + C$$

Konstantu *C* určíme z počátečních podmínek:

$$t = 0\,\mathrm{s}, \quad \omega(0) = 0$$

$$0 = \frac{8}{\pi}\sin 0 + 0 + C$$

$$C = 0$$

$$\omega(t) = \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t + 4t$$

Pro $\alpha(t)$ platí:

$$\alpha(t) = \int \omega(t) dt$$

$$\alpha(t) = \int (\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t + 4t) dt = -\frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}t + 2t^2 + C$$

Konstantu *C* určíme z počátečních podmínek:

$$t = 0\,\mathrm{s}, \quad \alpha(0) = 0$$

$$0 = -\frac{16}{\pi^2}\cos 0 + 0 + C$$

$$C = \frac{16}{\pi^2}$$

$$\alpha(t) = -\frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}t + 2t^2 + \frac{16}{\pi^2}$$

Graf č.II, interval (2 s; 4 s>:

Známe průběh funkce $\epsilon(t)$ na tomto intervalu:

$$\epsilon(t) = 0$$

Dále víme, že pro $\omega(t)$ platí:

$$\omega(t) = \int \epsilon(t) dt$$

$$\omega(t) = \int 0dt = C$$

Známe průběh $\omega(t)$ na intervalu <0 s; 2 s>, z něj dostáváme hodnotu $\omega(2)$ v čase 2 s:

$$\omega(2) = \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}2 + 4{\cdot}2 = 8$$

Pro konstantu *C* pak z počátečních podmínek platí:

$$t = 2\,\mathrm{s}, \quad \omega(2) = 8$$
$$C = 8$$

$$\omega(t) = 8$$

Pro $\alpha(t)$ platí:

$$\alpha(t) = \int \omega(t)dt$$

$$\alpha(t) = \int 8dt = 8t + C$$

Známe průběh $\alpha(t)$ na intervalu <0 s; 2 s>, z něj dostáváme hodnotu $\alpha(2)$ v čase 2 s:

$$\alpha(2) = -\frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}2 + 2{\cdot}2^2 + \frac{16}{\pi^2} = \frac{32}{\pi^2} + 8$$

Pro konstantu *C* pak z počátečních podmínek platí:

$$t = 2\,\mathrm{s}, \quad \alpha(2) = \frac{32}{\pi^2} + 8$$

$$\frac{32}{\pi^2} + 8 = 8{\cdot}2 + C = 16 + C$$

$$C = \frac{32}{\pi^2} - 8$$

$$\alpha(t) = 8t + \frac{32}{\pi^2} - 8$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Rozdělíme si v obou případech průběh $\varepsilon(t)$ na dva intervaly,

interval <0 s; 2 s> a interval (2 s; 4 s>.

Graf č.I, interval <0 s; 2 s>:

Jedná se o graf funkce:

$$\varepsilon(t) = at^2$$

(parabola procházející počátkem).

Bod [2; 8] leží na parabole, platí tedy:

$$8 = a2^2$$
$$a = 2$$

Průběh funkce $\varepsilon(t)$ je tedy:

$$\varepsilon(t) = 2t^2$$

Známe průběh funkce $\varepsilon(t)$. Dále víme, že pro $\omega(t)$ platí:

$$\omega(t) = \int \varepsilon(t)dt$$

Tedy:

$$\omega(t) = \int 2t^2 dt = 2\frac{t^3}{3} + C$$

Konstantu *C* určíme z počátečních podmínek:

$$t = 0\,\mathrm{s}, \quad \omega(0) = 0$$
$$0 = 0 + C$$
$$C = 0$$

$$\omega(t) = \frac{2}{3}t^3$$

Pro $\alpha(t)$ platí:

$$\alpha(t) = \int \omega(t)dt$$

$$\alpha(t) = \int \frac{2}{3}t^3 dt = \frac{2}{3}\frac{t^4}{4} + C$$

Konstantu *C* určíme z počátečních podmínek:

$$t = 0\,\mathrm{s}, \quad \alpha(0) = 0$$
$$0 = 0 + C$$
$$C = 0$$

$$\alpha(t) = \frac{t^4}{6}$$

Graf č.I, interval (2 s; 4 s>:

Průběh funkce $\varepsilon(t)$ na tomto intervalu je:

$$\varepsilon(t) = 8$$

Dále víme, že pro $\omega(t)$ platí:

$$\omega(t) = \int \varepsilon(t)dt$$

$$\omega(t) = \int 8dt = 8t + C$$

Známe průběh $\omega(t)$ na intervalu <0 s; 2 s>, z něj dostáváme hodnotu $\omega(2)$ v čase 2 s:

$$\omega(2) = \frac{2}{3} \cdot 2^3 = \frac{16}{3}$$

Pro konstantu *C* pak z počátečních podmínek platí:

$$t = 2\,\mathrm{s}, \quad \omega(2) = \frac{16}{3}$$

$$\frac{16}{3} = 8 \cdot 2 + C$$

$$C = -\frac{32}{3}$$

$$\omega(t) = 8t - \frac{32}{3}$$

Stejným způsobem pro $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \int \omega(t)dt$$

$$\alpha(t) = \int 8t - \frac{32}{3}dt = 4t^2 - \frac{32}{3}t + C$$

Známe průběh $\alpha(t)$ na intervalu <0 s; 2 s>, z něj dostáváme hodnotu $\alpha(2)$ v čase 2 s:

$$\alpha(2) = \frac{2^4}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Pro konstantu *C* pak z počátečních podmínek platí:

$$t = 2\,\mathrm{s}, \quad \alpha(2) = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3} = 4 \cdot 2^2 - \frac{32}{3} \cdot 2 + C$$

$$C = 8$$

$$\alpha(t) = 4t^2 - \frac{32}{3}t + 8$$

II. Graf č.II, interval <0 s; 2 s>:

Postupujeme analogicky jako u grafu č.I.

Jedná se o graf funkce cosinus. Obecně je popsán rovnicí:

$$\varepsilon(t) = A\cos\frac{2\pi}{T}(t - C) + D$$

kde A je amplituda, T je perioda, C posunutí po vodorovné ose, D posunutí po svislé ose.

V našem konkrétním případě: A = 4 s^{-2}, T = 4 s, C = 0, D = 4 s^{-2}, a tedy:

$$\varepsilon(t) = \; = 4\cos\frac{\pi}{2}t + 4$$

Známe průběh funkce $\varepsilon(t)$. Dále víme, že pro $\omega(t)$ platí:

$$\omega(t) = \int \varepsilon(t)dt$$

$$\omega(t) = \int (4\cos\frac{\pi}{2}t + 4)dt = \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t + 4t + C$$

Konstantu *C* určíme z počátečních podmínek:

$$t = 0\text{ s}, \quad \omega(0) = 0$$

$$0 = \frac{8}{\pi}\sin 0 + 0 + C$$

$$C = 0$$

$$\omega(t) = \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t + 4t$$

Pro $\alpha(t)$ platí:

$$\alpha(t) = \int \omega(t)dt$$

$$\alpha(t) = \int (\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t + 4t)dt = -\frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}t + 2t^2 + C$$

Konstantu *C* určíme z počátečních podmínek:

$$t = 0\text{ s}, \quad \alpha(0) = 0$$

$$0 = -\frac{16}{\pi^2}\cos 0 + 0 + C$$

$$C = \frac{16}{\pi^2}$$

$$\alpha(t) = -\frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}t + 2t^2 + \frac{16}{\pi^2}$$

Graf č.II, interval (2 s; 4 s>:

Známe průběh funkce $\varepsilon(t)$ na tomto intervalu:

$$\varepsilon(t) = 0$$

Dále víme, že pro $\omega(t)$ platí:

$$\omega(t) = \int \varepsilon(t)dt$$

$$\omega(t) = \int 0dt = C$$

Známe průběh $\omega(t)$ na intervalu <0 s; 2 s>, z něj dostáváme hodnotu $\omega(2)$ v čase 2 s:

$$\omega(2) = \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}2 + 4\cdot 2 = 8$$

Pro konstantu *C* pak z počátečních podmínek platí:

$$t = 2\,\mathrm{s}, \quad \omega(2) = 8$$
$$C = 8$$

$$\omega(t) = 8$$

Pro $\alpha(t)$ platí:

$$\alpha(t) = \int \omega(t)dt$$

$$\alpha(t) = \int 8dt = 8t + C$$

Známe průběh $\alpha(t)$ na intervalu <0 s; 2 s>, z něj dostáváme hodnotu $\alpha(2)$ v čase 2 s:

$$\alpha(2) = -\frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}2 + 2\cdot 2^2 + \frac{16}{\pi^2} = \frac{32}{\pi^2} + 8$$

Pro konstantu *C* pak z počátečních podmínek platí:

$$t = 2\,\mathrm{s}, \quad \alpha(2) = \frac{32}{\pi^2} + 8$$

$$\frac{32}{\pi^2} + 8 = 8\cdot 2 + C = 16 + C$$

$$C = \frac{32}{\pi^2} - 8$$

$$\alpha(t) = 8t + \frac{32}{\pi^2} - 8$$

Odpověď

Graf č.I, interval <0 s; 2 s>:

$$\varepsilon = 2t^2$$

$$\omega(t) = \frac{2}{3}t^3$$

$$\alpha(t) = \frac{t^4}{6}$$

Graf č.I, interval (2 s; 4 s>:

$$\varepsilon(t) = 8$$

$$\omega(t) = 8t - \frac{32}{3}$$

$$\alpha(t) = 4t^2 - \frac{32}{3}t + 8$$

Graf č.II, interval <0 s; 2 s>:

$$\varepsilon(t) = 4\cos\frac{\pi}{2}t + 4$$

$$\omega(t) = \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t + 4t$$

$$\alpha(t) = -\frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}t + 2t^2 + \frac{16}{\pi^2}$$

Graf č.II, interval (2 s; 4 s>:

$$\varepsilon(t) = 0$$

$$\omega(t) = 8$$

$$\alpha(t) = 8t + \frac{32}{\pi^2} - 8$$

Pohyb loďky

Z místa A plave proti proudu řeky loďka do místa B a odtud zpět do místa A. Rychlost loďky vzhledem k vodě je v obou případech stejná, a to 4 km·h^{-1}, rychlost proudu je 1,6 km·h^{-1}. Určete poměr doby, za kterou vykoná loďka dráhu z místa A do místa B a zpět, a doby , kterou by loďka potřebovala na vykonání této dráhy po jezeře.

Zápis

v = 4 km·h^{-1}	rychlost loďky vzhledem k vodě
r = 1,6 km·h^{-1}	rychlost proudu
t	doba, za kterou loďka ujede dráhu z A do B a zpět
t'	doba, za kterou loďka ujede stejnou dráhu po jezeře

$$\frac{t}{t'} = ?$$

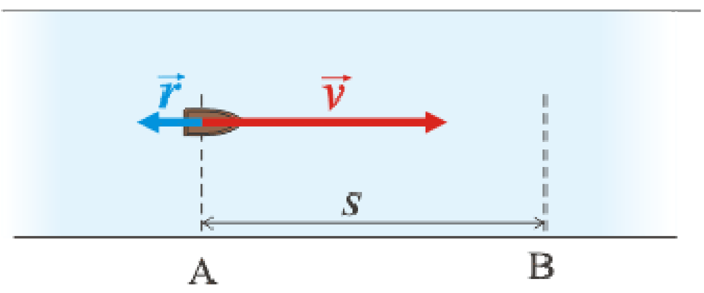
Nápověda 1: Rychlost loďky, která pluje z A do B

Nakreslete si obrázek pro plavbu proti proudu a vyznačte do něj rychlost loďky a rychlost proudu.

Jaká je rychlost loďky vzhledem ke břehu, pluje-li proti proudu? Bude větší nebo menší než kdyby plula loďka po klidné vodě? O kolik? Za jaký čas urazí loďka touto rychlostí vzdálenost AB?

▶ Řešení k nápovědě 1

Obr.1 (proti proudu):



Předpokládejme, že vzdálenost AB se rovná s km.

Rychlost loďky proti proudu vzhledem k břehu je daná rozdílem rychlosti loďky vzhledem k proudu a rychlosti proudu , tedy:

$$v_1 = v - r\,.$$

Popluje-li loďka po klidné vodě, její rychlost bude větší právě o rychlost proudu r.

Loďka vykoná dráhu s proti proudu za čas:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{v-r}\,.$$

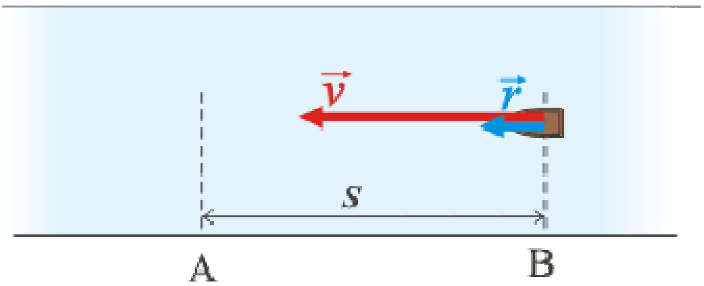
Nápověda 2: Rychlost loďky, která pluje z B do A

Nakreslete si obrázek pro plavbu po proudu a vyznačte do něj rychlost loďky a rychlost proudu.

Jaká bude rychlost loďky vzhledem ke břehu, pluje-li po proudu? Za jaký čas urazí loďka touto rychlostí vzdálenost BA? Jaký je celkový čas plavby?

▶ Řešení k nápovědě 2

Obr.2 (po proudu):



Rychlost loďky po proudu vzhledem k břehu je daná součtem obou dvou rychlostí:

$$v_2 = v + r\,.$$

Loďka urazí dráhu *s* po proudu za čas:

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{v+r}\,.$$

Loďka se dostane z místa A do místa B a zpět za čas *t* :

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v-r} + \frac{s}{v+r} = s\left(\frac{1}{v-r} + \frac{1}{v+r}\right) = \frac{2v}{v^2-r^2}\,s\,.$$

Nápověda 3: Poměr časů

Čas, za který urazí loďka vzdálenost 2AB na klidné vodě rychlostí *v* jistě snadno určíte, stejně jako hledaný poměr časů.

▶ Řešení k nápovědě 3

Na jezeře by loďka přeplula vzdálenost 2AB rychlostí *v* za čas *t´*:

$$t' = \frac{s}{v} + \frac{s}{v} = \frac{2}{v}\,s\,.$$

Určíme podíl *t*/*t´*:

$$\frac{t}{t'} = \frac{\frac{2v}{v^2-r^2}\,s}{\frac{2}{v}\,s} = \frac{v^2}{v^2-r^2} = \frac{1}{1-\frac{r^2}{v^2}}\,.$$

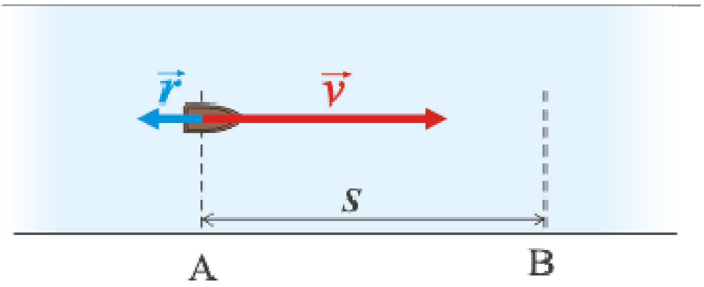
Číselně:

$$\frac{t}{t'} = \frac{4^2}{4^2-1{,}6^2} = \frac{16}{13{,}44} \doteq 1{,}19\,.$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Předpokládejme, že vzdálenost AB se rovná *s* km.

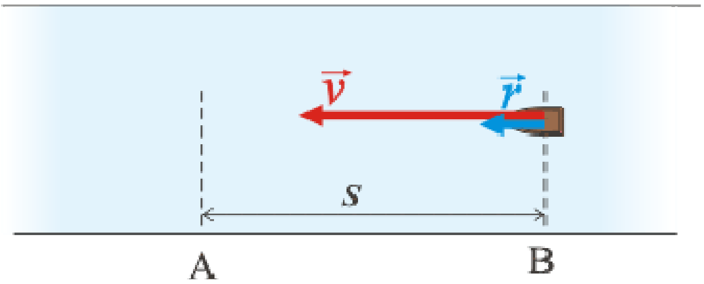
Obr.1(proti proudu):



Rychlost loďky proti proudu vzhledem k břehu je daná rozdílem rychlosti loďky vzhledem k proudu a rychlosti proudu (*obr.1*), tedy:

$$v_1 = v - r\,.$$

Obr.2(po proudu):



Rychlost loďky po proudu vzhledem k břehu je daná součtem obou dvou rychlostí (*obr.2*):

$$v_2 = v + r\,.$$

Loďka urazí dráhu *s* proti proudu za čas:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{v-r}\,.$$

a po proudu za čas:

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{v+r}\,.$$

Loďka se dostane z místa A do místa B a zpět za čas *t* :

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v-r} + \frac{s}{v+r} = s\left(\frac{1}{v-r} + \frac{1}{v+r}\right) = \frac{2v}{v^2-r^2}\,s\,.$$

Na jezeře by loďka přeplula tuto vzdálenost rychlostí *v* za čas *t´*:

$$t' = \frac{s}{v} + \frac{s}{v} = \frac{2}{v}s\,.$$

Určíme podíl *t*/*t´*:

$$\frac{t}{t'} = \frac{\frac{2v}{v^2-r^2}\,s}{\frac{2}{v}\,s} = \frac{v^2}{v^2-r^2} = \frac{1}{1-\frac{r^2}{v^2}}\,.$$

Číselně:

$$\frac{t}{t'} = \frac{4^2}{4^2-1{,}6^2} = \frac{16}{13{,}44} \doteq 1{,}19\,.$$

Odpověď

Poměr doby *t*, za kterou loďka urazí dráhu z místa A do místa B a zpět na řece, a doby *t*´, kterou by loďka potřebovala na proplutí této dráhy po jezeře je:

$$\frac{t}{t'} = \frac{\frac{2v}{v^2-r^2}s}{\frac{2}{v}s} = \frac{v^2}{v^2-r^2} = \frac{1}{1-\frac{r^2}{v^2}}.$$

Číselně:

$$\frac{t}{t'} = \frac{4^2}{4^2-1{,}6^2} = \frac{16}{13{,}44} \doteq 1{,}19\,.$$

Pohyb daný graficky I

Na obrázku jsou grafy závislosti dráhy na čase přímočarých pohybů autíček A, B, C, D.

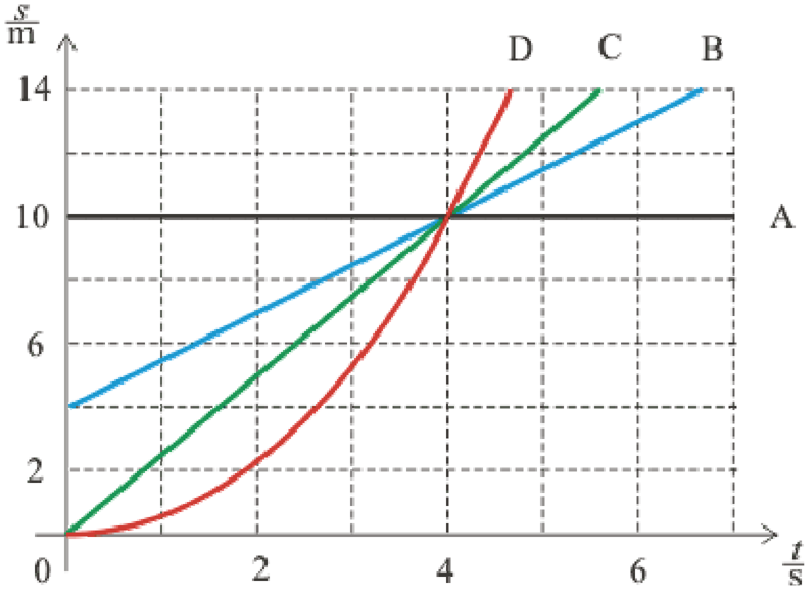
a) Charakterizujte slovy pohyb jednotlivých autíček.

b) Určete průměrnou velikost rychlosti jednotlivých autíček v časovém intervalu od 0 s do 4 s.

c) Určete velikost okamžité rychlosti jednotlivých autíček v čase 4 s.

d) Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti rychlosti na čase pro jednotlivá autíčka.

e) Určete celkovou uraženou dráhu v čase t_1 = 10 s jednotlivých autíček (včetně případné počáteční nenulové dráhy), pokud by pohyb pokračoval podle uvedené grafické závislosti.



Nápověda 1 pro a): Popisy pohybů

Graf A: Mění se dráha s časem?

Graf B,C: Jaká matematická funkce popisuje závislost dráhy na čase těchto pohybů? Co můžete říct o přírůstku dráhy za stejné časové intervaly u těchto pohybů a co o rychlosti?

Graf D: Jaká matematická funkce popisuje závislost dráhy na čase u tohoto pohybu? Jak se bude měnit s časem rychlost tohoto pohybu?

▶ Řešení k nápovědě 1

Graf A:

Dráha se nemění. Autíčko je v klidu.

Graf B, C:

Jedná se o lineární závislost dráhy na čase.

Za stejný časový interval vzroste dráha u těchto pohybů o stejnou hodnotu.

Rychlost pohybu se nemění.

Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb. V případě autíčka B je počáteční dráha rovna 4 m, v případě autíčka C je počáteční dráha nulová.

Graf D:

Grafem dráhy je parabola – dráha narůstá kvadraticky s časem.

Rychlost pak roste lineárně s časem.

Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený přímočarý.

Nápověda 2 pro b): Uražená dráha, průměrná rychlost

Jakou dráhu urazila autíčka v časovém intervalu od 0 s do 4 s ?

Jak spočítáte průměrnou velikost rychlosti, znáte-li dráhu a čas?

▶ Řešení k nápovědě 2

Průměrná velikost rychlosti v_p je určena podílem uražené dráhy a odpovídajícího časového intervalu, tedy 4 s:

A: uražená dráha $s_4 = 0,\ v_p = 0$

B: uražená dráha $s_4 = 6\ \mathrm{m},\ v_p = \frac{6}{4}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 1{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

C: uražená dráha $s_4 = 10\ \mathrm{m},\ v_p = \frac{10}{4}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 2{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

D: uražená dráha $s_4 = 10\ \mathrm{m},\ v_p = \frac{10}{4}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 2{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

Nápověda 3 pro c): Okamžitá rychlost

Graf A, B, C: Jak se s časem mění rychlost u těchto pohybů?

Kde je v grafech *s(t)* „schovaná“ rychlost?

Graf D: Jak se s časem mění dráha rovnoměrně zrychleného pohybu?

Umíte s využitím hodnot z grafu spočítat zrychlení? Co pak platí pro okamžitou rychlost?

▶ Řešení k nápovědě 3

Graf A, B, C: Rychlost se s časem nemění. Okamžitá rychlost je tedy rovna průměrné rychlosti spočítané v b).

Rychlost je daná sklonem přímek – jejich směrnicí.

Graf D:

Dráha rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu je daná vztahem:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

(Dráha a rychlost v čase t = 0 s byla rovna nule.)

Z grafu odečteme:

v čase $t = 4\ \mathrm{s}$ je $s(4) = 10\ \mathrm{m}$

Platí tedy:

$$10\ \text{m} = \frac{a \cdot 4^2\ \text{s}^2}{2}$$

Odtud:

$$a = 1{,}25\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Pro okamžitou rychlost platí:

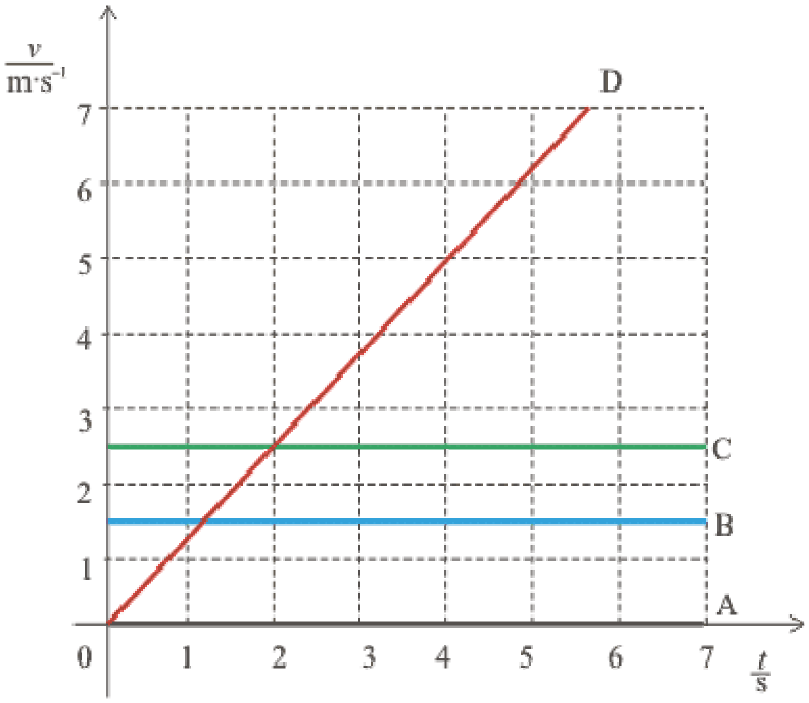
$$v = at = (1{,}25 \cdot 4)\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Nápověda 4 pro d): Grafy *v* = *v* (*t*)

Z odpovědí na předchozí nápovědy víte, jak se s časem mění rychlost u jednotlivých pohybů a znáte i její velikost v určitém čase. Stačí to jen zakreslit do grafu.

► Řešení k nápovědě 4

Grafy závislostí rychlostí na čase pohybů jednotlivých autíček:



Rychlost autíček A, B, C se s časem neměnila:

Pohyb autíčka A: $v_A = 0$

Pohyb autíčka B: $v_B = 1{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Pohyb autíčka C: $v_C = 2{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Pohyb autíčka D:

Z grafu závislosti dráhy na čase:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

$$10\ \text{m} = \frac{a \cdot 4^2\ \text{s}^2}{2}$$

$$a = 1{,}25\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Pro závislost rychlosti na čase platí:

$$v = at$$
$$v = 1{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot t$$

Nápověda 5 pro e): Uražená dráha

Vyjádřete matematicky závislosti dráhy na čase $s(t)$ dané grafem. (Pro graf D najdete odpověď v řešení bodu c)).

Pak zjistěte hodnotu dráhy pro $t = t_1 = 10$ s.

► Řešení k nápovědě 5

A: Autíčko je stále v klidu:

$$s_0 = s_1 = 10\ \mathrm{m}$$

B: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb s nenulovou počáteční dráhou:

$$s_1 = s_0 + v_B t_1 = (4 + 1{,}5 \cdot 10)\ \mathrm{m} = 19\ \mathrm{m}$$

C: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb s nulovou počáteční dráhou:

$$s_1 = v_C t_1 = (2{,}5 \cdot 10)\ \mathrm{m} = 25\ \mathrm{m}$$

D: Jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční dráhou:

$$s_1 = \frac{a t_1^2}{2} = \frac{(1{,}25 \cdot 100)\ \mathrm{m}}{2} = 62{,}5\ \mathrm{m}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

a) **Graf A:** Dráha autíčka A se s časem nemění. Autíčko je v klidu. Počáteční uražená dráha je 10 m.

Graf B: Jedná se o lineární závislost dráhy na čase. Rychlost pohybu se nemění. Jde o rovnoměrný přímočarý pohyb s počáteční uraženou dráhou 4 m.

Graf C: Jedná se o lineární závislost dráhy na čase. Rychlost pohybu se nemění. Jde o rovnoměrný přímočarý pohyb s nulovou počáteční uraženou dráhou.

Graf D: Grafem dráhy je parabola – dráha narůstá kvadraticky s časem. Rychlost pak roste lineárně s časem. Jedná se o rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb s nulovou počáteční dráhou.

b) Průměrná velikost rychlosti v_p je určena podílem uražené dráhy a odpovídajícího časového intervalu, tedy 4 s:

A: uražená dráha $s_4 = 0,\ v_p = 0$

B: uražená dráha $s_4 = 6\ \mathrm{m},\ v_p = \frac{6}{4}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

C: uražená dráha $s_4 = 10\ \mathrm{m},\ v_p = \frac{10}{4}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

D: uražená dráha $s_4 = 10\ \mathrm{m},\ v_p = \frac{10}{4}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

c) **Graf A, B, C:** Rychlost se s časem nemění. Okamžitá rychlost je tedy rovna průměrné rychlosti spočítané v b).

Rychlost je daná sklonem přímek – jejich směrnicí.

Graf D:

Dráha rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu je daná vztahem:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

(Dráha a rychlost v čase t = 0 s byla rovna nule.)

Z grafu odečteme:

v čase $t = 4\ \mathrm{s}$ je $s(4) = 10\ \mathrm{m}$

Platí tedy:

$$10\ \mathrm{m} = \frac{a \cdot 4^2\ \mathrm{s}^2}{2}$$

Odtud:

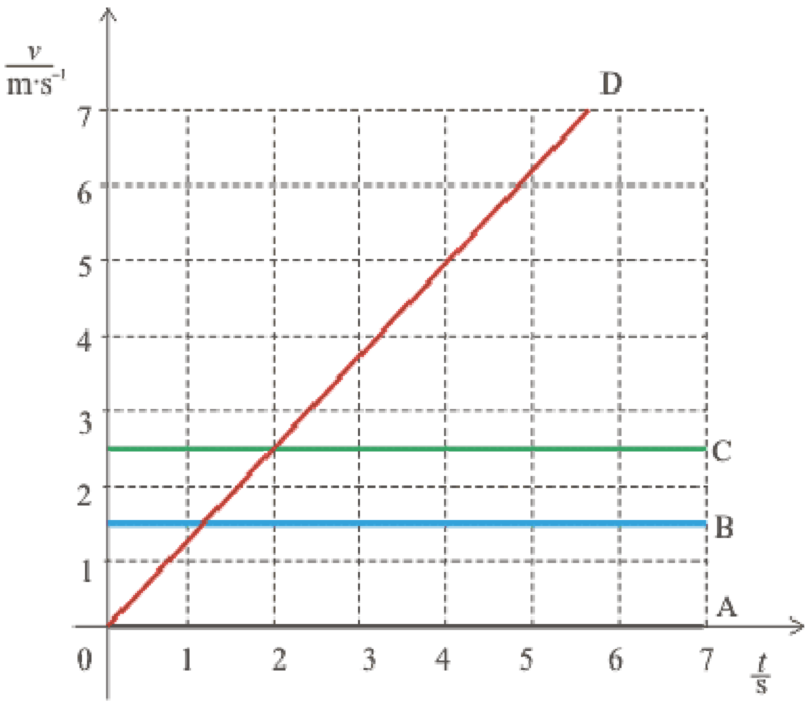
$$a = 1{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Pro okamžitou rychlost platí:

$$v = at = (1{,}25 \cdot 4)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

d) Z odpovědí v předchozích částech víme, jak se s časem mění rychlost u jednotlivých pohybů a známe i její velikost v určitém čase. Stačí to jen zakreslit do grafu.

Grafy závislostí rychlostí na čase jednotlivých pohybů:



Rychlost autíček A, B, C se s časem neměnila:

Pohyb autíčka A: $v_A = 0$

Pohyb autíčka B: $v_B = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Pohyb autíčka C: $v_C = 2{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

Pohyb autíčka D:

Z grafu závislosti dráhy na čase:

$$s = \frac{at^2}{2}$$
$$10\ \mathrm{m} = \frac{a{\cdot}4^2\ \mathrm{s}^2}{2}$$
$$a = 1{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

Pro závislost rychlosti na čase platí:

$$v = at$$
$$v = 1{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}{\cdot}t$$

e) Vyjádříme matematicky závislosti dráhy na čase $s(t)$ dané grafem. (Pro graf D je odpověď v řešení bodu c)).

Pak zjistíme hodnotu dráhy pro $t = t_1 = 10$ s.

A: Autíčko je stále v klidu:

$$s_0 = s_1 = 10\ \mathrm{m}$$

B: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb s nenulovou počáteční dráhou:

$$s_1 = s_0 + v_B t_1 = (4 + 1{,}5{\cdot}10)\ \mathrm{m} = 19\ \mathrm{m}$$

C: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb s nulovou počáteční dráhou:

$$s_1 = v_C t_1 = (2{,}5.10)\ \mathrm{m} = 25\ \mathrm{m}$$

D: Jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční dráhou:

$$s_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{(1{,}25{\cdot}100)\ \mathrm{m}}{2} = 62{,}5\ \mathrm{m}$$

Odpověď

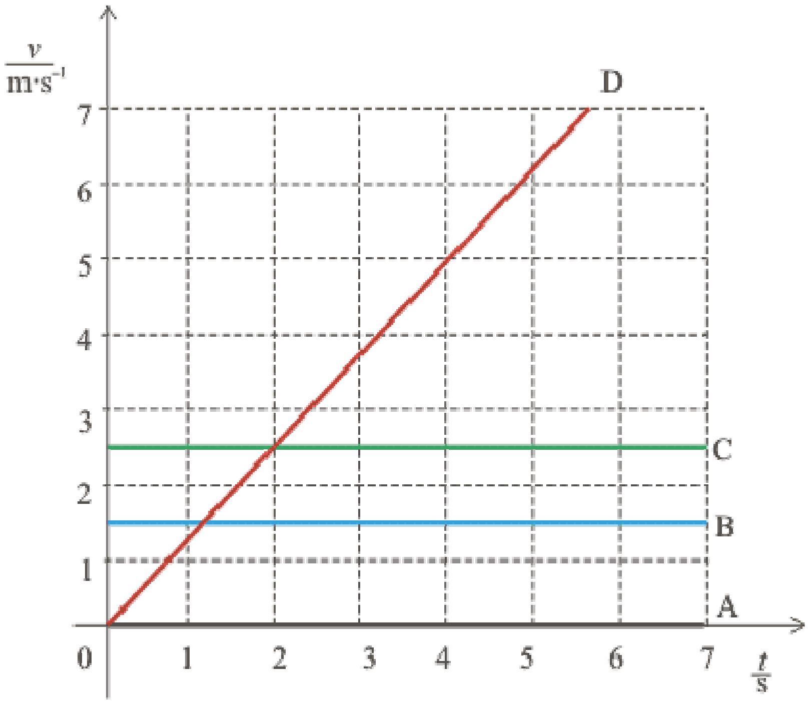
a) **A:** Autíčko je v klidu.
B, C: Jedná se o rovnoměrný přímočarý pohyb.
D: Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený přímočarý.

b) **A:** Průměrná velikost rychlosti v časovém intervalu od 0 s do 4 s je nulová.
B: Průměrná velikost rychlosti v časovém intervalu od 0 s do 4 s je 1,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
C: Průměrná velikost rychlosti v časovém intervalu od 0 s do 4 s je 2,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
D: Průměrná velikost rychlosti v časovém intervalu od 0 s do 4 s je 2,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

c) **A:** Okamžitá rychlost v čase 4 s je nulová.
B: Velikost okamžité rychlosti v čase 4 s je 1,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
C: Velikost okamžité rychlosti v čase 4 s je 2,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

D: Velikost okamžité rychlosti v čase 4 s je 5 m·s^{-1}.

d)



e) **A:** Celková uražená dráha v čase 10 s je 10 m.

B: Celková uražená dráha v čase 10 s je 19 m.

C: Celková uražená dráha v čase 10 s je 25 m.

D: Celková uražená dráha v čase 10 s je 62,5 m.

Plavba voru

Vor pluje přes řeku stálou rychlostí o velikosti *w* vzhledem k vodě kolmo na její proud. Šířka řeky je *d*. Předpokládejte, že voda unáší vor tak, že složka rychlosti voru vyvolaná proudící vodou je kvadraticky rostoucí v závislosti na vzdálenosti od břehů. U břehů je nulová, ve středu řeky má maximální hodnotu *u*.

Určete průběh rychlosti $\vec{v}(t)$ voru vzhledem ke břehu a průběh jeho polohy $\vec{r}(t)$.

Jaká je poloha místa, ve kterém vor přistane u druhého břehu?

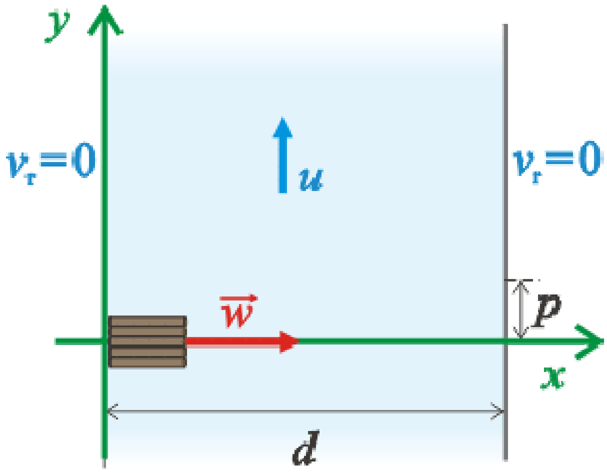
Nápověda 1: Obrázek situace

Nakreslete si obrázek situace. Označte si v něm souřadné osy a pohyb voru si rozložte na dva pohyby, ve směru osy *x* (kolmo na proud) a ve směru osy *y* (po toku řeky).

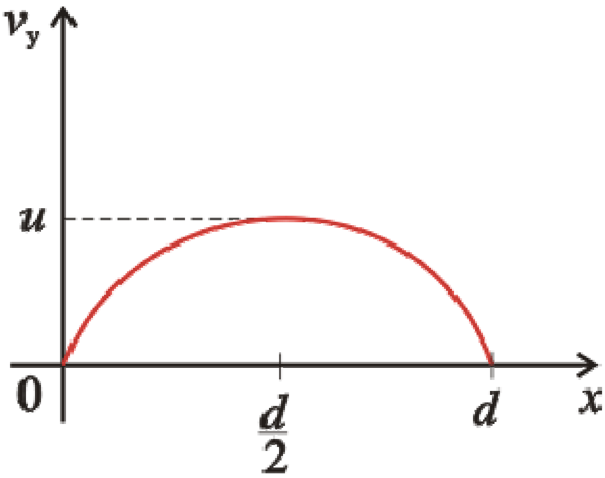
Nakreslete si i průběh složky rychlosti voru v_y vyvolané proudící vodou.

► Řešení k nápovědě 1

Obrázek 1 – situace:



Obrázek 2 – průběh složky rychlosti vyvolané proudící vodou:



Nápověda 2: Průběh rychlosti voru

Vyjádřete si za pomoci obrázku z předchozí nápovědy složky rychlosti voru v_x a v_y.

Jakou funkcí vyjádříte rychlost ve směru osy *y*?

► Řešení k nápovědě 2

Na *obrázku 1* je v_r velikost rychlosti proudu řeky, velikost rychlosti voru vzhledem ke břehům máme označenou *v*, složky rychlosti voru jsou v_x, v_y.

Jedná se o skládání dvou pohybů (ve směru osy *x* a ve směru osy *y*).

Podle *obrázků 1,2* platí:

$$v_x = w \qquad (1)$$

$$v_y = ax^2 + bx + c \qquad (2)$$

Průběh rychlosti voru ve směru osy *y* má tvar paraboly, popisuje ho kvadratická funkce.

Určení konstant *a, b, c* :

Na parabole leží body:

$$[0, 0]$$

$$\left[\frac{d}{2}, u\right]$$

$$[d, 0]$$

Dosazením bodu [0, 0] dostaneme:

$$c = 0\,.$$

Dosazením bodu $\left[\frac{d}{2}, u\right]$ dostaneme:

$$a\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b\frac{d}{2} = u\,. \qquad (3)$$

Dosazením bodu [d, 0] dostaneme:

$$ad^2 + bd = 0\,. \qquad (4)$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *a,b*:

Z (4):

$$a = -\frac{b}{d}\,.$$

Dosadíme do (3):

$$-\frac{bd^2}{4d} + \frac{bd}{2} = u$$

$$\frac{bd}{4} = u$$

$$b = \frac{4u}{d}$$

$$a = -\frac{4u}{d^2}$$

Dosadíme za konstanty do (2):

$$v_y = -\frac{4u}{d^2}x^2 + \frac{4u}{d}x\,,$$

kde z (1) $x = wt$.

$$v_y = -\frac{4u}{d^2}w^2t^2 + \frac{4u}{d}wt \qquad (5)$$

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$
$$\vec{v}(t) = w\vec{i} + \left(\frac{4u}{d}wt - \frac{4u}{d^2}w^2t^2\right)\vec{j}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Nápověda 3: Průběh polohy voru

Znáte složky rychlosti voru. Z nich určete souřadnice voru a průběh jeho polohového vektoru.

► Řešení k nápovědě 3

Složky rychlosti voru jsou podle (1) a (5):

$$v_x = w$$
$$v_y = -\frac{4u}{d^2}\,w^2t^2 + \frac{4u}{d}\,wt$$

Souřadnice jsou pak:

$$x = wt$$
$$y = \int v_y\,\mathrm{d}t = \int\left(-\frac{4u}{d^2}w^2t^2 + \frac{4u}{d}wt\right)\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{4u}{3d^2}w^2t^3 + \frac{4u}{2d}wt^2 + k$$

Pro t = 0 s je y = 0 m, tedy k = 0:

$$y = -\frac{4u}{3d^2}\,w^2t^3 + \frac{2u}{d}\,wt^2 \qquad (6)$$

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j}\,,$$
$$\vec{r}(t) = wt\vec{i} + \left(\frac{2u}{d}\,wt^2 - \frac{4u}{3d^2}\,w^2t^3\right)\vec{j}\,,$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Nápověda 4: Poloha místa přistání voru

Potřebujete zjistit souřadnice místa, ve kterém vor na druhém břehu přistane. Šířku řeky znáte, takže i souřadnici *x*. Znáte také složky rychlosti voru. Vyjádřete si čas, za který vor přejede řeku. Pak můžete určit i jaká bude v tomto čase souřadnice *y*.

► Řešení k nápovědě 4

Vor se přes řeku dostane za čas $t = \frac{d}{w}$, neboť rychlostí *w* ve směru osy *x* má urazit vzdálenost *d*.

Poloha místa, ve kterém vor přistane, má souřadnice:

$$x = d\,.$$

Souřadnice *y* v čase $t = \frac{d}{w}$ bude podle (6):

$$y = \frac{2uw}{d}t^2 - \frac{4uw^2}{3d^2}t^3 = \frac{2uw}{d}\frac{d^2}{w^2} - \frac{4uw^2}{3d^2}\frac{d^3}{w^3}$$

$$y = \frac{2ud}{w} - \frac{4ud}{3w} = \frac{2ud}{3w}$$

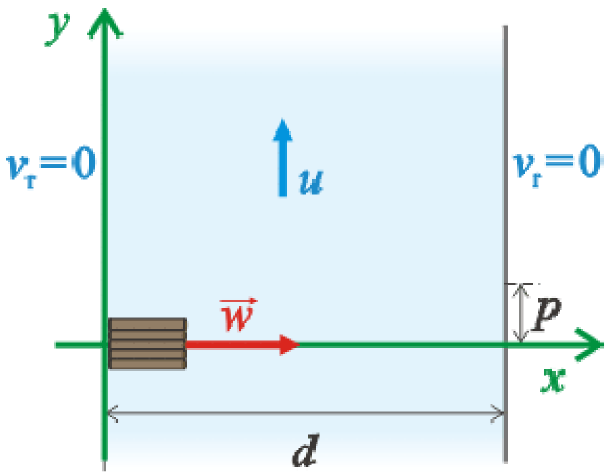
Souřadnice místa, kde vor přistane, jsou:

$$x = d\,,$$

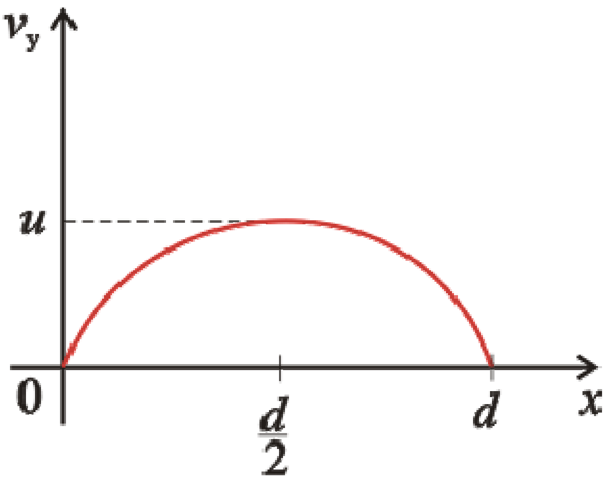
$$y = \frac{2ud}{3w}\,.$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

Obrázek 1 – situace:



Obrázek 2 – průběh složky rychlosti vyvolané proudící vodou:



Na *obrázku 1* je v_r velikost rychlosti proudu řeky, velikost rychlosti voru vzhledem ke břehům máme označenou v, složky rychlosti voru jsou v_x, v_y.

Jedná se o skládání dvou pohybů (ve směru osy x a ve směru osy y).

Průběh rychlosti voru

Podle *obrázků 1,2* platí:

$$v_x = w \tag{1}$$

$$v_y = ax^2 + bx + c \tag{2}$$

Průběh rychlosti voru ve směru osy y má tvar paraboly, popisuje ho kvadratická funkce.

Určení konstant a, b, c :

Na parabole leží body:

$$[0, 0]$$

$$\left[\frac{d}{2}, u\right]$$

$$[d, 0]$$

Dosazením bodu [0, 0] dostaneme:

$$c = 0\,.$$

Dosazením bodu $\left[\frac{d}{2}, u\right]$ dostaneme:

$$a\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b\frac{d}{2} = u\,. \tag{3}$$

Dosazením bodu [d, 0] dostaneme:

$$ad^2 + bd = 0\,. \tag{4}$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a,b:

Z (4):

$$a = -\frac{b}{d}\,.$$

Dosadíme do (3):

$$-\frac{bd^2}{4d} + \frac{bd}{2} = u$$

$$\frac{bd}{4} = u$$

$$b = \frac{4u}{d}$$

$$a = -\frac{4u}{d^2}$$

Dosadíme za konstanty do (2):

$$v_y = -\frac{4u}{d^2}x^2 + \frac{4u}{d}x\,,$$

kde z (1) $x = wt$.

$$v_y = -\frac{4u}{d^2}w^2t^2 + \frac{4u}{d}wt \qquad (5)$$

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = w\vec{i} + \left(\frac{4u}{d}wt - \frac{4u}{d^2}w^2t^2\right)\vec{j}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Místo přistání voru

Vor se přes řeku dostane za čas $t = \frac{d}{w}$, neboť rychlostí *w* ve směru osy *x* má urazit vzdálenost *d*.

Poloha místa, ve kterém vor přistane, má souřadnice:

$$x = d\,.$$

Souřadnice *y* v čase $t = \frac{d}{w}$ bude podle (6):

$$y = \frac{2uw}{d}t^2 - \frac{4uw^2}{3d^2}t^3 = \frac{2uw}{d}\frac{d^2}{w^2} - \frac{4uw^2}{3d^2}\frac{d^3}{w^3}$$

$$y = \frac{2ud}{w} - \frac{4ud}{3w} = \frac{2ud}{3w}$$

Souřadnice místa, kde vor přistane, jsou:

$$x = d\,,$$

$$y = \frac{2ud}{3w}\,.$$

Odpověď

Průběh $\vec{v}(t)$ rychlosti voru vzhledem ke břehu je:

$$\vec{v}(t) = w\vec{i} + \left(\frac{4u}{d}wt - \frac{4u}{d^2}w^2t^2\right)\vec{j}\,,$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Průběh $\vec{r}(t)$ polohy voru je:

$$\vec{r}(t) = wt\vec{i} + \left(\frac{2u}{d}wt^2 - \frac{4u}{3d^2}w^2t^3\right)\vec{j},$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os.

Poloha místa, ve kterém vor přistane u druhého břehu je:

$$x = d,$$

$$y = \frac{2ud}{3w}.$$

Jak dlouhý je bazén?

Dva plavci – Karel a Petr – trénují na sousedních drahách bazénu. Odstartují ve stejný okamžik a oba plavou rychlostí konstantní velikosti. Karel je lepší plavec, proto předežene Petra, doplave na konec dráhy a vrací se zpět. Na zpáteční cestě potká Petra právě 5 metrů od konce dráhy, plave dál, doplave na místo startu, otočí se a plave opět zpátky. Přitom potká Petra ve vzdálenosti od místa startu rovné jedné pětině délky bazénu. Jak dlouhý je bazén?

Předpokládejte, že se oba plavci pohybují stále rychlostí konstantní velikosti (zanedbejte tedy změny velikosti rychlosti při otočkách).

Zápis

$s = 5\ \mathrm{m}$	vzdálenost od konce dráhy, kde se Petr a Karel poprvé potkají
$n = 5$	místo druhého setkání v jedné *n*-tině bazénu
$x = ?\ (\mathrm{m})$	délka bazénu

Rozbor:

Zaměříme se na okamžiky, kdy se oba plavci potkali. Zapíšeme, jaká byla vzdálenost, kterou plavci do těchto okamžiků uplavali, a to jak pomocí neznámé délky bazénu, tak pomocí rychlosti, kterou plavali. Zjistíme, co v obou případech platí pro poměr jejich rychlostí.

Nápověda 1: První setkání Karla a Petra, poměr jejich drah

Označte si délku bazénu x .

Vyjádřete si celkovou dráhu, kterou uplaval Karel do prvního setkání a totéž udělejte pro Petra.

Čemu je roven poměr těchto drah?

Uvědomte si, co platí pro čas, za který tyto dráhy uplavali.

► Řešení k nápovědě 1

Předpokládejme, že oba plavci se pohybují rovnoměrně přímočaře. Při prvním setkání plavců (v čase *t*) musí platit:

$$v_k t = x + s$$

v_k … rychlost Karla

$x + s$ … dráha, kterou uplaval Karel do chvíle, než potkal Petra.

$$v_p t = x - s$$

v_p … rychlost Petra

$x - s$ … dráha, kterou uplaval Petr do chvíle, než potkal Karla

Čas *t*, za který Petr a Karel tyto dráhy uplavali, musí být stejný, protože se spolu setkali.

Proto je poměr jejich celkových drah, které uplavali do prvního setkání, a poměr jejich rychlostí shodný.

Pro poměr rychlostí obou plavců platí:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x-s}{x+s}\,. \qquad (1)$$

Nápověda 2: Druhé setkání Karla a Petra, poměr jejich drah

Obdobně si vyjádřete dráhy, které Karel a Petr uplavali do druhého setkání.

Co opět platí pro jejich poměr?

► Řešení k nápovědě 2

Při druhém setkání plavců (v čase *t´*) už Karel uplaval dvě celé délky bazénu a ještě jednu *n*-tinu bazénu, tedy:

$$v_k t' = 2x + \frac{1}{n}x\,.$$

Petr zatím uplaval jen jednu délku bazénu a část délky bazénu, ve které se setkal s Karlem (protože Karel uplaval $\frac{1}{n}$ bazénu, Petr musel uplavat $\frac{n-1}{n}$ bazénu):

$$v_p t' = x + \frac{n-1}{n}x\,.$$

Pro poměr rychlostí obou plavců platí:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x + \frac{n-1}{n}x}{2x + \frac{1}{n}x} = \frac{1 + \frac{n-1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{2n-1}{2n+1}\,. \qquad (2)$$

Nápověda 3: Porovnání obou poměrů drah

Porovnejte oba poměry drah. Stačí nám to k výpočtu délky bazénu?

► Řešení k nápovědě 3

Srovnáním vztahů (1) a (2) z předchozích nápověd dostáváme:

$$\frac{x-s}{x+s} = \frac{2n-1}{2n+1}\,.$$

Upravíme:

$$(x-s)(2n+1) = (x+s)(2n-1)$$
$$2nx - 2ns + x - s = 2nx + 2ns - x - s$$
$$2x = 4ns$$

Odtud:

$$x = 2ns\,.$$

Číselně:

$$x = (2\cdot 5\cdot 5)\ \mathrm{m} = 50\ \mathrm{m}\,.$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Předpokládejme, že oba plavci se pohybují rovnoměrně přímočaře. Při prvním setkání plavců (v čase *t*) musí platit:

$$v_k t = x + s$$

v_k … rychlost Karla

$x+s$ … dráha, kterou uplaval Karel do chvíle, než potkal Petra.

$$v_p t = x - s$$

v_p … rychlost Petra

$x-s$ … dráha, kterou uplaval Petr do chvíle, než potkal Karla

Čas *t*, za který Petr a Karel tyto dráhy uplavali, musí být stejný, protože se spolu setkali.

Proto je poměr jejich celkových drah, které uplavali do prvního setkání, a poměr jejich rychlostí shodný.

Pro poměr rychlostí obou plavců platí:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x-s}{x+s}\,. \qquad (1)$$

Při druhém setkání plavců (v čase *t´*) už Karel uplaval dvě celé délky bazénu a ještě jednu *n*-tinu bazénu, tedy:

$$v_k t' = 2x + \frac{1}{n}x\,.$$

Petr zatím uplaval jen jednu délku bazénu a část délky bazénu, ve které se setkal s Karlem (protože Karel uplaval $\frac{1}{n}$ bazénu, Petr musel uplavat $\frac{n-1}{n}$ bazénu):

$$v_p t' = x + \frac{n-1}{n}x\,.$$

Pro poměr rychlostí obou plavců platí:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x + \frac{n-1}{n}x}{2x + \frac{1}{n}x} = \frac{1 + \frac{n-1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{2n-1}{2n+1}\,. \qquad (2)$$

Srovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme:

$$\frac{x-s}{x+s} = \frac{2n-1}{2n+1}\,.$$

Upravíme:

$$(x-s)(2n+1) = (x+s)(2n-1)$$

$$2nx - 2ns + x - s = 2nx + 2ns - x - s$$

$$2x = 4ns$$

Odtud:

$$x = 2ns\,.$$

Číselně:

$$x = (2 \cdot 5 \cdot 5)\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{m}\,.$$

Odpověď

Délka bazénu je $x = 2ns = 50$ m.

Chodec

Chodec se pohybuje přímočaře rychlostí o velikosti:

$$v(t) = \sqrt{1+\{t\}}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$t \in <0\,\mathrm{s},\ 10\,\mathrm{s}>$$

Určete dráhu, kterou chodec urazí za prvních deset sekund, a velikost jeho zrychlení v desáté sekundě.

Poznámka: Pro přehlednější zápis při výpočtech píšeme vztah pro rychlost zjednodušeně bez jednotky a bez složených závorek.

Nápověda 1: Dráha chodce

Ze zadání víte, jak se mění velikost rychlosti chodce v závislosti na čase pro daný časový interval.

Uvědomte si nejprve, jak ze známé závislosti velikosti rychlosti na čase určíte závislost dráhy na čase.

Jak se vztah změní, chceme-li zjistit jen dráhu uraženou v určitém časovém intervalu?

► Řešení k nápovědě 1

Závislost dráhy na čase určíme jako časový integrál velikosti rychlosti:

$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t$$

Chceme-li zjistit dráhu uraženou za určitý časový interval, přejde neurčitý integrál v určitý s mezemi danými krajními body intervalu.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

Nápověda 2: Výpočet integrálu

Integrál můžeme spočítat s použitím substituce $u^2 = 1 + t$.

► Řešení k nápovědě 2

K výpočtu integrálu (1) použijeme substituci:

$$u^2 = 1+t, \quad \mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_{u_1}^{u_2} u2u\mathrm{d}u = 2\int_{u_1}^{u_2} u^2\mathrm{d}u$$

Pro dráhu, kterou chodec urazí za prvních deset sekund tedy platí:

$$s = 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_{u_1}^{u_2} = \frac{2}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t_1}^{t_2}$$

Dosadíme meze a provedeme číselný výpočet:

$$s = \frac{2}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10} = \frac{2}{3}\left[11^{\frac{3}{2}}-1\right]\mathrm{m} = 23{,}665\ \mathrm{m} \doteq 23{,}7\ \mathrm{m}$$

Nápověda 3: Zrychlení chodce

Ze zadání víte, jak se mění velikost rychlosti chodce v závislosti na čase.

Jakým způsobem z toho odvodíte závislost velikosti zrychlení chodce na čase?

Snadno pak zjistíte i zrychlení chodce v desáté sekundě.

► Řešení k nápovědě 3

Pro závislost zrychlení chodce na čase platí:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(\sqrt{1+t})}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$$

Velikost zrychlení chodce v desáté sekundě:

$$a(10) = \frac{1}{2\sqrt{11}}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 0{,}15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Výpočet dráhy:

Závislost dráhy na čase určíme jako časový integrál velikosti rychlosti:

$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t$$

Chceme-li zjistit dráhu uraženou za určitý časový interval, přejde neurčitý integrál v určitý s mezemi danými krajními body intervalu.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+t}\mathrm{d}dt \qquad (1)$$

K výpočtu integrálu (1) použijeme substituci:

$$u^2 = 1+t, \quad \mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_{u_1}^{u_2} u2u\,\mathrm{d}u = 2\int_{u_1}^{u_2} u^2\,\mathrm{d}u$$

Pro dráhu, kterou chodec urazí za prvních deset sekund tedy platí:

$$s = 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_{u_1}^{u_2} = \frac{2}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t_1}^{t_2}$$

Dosadíme meze a provedeme číselný výpočet:

$$s = \frac{2}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10} = \frac{2}{3}\left[11^{\frac{3}{2}}-1\right]\mathrm{m} = 23{,}665\ \mathrm{m} \doteq 23{,}7\ \mathrm{m}$$

Výpočet zrychlení:

Pro závislost zrychlení chodce na čase platí:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sqrt{1+t})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$$

Velikost zrychlení chodce v desáté sekundě:

$$a(10) = \frac{1}{2\sqrt{11}}\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}15\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Odpověď

Dráha, kterou chodec urazí za prvních deset sekund, je:

$$s = \frac{2}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$s = \frac{2}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10} = 23{,}665\ \mathrm{m} \doteq 23{,}7\ \mathrm{m}$$

Velikost zrychlení chodce v desáté sekundě je:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$$

$$a(10) = 0{,}15\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Pohyb daný graficky II

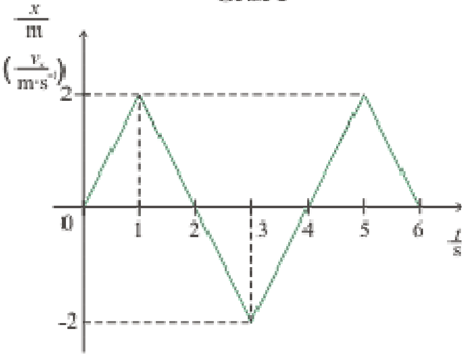
Grafy na obrázcích:

a) Považujte za průběhy souřadnice $x(t)$ přímočarého pohybu a nakreslete k nim příslušné grafy $v_x(t)$.

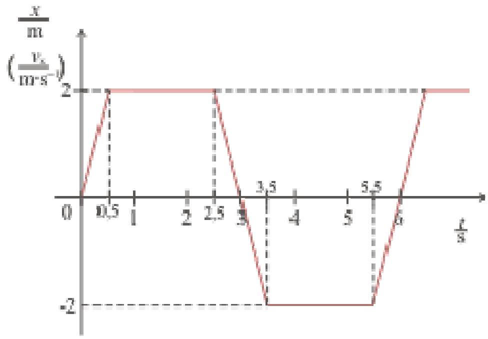
b) Považujte za průběhy souřadnice rychlosti $v_x(t)$ přímočarého pohybu a nakreslete k nim příslušné průběhy $x(t)$.

Znázorňují grafy reálné pohyby? Zkuste je znázornit pohybem prstu.

Graf I



Graf II



Nápověda 1 pro a): Rozdělení na intervaly

Považujte grafy na obrázcích za průběhy funkcí $x(t)$, kde $x(t)$ je závislost souřadnice x na čase t.

Rozdělte si průběhy funkcí na jednotlivé časové intervaly.

Jak se na nich souřadnice s časem mění? Zapište to rovnicemi.

► Řešení k nápovědě 1

Poznámka: Rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.

$x(t) = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\, t + 1\mathrm{m}$.

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

U grafu I. jsou to následující časové intervaly:

<0; 1 s> funkcí je přímka $x(t) = 2t$ (souřadnice rovnoměrně narůstá)

(1 s; 3 s> funkcí je přímka $x(t) = -2t + 4$ (souřadnice rovnoměrně klesá)

(3 s; 5 s> funkcí je přímka $x(t) = 2t - 8$ (souřadnice rovnoměrně roste)

(5 s; 6 s> funkcí je přímka $x(t) = -2t + 12$ (souřadnice rovnoměrně klesá)

U grafu II. jsou to následující časové intervaly:

<0; 0,5 s> funkcí je přímka $x(t) = 4t$ (souřadnice rovnoměrně narůstá)

(0,5 s; 2,5 s> funkcí je přímka $x(t) = 2$ (souřadnice se nemění)

(2,5 s; 3,5 s> funkcí je přímka $x(t) = -4t + 12$ (souřadnice rovnoměrně klesá)

(3,5 s; 5,5 s> funkcí je přímka $x(t) = -2$ (souřadnice se nemění)

(5,5 s; 6,5 s> funkcí je přímka $x(t) = 4t - 24$ (souřadnice rovnoměrně roste)

(6,5 s; 8,5 s> funkcí je přímka $x(t) = 2$ (souřadnice se nemění)

Nápověda 2 pro a): Popisy pohybů

Z rovnic závislostí $x(t)$ v předchozí nápovědě odvoďte rovnice závislostí $v_x(t)$ pro jednotlivé časové intervaly a nakreslete průběhy funkcí $v_x(t)$ v těchto intervalech.

Jaký pohyb funkce představují?

► Řešení k nápovědě 2

Závislost souřadnice rychlosti na čase $v_x(t)$ získáme derivováním závislosti souřadnice na čase $x(t)$.

Graf I.:

Na intervalu <0; 1 s>:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (1 s; 3 s>:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(-2t+4)}{dt} = -2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = -2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (3 s; 5 s>:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(2t-8)}{dt} = 2$$

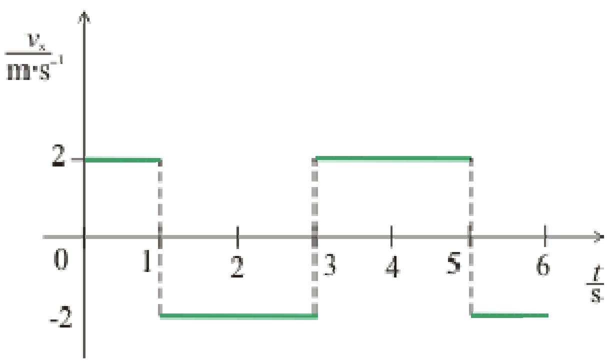
Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (5 s; 6 s>:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(-2t+12)}{dt} = -2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = -2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Graf I



Graf II.:

Na intervalu <0; 0,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(4t)}{\mathrm{d}t} = 4$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (0,5 s; 2,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Objekt se nepohybuje, je v klidu ($v_x = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$).

Na intervalu (2,5 s; 3,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(-4t+12)}{\mathrm{d}t} = -4$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = -4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (3,5 s; 5,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(-2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Objekt se nepohybuje, je v klidu ($v_x = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$).

Na intervalu (5,5 s; 6,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(4t-24)}{\mathrm{d}t} = 4$$

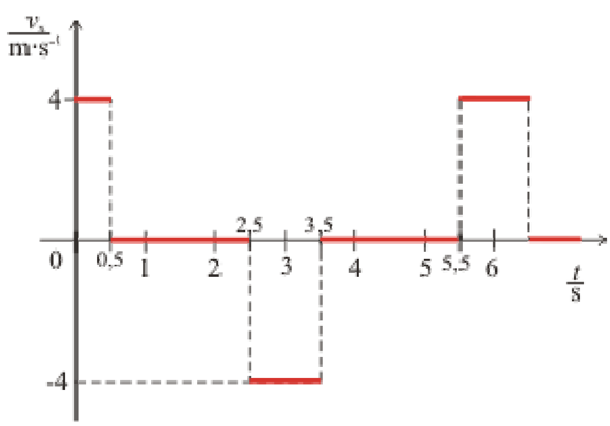
Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (6,5 s; 8,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Objekt se nepohybuje, je v klidu ($v_x = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$).

Graf II



Nápověda 3 pro a): Reálnost pohybu

Zkuste si znázornit uvedené pohyby pohybem prstu. Jsou možné skokové přechody rychlosti podle grafu?

▶ Řešení k nápovědě 3

Při reálném pohybu se nemůže rychlost skokem změnit. Prst musí postupně zpomalit na nulovou rychlost a pak se rozjet na druhou stranu. V grafu $x(t)$by pro reálný pohyb nebyly ostré špičky.

Nápověda 4 pro b): Rozdělení na intervaly

Považujte grafy na obrázcích za průběhy funkcí $v_x(t)$, kde $v_x(t)$ je závislost souřadnice rychlosti v na čase t.

Postupujte podobně jako u Nápovědy 1 a 2 pro a):

Rozdělte si průběhy funkcí na jednotlivé intervaly. O jaké funkce se na jednotlivých intervalech jedná? Napište jejich rovnice.

▶ Řešení k nápovědě 4

Poznámka: Opět pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

U grafu I. jsou to následující intervaly:

<0; 1 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 2t$

(1 s; 3 s> funkcí je přímka $v_x(t) = -2t + 4$

(3 s; 5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 2t - 8$

(5 s; 6 s> funkcí je přímka $v_x(t) = -2t + 12$

U grafu II. jsou to následující intervaly:

<0; 0,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 4t$

(0,5 s; 2,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 2$

(2,5 s; 3,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = -4t + 12$

(3,5 s; 5,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = -2$

(5,5 s; 6,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 4t - 24$

(6,5 s; 8,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 2$

Nápověda 5 pro b): Popisy pohybů

Z rovnic závislostí $v_x(t)$ v předchozí nápovědě odvoďte rovnice závislostí $x(t)$ pro jednotlivé intervaly a nakreslete průběhy funkcí $x(t)$ na těchto intervalech.

Jaký pohyb funkce představují?

▶ Řešení k nápovědě 5

Závislost souřadnice $x(t)$ na čase získáme integrováním závislosti souřadnice rychlosti $v_x(t)$ na čase.

Poznámka: Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích opět nepíšeme.

Graf I.:

Na intervalu <0; 1 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int 2t\mathrm{d}t$$

$$x(t) = t^2 + A$$

Konstantu A zjistíme z počátečních podmínek:

V čase t = 0 s je x(0) = 0 m, po dosazení A = 0.

$$x(t) = t^2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zrychleně přímočaře.

Na intervalu (1 s; 3 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (-2t+4)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = -t^2 + 4t + B$$

Konstantu B zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 1 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = t^2$, tedy x(1) = 1 m.

Po dosazení: $1 = -1^2 + 4\cdot 1 + B$, a tedy B = −2.

$$x(t) = -t^2 + 4t - 2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zpomaleně přímočaře.

Na intervalu (3 s; 5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (2t-8)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = t^2 - 8t + C$$

Konstantu C zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 3 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = -t^2 + 4t - 2$, tedy x(3) = 1 m.

Po dosazení: $1 = 3^2 - 8\cdot 3 + C$, a tedy C = 16.

$$x(t) = t^2 - 8t + 16$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zrychleně přímočaře.

Na intervalu (5 s; 6 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (-2t+12)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = -t^2 + 12t + D$$

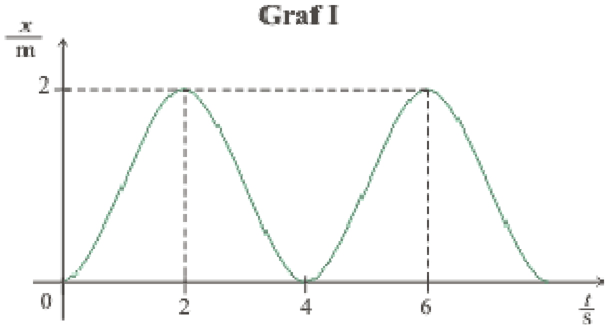
Konstantu D zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x = t^2 - 8t + 16$, tedy x(5) = 1 m.

Po dosazení: 1 = −5²+12·5 + D, a tedy D = −34.

$$x(t) = -t^2+12t-34$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zpomaleně přímočaře.



Graf II.:

Na intervalu <0; 0,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int 4t\mathrm{d}t$$

$$x(t) = 2t^2+E$$

Konstantu E zjistíme z počátečních podmínek:

V čase t = 0 s je x(0) = 0 m, po dosazení E = 0.

$$x(t) = 2t^2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zrychleně přímočaře.

Na intervalu (0,5 s; 2,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int 2\mathrm{d}t$$

$$x(t) = 2t+F$$

Konstantu F zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 0,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = 2t^2$, tedy x(0,5) = 0,5 m.

Po dosazení: 0,5 = 2·0,5+F, a tedy F = −0,5.

$$x(t) = 2t-0{,}5$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně přímočaře s konstantní rychlostí o velikosti v_x = 2 m·s^{-1}.

Na intervalu (2,5 s; 3,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (-4t+12)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = -2t^2+12t+G$$

Konstantu G zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 2,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = 2t-0{,}5$, tedy x(2,5) = 4,5 m.

Po dosazení: 4,5 = −2·2,5^2 + 12·2,5 + G, a tedy G = −13.

$$x(t) = -2t^2+12t-13$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zpomaleně přímočaře.

Na intervalu (3,5 s; 5,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int -2\mathrm{d}t$$

$$x(t) = -2t+H$$

Konstantu H zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 3,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = -2t^2+12t-13$, tedy x(3,5) = 4,5 m.

Po dosazení: 4,5 = −2·3,5 + H, a tedy H = 11,5.

$$x(t) = -2t+11{,}5$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně přímočaře s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = -2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (5,5 s; 6,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (4t-24)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = 2t^2-24t+K$$

Konstantu K zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 5,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = -2t+11{,}5$, tedy x(5,5) = 0,5 m.

Po dosazení: 0,5 = 2·5,5^2−24·5,5 + K, a tedy K = 72.

$$x(t) = 2t^2-24t+72$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zrychleně přímočaře.

Na intervalu (6,5 s; 8,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int 2\mathrm{d}t$$

$$x(t) = 2t+L$$

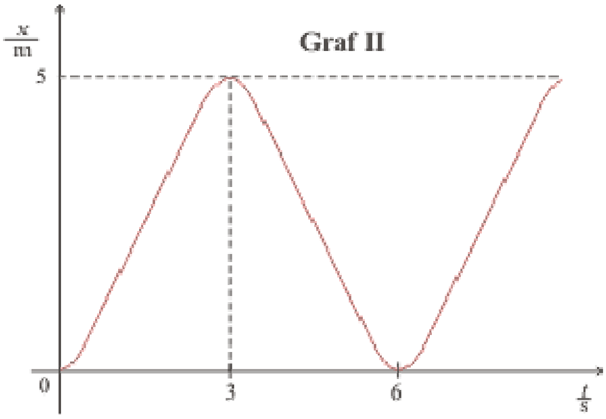
Konstantu L zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 6,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = 2t^2-24t+72$, tedy x(6,5) = 0,5 m.

Po dosazení: 0,5 = 2·6,5 + L, a tedy L = −12,5.

$$x(t) = 2t-12{,}5$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně přímočaře s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Nápověda 6 pro b): Reálnost pohybu

Zkuste si znázornit uvedené pohyby pohybem prstu.

► Řešení k nápovědě 6

Jedná se o reálný pohyb.

Graf I: Prst se pohybuje např. směrem doprava a po dobu 1 s rovnoměrně zrychluje, pak začne ve stejném směru po dobu 1 s rovnoměrně zpomalovat. V čase 2 s je jeho rychlost nulová a směr pohybu se obrací. Prst se pohybuje směrem doleva a po dobu 1 s rovnoměrně zrychluje, pak začne ve stejném směru po dobu 1 s rovnoměrně zpomalovat. V čase 4 s je ve stejném místě, kde pohyb začínal, jeho rychlost je nulová a pohyb se začíná opakovat.

Graf II:

Prst se pohybuje např. směrem doprava a po dobu 0,5 s rovnoměrně zrychluje, pak se pohybuje rovnoměrně přímočaře po dobu 2 s. Poté začne jeho rychlost rovnoměrně klesat, a to po dobu 0,5 s až na nulu. Pak se směr pohybu obrátí, rychlost prstu po dobu 0,5 s rovnoměrně narůstá, pak je jeho pohyb po dobu 2 s opět rovnoměrný přímočarý a pak po dobu 0,5 s rychlost rovnoměrně klesá až na nulu. V čase t = 6 s je prst ve stejném místě, kde pohyb začínal, jeho rychlost je nulová a pohyb se začíná opakovat.

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

bod a):

Považujme grafy na obrázcích za průběhy funkcí $x(t)$, kde $x(t)$ je závislost souřadnice x na čase t.

Rozdělíme si průběhy funkcí na jednotlivé časové intervaly.

Zjistíme, o jaké funkce se na jednotlivých intervalech jedná a napíšeme jejich rovnice.

Poznámka: Rovnice by měly být zapsány ve tvaru např.

$x = 1\ \mathrm{m} - 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.t,$

Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

U grafu I. jsou to následující časové intervaly:

<0; 1 s> funkcí je přímka $x(t) = 2t$ (souřadnice rovnoměrně narůstá)

(1 s; 3 s> funkcí je přímka $x(t) = -2t + 4$ (souřadnice rovnoměrně klesá)

(3 s; 5 s> funkcí je přímka $x(t) = 2t - 8$ (souřadnice rovnoměrně roste)

(5 s; 6 s> funkcí je přímka $x(t) = -2t + 12$ (souřadnice rovnoměrně klesá)

U grafu II. jsou to následující časové intervaly:

<0; 0,5 s> funkcí je přímka $x(t) = 4t$ (souřadnice rovnoměrně narůstá)

(0,5 s; 2,5 s> funkcí je přímka $x(t) = 2$ (souřadnice se nemění)

(2,5 s; 3,5 s> funkcí je přímka $x(t) = -4t + 12$ (souřadnice rovnoměrně klesá)

(3,5 s; 5,5 s> funkcí je přímka $x(t) = -2$ (souřadnice se nemění)

(5,5 s; 6,5 s> funkcí je přímka $x(t) = 4t - 24$ (souřadnice rovnoměrně roste)

(6,5 s; 8,5 s> funkcí je přímka $x(t) = 2$ (souřadnice se nemění)

Z rovnic závislostí $x(t)$ odvodíme rovnice závislostí $v_x(t)$ pro jednotlivé intervaly a nakreslíme průběhy funkcí $v_x(t)$ na těchto intervalech.

Závislost souřadnice rychlosti na čase $v_x(t)$ získáme derivováním závislosti souřadnice na čase $x(t)$.

Graf I.:

Na intervalu <0; 1 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(2t)}{\mathrm{d}t} = 2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (1 s; 3 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(-2t+4)}{\mathrm{d}t} = -2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = -2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (3 s; 5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(2t-8)}{\mathrm{d}t} = 2$$

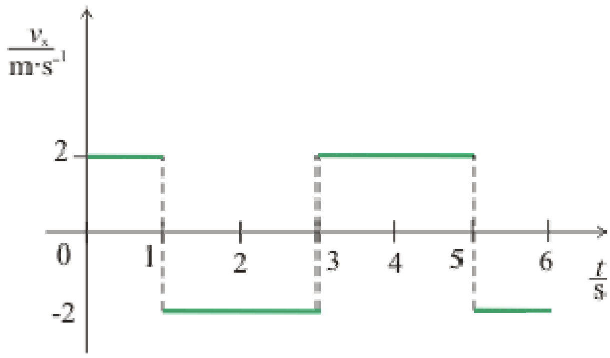
Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (5 s; 6 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(-2t+12)}{\mathrm{d}t} = -2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = -2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Graf I



Graf II.:

Na intervalu <0; 0,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(4t)}{\mathrm{d}t} = 4$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti v_x = 4 m·s^{-1}.

Na intervalu (0,5 s; 2,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Objekt se nepohybuje, je v klidu (v_x = 0 m·s^{-1}).

Na intervalu (2,5 s; 3,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(-4t+12)}{\mathrm{d}t} = -4$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti v_x = −4 m·s^{-1}.

Na intervalu (3,5 s; 5,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(-2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Objekt se nepohybuje, je v klidu (v_x = 0 m·s^{-1}).

Na intervalu (5,5 s; 6,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d(4t-24)}{\mathrm{d}t} = 4$$

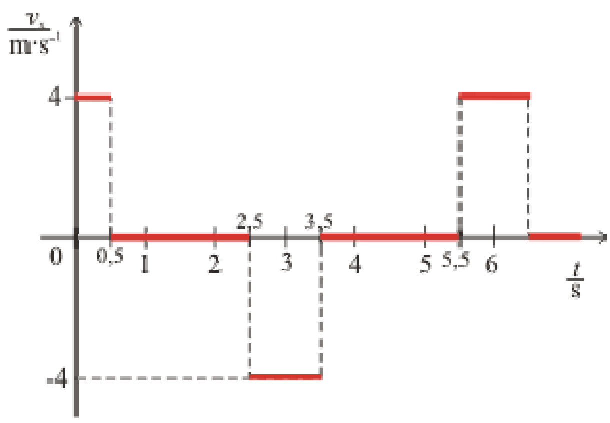
Objekt se pohybuje rovnoměrně s konstantní rychlostí o velikosti v_x = 4 m·s^{-1}.

Na intervalu (6,5 s; 8,5 s>:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Objekt se nepohybuje, je v klidu (v_x = 0 m·s^{-1}).

Graf II



Nejde o reálné pohyby.

Při reálném pohybu se nemůže rychlost skokem změnit. Při znázornění pohybem prstu musí prst postupně zpomalit na nulovou rychlost a pak se rozjet na druhou stranu. V grafu $x(t)$ by pro reálný pohyb nebyly ostré špičky.

bod b):

Postupujeme obdobně jako u a).

Poznámka: Opět pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích nepíšeme.

Grafy na obrázcích považujeme za průběhy funkcí $v_x(t)$, kde $v_x(t)$ je závislost souřadnice rychlosti v na čase t.

Průběhy funkcí si rozdělíme na jednotlivé intervaly. Napíšeme, o jaké funkce se na jednotlivých intervalech jedná a zapíšeme je rovnicí.

U grafu I. jsou to následující intervaly:

<0; 1 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 2t$

(1 s; 3 s> funkcí je přímka $v_x(t) = -2t + 4$

(3 s; 5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 2t - 8$

(5 s; 6 s> funkcí je přímka $v_x(t) = -2t + 12$

U grafu II. jsou to následující intervaly:

<0; 0,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 4t$

(0,5 s; 2,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 2$

(2,5 s; 3,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = -4t + 12$

(3,5 s; 5,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = -2$

(5,5 s; 6,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 4t - 24$

(6,5 s; 8,5 s> funkcí je přímka $v_x(t) = 2$

Z rovnic závislostí $v_x(t)$ v předchozí nápovědě odvodíme rovnice závislostí $x(t)$ pro jednotlivé intervaly a nakreslíme průběhy funkcí $x(t)$ na těchto intervalech.

Závislost souřadnice $x(t)$ na čase získáme integrováním závislosti souřadnice rychlosti $v_x(t)$ na čase.

Poznámka: Pro zjednodušení zápisu jednotky ve vztazích opět nepíšeme.

Graf I.:

Na intervalu <0; 1 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int 2t\mathrm{d}t$$

$$x(t) = t^2 + A$$

Konstantu A zjistíme z počátečních podmínek:

V čase $t = 0$ s je $x(0) = 0$ m, po dosazení A = 0.

$$x(t) = t^2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zrychleně přímočaře.

Na intervalu (1 s; 3 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (-2t+4)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = -t^2 + 4t + B$$

Konstantu B zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase $t = 1$ s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = t^2$, tedy $x(1) = 1$ m.

Po dosazení: $1 = -1^2 + 4\cdot 1 + B$, a tedy B = −2.

$$x(t) = -t^2 + 4t - 2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zpomaleně přímočaře.

Na intervalu (3 s; 5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (2t-8)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = t^2 - 8t + C$$

Konstantu C zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase $t = 3$ s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = -t^2 + 4t - 2$, tedy $x(3) = 1$ m.

Po dosazení: $1 = 3^2 - 8\cdot 3 + C$, a tedy C = 16.

$$x(t) = t^2 - 8t + 16$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zrychleně přímočaře.

Na intervalu (5 s; 6 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int(-2t+12)\mathrm{d}t$$
$$x(t) = -t^2+12t+D$$

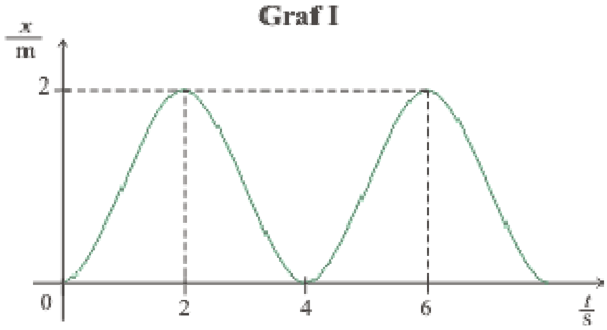
Konstantu D zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x = t^2-8t+16$, tedy $x(5)$ = 1 m.

Po dosazení: $1 = -5^2+12\cdot 5 + D$, a tedy D = −34.

$$x(t) = -t^2+12t-34$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zpomaleně přímočaře.



Graf II.:

Na intervalu <0; 0,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int 4t\mathrm{d}t$$
$$x(t) = 2t^2+E$$

Konstantu E zjistíme z počátečních podmínek:

V čase t = 0 s je $x(0)$ = 0 m, po dosazení E = 0.

$$x(t) = 2t^2$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zrychleně přímočaře.

Na intervalu (0,5 s; 2,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int 2\mathrm{d}t$$
$$x(t) = 2t+F$$

Konstantu F zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 0,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = 2t^2$, tedy $x(0{,}5)$ = 0,5 m.

Po dosazení: $0{,}5 = 2\cdot 0{,}5+F$, a tedy F = −0,5.

$$x(t) = 2t-0{,}5$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně přímočaře s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (2,5 s; 3,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int(-4t+12)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = -2t^2+12t+G$$

Konstantu G zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 2,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = 2t-0{,}5$, tedy $x(2{,}5) = 4{,}5$ m.

Po dosazení: $4{,}5 = -2\cdot 2{,}5^2 + 12\cdot 2{,}5 + G$, a tedy G = −13.

$$x(t) = -2t^2+12t-13$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zpomaleně přímočaře.

Na intervalu (3,5 s; 5,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int -2\mathrm{d}t$$

$$x(t) = -2t+H$$

Konstantu H zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 3,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = -2t^2+12t-13$, tedy $x(3{,}5) = 4{,}5$ m.

Po dosazení: $4{,}5 = -2\cdot 3{,}5 + H$, a tedy H = 11,5.

$$x(t) = -2t+11{,}5$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně přímočaře s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = -2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Na intervalu (5,5 s; 6,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int(4t-24)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = 2t^2-24t+K$$

Konstantu K zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 5,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti $x(t) = -2t+11{,}5$, tedy $x(5{,}5) = 0{,}5$ m.

Po dosazení: $0{,}5 = 2\cdot 5{,}5^2-24\cdot 5{,}5 + K$, a tedy K = 72.

$$x(t) = 2t^2-24t+72$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně zrychleně přímočaře.

Na intervalu (6,5 s; 8,5 s>:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int 2\mathrm{d}t$$

$$x(t) = 2t+L$$

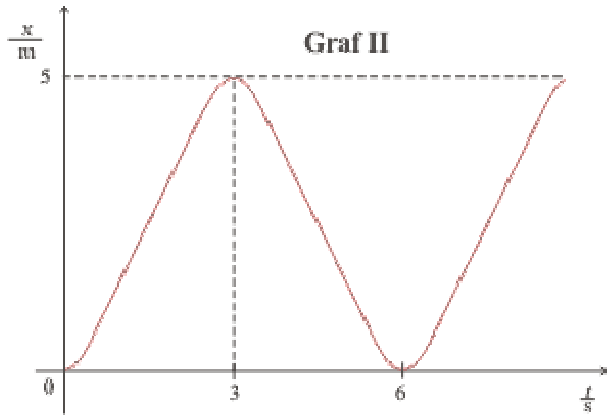
Konstantu L zjistíme z počátečních podmínek:

Souřadnici v čase t = 6,5 s zjistíme dosazením do předchozí závislosti
$x(t) = 2t^2 - 24t + 72$, tedy $x(6{,}5) = 0{,}5$ m.

Po dosazení: 0,5 = 2·6,5 + L, a tedy L = −12,5.

$$x(t) = 2t - 12{,}5$$

Objekt se pohybuje rovnoměrně přímočaře s konstantní rychlostí o velikosti $v_x = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Jedná se o reálný pohyb.

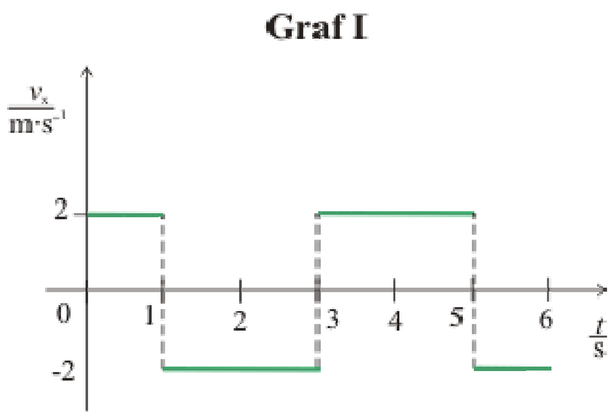
Graf I: Prst se pohybuje např. směrem doprava a po dobu 1 s rovnoměrně zrychluje, pak začne ve stejném směru po dobu 1 s rovnoměrně zpomalovat. V čase 2 s je jeho rychlost nulová a směr pohybu se obrací. Prst se pohybuje směrem doleva a po dobu 1 s rovnoměrně zrychluje, pak začne ve stejném směru po dobu 1 s rovnoměrně zpomalovat. V čase 4 s je ve stejném místě, kde pohyb začínal, jeho rychlost je nulová a pohyb se začíná opakovat.

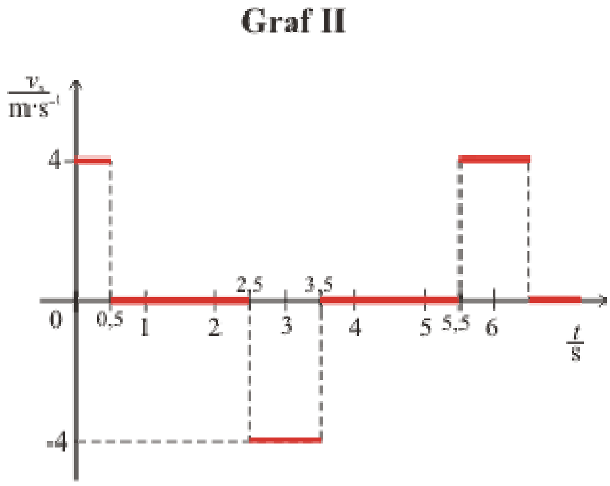
Graf II:

Prst se pohybuje např. směrem doprava a po dobu 0,5 s rovnoměrně zrychluje, pak se pohybuje rovnoměrně přímočaře po dobu 2 s. Poté začne jeho rychlost rovnoměrně klesat, a to po dobu 0,5 s až na nulu. Pak se směr pohybu obrátí, rychlost prstu po dobu 0,5 s rovnoměrně narůstá, pak je jeho pohyb po dobu 2 s opět rovnoměrný přímočarý a pak po dobu 0,5 s rychlost rovnoměrně klesá až na nulu. V čase t = 6 s je prst ve stejném místě, kde pohyb začínal, jeho rychlost je nulová a pohyb se začíná opakovat.

Odpověď

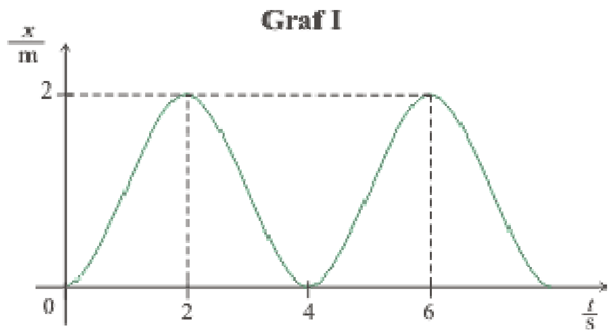
a)

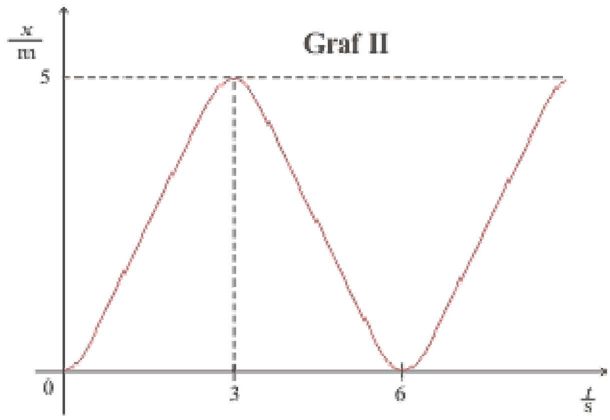




Nejde o reálné pohyby.

b)





Jde o reálné pohyby.

Mravenec na tyči

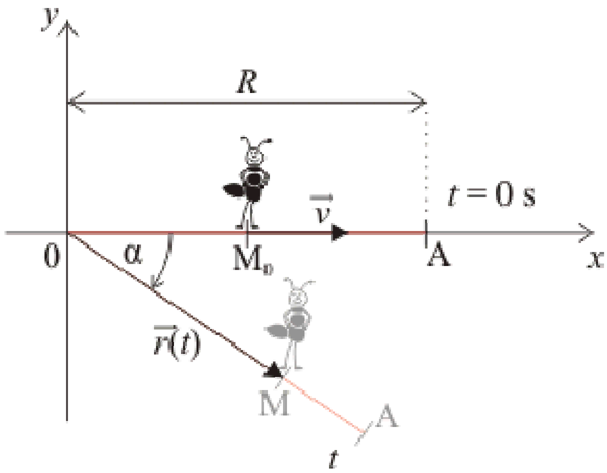
Tenká tyč OA délky R se otáčí úhlovou rychlostí ω ve směru pohybu hodinových ručiček kolem osy, která je kolmá k tyči a prochází bodem O. Po tyči od bodu O leze ve směru k bodu A mravenec konstantní rychlostí $\vec{v}$ vzhledem k tyči. Popište průběh polohy mravence v laboratorní vztažné soustavě, byl-li v čase t = 0 s právě ve středu tyče.

Nápověda 1: Obrázek situace

Počátek souřadné soustavy zvolte v bodě 0 (bod O) a počáteční polohu tyče tak, že splývá s osou x. Nakreslete situaci pro čas t = 0 s a vyznačte polohu mravence. Pak nakreslete, jak se pootočí tyč za okamžik t a kam popoleze mravenec. Vyznačte polohový vektor mravence v čase t.

► Řešení k nápovědě 1

Obrázek:



Nápověda 2: Polohový vektor mravence

O jaký kus popolezl mravenec za čas t a jak dlouhý bude polohový vektor mravence v čase t? O jaký úhel se pootočila tyč za čas t?

Pomocí úhlu α vyjádřete x-ovou a y-ovou složku polohového vektoru $\vec{r}(t)$.

► Řešení k nápovědě 2

Pohyb rozložíme na pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti v a na pohyb po kružnici s úhlovou rychlostí o velikosti ω:

Mravenec popolezl o vzdálenost vt.

Délka polohového vektoru v čase t bude:

$$r(t) = vt + \frac{R}{2} \tag{1}$$

Tyč se pootočí o úhel:

$$\alpha = \omega t$$

Délka polohového vektoru se tedy mění s časem podle vztahu (1):

$$r(t) = vt + \frac{R}{2}$$

Průmět polohového vektoru do osy *x* je roven:

$$x(t) = r(t)\cos\alpha = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t$$

Průmět polohového vektoru do osy *y* je roven:

$$y(t) = -r(t)\sin\alpha = -\left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t$$

(Průmět jde do záporného směru osy *y*, proto −.)

Polohový vektor pak vyjádříme jako vektorový součet jeho složek:

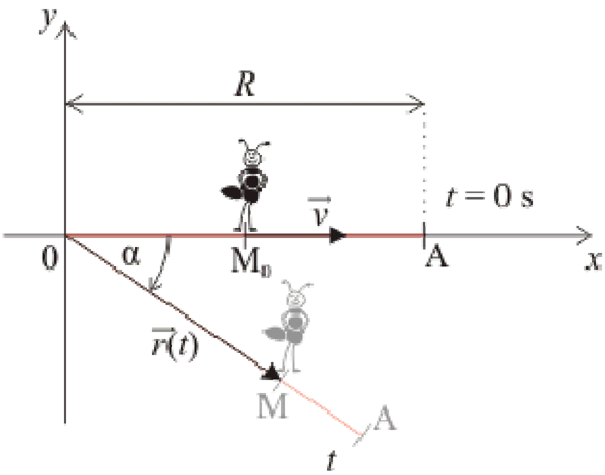
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru os *x* a *y*.

$$\vec{r}(t) = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t\,\vec{i} - \left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t\,\vec{j}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Obrázek situace:



Pohyb rozložíme na pohyb rovnoměrný přímočarý s rychlostí o velikosti *v* a na pohyb po kružnici s úhlovou rychlostí o velikosti *ω*:

Za čas *t* mravenec popoleze o vzdálenost *vt*.

Délka polohového vektoru v čase *t* bude:

$$r(t) = vt + \frac{R}{2} \tag{1}$$

Tyč se pootočí o úhel:

$$\alpha = \omega t$$

Délka polohového vektoru se tedy mění s časem podle vztahu (1):

$$r(t) = vt + \frac{R}{2}$$

Průmět polohového vektoru do osy *x* je roven:

$$x(t) = r(t)\cos\alpha = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t$$

Průmět polohového vektoru do osy *y* je roven:

$$y(t) = -r(t)\sin\alpha = -\left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t$$

(Průmět jde do záporného směru osy *y*, proto −.)

Polohový vektor pak vyjádříme jako vektorový součet jeho složek:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru os *x* a *y*.

$$\vec{r}(t) = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t\,\vec{i} - \left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t\,\vec{j}$$

Odpověď

Polohový vektor mravence se s časem mění podle vztahu:

$$\vec{r}(t) = \left(vt + \frac{R}{2}\right)\cos\omega t\,\vec{i} - \left(vt + \frac{R}{2}\right)\sin\omega t\,\vec{j}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru os *x* a *y*.

Brzdná dráha vlaku

Vlak jedoucí rychlostí 72 km·h^{-1} začne před stanicí brzdit. Zastaví za 2 minuty . Jak daleko před stanicí musí strojvůdce začít brzdit?

Předpokládejte, že během brzdění se jedná o pohyb rovnoměrně zpomalený.

Zápis

v_0 = 72 km·h^{-1}	počáteční rychlost vlaku
t_z = 2 min	doba, za kterou vlak zastaví
s_z = ? (m)	dráha, kterou vlak ujede během brždění

Nápověda 1: Početní řešení – rychlost a zrychlení vlaku

Jak se mění rychlost vlaku s časem? Jaká bude rychlost vlaku na konci pohybu? Jaké bude zrychlení vlaku? (Znáte počáteční a koncovou rychlost a čas zastavení.)

► Řešení k nápovědě 1

Pro rychlost a dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu platí:

$$v = v_0 - at$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

Vlak ve stanici zastaví, proto bude pro konečnou rychlost vlaku platit, že $v = 0$, tedy:

$$0 = v_0 - at_z\,.$$

Odtud:

$$a = \frac{v_0}{t_z}.$$

Nápověda 2: Početní řešení – dráha vlaku

Jakou dráhu vlak urazí do zastavení? Znáte počáteční rychlost, čas zastavení i zrychlení.

► Řešení k nápovědě 2

Během brzdění až do zastavení projede vlak dráhu:

$$s_z = v_0 t_z - \frac{1}{2}at_z^2\,.$$

Dosadíme za zrychlení a upravíme:

$$s_z = v_0 t_z - \frac{1}{2}\frac{v_0}{t_z}t_z^2 = \frac{v_0 t_z}{2}\,.$$

Číselně:

Zadané hodnoty převedeme na základní jednotky a dosadíme.

v_0 = 72 km·h^{-1} = 20 m·s^{-1}

t_z = 2 min = 120 s

$$s_z = 1\,200\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{km}\,.$$

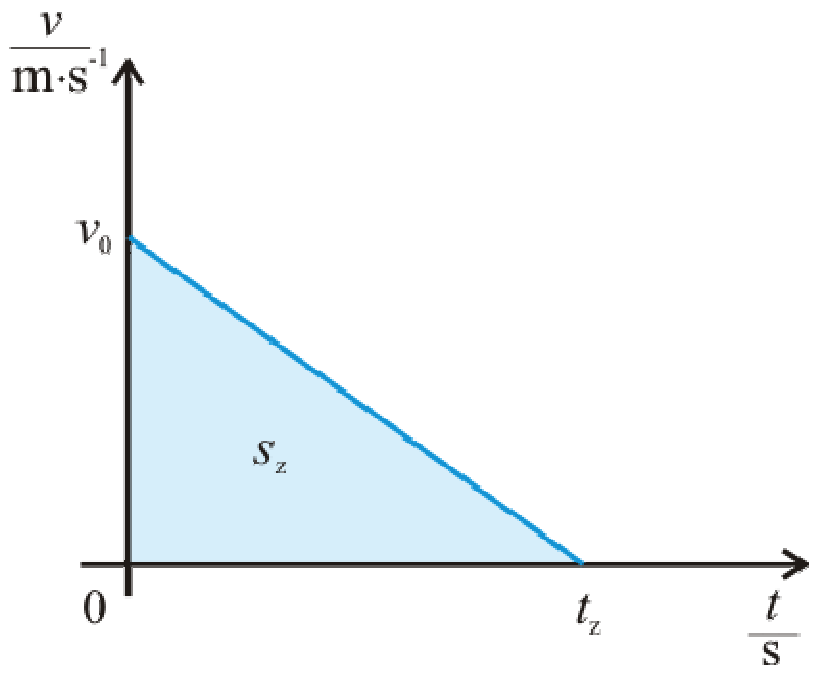
Nápověda 3: Grafické řešení

Úlohu je možné řešit také graficky.

Nakreslete graf závislosti rychlosti vlaku na čase. Kde je v grafu schovaná dráha?

▶ Řešení k nápovědě 3

Graf:



Dráha je rovna ploše pod křivkou:

$$s_z = \frac{v_0 t_z}{2}$$

Číselně:

Zadané hodnoty převedeme na základní jednotky:

v_0 = 72 km·h^{-1} = 20 m·s^{--1}

t_z = 2 min = 120 s

$$s_z = 1\,200\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{km}$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Početní řešení:

Pro rychlost a dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu platí:

$$v = v_0 - at$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

Vlak ve stanici zastaví, proto bude pro konečnou rychlost vlaku platit, že $v = 0$, tedy:

$$0 = v_0 - at_z\,.$$

Odtud:

$$a = \frac{v_0}{t_z}.$$

Během brzdění až do zastavení projede vlak dráhu:

$$s_z = v_0 t_z - \frac{1}{2}at_z^2\,.$$

Dosadíme za zrychlení a upravíme:

$$s_z = v_0 t_z - \frac{1}{2}\frac{v_0}{t_z}t_z^2 = \frac{v_0 t_z}{2}$$

Číselně:

Zadané hodnoty převedeme na základní jednotky a dosadíme.

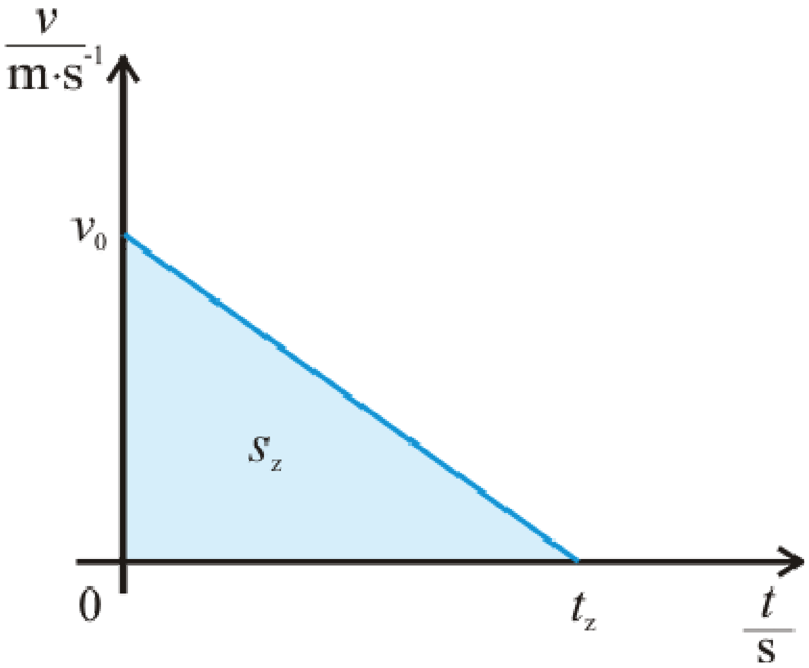
$v_0 = 72\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$t_z = 2\ \mathrm{min} = 120\ \mathrm{s}$

$$s_z = 1\,200\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{km}\,.$$

Grafické řešení:

Nakreslíme graf závislosti rychlosti vlaku na čase.



Dráha je rovna ploše pod křivkou:

$$s_z = \frac{v_0 t_z}{2}\,.$$

Číselně po převedení na základní jednotky:

$$s_z = \frac{20 \cdot 120}{2}\,\mathrm{m} = 1\,200\,\mathrm{m} = 1{,}2\,\mathrm{km}\,.$$

Odpověď

Místo, ve kterém musí strojvůdce začít brzdit, je od stanice vzdáleno:

$$s_z = \frac{v_0\,t_z}{2}\,.$$

Číselně, po převedení jednotek:

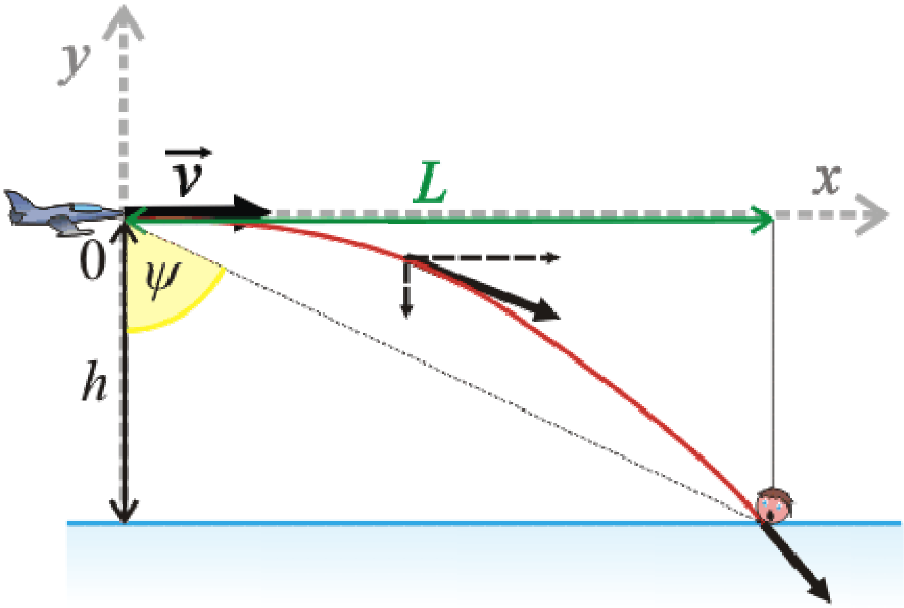
$$s_z = 1\,200\,\mathrm{m} = 1{,}2\,\mathrm{km}\,.$$

Záchranný letoun

Záchranný letoun letí na pomoc tonoucímu. Pilot udržuje stálou výšku 1 200 m nad hladinou a směřuje přímo nad hlavu člověka (*viz obrázek*). Rychlost letadla má velikost 430 km·h^{-1}.

Při jakém zorném úhlu musí pilot uvolnit záchranný vak, aby dopadl co nejblíže k tonoucímu?

Odpor prostředí neuvažujte.



Zápis

h = 1 200 m	výška letadla nad hladinou
v = 430 km·h^{-1}	rychlost letadla
ψ = ? (°)	zorný úhel
Z tabulek:	
g = 9,81 m·s^{-2}	tíhové zrychlení

Nápověda 1: Počáteční rychlost vaku

Jaká je počáteční rychlost vaku? Znáte její velikost?

▶ Řešení k nápovědě 1

Počáteční rychlost vaku je shodná s rychlostí letadla. Má tedy velikost *v*.

Nápověda 2: Doba pádu vaku na hladinu

Jakým pohybem se vak po vypuštění pohybuje ve svislém směru?

Jak zjistíte dobu jeho pádu t na hladinu, víte-li, v jak velké výšce h nad hladinou byl vypuštěn?

▶ Řešení k nápovědě 2

Neuvažujeme-li odpor prostředí, pohybuje se vak ve svislém směru volným pádem.

Protože víme, v jak velké výšce je vak vypuštěn, můžeme snadno určit dobu jeho pádu na hladinu. Ve směru osy *y* platí:

$$-h = -\frac{1}{2}gt^2,$$

tedy:

$$h = \frac{1}{2}gt^2.$$

(ve směru osy *y* na vak působí jen gravitační síla).

Řešením této rovnice dostáváme pro dobu letu *t* :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Nápověda 3: Vzdálenost *L*

Jak se vak pohybuje ve vodorovném směru?

Jak velkou vzdálenost *L* ve vodorovném směru urazí vak za dobu *t*, tedy za dobu pádu na hladinu? Dobu pádu *t* znáte z předchozí nápovědy.

► Řešení k nápovědě 3

Ve vodorovném směru se vak (i letadlo) pohybuje stálou rychlostí *v*.

Z předchozí nápovědy si připomeneme, co platí pro dobu *t* pádu vaku na hladinu:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Za tuto dobu urazí vak ve vodorovném směru vzdálenost:

$$L = vt.$$

Po dosazení za *t* dostáváme:

$$L = v\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Nápověda 4: Zorný úhel *ψ*

Jak zjistíte velikost zorného úhlu ψ, při kterém musí pilot uvolnit záchranný vak, aby dopadl co nejblíže k tonoucímu?

Podívejte se na obrázek. Jakou goniometrickou funkci k výpočtu použijete?

Které veličiny k vyjádření zorného úhlu ψ potřebujete? Znáte je?

► Řešení k nápovědě 4

Výpočet zorného úhlu ψ je zřejmý z obrázku.

Použijeme goniometrickou funkci tangens.

K výpočtu potřebujeme znát vzdálenost *L* , kterou ve vodorovném směru urazí vak za dobu *t* svého pádu na hladinu, a výšku, ze které padá. Obojí již známe.

Platí:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{L}{h} = \frac{v\sqrt{\frac{2h}{g}}}{h} = v\sqrt{\frac{2}{hg}}\,.$$

Číselně:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{430\,000}{3\,600}\sqrt{\frac{2}{1\,200\cdot 9{,}81}} \doteq 1{,}556$$

$$\psi = 57^\circ$$

Poznámka: Vodorovný průmět rychlosti vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla, takže pilot vidí letící vak neustále pod sebou.

CELKOVÉ ŘEŠENÍ:

Počáteční rychlost vaku je shodná s rychlostí letadla. Má tedy velikost v.

Neuvažujeme-li odpor prostředí, pohybuje se vak ve svislém směru volným pádem.

Protože víme, v jak velké výšce je vak vypuštěn, můžeme snadno určit dobu jeho pádu na hladinu. Ve směru osy *y* platí:

$$-h = -\frac{1}{2}gt^2\,,$$

tedy:

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,.$$

(ve směru osy *y* na vak působí jen gravitační síla).

Řešením této rovnice dostáváme pro dobu letu *t* :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Ve vodorovném směru se vak (i letadlo) pohybuje stálou rychlostí *v*.

Za tuto dobu urazí vak ve vodorovném směru vzdálenost:

$$L = vt\,.$$

Po dosazení za *t* dostáváme:

$$L = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Výpočet zorného úhlu ψ je zřejmý z obrázku.

Použijeme goniometrickou funkci tangens.

K výpočtu potřebujeme znát vzdálenost *L* , kterou ve vodorovném směru urazí vak za dobu *t* svého pádu na hladinu, a výšku, ze které padá. Obojí již známe.

Platí:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{L}{h} = \frac{v\sqrt{\frac{2h}{g}}}{h} = v\sqrt{\frac{2}{hg}}.$$

Číselně:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{430\,000}{3\,600}\sqrt{\frac{2}{1\,200 \cdot 9{,}81}} \doteq 1{,}556$$

$$\psi = 57^\circ.$$

Poznámka: Vodorovný průmět rychlosti vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla, takže pilot vidí letící vak neustále pod sebou.

Odpověď

Pilot musí uvolnit záchranný vak, aby dopadl co nejblíže k tonoucímu, v zorném úhlu ψ, pro který platí:

$$\mathrm{tg}\psi = v\sqrt{\frac{2}{hg}} \doteq 1{,}556$$

$$\psi = 57^\circ.$$

Dva cyklisté

Cyklista Adam vyšlapal kopec, na vrcholu se otočil a po téže trase se vrátil zpět. Na vrcholu na svém computeru zjistil průměrnou rychlost 16 km·h^{-1}, computer vynuloval a v cíli opět přečetl průměrnou rychlost jízdy z kopce 44 km·h^{-1} .

Cyklista Bedřich jel stejnou trasu, ale na vrcholu computer nevynuloval. Na vrcholu mu computer ukázal průměrnou rychlost 15 km·h^{-1} a v cíli průměrnou rychlost 23 km·h^{-1}.

a) Určete průměrnou rychlost celé jízdy cyklisty Adama.

b) Určete průměrnou rychlost jízdy z kopce cyklisty Bedřicha.

c) Určete pro každého cyklistu poměr doby jízdy do kopce a jízdy z kopce.

Poznámka: Průměrnou rychlost užíváme ve smyslu průměrné velikosti rychlosti.

Zápis

$v_1 = 16$ km·h^{-1}	průměrná rychlost Adama na vrcholu
$v_2 = 44$ km·h^{-1}	průměrná rychlost jízdy Adama z kopce
$v_1' = 15$ km·h^{-1}	průměrná rychlost Bedřicha na vrcholu
$v_p' = 23$ km·h^{-1}	průměrná rychlost celé jízdy Bedřicha
$v_p = ?$ (km·h^{-1})	průměrná rychlost celé jízdy Adama
$v_2' = ?$ (km·h^{-1})	průměrná rychlost jízdy Bedřicha z kopce

Nápověda 1 pro a): Průměrná rychlost cyklisty Adama

Označte si dráhu, kterou cyklista Adam ujel při jízdě do kopce a dobu, za kterou tuto dráhu ujel. Totéž udělejte pro jeho jízdu z kopce. Také si označte celkovou dobu jízdy Adama.

Uvědomte si, co je to průměrná rychlost a jaký pro ni platí vztah.

Velikost průměrné rychlosti cyklisty Adama do kopce a z kopce znáte. Budete potřebovat znát i dráhu, kterou ujel?

► Řešení k nápovědě 1

Označíme s dráhu uraženou jedním směrem, pro cyklistu Adama t_1 dobu jízdy nahoru, t_2 dobu jízdy dolů a t celkovou dobu jízdy.

Pro průměrnou rychlost platí: $v_p = \frac{s_c}{t_c}$, kde

s…celková uražená dráha

t…celková doba pohybu

Tedy:

$$v_p = \frac{2s}{t_1+t_2} \tag{1}$$

Pro jízdu nahoru platí: $s = v_1 t_1$, odtud $t_1 = \frac{s}{v_1}$

Pro jízdu dolů platí: $s = v_2 t_2$, odtud $t_2 = \frac{s}{v_2}$

Dosadíme do (1):

$$v_p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$$

Číselně:

$$v_p = \frac{2 \cdot 16 \cdot 44}{16+44} \doteq 23{,}47\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Nápověda 2 pro b): Průměrná rychlost cyklisty Bedřicha

Označte si dobu, za kterou cyklista Bedřich vyjel na kopec a dobu, za kterou sjel z kopce. Také si označte jeho celkovou dobu jízdy. Dráhu, kterou Bedřich ujel do kopce nebo z kopce, máte označenou z předchozí nápovědy.

Opět si uvědomte, co je to průměrná rychlost a jaký pro ni platí vztah a postupujte podobně jako u cyklisty Adama.

Pozn.: Můžete k výpočtu použít výsledek úlohy a)?

► Řešení k nápovědě 2

Z předchozí úlohy máme označenou:

s dráhu uraženou jedním směrem, pro cyklistu Adama t_1 dobu jízdy nahoru, t_2 dobu jízdy dolů a t celkovou dobu jízdy. Pro cyklistu Bedřicha označíme analogicky t_1' dobu jízdy nahoru, t_2' dobu jízdy dolů a t' celkovou dobu jízdy.

Pro jízdu dolů platí:

$$s = v_2' t_2'$$
$$t_2' = t' - t_1'$$

Odtud:

$$v_2' = \frac{s}{t' - t_1'} \tag{2}$$

Pro jízdu nahoru platí:

$$s = v_1' t_1'$$
$$t_1' = \frac{s}{v_1'}$$

Pro průměrnou rychlost platí:

$$v_p' = \frac{2s}{t'}$$

$$t' = \frac{2s}{v'_p}$$

Dosadíme do (2):

$$v'_2 = \frac{s}{\frac{2s}{v'_p} - \frac{s}{v'_1}} = \frac{v'_1 v'_p}{2v'_1 - v'_p}$$

Číselně:

$$v'_2 = \frac{15 \cdot 23}{2 \cdot 15 - 23} \doteq 49{,}29\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Jiná možnost řešení by byla použít výsledek úlohy a), z něj vyjádřit v_2 a všechny rychlosti „opatřit čárkou“.

Nápověda 3 pro c): Poměr doby jízdy do kopce a z kopce

Dobu jízdy cyklisty Adama do kopce a z kopce máte vyjádřenou v úloze a). Stačí, když zjistíte jejich poměr.

Obdobně pro cyklistu Bedřicha. Pro vyjádření průměrné rychlosti jízdy Bedřicha z kopce použijte výsledek úlohy b).

► Řešení k nápovědě 3

Použijeme označení z předchozích úloh.

Pro cyklistu Adama platí:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{s}{v_1}}{\frac{s}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1}$$

Číselně:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{44}{16} = 2{,}75$$

Analogicky pro cyklistu Bredřicha platí:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_2}{v'_1}$$

Dosazením výsledku úlohy b) dostaneme:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_p}{2v'_1 - v'_p}$$

Číselně:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{23}{2 \cdot 15 - 23} \doteq 3{,}29$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Označíme *s* dráhu uraženou jedním směrem, pro cyklistu Adama t_1 dobu jízdy nahoru, t_2 dobu jízdy dolů a *t* celkovou dobu jízdy.

Pro cyklistu Bedřicha označíme analogicky $t_1´$ dobu jízdy nahoru, $t_2´$ dobu jízdy dolů a $t´$ celkovou dobu jízdy.

a) průměrná rychlost Adama

Pro průměrnou rychlost platí: $v_p = \frac{s_c}{t_c}$, kde

s…celková uražená dráha

t…celková doba pohybu

Tedy:

$$v_p = \frac{2s}{t_1+t_2} \qquad (1)$$

Pro jízdu nahoru platí: $s = v_1 t_1$, odtud $t_1 = \frac{s}{v_1}$

Pro jízdu dolů platí: $s = v_2 t_2$, odtud $t_2 = \frac{s}{v_2}$

Dosadíme do (1):

$$v_p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$$

Číselně:

$$v_p = \frac{2 \cdot 16 \cdot 44}{16+44} \doteq 23{,}47\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

b) průměrná rychlost Bedřicha na cestě z kopce

Pro jízdu dolů platí:

$$s = v_2' t_2'$$
$$t_2' = t' - t_1'$$

Odtud:

$$v_2' = \frac{s}{t' - t_1'} \qquad (2)$$

Pro jízdu nahoru platí:

$$s = v_1' t_1'$$
$$t_1' = \frac{s}{v_1'}$$

Pro průměrnou rychlost platí:

$$v_p' = \frac{2s}{t'}$$

$$t' = \frac{2s}{v'_p}$$

Dosadíme do (2):

$$v'_2 = \frac{s}{\frac{2s}{v'_p} - \frac{s}{v'_1}} = \frac{v'_1 v'_p}{2v'_1 - v'_p}$$

Číselně:

$$v'_2 = \frac{15 \cdot 23}{2 \cdot 15 - 23} \doteq 49{,}29\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Jiná možnost řešení by byla použít výsledek úlohy a), z něj vyjádřit v_2 a všechny rychlosti „opatřit čárkou".

c) poměr doby jízdy do kopce a zkopce

Použijeme označení z předchozích úloh.

Pro cyklistu Adama platí:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{s}{v_1}}{\frac{s}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1}$$

Číselně:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{44}{16} = 2{,}75$$

Analogicky pro cyklistu Bredřicha platí:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_2}{v'_1}$$

Dosazením výsledku úlohy b) dostaneme:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_p}{2v'_1 - v'_p}$$

Číselně:

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{23}{2 \cdot 15 - 23} \doteq 3{,}29$$

Odpověď

a) Průměrná rychlost v_p celé jízdy Adama je:

$$v_p = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Číselně:

$$v_p = 23{,}47\ \mathrm{km{\cdot}h}^{-1}$$

b) Průměrná rychlost v_2' jízdy z kopce cyklisty Bedřicha je:

$$v_2' = \frac{v_1' v_p'}{2v_1' - v_p'}$$

Číselně:

$$v_2' = 49{,}29\ \mathrm{km{\cdot}h}^{-1}$$

c) Poměr doby jízdy cyklisty Adama do kopce a z kopce je:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Číselně:

$$\frac{t_1}{t_2} = 2{,}75$$

c) Poměr doby jízdy cyklisty Bedřicha do kopce a z kopce je:

$$\frac{t_1'}{t_2'} = \frac{v_p'}{2v_1' - v_p'}$$

Číselně:

$$\frac{t_1'}{t_2'} = 3{,}29$$

Pohyb kola

Kolo o poloměru 5 m se rovnoměrně roztáčí. Velikost rychlosti značky na obvodu kola závisí na čase vztahem $v(t) = 0{,}5\ \mathrm{m\ s^{-2}} \cdot t$. Vypočtěte velikost celkového zrychlení pohybu značky a úhel, který svírají vektory rychlosti a zrychlení v časech 1 s a 4 s.

Zápis

$R = 5\ \mathrm{m}$	poloměr kola
$v(t) = at;\ a = 0{,}5\ \mathrm{m\ s^{-2}}$	časová závislost velikosti rychlosti značky
$a_c = ?\ (\mathrm{m\ s^{-2}})$	velikost celkového zrychlení pohybu značky
$\beta = ?\ (^\circ)$	úhel, který svírají vektory rychlosti a zrychlení

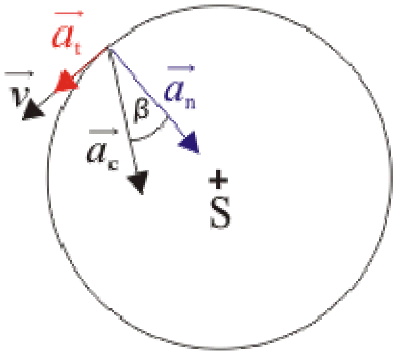
Nápověda 1: Rychlost, celkové zrychlení

Nakreslete si obrázek a do něj zakreslete, kam míří vektor rychlosti a celkového zrychlení bodu (značky). Uvědomte si, o jaký pohyb se jedná a jaké složky má celkové zrychlení.

► Řešení k nápovědě 1

Jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici.

Celkové zrychlení má dvě složky: tečné zrychlení a normálové zrychlení.



Úhel β mezi vektory rychlosti a celkového zrychlení je zároveň úhlem mezi tečným a celkovým zrychlením.

Nápověda 2: Tečné, normálové zrychlení a jejich velikost

Jak velké je tečné a jak velké je normálové zrychlení? Velikost celkového zrychlení pak jistě snadno určíte.

► Řešení k nápovědě 2

Pro velikost tečného zrychlení a_t platí:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(at)}{dt} = a$$

Pro velikost normálového zrychlení a_n platí:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{R}$$

Velikost celkového zrychlení a_c vypočteme z velikostí tečného zrychlení a_t a normálového zrychlení a_n:

$$a_c = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$a_c(t) = \sqrt{a^2 + \frac{a^4t^4}{R^2}} = a\sqrt{1 + \frac{a^2t^4}{R^2}}$$

Číselně:

$$a_c(1) = 0{,}5\sqrt{1 + \frac{0{,}5^2 \cdot 1^4}{5^2}}\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$
$$a_c(4) = 0{,}5\sqrt{1 + \frac{0{,}5^2 \cdot 4^4}{5^2}}\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}94\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Nápověda 3: Úhel beta

Úhel β snadno určíte pomocí obrázku z první nápovědy a tečného a normálového zrychlení.

► Řešení k nápovědě 3

Úhel β určíme podle obrázku takto:

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{a^2t^2}{Ra} = \frac{at^2}{R}$$
$$\beta(t) = arctg\frac{at^2}{R}$$
$$\beta(1) = arctg\frac{0{,}5 \cdot 1^2}{5} = 5{,}7^\circ$$
$$\beta(4) = arctg\frac{0{,}5 \cdot 4^2}{5} = 58^\circ$$

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Výpočet velikosti celkového zrychlení:

Pro velikost tečného zrychlení a_t platí:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(at)}{\mathrm{d}t} = a$$

Pro velikost normálového zrychlení a_n platí:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{R}$$

Velikost celkového zrychlení a_c vypočteme z velikostí tečného zrychlení a_t a normálového zrychlení a_n:

$$a_c = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a_c(t) = \sqrt{a^2 + \frac{a^4t^4}{R^2}} = a\sqrt{1 + \frac{a^2t^4}{R^2}}$$

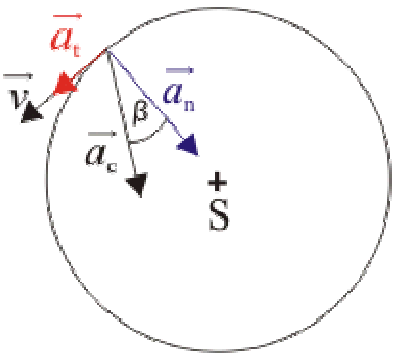
Číselně:

$$a_c(1) = 0{,}5\sqrt{1 + \frac{0{,}5^2 \cdot 1^4}{5^2}}\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$a_c(4) = 0{,}5\sqrt{1 + \frac{0{,}5^2 \cdot 4^4}{5^2}}\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}94\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Výpočet úhlu β:

Obrázek situace:



Úhel β mezi vektory rychlosti a celkového zrychlení je zároveň úhlem mezi tečným a celkovým zrychlením. Podle obrázku potom platí:

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{a^2t^2}{Ra} = \frac{at^2}{R}$$

$$\beta(t) = arctg\frac{at^2}{R}$$

$$\beta(1) = arctg\frac{0{,}5\cdot 1^2}{5} = 5{,}7^\circ$$

$$\beta(4) = arctg\frac{0{,}5\cdot 4^2}{5} = 58^\circ$$

Odpověď

Velikost celkového zrychlení a_c je:

$$a_c(t) = a\sqrt{1+\frac{a^2t^4}{R^2}}$$

Číselně:

$$a_c(1) = 0{,}5\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

$$a_c(4) = 0{,}94\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

Úhel β je:

$$\beta(t) = arctg\frac{at^2}{R}$$

Úhel β v okamžiku t_1 = 1 s je:

$$\beta(1) = 5{,}7^\circ$$

Úhel β v okamžiku t_2 = 4 s je:

$$\beta(4) = 58^\circ$$

Zahradní hadice

Proudem vody tryskajícím ze zahradní hadice počáteční rychlostí o velikosti $15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ chceme dostříknout co nejvýše na svislou stěnu, která se nachází ve vodorovné vzdálenosti 10 m od ústí hadice.

a) Jak velký elevační úhel musíme zvolit?

b) Do jaké výšky na stěnu voda dostříkne?

c) Pod jakým úhlem dopadne voda na stěnu? Určete odchylku vektoru okamžité rychlosti v okamžiku dopadu od vodorovného směru.

Odpor vzduchu zanedbejte.

Zápis

$v_0 = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	počáteční rychlost proudu vody
$d = 10\ \mathrm{m}$	vzdálenost stěny od ústí hadice
$\alpha = ?\ (°)$	elevační úhel
$h = ?\ (\mathrm{m})$	maximální výška dostřiku vody
$\psi = ?\ (°)$	úhel, pod kterým dopadne voda na stěnu

Z tabulek:

$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$	tíhové zrychlení

Rozbor

Chceme-li zjistit, pod jakým úhlem α musíme namířit hadici, aby voda dostříkla co nejvýše, musíme si nejprve vyjádřit, jak závisí výška dostřiku h na úhlu α. Pak již hledáme maximum funkce $h(\alpha)$.

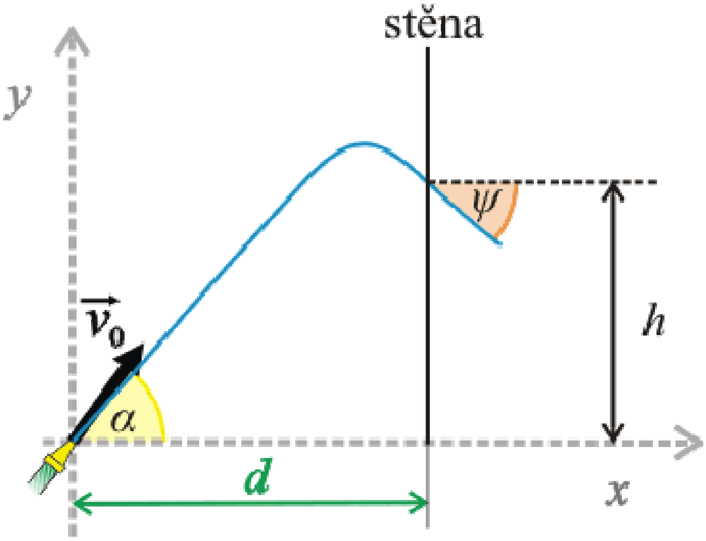
Pozor na úvahu, že maximální výška dostřiku na zeď bude odpovídat maximální výšce vrhu pro daný úhel α. Uvědomte si, že vzdálenost zdi je pevně daná. Nakreslete si různé možnosti situace.

Nápověda 1 pro a): Obrázek situace, typ pohybu

Nakreslete si obrázek situace. O jaký typ pohybu se jedná? Jak se bude s časem měnit x-ová a y-ová složka rychlosti vody? Jak se bude měnit x-ová a y-ová souřadnice?

► Řešení k nápovědě 1:

Obrázek 1:



Počátek vztažné soustavy zvolíme v ústí hadice.

Jedná se o šikmý vrh.

X-ová a *y*-ová složka rychlosti vody a *x*-ová a *y*-ová souřadnice se s časem mění následujícím způsobem:

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad (1)$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \qquad (2)$$

$$x = v_0 t \cos\alpha \qquad (3)$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

Nápověda 2 pro a): Doba doletu vody ke stěně, výška dostřiku

Jak dlouho poletí voda ke stěně pro daný úhel *α*? Jaká výška *h* dostřiku na stěnu odpovídá této době?

► Řešení k nápovědě 2:

Pro dobu letu vody a pro výšku místa dopadu na stěnu platí vztahy:

$$x = d$$

Pak z (3):

$$d = v_0 t \cos\alpha$$

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha} \qquad (5)$$

$$y = h$$

Pak z (4):

$$h = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Dosadíme za *t* z (5):

$$h = d\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = d\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right) \qquad (6)$$

Nápověda 3 pro a): Elevační úhel *α*

Potřebujete zjistit, pro jaký úhel α bude výška h dostřiku na stěnu maximální. Hledáte tedy maximum funkce $h = h(\alpha)$. Jak se to matematicky udělá?

► Řešení k nápovědě 3:

Zjistíme, kdy je derivace funkce h podle α rovna nule:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(d\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha} - \frac{gd^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{gd}{v_0^2}\mathrm{tg}\alpha\right) = 0$$

$$1 - \frac{gd}{v_0^2}\mathrm{tg}\alpha = 0$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gd} \qquad (7)$$

Pro elevační úhel $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{v_0^2}{gd}$ dosáhne tedy funkce *h(α)* maxima.

Pro zadané hodnoty:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{15^2}{9{,}81\cdot 10} \doteq 2{,}294$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,2{,}294 \doteq 66{,}4^\circ$$

Nápověda 4 pro b): Maximální výška dostřiku vody

Znáte úhel pro maximální výšku dostřiku a závislost výšky h dostřiku na stěnu na úhlu α. Maximální výšku již snadno dopočítáte.

► Řešení nápovědy 4:

Víme, že pro výšku místa dopadu na stěnu platí podle vztahu (6):

$$h = d\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = d\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right). \qquad (6)$$

Dále víme, že výška h dostřiku na stěnu bude maximální pro úhel α, pro který platí podle vztahu (7):

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gd}. \qquad (7)$$

Dosazením vztahu (7) do vztahu (6) dostaneme:

$$h = \frac{dv_0^2}{gd} - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1 + \frac{v_0^4}{g^2d^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}.$$

Číselně:

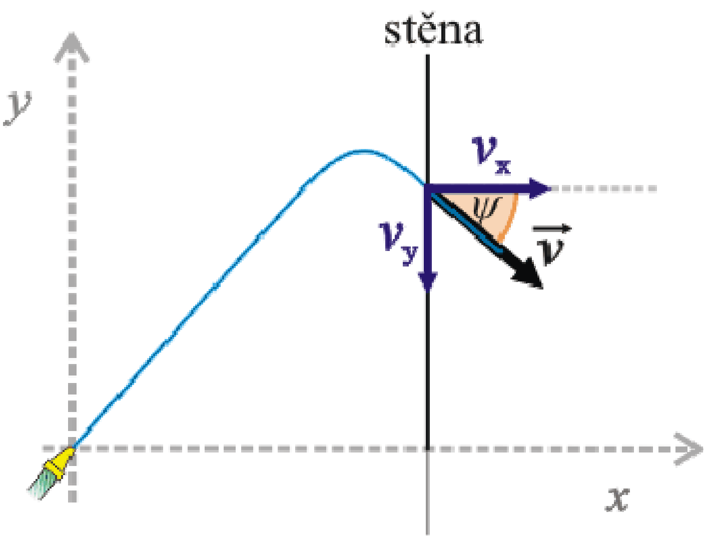
$$h = \left(\frac{15^2}{2 \cdot 9{,}81} - \frac{9{,}81 \cdot 10^2}{2 \cdot 15^2}\right)\,\mathrm{m}$$

$$h \doteq 9{,}29\ \mathrm{m}$$

Nápověda 5 pro c): Úhel ψ dopadu vody na stěnu

Dokreslete si do obrázku vektor rychlosti vody v okamžiku dopadu na stěnu a jeho složky ve směru osy *x* a *y*. Příslušný úhel s jejich pomocí snadno vyjádříte. Hodnoty obou složek rychlosti v okamžiku dopadu na stěnu určíte s pomocí vztahu (1) a (2) z Nápovědy 1.

▶ Řešení k nápovědě 5:



Odchylku ψ rychlosti dopadu od vodorovného směru určíme ze vztahu:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{v_y}{v_x}.$$

Za v_x a v_y dosadíme ze vztahů (1) a (2), za čas *t* pak ze vztahu (5):

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{gd}{v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Upravíme pomocí vztahu (7):

$$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{gd}{v_0^2}$$

Číselně:

$$\mathrm{tg}\psi = -\frac{9{,}81\cdot 10}{15^2} \doteq -0{,}436$$

$$\psi \doteq -23{,}6^\circ$$

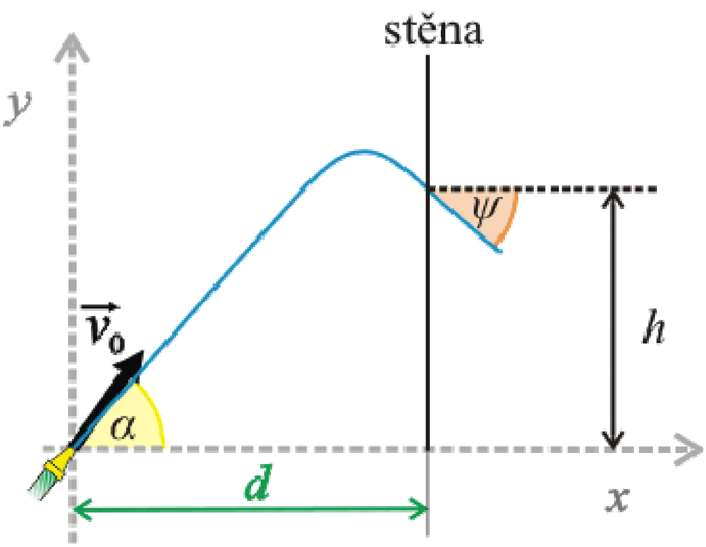
Odchylka ψ rychlosti dopadu od vodorovného směru vyšla záporná (odčítáme velikost po směru hodinových ručiček). Podívejte se na *obrázek*.

Poznámka:

Pozor na úvahu, že při maximální výšce dostřiku na stěnu bude y-ová složka rychlosti nulová a tedy i úhel φ nulový. V úloze je pevně daná vzdálenost stěny a tím pro daný úhel i doba letu vody.

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Obrázek 1:



Počátek vztažné soustavy zvolíme v ústí hadice.

Jedná se o šikmý vrh.

X-ová a *y*-ová složka rychlosti vody a *x*-ová a *y*-ová souřadnice se s časem mění následujícím způsobem:

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad (1)$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \qquad (2)$$

$$x = v_0 t \cos\alpha \qquad (3)$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

Pro dobu letu vody a pro výšku místa dopadu na stěnu platí vztahy:

$$x = d$$

Pak z (3):

$$d = v_0 t \cos\alpha$$

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha} \qquad (5)$$

$$y = h$$

Pak z (4):

$$h = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Dosadíme za *t* z (5):

$$h = d\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = d\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right) \qquad (6)$$

Potřebujeme zjistit, pro jaký úhel *α* bude výška *h* dostřiku vody maximální, neboli hledáme extrém funkce *h* = *h*(*α*).

Zjistíme, kdy je derivace funkce *h* podle *α* rovna nule:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(d\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha} - \frac{gd^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{gd}{v_0^2}\mathrm{tg}\alpha\right) = 0$$

$$1 - \frac{gd}{v_0^2}\mathrm{tg}\alpha = 0$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gd} \qquad (7)$$

Pro elevační úhel $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{v_0^2}{gd}$ dosáhne tedy funkce *h(α)* maxima.

Pro zadané hodnoty:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{15^2}{9{,}81\cdot 10} \doteq 2{,}294$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,2{,}294 \doteq 66{,}4^\circ$$

b) výška dostřiku

Víme, že pro výšku místa dopadu na stěnu platí podle vztahu (6):

$$h = d\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = d\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right). \qquad (6)$$

Dále víme, že výška *h* dostřiku na stěnu bude maximální pro úhel *α*, pro který platí podle vztahu (7):

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gd}. \qquad (7)$$

Dosazením vztahu (7) do vztahu (6) dostaneme:

$$h = \frac{dv_0^2}{gd} - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1 + \frac{v_0^4}{g^2d^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}.$$

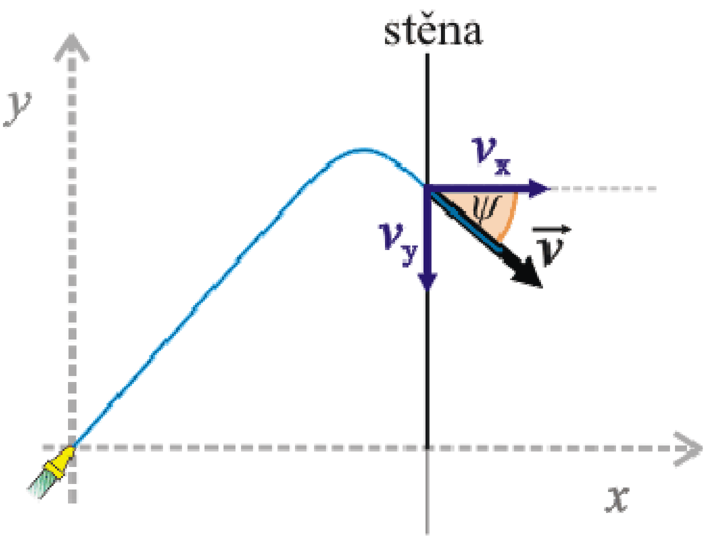
Číselně:

$$h = \left(\frac{15^2}{2 \cdot 9{,}81} - \frac{9{,}81 \cdot 10^2}{2 \cdot 15^2}\right)\,\mathrm{m}$$

$$h \doteq 9{,}29\,\mathrm{m}$$

c)odchylka ψ vektoru rychlosti dopadající vody od vodorovného směru

Do obrázku vyznačíme vektor rychlosti dopadající vody, jeho složky a hledaný úhel.



Odchylku ψ rychlosti dopadu od vodorovného směru určíme ze vztahu:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{v_y}{v_x}.$$

Za v_x a v_y dosadíme ze vztahů (1) a (2), za čas t pak ze vztahu (5):

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{gd}{v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Upravíme pomocí vztahu (7):

$$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha \cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{1}{tg\alpha} = -\frac{gd}{v_0^2}$$

Číselně:

$$\mathrm{tg}\psi = -\frac{9{,}81 \cdot 10}{15^2} \doteq -0{,}436$$

$$\psi \doteq -23{,}6^\circ$$

Odchylka ψ rychlosti dopadu od vodorovného směru vyšla záporná (odčítáme velikost po směru hodinových ručiček). Podívejte se na *obrázek*.

Poznámka:

Pozor na úvahu, že při maximální výšce dostřiku na stěnu bude *y*-ová složka rychlosti nulová a tedy i úhel φ nulový. V úloze je pevně daná vzdálenost stěny a tím pro daný úhel i doba letu vody.

Odpověď

a) Abychom dostříkli proudem vody co nejvýše na svislou stěnu, musíme zvolit elevační úhel α , pro který platí:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{v_0^2}{gd} \doteq 66{,}4^\circ\,.$$

b) Voda dostříkne do výšky *h*, pro kterou platí:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2} \doteq 9{,}29\ \mathrm{m}\,.$$

c) Voda na stěnu dopadne pod úhlem ψ , pro který platí:

$$\mathrm{tg}\psi = -\frac{gd}{v_0^2}\,.$$

Pro zadané hodnoty:

$$\psi = -23{,}6^\circ$$

Otáčení kola

Kolo se otáčí s frekvencí 25 Hz. Brzděním lze dosáhnout, že jeho otáčení bude rovnoměrně zpomalené a kolo se zastaví po čase 30 s od začátku brzdění. Vypočítejte úhlové zrychlení kola a počet otáček, které kolo vykoná od počátku brzdění do zastavení.

Zápis

f = 25 Hz	frekvence otáčení kola
t_0 = 30 s	čas, po kterém se kolo zastaví
ε = ? (s^{-2})	úhlové zrychlení kola
N = ?	počet otáček, které kolo vykoná od počátku brzdění do zastavení

Nápověda 1: Úhlové zrychlení kola

Uvědomte si, jaký vztah platí mezi okamžitou hodnotou úhlové rychlosti a úhlovým zrychlením kola.

Jakou počáteční úhlovou rychlostí se kolo pohybovalo před tím, než začalo brzdit? A jaká byla velikost úhlové rychlosti v čase t_0 ?

▶ Řešení k nápovědě 1

Pro okamžitou hodnotu úhlové rychlosti platí vztah:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\omega_0 = 2\pi f = 50\pi \text{ s}^{-1}$$

V čase $t = t_0$ bude $\omega = 0$ takže:

$$\omega_0 + \varepsilon t_0 = 0$$

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{2\pi f}{t_0} = -\frac{50}{30}\pi \text{ s}^{-2} = -5{,}24 \text{ s}^{-2}$$

Nápověda 2 : Počet otáček - početní řešení

Jakým způsobem zjistíte, kolik otáček kolo provedlo za určitý čas?

Použijte k tomu úhel, který polohový vektor libovolného bodu kola opíše vzhledem ke středu za určitý čas. Ten vyjádříte pomocí velikosti úhlového zrychlení, které znáte z předchozí nápovědy, a velikosti úhlové rychlosti před brzděním kola.

▶ Řešení k nápovědě 2

Polohový vektor libovolného bodu kola opíše vzhledem ke středu za čas t_0 úhel:

$$\varphi_0 = \omega_0 t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2} = 2\pi f t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2}$$
$$\varphi_0 = 1500\pi - \frac{5}{6}\pi 900 = 750\pi$$

Počet otáček za čas t_0:

$$N = \frac{\varphi_0}{2\pi} = \frac{750\pi}{2\pi} = 375$$

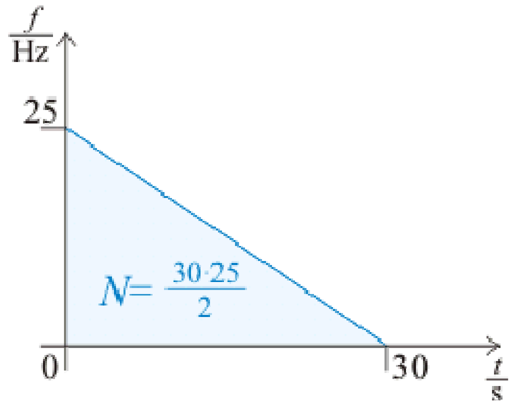
Nápověda 3: Počet otáček - grafické řešení

Počet otáček kola za čas t_0 lze zjistit také graficky.

Nakreslete graf závislosti frekvence otáčení kola na čase. Kde je v grafu schovaný daný počet otáček?

▶ Řešení k nápovědě 3

Grafické řešení:



Počtu otáček odpovídá plocha pod křivkou.

CELKOVÉ ŘEŠENÍ

Pro okamžitou hodnotu úhlové rychlosti platí vztah:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$
$$\omega_0 = 2\pi f = 50\pi\ \mathrm{s}^{-1}$$

V čase $t = t_0$ bude $\omega = 0$, takže:

$$\omega_0 + \varepsilon t_0 = 0$$

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{2\pi f}{t_0} = -\frac{50}{30}\pi \text{ s}^{-2} = -5{,}24 \text{ s}^{-2}$$

Polohový vektor libovolného bodu kola opíše vzhledem ke středu za čas t_0 úhel:

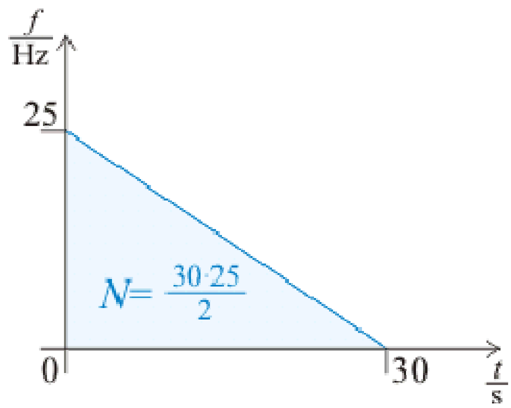
$$\psi_0 = \omega_0 t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2} = 2\pi f t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{2}$$

$$\psi_0 = 1500\pi - \frac{5}{6}\pi 900 = 750\pi$$

Počet otáček za čas t_0:

$$N = \frac{\psi_0}{2\pi} = \frac{750\pi}{2\pi} = 375$$

Grafické řešení:



Počtu otáček odpovídá plocha pod křivkou.

Odpověď

Úhlové zrychlení kola ε je:

$$\varepsilon = -\frac{2\pi f}{t_0} = -5{,}24 \text{ s}^{-2}$$

Počet otáček N, které kolo vykoná od počátku brzdění do zastavení, je:

$$N = \frac{\psi_0}{2\pi} = f t_0 + \frac{\varepsilon t_0^2}{4\pi} = 375$$

Počet otáček - ještě jinak

Počet otáček kola lze určit také následujícím způsobem. Frekvence otáčení se s časem mění podle vztahu:

$$f(t) = f_0 - kt$$

kde

$$k = \frac{25}{30}$$

(směrnice přímky v grafu z Nápovědy 3)

Počet otáček kola od začátku brzdění do zastavení pak můžeme spočítat jako integrál funkce $f(t)$ v daném časovém intervalu (obsah plochy pod křivkou):

$$N = \int_0^{30} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{30} (f_0 - \frac{25}{30}t)\mathrm{d}t$$

$$N = \int_0^{30} (f_0 - \frac{5}{6}t)\mathrm{d}t = \left[f_0 t - \frac{5t^2}{6 \cdot 2}\right]_0^{30}$$

$$N = 25 \cdot 30 - \frac{5 \cdot 30^2}{2 \cdot 6} = 375$$