

## Posudek diplomové práce Rastislava Olhavy

Předkládaná diplomová práce *Optimal pairs of function spaces for weighted Hardy operators* se věnuje dvěma okruhům problémů, které mají vzájemnou souvislost. V první části se autor zabývá váhovým Hardyho operátorem  $H_\varphi$ ,

$$H_\varphi f(t) := \int_t^r \varphi(s) f(s) \frac{ds}{s}, \quad t \in [0, r],$$

( $r \in (0, \infty)$ ,  $\varphi$  spojitá kvazikonkávní funkce) definovaném na prostoru měřitelných funkcí  $f$ . Autor uvažuje operátor  $H_\varphi$  na r.i.-prostoru  $X$  (tj. na *prostoru  $X$  invariantnímu vůči nerostoucímu přerovnání*, v originále „*rearrangement invariant space*“) a speciální konstrukcí nalezne *optimální* (tj. „nejmenší“) r.i.-prostor  $X_R$  takový, že  $H_\varphi : X \rightarrow X_R$ . Další speciální konstrukcí pak nalezne k prostoru  $X_R$  *optimální* (tj. „největší“) r.i.-prostor  $X_D$  takový, že  $H_\varphi : X_D \rightarrow X_R$ . Dvojice nalezených prostorů  $X_R, X_D$  se nazývá *optimální pár*.

Druhá část práce je věnována studiu jistých vlastností „*supremových operátorů*“ (v originále *supremum operators*)  $T_\varphi$  a  $S_\varphi$ ,

$$T_\varphi f(t) := \frac{1}{\varphi(t)} \sup_{t < s < r} \varphi(s) f^*(s), \quad t \in [0, r],$$
$$S_\varphi f(t) := \frac{\varphi(t)}{t} \sup_{0 < s \leq t} \frac{s}{\varphi(s)} f^*(s), \quad t \in [0, r],$$

kde  $f^*$  je *nerostoucí přerovnání funkce*  $f$ , tj.  $f^*(t) := \inf\{\lambda > 0; |\{x \in [0, r]; |f(x)| > \lambda\}| \leq t\}$ .

Práce je napsaná poměrně srozumitelně a přehledně. V některých místech by vyžadovala drobnou jazykovou korekturu. Autor píše „can not“ místo správného „cannot“ (viz např. 11. řádek zdola na str. 1). Poslední větu v úvodu (str. 2) bych spíše formuloval „*We will also study the relationship between ... and between ...*“. Ve znění Lemmatu 2.2 bych použil formulaci „*for two r.i. spaces  $X, Y$* “ místo „*for  $X, Y$  two r.i. spaces*“ atd. Tyto drobnosti samozřejmě nemají podstatný vliv na srozumitelnost práce.

Co postrádám více, je podrobnější vysvětlení, k čemu je to všechno vlastně dobré, zda zobecnění není jen samoúčelné. Autor se pouze zmiňuje, že v případě  $\varphi(t) = t^{m/n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ , bylo konstrukce optimálního páru prostorů  $X_R, X_D$  využito k charakterizaci optimality „klasického“ sobolevovského vnoření (odkaz na článek Kerman, Pick, *Forum Math.* (2006), vol. 18, no. 4, 535–570). Z obecných formulací na konci autorova úvodu vůbec nevyplývá, že studium Hardyho operátoru s obecnější funkcí  $\varphi$  je nutné ke studiu dalších vnoření (Sobolevovy prostory s jinou než Lebesgueovou mírou, vnoření do prostoru stop apod.). Rovněž chybí zmínka o tom, že studium supremových operátorů je pak velmi užitečné pro ověření optimality těchto dalších vnoření.

Závěrem bych chtěl konstatovat, že jako diplomová práce je tato práce dostačující. Autor prokázal své schopnosti k samostatné tvořivé činnosti. Výsledky práce jsou nové a po vhodné úpravě (doplnění úvodu a odkazů na související výsledky) také publikovatelné. Navrhuji, aby tato diplomová práce byla uznána za vyhovující.

V Praze, 25. srpna 2011

Doc. RNDr. Petr Gurka, CSc.