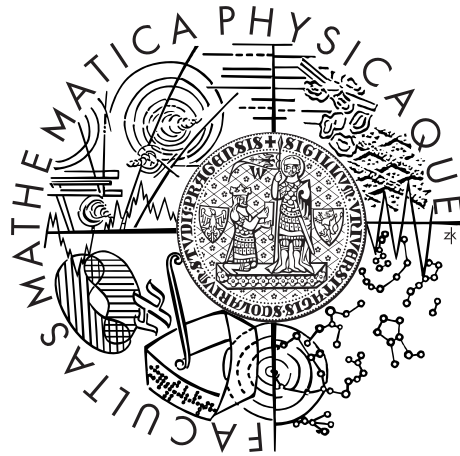


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Zdenka Danešová

## Riziko dlouhověkosti v životním pojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2011

Za odborné vedení práce děkuji RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Zdenka Danešová

Název práce: Riziko dlouhověkosti v životním pojištění

Autor: Zdenka Danešová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se zabýváme rizikem dlouhověkosti, které vyplývá z nejistoty o budoucím vývoji úmrtnosti ve vyšších věcích. Může vznikat zejména kvůli nepředvídatelnému poklesu úmrtnosti. Pro poskytovatele důchodových pojištění a penzí je toto riziko velmi významné. Uvažujeme modelové portfolio představované jednou kohortou příjemců okamžitých životních důchodů. Uvedeme možnosti pro posouzení rizikovosti takového portfolio. Dopad rizika dlouhověkosti srovnáváme s rizikem náhodných odchylek v úmrtnosti. Zabýváme se i otázkou solventnosti pojistitele, vyšetřujeme solventnostní kapitálový požadavek pro riziko dlouhověkosti.

Klíčová slova: riziko dlouhověkosti důchod solventnost

Title: Longevity Risk in Life Insurance

Author: Zdenka Danešová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we deal with the longevity risk originating from the uncertain future evolution of mortality at adult-old ages. It may emerge in particular because of an unanticipated reduction in mortality rates. That risk is significant for annuity and pension providers. We consider a model portfolio represented by one cohort of recipients of immediate life annuities. We introduce possibilities for assessing the risk of such portfolio. A comparison of the impact of longevity risk is made with random deviations in mortality rates. We also deal with the question of solvency of the insurer by investigating the solvency capital requirement for longevity risk.

Keywords: longevity risk annuity solvency

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Riziko úmrtnosti</b>	<b>3</b>
<b>2 Projekce úmrtnosti</b>	<b>5</b>
2.1 Funkce pro popis úmrtnosti . . . . .	5
2.2 Dynamické modelování úmrtnosti . . . . .	7
2.3 Projekce úmrtnosti extrapolací pravděpodobností úmrtí . . . . .	7
2.4 Projekce úmrtnosti v parametrických modelech . . . . .	10
2.5 Lee-Carterova metoda projekce úmrtnosti . . . . .	12
<b>3 Měření rizika dlouhověkosti</b>	<b>14</b>
3.1 Reprezentace rizika dlouhověkosti . . . . .	14
3.2 Volba pravděpodobností . . . . .	14
3.2.1 Metodika Českého statistického úřadu . . . . .	15
3.2.2 Vyjádření parametrů . . . . .	16
3.3 Kvantifikace rizika dlouhověkosti . . . . .	17
3.4 Podmíněný případ . . . . .	19
3.5 Nepodmíněný případ . . . . .	23
<b>4 Solventnost II</b>	<b>30</b>
4.1 Solventnostní kapitálový požadavek . . . . .	30
4.2 Standardní vzorec . . . . .	31
4.3 Modul životního upisovacího rizika . . . . .	33
4.4 Podmodul rizika dlouhověkosti . . . . .	34
4.5 Úplné a částečné interní modely . . . . .	35
4.6 Minimální kapitálový požadavek . . . . .	36
<b>5 Solventnostní kapitálový požadavek</b>	<b>37</b>
5.1 Příklady interních modelů . . . . .	37
5.2 Výpočet solventnostního kapitálového požadavku . . . . .	40
Závěr	51
Seznam použité literatury	52

# Úvod

Riziko dlouhověkosti, které pro poskytovatele důchodových pojištění a penzí vyplývá z nejistoty o budoucím vývoji úmrtnosti ve vyšších věcích, je v současnosti aktuálním problémem.

Práce Riziko dlouhověkosti v životním pojištění čerpá především z knihy [1]. Uvažujeme portfolio okamžitých životních důchodů vyplácených ročně polhůtně skupině pojištěných. Budeme se zabývat otázkami spojenými s kvantifikací rizika dlouhověkosti a jeho dopadem na solventnost pojišťovny.

Praktické výpočty byly prováděny v softwaru Wolfram Mathematica. Příslušné soubory jsou obsaženy na přiloženém CD.

V kapitole 1 je vymezen pojem rizika dlouhověkosti jako speciální případ rizika úmrtnosti.

Kapitola 2 uvádí některé vybrané metody navržené aktuary a demografy pro účely projekce úmrtnosti. Při výpočtech spojených s produkty typu životních důchodů týkajících se dlouhého časového období je třeba uvažovat předpověď budoucího trendu ve vývoji úmrtnosti, aby nedocházelo k podcenění příslušných závazků.

V kapitole 3 definujeme, podobně jako v [1], pět alternativních předpokladů o úmrtnosti kohorty. Vyšetřujeme charakteristiky pravděpodobnostního rozdělení sledovaných náhodných veličin, kterými jsou současná hodnota budoucích důchodových výplat a roční úhrn důchodových výplat.

Zbývající kapitoly se věnují solventnosti pojišťoven a výpočtu solventnostního kapitálového požadavku pro riziko dlouhověkosti.

V kapitole 4 jsou shrnuta ustanovení týkající se výpočtu solventnostního kapitálového požadavku s využitím standardního vzorce nebo interních modelů podle Směrnice Evropského parlamentu a rady 2009/138/ES ze dne 25. listopadu 2009 o přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu (Solventnost II). Pozornost je zaměřena především na riziko dlouhověkosti.

Kapitola 5 se věnuje praktickým výpočtům solventnostního kapitálového požadavku podle dvou různých interních modelů navržených v [1]. Získané výše solventnostních kapitálových požadavků jsou porovnány s výsledky získanými podle standardní formule pro riziko dlouhověkosti podle Solventnosti II.

# Kapitola 1

## Riziko úmrtnosti

Riziko úmrtnosti může vznikat různými způsoby:

- (a) Jednotlivec může žít delší dobu nebo naopak kratší dobu než je průměrná délka života v populaci, ke které náleží. To má za následek vyšší úmrtnost než je očekávaná úmrtnost v některých letech a nižší úmrtnost v ostatních letech. V těchto odchylkách není žádný zjevný trend.
- (b) Průměrná délka života v populaci se může lišit od té očekávané. Pozorované hodnoty úmrtnosti jsou systematicky nad nebo pod hodnotou odpovídající příslušné úmrtnostní tabulce.
- (c) Úmrtnost v populaci může zažít náhlé skoky v důsledku kritických životních podmínek, např. chřipkové epidemie či přírodní katastrofy.

Ve všech výše uvedených případech se pozorované hodnoty úmrtnosti odlišují od očekávaných hodnot.

Případ (a) představuje odchylky kolem očekávané hodnoty úmrtnosti. Riziko úmrtnosti je tu riziko náhodného kolísání kolem očekávané hodnoty způsobené náhodným charakterem délky života. Nazývá se *procesové riziko* nebo *pojistné riziko*. Týká se individuální pozice jednotlivce, která je zanedbatelná v rámci celého portfolia.

V případě (b) se nevyskytují odchylky kolem očekávané hodnoty, všechny hodnoty jsou buď pod očekávanou hodnotou nebo naopak všechny hodnoty jsou nad očekávanou hodnotou. Tyto odchylky jsou systematické. Pokud jsou odchylky způsobené nevhodnou volbou modelu, jedná se o *modelové riziko*. Jestliže odchylky vznikly vychýlením v odhadech parametrů zvoleného modelu, např. v důsledku nedostatku dat, jde o *parametrické riziko*. Někdy se pro parametrické a modelové riziko dohromady používá název *riziko nejistoty* zahrnující nejistotu v reprezentaci daného jevu, např. budoucí úmrtnosti. Ve vyšším dospělém věku se objevuje riziko nejistoty zapříčiněné nepředvídaným poklesem úmrtnosti. V tomto případě se pro riziko nejistoty používá název *riziko dlouhověkosti*. Riziko dlouhověkosti se týká celkové úmrtnosti.

Případ (c), *katastrofické riziko*, znamená náhlé a krátkodobé zvýšení úmrtnosti. Podobně jako v případě (b) se týká celkové úmrtnosti, ale na rozdíl od rizika dlouhověkosti, trvajících dlouhodobě, má katastrofické riziko charakter krátkodobý.

Je nutné odlišit, že podle Solventnosti II (o které bude pojednáno v kapitole 4), se riziko úmrtnosti vztahuje na nadměrnou úmrtnost, kdy zvýšení úmrtnosti vede ke zvýšení hodnoty pojistných závazků (např. v pojištění pro případ smrti). Naopak riziko dlouhověkosti představuje riziko významného poklesu úmrtnosti, kdy snížení úmrtnosti vede ke zvýšení hodnoty pojistných závazků (např. v pojištění životního důchodu).



# Kapitola 2

## Projekce úmrtnosti

### 2.1 Funkce pro popis úmrtnosti

Model úmrtnosti lze založit na náhodné veličině  $T_x$  představující zbývající dobu života osoby ve věku  $x$  s distribuční funkcí  $F_x(t)$  a hustotou  $f_x(t)$ . Dále se zavádí následující symboly:

- *pravděpodobnost úmrtí* ve věku  $x$  je pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku  $x$ , zemře před dosažením věku  $x + 1$ :

$$q_x = P(T_x \leq 1) = F_x(1)$$

- *$t$ -letá pravděpodobnost úmrtí* ve věku  $x$  je pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku  $x$ , zemře před dosažením věku  $x + t$ :

$${}_tq_x = P(T_x \leq t) = F_x(t)$$

- *pravděpodobnost přežití* ve věku  $x$  je pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku  $x$ , se dožije věku  $x + 1$ :

$$p_x = P(T_x \geq 1) = 1 - F_x(1) = 1 - q_x$$

- *$t$ -letá pravděpodobnost přežití* ve věku  $x$  je pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku  $x$ , se dožije věku  $x + t$ :

$${}_tp_x = P(T_x \geq t) = 1 - F_x(t) = 1 - {}_tq_x$$

K základním nástrojům matematiky životního pojištění patří úmrtnostní tabulky. Východiskem pro výpočet jednotlivých funkcí v úmrtnostní tabulce pro celočíselné věky jsou pravděpodobnosti úmrtí ve věku  $x$ . Úmrtnostní tabulky obsahují hodnoty pravděpodobností úmrtí zjištěné pro danou populaci v daném období. Z úmrtnostní tabulky lze odvodit model rozdělení pravděpodobností náhodné délky lidského života, jaké by bylo, kdyby se úmrtnost neměnila v čase.

*Funkce přežití*  $S(t)$ , která určuje rozdělení celkové doby života, je pro  $t \geq 0$  definována jako

$$S(t) = P(T_0 > t).$$

*Intenzita úmrtnosti* ve věku  $x$  je definována vztahem

$$\begin{aligned}
 \mu_x &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(T_x \leq t)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \leq x + t | T_0 > x)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \leq x + t)}{t \cdot \mathbb{P}(T_0 > x)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{S(x) - S(x + t)}{t \cdot S(x)} \\
 &= -\frac{d}{ds} \ln S(x).
 \end{aligned}$$

Pomocí intenzity úmrtnosti lze vyjádřit hustotu zbývající doby života  $T_x$  ve tvaru

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

a pravděpodobnost přežití ve tvaru

$${}_t p_x = \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+s} ds \right\} = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} \mu_s ds \right\}.$$

Jeden z nejčastěji používaných modelů pro intenzitu úmrtnosti ve věku  $x$  je Gompertz-Makehamův zákon úmrtnosti

$$\mu_x = A + B \cdot C^x,$$

kde  $A > 0$ ,  $B > 0$  a  $C > 1$  jsou parametry.

Chování intenzity úmrtnosti na intervalu  $(x, x+1)$  může být souhrnně popsáno pomocí *míry úmrtnosti* ve věku  $x$  označované  $m_x$  a definované vztahem

$$m_x = \frac{S(x) - S(x+1)}{\int_0^1 S(x+u) du}.$$

V praxi je odhadována pro celočíselné věky jako podíl počtu úmrtí ve věku mezi věky  $x$  a  $x+1$  v dané populaci v daném roce a velikosti uvažované věkové skupiny v polovině roku.

Pro očekávanou hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $T_x$  platí vztahy

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[T_x] &= \int_0^\infty t \cdot f_x(t) dt \\
 &= \int_0^\infty [1 - F_x(t)] dt \\
 &= \int_0^\infty {}_t p_x dt
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[T_x] &= \int_0^\infty t^2 \cdot f_x(t) dt - \left( \int_0^\infty t \cdot f_x(t) dt \right)^2 \\
 &= \int_0^\infty t^2 \cdot f_x(t) dt - (\mathbb{E}[T_x])^2.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

## 2.2 Dynamické modelování úmrtnosti

Základní myšlenkou dynamického přístupu k modelování úmrtnosti je vyjádření charakteristik popisujících úmrtnost jako funkce (budoucího) kalendářního roku  $t$ . Představu o trendech v úmrtnosti získáme sledováním vývoje těchto charakteristik v čase. V aktuárských výpočtech se užívají charakteristiky popisující úmrtnost, jež jsou uvedeny v předchozí části této kapitoly, které závisí na věku  $x$ . Při dynamickém modelování úmrtnosti tedy uvažujeme tyto charakteristiky jako funkce věku  $x$  a kalendářního roku  $t$ , obecně budeme takovou funkci značit  $\Gamma(x, t)$ .

Projekce úmrtnosti je dána hodnotami  $\Gamma(x, t) | t > t'$ , kde  $t'$  představuje aktuální rok nebo rok, ke kterému jsou k dispozici spolehlivá data. Tento rok se nazývá *referenční rok*.

Předpokládejme, že věk i kalendářní rok jsou celočíselné hodnoty. Potom  $\Gamma(x, t)$  tvoří matici, jejíž řádky odpovídají věkům a sloupce kalendářním rokům. Nechť například  $\Gamma(x, t) = q_x(t)$ , kde  $q_x(t)$  je pravděpodobnost, že osoba ve věku  $x$  v kalendářním roce  $t$  zemře během následujícího roku (pravděpodobnost úmrtí ve věku  $x$  v dynamickém kontextu).

Na jednotlivé prvky matice můžeme pohlížet podle tří různých uspořádání:

- (a) vertikální uspořádání (tj. podle sloupců)

$$q_0(t), q_1(t), \dots, q_x(t), \dots$$

odpovídající posloupnosti úmrtnostních tabulek, kde každá tabulka se vztahuje ke kalendářnímu roku  $t$

- (b) diagonální uspořádání

$$q_0(t), q_1(t+1), \dots, q_x(t+x), \dots$$

odpovídající posloupnosti kohortních úmrtnostních tabulek, kde každá tabulka se vztahuje ke kohortě narozených v roce  $t$

- (c) horizontální uspořádání (tj. podle řádků)

$$\dots, q_x(t-1), q_x(t), q_x(t+1), \dots$$

tvořící úmrtnostní profily, kde každý profil se vztahuje k danému věku  $x$ .

Popíšeme několik metod navržených aktuáry a demografy pro účely projekce úmrtnosti. Vycházíme z přehledu metod pro projekci úmrtnosti uvedených v [3] a také z poznatků uvedených v [1].

## 2.3 Projekce úmrtnosti extrapolací pravděpodobností úmrtí

Nyní předpokládejme, že máme k dispozici matici hodnot

$$\{q_x(t)\}_{x \in X, t \in T} = \{q_x(t_1), \dots, q_x(t_n)\}_{x \in X},$$

kde  $X = \{x_{min}, \dots, x_{max}\}$  a  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ . Každý řádek uvedené matice představuje pozorovaný úmrtnostní profil ve věku  $x$ .

Předpokládáme, že trend pozorovaný v minulých letech (tj. v množině let  $T$ ) může být popsán nějakou matematickou funkcí (např. exponenciální funkcí) a že pozorovaný trend bude pokračovat i v následujících letech.

Metody založené na analýze úmrtnostních profilů jsou příkladem horizontálního přístupu k projekci úmrtnosti.

Vztah mezi pravděpodobností úmrtí ve věku  $x$  v daném roce  $t'$  (např.  $t' = t_n$ ) a rokem  $t$  ( $t > t'$ ) můžeme vyjádřit jako:

$$q_x(t) = q_x(t')R_x(t - t'),$$

kde  $R_x(t - t')$  se nazývá *redukční faktor*.

Pokud budeme předpokládat, že redukční faktor nezávisí na věku  $x$ , dostaneme zjednodušení ve tvaru

$$R_x(t - t') = R(t - t').$$

Příkladem extrapolační formule pro projekci úmrtnosti je exponenciální formule ve tvaru

$$q_x(t) = q_x(t')r_x^{t-t'}, t > t'. \quad (2.3)$$

Použití této formule je vhodné v případě, kdy průběh logaritmů pravděpodobností úmrtí v závislosti na čase je pro každý věk  $x$  přibližně lineární, tj. můžeme najít takové hodnoty  $\delta_x$ , že pro  $h = 1, 2, \dots, n - 1$  máme přibližně

$$\ln q_x(t_{h+1}) - \ln q_x(t_h) \approx -\delta_x(t_{h+1} - t_h).$$

Redukční faktor má v tomto případě tvar

$$R_x(t - t') = r_x^{t-t'} = e^{-\delta_x(t-t')}.$$

Odhad parametru  $r_x$  pro daný věk  $x$  získáme například jako vážený geometrický průměr

$$\hat{r}_x = \prod_{h=1}^{n-1} (r_x^{(h)})^{w_h},$$

kde

$$r_x^{(h)} = \left( \frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \right)^{\frac{1}{t_{h+1}-t_h}},$$

pro váhy splňující podmínky

$$w_h \geq 0, \sum_{h=1}^{n-1} w_h = 1.$$

Při volbě  $w_h = (t_{h+1} - t_h)/(t_n - t_1)$  dostáváme

$$\hat{r}_x = \left( \frac{q_x(t_n)}{q_x(t_1)} \right)^{\frac{1}{t_n-t_1}},$$

takže odhad faktoru  $r_x$  je určen pouze první a poslední hodnotou užitého úmrtnostního profilu.

Pokud předpokládáme zlepšování úmrtnosti v čase, pak je redukční faktor  $R_x(t - t') < 1$ . V případě formule (2.3) dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_x(t) = 0.$$

Přestože výsledné projekce budou užívány pro omezený časový interval, je realističtější předpokládat nenulové limitní chování pravděpodobností úmrtí v každém věku  $x$ . Příkladem tohoto přístupu je formule ve tvaru

$$q_x(t) = q_x(t') \left[ \alpha_x + (1 - \alpha_x) r_x^{t-t'} \right], \quad t > t', \quad (2.4)$$

kde  $\alpha_x \geq 0$  pro všechna  $x$ . Redukční faktor je dán vztahem

$$R_x(t - t') = \alpha_x + (1 - \alpha_x) r_x^{t-t'}.$$

Formule (2.4) je zobecněním (2.3). Z (2.4) máme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_x(t) = \alpha_x q_x(t').$$

Exponenciální formuli (2.4) lze zjednodušit předpokladem  $r_x = r$  pro všechna  $x$  na tvar

$$q_x(t) = q_x(t') \left[ \alpha_x + (1 - \alpha_x) r^{t-t'} \right]. \quad (2.5)$$

Předpoklad stejného poklesu úmrtnosti pro všechny věky lze v tomto případě akceptovat, pokud se zabýváme omezenou množinou věků (např. skupinou příjemců důchodů). Závislost na věku je zohledněna parametrem  $\alpha_x$ .

Výše zmíněné exponenciální formule mohou být uvedeny v ještě obecnějším kontextu. Předpokládejme následující vyjádření pro roční pravděpodobnosti úmrtí ve věku  $x$

$$q_x(t) = a_x + b_x c_x^t,$$

kde parametry  $a_x, b_x, c_x$  závisí na věku  $x$  a nezávisí na kalendářním roce  $t$ , tudíž  $q_x(t)$  je exponenciální funkce proměnné  $t$ . Volbou  $a_x = 0, b_x = q_x(t') r^{-t'}, c_x = r_x$  dostaneme formuli (2.3) a volbou  $a_x = \alpha_x q_x(t'), b_x = (1 - \alpha_x) q_x(t') r^{-t'}, c_x = r_x$  získáme obecnější formuli (2.4).

Kromě exponenciálních formulí, jež předpokládají exponenciální pokles pravděpodobností úmrtí ve věku  $x$ , existují i jiné formule pro projekci úmrtnosti. Takovým příkladem může být např. formule

$$q_x(t) = a_x + \frac{b_x}{t}.$$

Projektované pravděpodobnosti úmrtí tvoří matici  $\{q_x(t)\}_{x \in X, t \geq t'}$ , kde  $t'$  je referenční rok. Pro každý rok  $t$  dostaneme pravděpodobnosti úmrtí týkající se doby života osoby ve věku  $x$  z diagonály

$$q_x(t), q_{x+1}(t+1), \dots$$

tj. z odpovídající kohortní tabulky. Pravděpodobnost přežití do věku  $x+k$  pro osobu, která je v čase  $t$  ve věku  $x$ , má vyjádření

$${}_k p_x^\nearrow(t) = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - q_{x+j}(t+j)),$$

tj. užívá se kohortní tabulka odpovídající roku narození dané osoby,  $\tau = t - x$ .

V praxi je současné užití více kohortních tabulek k výpočtům nevýhodné, proto se někdy přechází k jedné tabulce, která je z projektovaných hodnot vybrána jedním z následujících dvou způsobů, buď jako:

- (1) kohortní tabulka pro jeden pevně zvolený rok narození  $\bar{\tau}$

nebo jako

- (2) průřezová tabulka pro jeden rok  $\bar{t}$  z budoucnosti.

V případě (1) se při výpočtech použijí pravděpodobnosti

$$q_{x_{min}}(\bar{\tau} + x_{min}), q_{x_{min}+1}(\bar{\tau} + x_{min} + 1), \dots, q_x(\bar{\tau} + x), \dots$$

tudíž je použita jen jedna diagonála matice  $\{q_x(t)\}$ . Pravděpodobnost přežití do věku  $x + k$  je dána jako

$${}_k p_x^{[\bar{\tau}] \nearrow} = \prod_{j=0}^{k-1} [1 - q_{x+j}(\bar{\tau} + x + j)], \quad (2.6)$$

kde index  $[\bar{\tau}] \nearrow$  značí, že používáme kohortní tabulku pro rok narození  $\bar{\tau}$ . V případě (2) se při výpočtech použijí pravděpodobnosti

$$q_{x_{min}}(\bar{t}), q_{x_{min}+1}(\bar{t}), \dots, q_x(\bar{t}), \dots$$

tudíž je použit jen jeden sloupec matice  $\{q_x(t)\}$ . Pravděpodobnost přežití do věku  $x + k$  je dána jako

$${}_k p_x^{[\bar{t}] \uparrow} = \prod_{j=0}^{k-1} [1 - q_{x+j}(\bar{t})],$$

kde index  $[\bar{t}] \uparrow$  značí, že používáme úmrtnostní tabulku pro rok  $\bar{t}$ .

Podle přístupu (1) jsou pravděpodobnosti (2.6) nezávislé na skutečném roce narození. Tuto metodu lze zdokonalit užitím věkového posunu  $h(\tau)$  závislého na čase narození. Pro osobu, která se narodila v roce  $\tau$  a je ve věku  $x$ , budou užity pravděpodobnosti

$${}_k p_x^{[\bar{\tau}, h(\tau)] \nearrow} = \prod_{j=0}^{k-1} [1 - q_{x+h(\tau)+j}(\bar{\tau} + x + h(\tau) + j)],$$

přítom

$$h(\tau) \begin{cases} \geq 0 & \text{pro } \tau < \bar{\tau} \\ = 0 & \text{pro } \tau = \bar{\tau} \\ \leq 0 & \text{pro } \tau > \bar{\tau}. \end{cases}$$

## 2.4 Projekce úmrtnosti v parametrických modelech

V parametrických modelech je závislost úmrtnosti na věku vyjádřena pomocí funkce závislé na parametrech. Parametry mohou být považovány za funkci kalendářního času, nebo případně času narození.

Jako příklad může sloužit intenzita úmrtnosti ve věku  $x$ :

$$\mu_x = \varphi(x; \alpha, \beta, \dots).$$

V dynamickém kontextu kalendářní rok  $t$  vstupuje do modelu prostřednictvím jeho parametrů

$$\mu_x(t) = \varphi(x; \alpha(t), \beta(t), \dots).$$

Pro každý rok  $t_h, h = 1, \dots, n$ , odhadneme parametry modelu

$$\mu_x(t_h) = \varphi(x; \alpha_h, \beta_h, \dots)$$

některou ze standardních metod odhadu (např. metodou nejmenších čtverců nebo metodou maximální věrohodnosti). Dostaneme soubor  $n$  funkcí pro věk  $x$

$$\{\mu_x(t_1), \mu_x(t_2), \dots, \mu_x(t_n)\}.$$

Trend v odhadnutých parametrech pak vystihneme vhodnou funkcí času  $t$

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n &\Rightarrow \alpha(t) \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n &\Rightarrow \beta(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tento postup nazýváme vertikálním přístupem k projekci úmrtnosti, neboť nejprve vycházíme ze sloupců matice pozorovaných hodnot  $\{\mu_x(t)\}_{x \in X, t \in T}$ .

Naopak, diagonální přístup k projekci úmrtnosti vychází z předpokladu, že parametry modelu závisí na čase narození  $\tau$ :

$$\mu_x(\tau) = \varphi(x; \gamma(\tau), \delta(\tau), \dots).$$

Pro každý rok narození  $\tau_h, h = 1, \dots, m$ , odhadujeme parametry modelu

$$\mu_x(\tau_h) = \varphi(x; \gamma_h, \delta_h, \dots).$$

Dostaneme  $m$  funkcí pro věk  $x$

$$\{\mu_x(\tau_1), \mu_x(\tau_2), \dots, \mu_x(\tau_m)\}.$$

Trend v parametrech pak vyjádříme jako funkci času narození  $\tau$

$$\begin{aligned} \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m &\Rightarrow \gamma(\tau) \\ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m &\Rightarrow \delta(\tau) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Příkladem parametrického modelu je Gompertz-Makehamův zákon, který je považován za vyhovující model pro intenzitu úmrtnosti ve vyšších věcích. Podle vertikálního přístupu dostaneme

$$\mu_x(t) = A(t) + B(t)c(t)^x, \quad (2.7)$$

kde  $t$  je kalendářní rok. Podle diagonálního přístupu je dynamický Gompertz-Makehamův zákon definován jako

$$\mu_x(\tau) = \bar{A}(\tau) + \bar{B}(\tau)\bar{c}(\tau)^x,$$

kde  $\tau = t - x$  značí rok narození kohorty.

## 2.5 Lee-Carterova metoda projekce úmrtnosti

Popíšeme zde základní principy Lee-Carterovy metody, která představuje významný příklad stochastického přístupu k projekci úmrtnosti. Tato metoda patří v současnosti mezi nejuznávanější a je dále rozvíjena řadou autorů.

Nechť  $m_x(t)$  značí míru úmrtnosti ve věku  $x$  v čase  $t$ . V základním modelu jsou vyjádřeny logaritmy měr úmrtnosti ve věku  $x$  v čase  $t$  vztahem

$$\ln m_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t},$$

kde  $\alpha_x$  popisuje závislost úmrtnosti na věku průměrnou v čase,  $\kappa_t$  vyjadřuje změnu v úrovni úmrtnosti v čase a  $\beta_x$  popisuje citlivost na změny v časovém indexu  $\kappa_t$  pro daný věk  $x$ . Náhodné veličiny  $\epsilon_{x,t}$ , které mají nulovou střední hodnotu a rozptyl  $\sigma_\epsilon^2$ , zahrnují všechny vlivy, jež nejsou popsány modelem.

Míry úmrtnosti  $m_x(t)$  jsou náhodné veličiny, protože členy  $\epsilon_{x,t}$  jsou náhodné. Tento model je zástupcem stochastického modelu, v němž:

- pozorované hodnoty měr úmrtnosti jsou realizované hodnoty náhodných veličin představujících minulou úmrtnost
- předpovídané hodnoty měr úmrtnosti jsou odhady náhodných veličin představujících budoucí úmrtnost.

Opět předpokládejme, že máme k dispozici pozorovaná data pro kalendářní roky  $t = t_1, t_2, \dots, t_n$  a pro věky  $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ . Na základě těchto pozorovaných hodnot chceme odhadnout  $\alpha_x, \beta_x$  a  $\kappa_t$ . Odhad těchto parametrů není možný bez přidání dalších podmínek, neboť parametry nejsou určeny jednoznačně. Obvykle se zavádí omezení

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x = 1, \quad \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t = 0. \quad (2.8)$$

Model používaný k odhadu parametrů  $\alpha_x, \beta_x$  a  $\kappa_t$  má tvar

$$\ln \hat{m}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_x(t)$$

pro  $x = x_1, x_2, \dots, x_m$  a  $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ , kde  $\hat{m}_x(t)$  značí známé hodnoty míry úmrtnosti ve věku  $x$  v roce  $t$  a  $\epsilon_x(t)$  značí chybové členy se střední hodnotou 0 a rozptylem  $\sigma_\epsilon^2$ .

Odhady  $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x$  a  $\hat{\kappa}_t$  minimalizují

$$O = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2. \quad (2.9)$$

Existuje několik možných přístupů k řešení minimalizační úlohy (2.9). Odhady parametrů  $\alpha_x, \beta_x$  a  $\kappa_t$  můžeme získat například rekurzivně užitím Newtonova-Raphsonova algoritmu.

Parciální derivace (2.9) podle  $\alpha_x, \kappa_t$  a  $\beta_x$  položíme rovny 0, čímž dostaneme soustavu

$$0 = \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), \quad x = x_1, \dots, x_m,$$



$$0 = \sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), \quad t = t_1, \dots, t_n,$$

$$0 = \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), \quad x = x_1, \dots, x_m.$$

Každá rovnice je tvaru  $f(\xi) = 0$ , kde  $\xi$  je jeden z parametrů  $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ . Začneme s nějakou počáteční hodnotou  $\xi^{(0)}$ ,  $(k+1)$ -ní iterace dává hodnotu  $\xi^{(k+1)}$  pomocí  $\xi^{(k)}$  jako

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} - \frac{f(\xi^{(k)})}{f'(\xi^{(k)})}.$$

Při každé iteraci se získá nejnovější hodnota jednoho z parametrů  $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ , přitom se použijí vždy poslední získané hodnoty zbývajících dvou parametrů. Rekurentní vztahy mají následující tvar

$$\hat{\alpha}_x^{(k+1)} = \hat{\alpha}_x^{(k)} + \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln \hat{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x^{(k)} - \hat{\beta}_x^{(k)} \kappa_t^{(k)})}{t_n - t_1 + 1},$$

$$\hat{\kappa}_t^{(k+1)} = \hat{\kappa}_t^{(k)} + \frac{\sum_{x=x_1}^{x_m} \hat{\beta}_x^{(k)} (\ln \hat{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x^{(k+1)} - \hat{\beta}_x^{(k)} \kappa_t^{(k)})}{\sum_{x=x_1}^{x_m} (\hat{\beta}_x^{(k)})^2},$$

$$\hat{\beta}_x^{(k+1)} = \hat{\beta}_x^{(k)} + \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{\kappa}_t^{(k+1)} (\ln \hat{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x^{(k+1)} - \hat{\beta}_x^{(k)} \kappa_t^{(k+1)})}{\sum_{t=t_1}^{t_n} (\hat{\kappa}_t^{(k+1)})^2}.$$

Odhady  $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x$  a  $\hat{\kappa}_t$  získané pomocí Newtonova-Raphsonova algoritmu nesplňují podmínky (2.8), proto je nutné je následujícím způsobem upravit

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_x &\sim \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bar{\kappa}, \\ \hat{\kappa}_t &\sim (\hat{\kappa}_t - \bar{\kappa}) \hat{\beta}_\bullet, \\ \hat{\beta}_x &\sim \hat{\beta}_x / \hat{\beta}_\bullet, \end{aligned}$$

kde  $\hat{\beta}_\bullet = \sum_{x=x_1}^{x_m} \hat{\beta}_x$  a  $\bar{\kappa} = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \hat{\kappa}_t$ .

Pokud máme odhady  $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x$  a  $\hat{\kappa}_t$ , projekce úmrtnosti získáme modelováním hodnot  $\kappa_t$  jako časové řady. Projekce míry úmrtnosti pro  $t > t'$ , kde  $t'$  je daný rok, je pak ve tvaru

$$m_x(t) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \kappa_t) = m_x(t') \exp \left[ \hat{\beta}_x (\kappa_t - \hat{\kappa}_{t'}) \right].$$

Zdůrazněme, že  $m_x(t)$  je modelováno jako stochastický proces, který je řízen stochastickým procesem  $\kappa_t$ .

# Kapitola 3

## Měření rizika dlouhověkosti

### 3.1 Reprezentace rizika dlouhověkosti

Nechť  $\Gamma(x, t)$  značí funkci popisující úmrtnost, kde  $x$  je věk dosažený v čase  $t$  kohortou narozených v čase  $\tau = t - x$ . Touto funkcí může být např. pravděpodobnost úmrtí  $q_x(t)$  nebo intezita úmrtnosti  $\mu_x(t)$ .

Abychom mohli vyšetřovat riziko nejistoty, je třeba zvolit několik alternativních předpokladů o úmrtnosti kohorty. Tyto předpoklady můžeme dostat různou volbou parametrů v projekčním modelu. Uvažujeme stejný model pro projekce úmrtnosti, ale vždy s různými alternativními hodnotami parametrů pro reprezentaci alternativních předpokladů o úmrtnosti.

Nechť  $A(\tau)$  značí daný předpoklad o úmrtnosti pro osoby narozené v roce  $\tau$  a  $\mathcal{A}(\tau)$  množinu všech takových v úvahu připadajících předpokladů. Zápis  $\Gamma(x, \tau + x | A(\tau))$  představuje funkci popisující úmrtnost  $\Gamma$  podmíněnou daným předpokladem  $A(\tau)$ . Všechny možnosti budoucího vývoje úmrtnosti jsou dány množinou  $\{\Gamma(x, \tau + x | A(\tau)); A(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)\}$ . Množina  $\mathcal{A}(\tau)$  může být diskrétní nebo spojitá. My však budeme nadále uvažovat jen diskrétní případ.

Množině  $\mathcal{A}(\tau)$  můžeme přiřadit systém vah. Nechť

$$\mathcal{A}(\tau) = \{A_1(\tau), A_2(\tau), \dots, A_m(\tau)\}$$

je množina všech alternativních předpokladů o úmrtnosti,  $\rho_h$  je váha přiřazená předpokladu  $A_h(\tau)$  taková, že  $0 \leq \rho_h \leq 1$  pro  $h = 1, 2, \dots, m$  a  $\sum_{h=1}^m \rho_h = 1$ . Množinu

$$\{\rho_h\}_{h=1,2,\dots,m} \tag{3.1}$$

lze chápat jako pravděpodobnostní rozdělení na množině  $\mathcal{A}(\tau)$ . V praxi bývá často nedostatek dat pro odhadnutí těchto vah, proto nezbývá nic jiného, než tyto váhy nějakým způsobem zvolit.

Uvažujeme statický přístup pro vývoj úmrtnosti. Množina  $\mathcal{A}(\tau)$  je pevně daná. Nejistota spočívá v tom, který z předpokladů  $A(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)$  lépe vystihuje skutečnou úmrtnost kohorty.

### 3.2 Volba pravděpodobností

Pro výpočty v této práci potřebujeme definovat několik možných scénářů vývoje úmrtnosti, zvolíme pět různých alternativních předpokladů o úmrtnosti ko-

horty. Každý z těchto předpokladů je představován ročními pravděpodobnostmi úmrtí. Neměli jsme k dispozici vhodné úmrtnostní tabulky, proto jsme se rozhodli vyjít z úmrtnostních tabulek publikovaných Českým statistickým úřadem a z Gompertz-Makehamova zákona úmrtnosti.

### 3.2.1 Metodika Českého statistického úřadu

V této části popíšeme metodiku Českého statistického úřadu pro výpočet vstupních pravděpodobností úmrtí pro podrobnou úmrtnostní tabulku, tj. tabulku s jednoletým věkovým intervalem, odděleně pro muže a ženy. Pravděpodobnosti úmrtí jsou vypočteny nepřímou metodou, tj. odvozeny ze specifických měř úmrtnosti  $m_x$ .

Partie věnující se kojenecké úmrtnosti vynecháme, neboť nás zajímají pravděpodobnosti úmrtí jen ve vyšších věcích.

Vstupní data:

- počet zemřelých dle pohlaví a jednotek věku v daném roce
- počet obyvatel dle pohlaví a věku v ČR k 1. 7. daného roku

Postup:

1. Z empirických dat vypočteme pro věk  $x \geq 1$  specifickou míru úmrtnosti  $m_x$  jako podíl počtu zemřelých daného věku a pohlaví a středního stavu obyvatel daného věku a pohlaví v ČR:

$${}_t m_x = \frac{{}_t D_x}{1.7.{}_t P_x}.$$

2. Vypočteme pravděpodobnost úmrtí, která je založena na funkci

$$q_x = 1 - e^{-m_x}.$$

3. Pro odstranění náhodných výkyvů jsou hodnoty pravděpodobnosti úmrtí od věku 4 let vyrovnány pomocí vzorce:

$$q_x^{vyrovn} = \frac{105q_x + 90(q_{x-1} + q_{x+1}) + 45(q_{x-2} + q_{x+2}) - 30(q_{x-3} + q_{x+3})}{315}.$$

4. Vzhledem k malé velikosti souboru zemřelých ve vyšším věku (a tudíž většímu kolísání empirických hodnot) se pravděpodobnost úmrtí přibližně od věku 80 let odvozuje (extrapoluje) pomocí Gompertz-Makehamova vzorce:

$$\log p_x = a + b \cdot c^x.$$

Vstupní charakteristikou pro Gompertz-Makehamovu formuli je přirozený logaritmus pravděpodobnosti přežití odvozené z vyrovnané hodnoty pravděpodobnosti úmrtí:

$$\ln p_x^{vyrovn} = \ln(1 - q_x^{vyrovn}).$$

Český statistický úřad používá King-Hardyho metodu, při které extrapolace vychází ze soustavy rovnic  $(R_1, R_2, R_3)$  pro tři stejně dlouhé po sobě jdoucí intervaly, kde  $d$  je délka intervalu a  $x_0$  věk na počátku prvního intervalu (zde  $x_0 = 60$  a  $d = 8$ ).

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{i=x_0}^{x_0+d-1} \ln p_i^{vyrovn} \\ R_2 &= \sum_{i=x_0+d}^{x_0+2d-1} \ln p_i^{vyrovn} \\ R_3 &= \sum_{i=x_0+2d}^{x_0+3d-1} \ln p_i^{vyrovn}. \end{aligned}$$

5. Konstanty  $a$ ,  $b$ ,  $c$  obsažené v Gompertz-Makehamově formuli vypočteme podle vztahů:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt[d]{\frac{R_3 - R_2}{R_2 - R_1}} \\ b &= \frac{(c - 1)(R_2 - R_1)}{c^{x_0}(c^d - 1)^2} \\ a &= \left[ R_1 - \frac{(R_2 - R_1)}{(c^d - 1)} \right] / d. \end{aligned}$$

6. Dosazením  $a$ ,  $b$ ,  $c$  do Gompertz-Makehamova vzorce vypočteme pro věk  $x \geq 71$  modelové pravděpodobnosti přežití  $r_x = \exp(a + b \cdot c^x)$  a najdeme věk  $y \geq 75$ , pro který nabývá odchylka  $|p_x^{vyrovn} - r_x|$  minimální hodnoty. Od věku  $y$  pak pravděpodobnost úmrtí nejlépe vystihuje  $q_x^{GM}$ , která je doplňkem funkce  $r_x$  do jedné. Přechod na extrapolované hodnoty je upraven vyrovnáním hodnot pro věk  $z = (y - 4), \dots, (y + 4)$ :

$$q_x^{GM} = 1 - \left[ \left(1 - \frac{z - y + 5}{10}\right) p_z^{vyrovn} + \frac{z - y + 5}{10} r_z \right].$$

### 3.2.2 Vyjádření parametrů

Výše popsaná metodika Českého statistického úřadu poskytuje hodnoty parametrů  $a, b, c$  z Gompertz-Makehamova vzorce

$$\log p_x = a + b \cdot c^x.$$

My použijeme Gompertz-Makehamův zákon úmrtnosti ve tvaru

$$\mu_x = A + B \cdot C^x.$$

Proto je třeba určit hodnoty parametrů  $A, B, C$ . Vycházíme z vyjádření pravděpodobnosti přežití pomocí intenzity úmrtnosti:

$$\begin{aligned} p_x &= \exp \left\{ - \int_x^{x+1} \mu_y dy \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_x^{x+1} (A + B \cdot C^y) dy \right\} \\ &= \exp \left\{ -A + \frac{BC^x}{\ln C} (1 - C) \right\}. \end{aligned}$$

Pro logaritmus pravděpodobnosti přežití máme potom

$$\ln p_x = -A + \frac{BC^x}{\ln C}(1 - C).$$

Porovnáním obou vyjádření dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} A &= -a \\ B &= \frac{b \ln c}{1 - c} \\ C &= c. \end{aligned}$$

Podle metodiky Českého statistického úřadu jsme pro podrobnou úmrtnostní tabulku pro muže z roku 2009 dostali následující hodnoty parametrů Gompertz-Makehamova zákona pro logaritmy pravděpodobnosti přežití

$$\begin{aligned} a &= -0,00956 \\ b &= -7,96342 \cdot 10^{-6} \\ c &= 1,12148 \end{aligned}$$

a pro intenzity úmrtnosti

$$\begin{aligned} A &= 0,00956 \\ B &= 7,51565 \cdot 10^{-6} \\ C &= 1,12148. \end{aligned}$$

S ohledem na vypočtené hodnoty parametrů  $a, b, c$ , resp.  $A, B, C$  zvolíme takové hodnoty parametrů  $A, B$  a  $C$ , abychom dostali pět různých sad pravděpodobností přežití  $p_x$  (resp. úmrtí  $q_x$ ) představujících pět různých scénářů úmrtnosti kohorty.

### 3.3 Kvantifikace rizika dlouhověkosti

Tabulka 3.1 uvádí hodnoty parametrů  $A, B, C$  Gompertz-Makehamova zákona pro různé předpoklady o úmrtnosti. V této tabulce jsou dále uvedeny také očekávaná hodnota ( $E[T_{65}|A_h(\tau)]$ ) a směrodatná odchylka ( $\sqrt{\text{Var}[T_{65}|A_h(\tau)]}$ ) zbývající doby života ve věku 65, které jsme vypočetli pro různé volby parametrů využitím vztahu (2.1) pro očekávanou hodnotu náhodné veličiny  $T_x$  a vztahu (2.2) pro rozptyl.

Různé sady parametrů ukazují na různou úroveň rektangularizace (zvyšující se koncentrace úmrtí kolem modu rozdělení náhodné veličiny  $T_{65}$ , což ukazuje  $\text{Var}[T_{65}|A_h(\tau)]$ ) a expanze (modus rozdělení náhodné veličiny  $T_{65}$  se posunuje k vyšším věkům, což ukazuje  $E[T_{65}|A_h(\tau)]$ ).

Předpoklad  $A_3(\tau)$  budeme považovat za nejlepší odhad úmrtnosti kohorty  $\tau$ . Porovnáním hodnot  $E[T_{65}|A_h(\tau)]$  a  $\sqrt{\text{Var}[T_{65}|A_h(\tau)]}$  pro různé předpoklady z tabulky 3.1 dostaneme následující srovnání s  $A_3(\tau)$  ve věku 65:

- předpoklad  $A_1(\tau)$  vykazuje slabší expanzi (tj. nižší očekávanou dobu života) a silnější rektangularizaci (tj. nižší směrodatnou odchylku doby života)
- předpoklad  $A_2(\tau)$  vykazuje slabší expanzi i slabší rektangularizaci

	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
A	0,0092	0,0159	0,0095	0,0043	0,0086
B	8,584E-6	7,014E-6	7,093E-6	7,169E-6	6,001E-6
C	1,1199	1,1194	1,1196	1,1197	1,1178
$E[T_{65} A_h(\tau)]$	15,1284	15,4223	16,3190	17,1173	18,2684
$\sqrt{\text{Var}[T_{65} A_h(\tau)]}$	7,97068	8,54834	8,42462	8,25902	9,07357

Tabulka 3.1: Parametry pro Gompertz-Makehamův zákon

- předpoklad  $A_4(\tau)$  vykazuje silnější expanzi i silnější rektangularizaci
- předpoklad  $A_5(\tau)$  vykazuje silnější expanzi a slabší rektangularizaci.

Jako maximální dosažitelný věk, kterého se osoby v našem případě mohou dožít, bereme věk  $\omega = 110$ .

Budeme pracovat s portfoliem představovaným jednou kohortou pojištěných. Budeme předpokládat, že pojistník a pojištěný jsou jedna osoba. Této kohortě vyplácíme ročně polhůtně okamžité doživotní důchody. Předpokládáme, že všichni pojištění jsou ve věku  $x_0$  v čase  $t_0$  uzavření smluv. Čas  $t$  se počítá od okamžiku uzavření smluv, tj.  $t$  představuje dobu trvání pojištění. Odpovídající kalendářní rok v čase  $t$  je  $t_0 + t$ . Dále předpokládáme, že doby života pojištěných jsou při daném předpokladu navzájem nezávislé a stejně rozdělené. Jelikož naším cílem je zkoumat riziko dlouhověkosti, zanedbáme riziko na finančních trzích a budeme používat danou technickou úrokovou míru. Budeme uvažovat homogenní portfolio, kdy všem pojištěným vyplácíme ročně důchod stejné pevně dané výše  $b$ . Konečně, zanedbáme všechny správní náklady a další náklady spojené s pojištěním.

Nechť  $N_t$  je náhodný počet pojištěných v portfoliu v čase  $t$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , přičemž  $N_0$  je daná počáteční velikost portfolia. Pokud je velikost portfolia v čase  $t$  pozorovaná hodnota, značíme ji  $n_t$ . Takže máme  $N_0 = n_0$ .

Nechť  $Y_t^{(\text{II})}$  je současná hodnota budoucích důchodových výplat pro celé portfolio v čase  $t$  a  $B_t^{(\text{II})}$  je roční úhrn výplat pro portfolio v čase  $t$ . Pro tyto náhodné veličiny budeme zkoumat jejich očekávané hodnoty, rozptyly, koeficienty variace a některé percentily. Zvláště nás bude zajímat dopad rizika dlouhověkosti v závislosti na velikosti portfolia. Díky homogenitě portfolia máme

$$B_t^{(\text{II})} = b N_t$$

a současnou hodnotu budoucích důchodových výplat portfolia můžeme vyjádřit jako

$$Y_t^{(\text{II})} = \sum_{h=t+1}^{\omega-x_0} B_h^{(\text{II})} (1+i)^{-(h-t)} = \sum_{h=t+1}^{\omega-x_0} b N_h (1+i)^{-(h-t)}, \quad (3.2)$$

kde  $i$  je roční technická úroková míra. Pro homogenní portfolio označme jako  $Y_t^{(1)}$  současnou hodnotu budoucích důchodových výplat jednoho pojištěného.

V následujících výpočtech používáme roční úrokovou míru  $i = 2,5\%$ , vstupní věk pojištěných je  $x_0 = 65$  a roční výše důchodu je  $b = 1$ . Máme tedy  $B_t^{(\text{II})} = N_t$ .

### 3.4 Podmíněný případ

Pro očekávanou současnou hodnotu budoucích důchodových výplat jednoho pojištěného  $Y_t^{(1)}$  máme

$$E[Y_t^{(1)}] = \sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k} {}_k p_{x_0+t}$$

a pro rozptyl  $Y_t^{(1)}$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_t^{(1)}] &= \left( \frac{1+i}{i} \right)^2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-2k-2} {}_k p_{x_0+t} q_{x_0+t+k} \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k-1} {}_k p_{x_0+t} q_{x_0+t+k} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

V závislosti na daném předpokladu o úmrtnosti platí následující vztahy pro očekávanou hodnotu, rozptyl a koeficient variace současné hodnoty budoucích důchodových výplat:

$$\begin{aligned} E[Y_t^{(\text{II})} | A_h(\tau), n_t] &= n_t E[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)] \\ \text{Var}[Y_t^{(\text{II})} | A_h(\tau), n_t] &= n_t \text{Var}[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)] \\ \text{CV}[Y_t^{(\text{II})} | A_h(\tau), n_t] &= \frac{1}{\sqrt{n_t}} \frac{\sqrt{\text{Var}[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)]}}{E[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)]}, \end{aligned}$$

kde  $n_t$  je velikost portfolia pozorovaná v čase  $t$  trvání pojištění.

Koeficient variace dovoluje vyšetřovat vliv velikosti portfolia na celkovou rizikovitost. Rizikovitost portfolia s rostoucím  $n_t$  klesá, tj. čím větší je portfolio, tím je méně rizikové.

Percentil  $\epsilon$  podmíněného pravděpodobnostního rozdělení  $Y_t^{(\text{II})}$  při úmrtnostním předpokladu  $A_h(\tau)$  a pozorované velikosti portfolia  $n_t$  v čase  $t$  je definován jako

$$y_{t,\epsilon}[A_h(\tau), n_t] = \inf \left\{ u \geq 0 \mid P \left[ Y_t^{(\text{II})} \leq u \mid A_h(\tau), n_t \right] > \epsilon \right\}.$$

Zajímáme se hlavně o pravý chvost rozdělení  $Y_t^{(\text{II})}$ , proto budeme uvažovat jen vysoké hodnoty  $\epsilon$ .

Pro rozdělení ročního úhrnu výplat pro portfolio  $B_t^{(\text{II})}$  díky nezávislosti a homogenitě platí, že náhodná veličina  $B_t^{(\text{II})}$  má (při informacích dostupných v čase  $t$ ) binomické rozdělení s parametry  $n_0$  a pravděpodobností přežití z času uzavření pojištění do času  $t$  počítanou v závislosti na daném předpokladu o úmrtnosti. Pro úplnost uvedeme vztahy pro očekávanou hodnotu, rozptyl a koeficient variace pro roční úhrn výplat:

$$\begin{aligned} E[B_t^{(\text{II})} | A_h(\tau)] &= n_0 \cdot {}_t p_{x_0} \\ \text{Var}[B_t^{(\text{II})} | A_h(\tau)] &= n_0 \cdot {}_t p_{x_0} (1 - {}_t p_{x_0}) \end{aligned}$$

$$\text{CV}[B_t^{(\text{II})} | A_h(\tau)] = \frac{\sqrt{\text{Var}[B_t^{(\text{II})} | A_h(\tau)]}}{E[B_t^{(\text{II})} | A_h(\tau)]} = \sqrt{\frac{1 - {}_t p_{x_0}}{n_0 \cdot {}_t p_{x_0}}}.$$

Čas $t$	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	11,586	11,713	12,345	12,904	13,550
5	9,443	9,803	10,221	10,588	11,434
10	7,356	7,865	8,111	8,328	9,291
15	5,431	6,002	6,122	6,213	7,219
20	3,769	4,318	4,358	4,399	5,322
25	2,431	2,901	2,897	2,901	3,691
30	1,434	1,796	1,775	1,764	2,383
35	0,750	1,001	0,979	0,965	1,410

Tabulka 3.2: Očekávaná současná hodnota budoucích důchodových výplat v čase  $t$ :  $\frac{E[Y_t^{(II)}|A_h(\tau),n_t]}{n_t} = E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]$

Čas $t$	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
0	31,011	34,890	33,152	31,131	35,799
5	25,387	28,367	27,619	26,794	30,708
10	19,445	21,950	21,724	21,492	25,098
15	13,643	15,835	15,784	15,759	19,160
20	8,607	10,430	10,391	10,384	13,395
25	4,816	6,159	6,097	6,069	8,435
30	2,369	3,221	3,157	3,121	4,744
35	1,017	1,485	1,437	1,408	2,504

Tabulka 3.3: Rozptyl současné hodnoty budoucích důchodových výplat v čase  $t$ :  $\frac{Var[Y_t^{(II)}|A_h(\tau),n_t]}{n_t} = Var[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]$

V podmíněném případě, kdy je znám předpoklad o úmrtnosti kohorty, je uvažováno jen riziko náhodných odchylek, nikoli riziko dlouhověkosti (systematické riziko). Charakteristiky v následujících tabulkách však mohou být nápomocné při porovnání s charakteristikami beroucími v úvahu i riziko dlouhověkosti v nepodmíněném případě, kdy neznáme skutečně realizovanou úmrtnost kohorty. Pro každý předpoklad pro všechny časy  $t = 0, 5, \dots, 35$  nechť je  $n_t = E[N_t|A_h(\tau)]$ .

V tabulce 3.2 je uvedena očekávaná současná hodnota budoucích důchodových výplat pro jednoho pojištěného v časech  $t = 0, 5, \dots, 35$  pro jednotlivé předpoklady. Očekávaná současná hodnota budoucích důchodových výplat v čase uzavření smlouvy  $t = 0$  je nejmenší pro předpoklad  $A_1(\tau)$ , pro další předpoklady se zvětšuje, až u předpokladu  $A_5(\tau)$  je největší, což je v souladu s tím, že očekávaná hodnota zbývající doby života ( $E[T_{65}|A_h(\tau)]$ ) pro předpoklad  $A_1(\tau)$  je nejmenší, pro další předpoklady roste a pro předpoklad  $A_5(\tau)$  je největší, jak můžeme nahlédnout z tabulky 3.1. V pozdějších časech se toto pořadí může změnit díky odlišné variabilitě rozdělení  $T_{65}$  pro různé předpoklady.

Tabulka 3.3 poskytuje hodnoty rozptylu současné hodnoty budoucích důchodových výplat pro jednoho pojištěného pro jednotlivé předpoklady. Tyto hodnoty rozptylů jsou důsledkem různé úrovně rektangularizace pro různé předpoklady, jak je opět patrné z tabulky 3.1. Slabší rektangularizace (tzn. větší směrodatná



Čas $t$	Počáteční velikost portfolia				
	$n_0 = 1$	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$	$n_0 \nearrow \infty$
0	46,629%	4,663%	1,475%	0,466%	0%
5	54,632%	5,463%	1,728%	0,546%	0%
10	66,707%	6,671%	2,109%	0,667%	0%
15	86,465%	8,647%	2,734%	0,865%	0%
20	123,327%	12,333%	3,900%	1,233%	0%
25	207,084%	20,708%	6,549%	2,071%	0%
30	463,342%	46,334%	14,652%	4,633%	0%
35	1729,810%	173,981%	54,701%	17,298%	0%

Tabulka 3.4: Koefficient variace současné hodnoty budoucích důchodových výplat v čase  $t$  pro předpoklad  $A_3(\tau)$ :  $CV[Y_t^{(II)}|A_3(\tau), n_t]$

Čas $t$	Pravděpodobnost			
	$\epsilon = 0,75$	$\epsilon = 0,90$	$\epsilon = 0,95$	$\epsilon = 0,99$
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 100$				
0	3,106%	5,832%	7,638%	10,366%
5	4,095%	7,423%	9,223%	12,851%
10	4,311%	8,388%	10,811%	15,297%
15	4,963%	10,321%	13,634%	19,600%
20	8,154%	15,587%	20,111%	29,277%
25	14,052%	27,096%	35,631%	51,790%
30	36,788%	70,414%	91,526%	126,919%
35	292,763%	481,989%	666,600%	846,708%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 1000$				
0	0,993%	1,881%	2,370%	3,332%
5	1,202%	2,267%	2,863%	4,060%
10	1,409%	2,686%	3,381%	4,847%
15	1,795%	3,461%	4,465%	6,307%
20	2,784%	5,092%	6,569%	9,072%
25	4,117%	8,036%	10,462%	14,902%
30	10,471%	19,929%	25,604%	36,534%
35	35,817%	73,708%	94,016%	149,410%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 10000$				
0	0,307%	0,598%	0,762%	1,072%
5	0,375%	0,701%	0,896%	1,281%
10	0,461%	0,851%	1,096%	1,495%
15	0,580%	1,108%	1,454%	2,052%
20	0,845%	1,608%	2,018%	2,864%
25	1,393%	2,635%	3,385%	4,748%
30	3,109%	5,920%	7,684%	11,004%
35	10,989%	21,652%	28,339%	41,800%

Tabulka 3.5: Percentily současné hodnoty budoucích důchodových výplat pro předpoklad  $A_3(\tau)$  na jednotku očekávané hodnoty:  $\frac{y_{t,\epsilon}[A_3(\tau), n_t]}{E[Y_t^{(II)}|A_3(\tau), n_t]}$

Čas $t$	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
5	872,152	859,439	885,881	908,089	905,839
10	709,833	699,436	742,096	778,988	787,072
15	511,474	517,197	563,395	604,528	635,938
20	297,380	323,150	359,742	393,291	452,620
25	118,483	150,163	169,403	187,593	258,184
30	24,258	41,468	46,688	51,818	100,088
35	1,537	4,588	5,014	5,473	19,774

Tabulka 3.6: Očekávaná hodnota ročního úhrnu důchodových výplat v čase  $t$ :  $E[B_t^{(II)}|A_h(\tau)]$ , počáteční velikost portfolia  $n_0 = 1000$

Čas $t$	$A_1(\tau)$	$A_2(\tau)$	$A_3(\tau)$	$A_4(\tau)$	$A_5(\tau)$
5	111,503	120,804	101,096	83,464	85,295
10	205,970	210,225	191,389	172,166	167,590
15	249,868	249,704	245,981	239,074	231,521
20	208,945	218,724	230,328	238,613	247,755
25	104,445	127,614	140,706	152,402	191,525
30	23,670	39,748	44,508	49,133	90,070
35	1,535	4,567	4,989	5,443	19,383

Tabulka 3.7: Rozptyl ročního úhrnu výplat v čase  $t$ :  $\text{Var}[B_t^{(II)}|A_h(\tau)]$ , počáteční velikost portfolia  $n_0 = 1000$

odchylka  $\sqrt{\text{Var}[T_{65}|A_h(\tau)]}$ ) implikuje větší rozptyl současné hodnoty budoucích důchodových výplat a naopak.

Následuje tabulka 3.4 uvádějící koeficient variace současné hodnoty budoucích důchodových výplat pro různé počáteční velikosti portfolia  $n_0$ . Z důvodu stručnosti jsou uvedeny jen hodnoty pro předpoklad  $A_3(\tau)$ , který považujeme za nejlepší odhad skutečné úmrtnosti kohorty. Koeficient variace rychle klesá s rostoucí počáteční velikostí portfolia. Při dané počáteční velikosti portfolia koeficient variace v čase roste, neboť se zvyšuje věk pojištěných a zmenšuje se velikost portfolia.

Podobné výsledky ukazuje i tabulka 3.5, jež uvádí některé percentily současné hodnoty budoucích důchodových výplat pro tři různé počáteční velikosti portfolia  $n_0$  pro předpoklad  $A_3(\tau)$ . Hodnoty percentilů jsou vztaženy na jednotku očekávané současné hodnoty budoucích důchodových výplat.

V tabulkách 3.6 až 3.8 se věnujeme charakteristikám rozdělení ročního úhrnu výplat  $B_t^{(II)}$ . Platí pro ně podobné závěry, které byly zmíněné u charakteristik současné hodnoty budoucích důchodových výplat.

Tabulka 3.6 představuje očekávané hodnoty ročních úhrnů důchodových výplat pro jednotlivé předpoklady při dané počáteční velikosti portfolia  $n_0 = 1000$ . Jelikož předpokládáme, že roční výše důchodu je  $b = 1$  pro všechny pojištěné, tedy  $B_t^{(II)} = N_t$ , můžeme interpretovat hodnoty v tabulce 3.6 jako očekávané počty žijících pojištěných v portfoliu v čase  $t$  pro jednotlivé předpoklady. Uvedené hodnoty nejsou zaokrouhlené na celá čísla, abychom se vyvarovali přílišných aproximací.

Čas $t$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
5	3,589%	1,135%	0,359%
10	5,895%	1,864%	0,590%
15	8,803%	2,784%	0,880%
20	13,341%	4,219%	1,334%
25	22,143%	7,002%	2,214%
30	45,187%	14,289%	4,519%
35	140,865%	44,545%	14,087%

Tabulka 3.8: Koeficient variace ročního úhrnu výplat pro předpoklad  $A_3(\tau)$ :  $CV[B_t^{(II)}|A_3(\tau)]$

V tabulce 3.7 je uveden rozptyl ročního úhrnu důchodových výplat pro jednotlivé předpoklady pro počáteční velikost portfolia  $n_0 = 1000$ . Rozptyl se nejprve s rostoucím časem zvětšuje, potom začíná klesat.

Poslední tabulka 3.8 uvádí koeficient variace ročního úhrnu výplat pro předpoklad  $A_3(\tau)$  pro různé počáteční velikosti portfolia  $n_0$ .

### 3.5 Nepodmíněný případ

Množině  $\mathcal{A}(\tau)$  přiřadíme pravděpodobnostní rozdělení (3.1). Neznámý skutečně realizovaný předpoklad o úmrtnosti kohorty, o němž předpokládáme, že leží v množině  $\mathcal{A}(\tau)$ , označíme  $\tilde{A}(\tau)$ .

Pro nepodmíněnou očekávanou současnou hodnotu budoucích důchodových výplat platí (index  $\rho$  značí pravděpodobnostní rozdělení dané (3.1))

$$\begin{aligned}
E[Y_t^{(II)}|n_t] &= E_\rho[E[Y_t^{(II)}|\tilde{A}(\tau), n_t]] \\
&= n_t E_\rho[E[Y_t^{(1)}|\tilde{A}(\tau)]] \\
&= n_t \sum_{h=1}^m E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]\rho_h \\
&= n_t E[Y_t^{(1)}],
\end{aligned}$$

kde  $E[Y_t^{(1)}] = \sum_{h=1}^m E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]\rho_h$ .

Nepodmíněný rozptyl  $Y_t^{(II)}$  můžeme počítat jako

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y_t^{(II)}|n_t] &= E_\rho[\text{Var}[Y_t^{(II)}|\tilde{A}(\tau), n_t]] + \text{Var}_\rho[E[Y_t^{(II)}|\tilde{A}(\tau), n_t]] \\
&= n_t E_\rho[\text{Var}[Y_t^{(1)}|\tilde{A}(\tau)]] + n_t^2 \text{Var}_\rho[E[Y_t^{(1)}|\tilde{A}(\tau)]] \\
&= n_t \sum_{h=1}^m \text{Var}[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)]\rho_h + \\
&\quad + n_t^2 \sum_{h=1}^m (E[Y_t^{(1)}|A_h(\tau)] - E[Y_t^{(1)}])^2 \rho_h.
\end{aligned}$$

První člen ve vyjádření rozptylu vyjadřuje odchylky kolem očekávané hodnoty. Naopak druhý člen vyjadřuje systematické odchylky od očekávané hodnoty, proto ho lze chápat jako míru rizika dlouhověkosti.

Nepodmíněný koeficient variace má vyjádření

$$\begin{aligned} \text{CV}[Y_t^{(\text{II})}|n_t] &= \frac{\sqrt{\text{Var}[Y_t^{(\text{II})}|n_t]}}{\text{E}[Y_t^{(\text{II})}|n_t]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n_t} \frac{\text{E}_\rho[\text{Var}[Y_t^{(1)}|\tilde{A}(\tau)]]}{\text{E}^2[Y_t^{(1)}]} + \frac{\text{Var}_\rho[\text{E}[Y_t^{(1)}|\tilde{A}(\tau)]]}{\text{E}^2[Y_t^{(1)}]}}. \end{aligned}$$

První člen ve vyjádření nepodmíněného koeficientu variace pod odmocninou představuje náhodné fluktuační, které lze zmírnit zvětšením velikosti portfolia. Druhý člen naopak představuje systematické odchylky, jež nelze ovlivnit změnou velikosti portfolia.

Percentil  $\epsilon$  nepodmíněného pravděpodobnostního rozdělení  $Y_t^{(\text{II})}$  při pozorované velikosti portfolia  $n_t$  v čase  $t$  je definován jako

$$y_{t,\epsilon}[n_t] = \inf \left\{ u \geq 0 \mid \text{P} \left[ Y_t^{(\text{II})} \leq u | n_t \right] > \epsilon \right\}.$$

Pro výpočet je nutná stochastická simulace, v jejímž prvním kroku zvolíme náhodně předpoklad o úmrtnosti z množiny  $\mathcal{A}(\tau)$ , následně potom generujeme počty žijících pojištěných v portfoliu.

Podobně jako pro nepodmíněné rozdělení současné hodnoty budoucích důchodových výplat  $Y_t^{(\text{II})}$  dostaneme vztahy pro očekávanou hodnotu, rozptyl a koeficient variace pro nepodmíněné rozdělení ročního úhrnu výplat  $B_t^{(\text{II})}$ . Máme tedy

$$\begin{aligned} \text{E}[B_t^{(\text{II})}] &= \sum_{h=1}^m \text{E}[B_t^{(\text{II})}|A_h(\tau)]\rho_h \\ \text{Var}[B_t^{(\text{II})}] &= \text{E}_\rho[\text{Var}[B_t^{(\text{II})}|\tilde{A}(\tau)]] + \text{Var}_\rho[\text{E}[B_t^{(\text{II})}|\tilde{A}(\tau)]] \\ &= \sum_{h=1}^m \text{Var}[B_t^{(\text{II})}|A_h(\tau)]\rho_h + \sum_{h=1}^m \left( \text{E}[B_t^{(\text{II})}|A_h(\tau)] - \text{E}[B_t^{(\text{II})}] \right)^2 \rho_h \\ \text{CV}[B_t^{(\text{II})}] &= \frac{\sqrt{\text{Var}[B_t^{(\text{II})}]}{\text{E}[B_t^{(\text{II})}]} \end{aligned}$$

Množině předpokladů  $\mathcal{A}(\tau)$  přiřadíme váhy uvedené v tabulce 3.9. Předpokladu  $A_3(\tau)$ , který považujeme za nejlepší odhad úmrtnosti kohorty, přiřadíme největší váhu. Zbývajícím čtyřem předpokladům rozdělíme rovnoměrně zbývající váhy tak, aby součet vah byl roven jedné.

Předpoklad	Váha $\rho_h$
$A_1(\tau)$	0,1
$A_2(\tau)$	0,1
$A_3(\tau)$	0,6
$A_4(\tau)$	0,1
$A_5(\tau)$	0,1

Tabulka 3.9: Pravděpodobnostní rozdělení na množině  $\mathcal{A}(\tau)$

Čas $t$	$E[Y_t^{(1)}]$
0	12,382
5	10,259
10	8,151
15	6,162
20	4,395
25	2,931
30	1,803
35	1,000

Tabulka 3.10: Nepodmíněná očekávaná současná hodnota budoucích výplat na jednu pojistnou smlouvu v čase  $t$ :  $\frac{E[Y_t^{(II)}|n_t]}{n_t} = E[Y_t^{(1)}]$

Tabulka 3.10 uvádí nepodmíněnou očekávanou současnou hodnotu budoucích důchodových výplat na jednu pojistnou smlouvu. Hodnoty jsou blízko hodnot očekávané současné hodnoty důchodových výplat pro předpoklad  $A_3(\tau)$ , který považujeme za nejlepší odhad úmrtnosti kohorty a jemuž byla přiřazena největší váha.

V tabulce 3.11 je uveden nepodmíněný rozptyl současné hodnoty budoucích důchodových výplat na jednu pojistnou smlouvu. V posledních dvou sloupcích této tabulky je navíc uvedeno, jakou část rozptylu představují odchylky kolem očekávané hodnoty a jakou část rozptylu tvoří systematické odchylky od očekávané hodnoty. Pro srovnání s podmíněným rozptylem zde uvádíme i případ, kdy  $n_0 = 1$ . Vidíme, že se zvětšující se počáteční velikostí portfolia  $n_0$  se rozptyl zvětšuje. Čím větší je počáteční velikost portfolia, tím větší část rozptylu zaujímají systematické odchylky od očekávané hodnoty.

Tabulka 3.12 prezentuje hodnoty nepodmíněného koeficientu variace současné hodnoty budoucích důchodových výplat. Pokud tyto hodnoty porovnáme s podmíněnými hodnotami (jen pro náhodné odchylky) pro předpoklad  $A_3(\tau)$  z tabulky 3.4, vidíme, že nepodmíněný koeficient variace klesá pomaleji při zvětšující se velikosti portfolia než v podmíněném případě. Poznamenejme ještě, že limitní hodnoty nejsou nulové, ale mají kladnou hodnotu, což svědčí o přítomnosti systematického rizika.

V tabulce 3.13 uvádíme nepodmíněné percentily současné hodnoty budoucích důchodových výplat pro tři různé počáteční velikosti portfolia  $n_0$  pro  $\epsilon = 0,75$ ;  $\epsilon = 0,90$ ;  $\epsilon = 0,95$ ; a  $\epsilon = 0,99$ . Dostáváme vyšší hodnoty než v podmíněném případě pro předpoklad  $A_3(\tau)$ , tj. pravý chvost nepodmíněného rozdělení je těžší než pravý chvost rozdělení podmíněného předpokladem  $A_3(\tau)$ .

Následují tabulky 3.14 až 3.16, které se věnují charakteristikám nepodmíněného rozdělení ročního úhrnu výplat. Uvádíme tabulky s očekávanou hodnotou, rozptylem a koeficientem variace.

První z těchto tabulek, tabulka 3.14, uvádí nepodmíněnou očekávanou hodnotu ročního úhrnu důchodových výplat pro portfolio o počáteční velikosti  $n_0 = 1000$ . Nejprve se hodnoty blíží podmíněným hodnotám uvedeným v tabulce 3.6 pro předpoklad  $A_3(\tau)$ , pak se s rostoucím časem začíná projevovat vliv předpokladu  $A_5(\tau)$  a hodnoty jsou oproti hodnotám pro předpoklad  $A_3(\tau)$  větší.

Čas $t$	$\frac{Var[Y_t^{(II)} n_t]}{n_t}$	$\frac{E_\rho[Var[Y_t^{(II)} \bar{A}(\tau),n_t]]}{Var[Y_t^{(II)} n_t]}$	$\frac{Var_\rho[E[Y_t^{(II)} \bar{A}(\tau),n_t]]}{Var[Y_t^{(II)} n_t]}$
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 1$			
0	33,437	99,185%	0,815%
5	27,907	99,247%	0,753%
10	21,985	99,306%	0,694%
15	16,007	99,405%	0,595%
20	10,561	99,569%	0,431%
25	6,220	99,772%	0,228%
30	3,242	99,931%	0,069%
35	1,504	99,992%	0,008%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 100$			
0	60,417	54,892%	45,108%
5	48,707	56,864%	43,136%
10	37,090	58,864%	41,136%
15	25,439	62,548%	37,452%
20	15,067	69,793%	30,207%
25	7,622	81,421%	18,580%
30	3,464	93,542%	6,458%
35	1,515	99,224%	0,776%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 1000$			
0	305,695	10,849%	89,151%
5	237,800	11,647%	88,353%
10	174,407	12,518%	87,482%
15	111,186	14,311%	85,689%
20	56,030	18,768%	81,232%
25	20,368	30,470%	69,530%
30	5,477	59,158%	40,842%
35	1,621	92,742%	7,258%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 10000$			
0	2758,470	1,202%	98,798%
5	2128,730	1,301%	98,699%
10	1547,580	1,411%	98,589%
15	968,655	1,643%	98,357%
20	465,656	2,258%	97,742%
25	147,825	4,198%	95,802%
30	25,608	12,652%	87,348%
35	2,680	56,099%	43,901%

Tabulka 3.11: Nepodmíněný rozptyl současné hodnoty budoucích výplat v čase  $t$  a jeho komponenty

Tabulka 3.15 uvádí nepodmíněný rozptyl ročního úhrnu důchodových výplat  $B_t^{(II)}$  a jeho komponenty pro tři různé počáteční velikosti portfolia. S rostoucí velikostí portfolia  $n_0$  opět roste podíl složky představující systematické odchylky od očekávané hodnoty.

Čas $t$	Počáteční velikost portfolia				
	$n_0 = 1$	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$	$n_0 \nearrow \infty$
0	46,700%	6,277%	4,465%	4,242%	4,216%
5	54,704%	7,228%	5,050%	4,778%	4,747%
10	66,780%	8,674%	5,948%	5,603%	5,563%
15	86,508%	10,906%	7,210%	6,730%	6,674%
20	123,273%	14,724%	8,979%	8,185%	8,092%
25	206,773%	22,889%	11,832%	10,080%	9,866%
30	462,310%	47,784%	19,001%	12,993%	12,143%
35	1732,070%	173,876%	56,873%	23,124%	15,322%

Tabulka 3.12: Nepodmíněný koeficient variace současné hodnoty budoucích důchodových výplat v čase  $t$ :  $CV[Y_t^{(II)}|n_t]$

Čas $t$	Pravděpodobnost			
	$\epsilon = 0,75$	$\epsilon = 0,90$	$\epsilon = 0,95$	$\epsilon = 0,99$
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 100$				
0	3,931%	8,193%	10,937%	15,401%
5	5,226%	11,031%	15,151%	21,363%
10	6,225%	15,277%	22,262%	31,061%
15	7,162%	21,006%	32,619%	45,266%
20	10,958%	30,316%	50,692%	71,013%
25	18,080%	54,010%	95,639%	133,560%
30	44,650%	109,115%	180,570%	284,157%
35	284,460%	469,686%	650,394%	1034,850%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 1000$				
0	1,696%	7,089%	9,535%	11,519%
5	1,942%	9,455%	14,080%	16,266%
10	2,286%	16,009%	20,916%	23,946%
15	3,315%	27,698%	32,608%	36,562%
20	4,229%	17,539%	52,332%	58,269%
25	5,834%	69,349%	92,217%	104,673%
30	12,668%	120,572%	183,478%	217,250%
35	46,110%	184,391%	448,994%	637,508%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 10000$				
0	0,346%	8,540%	9,422%	10,016%
5	0,376%	12,719%	13,958%	14,685%
10	0,420%	8,493%	20,840%	21,781%
15	0,587%	30,641%	32,275%	33,472%
20	0,764%	13,094%	52,332%	54,471%
25	1,618%	14,112%	91,959%	95,887%
30	4,106%	20,948%	183,593%	194,280%
35	12,389%	40,568%	450,223%	507,392%

Tabulka 3.13: Nepodmíněné percentily současné hodnoty budoucích výplat na jednotku očekávané hodnoty:  $\frac{y_{t,\epsilon}[n_t]}{E[Y_t^{(II)}|n_t]}$

Čas $t$	$E[B_t^{(II)}]$
5	886,081
10	742,791
15	564,951
20	362,489
25	173,084
30	49,776
35	6,146

Tabulka 3.14: Nepodmíněná očekávaná hodnota ročního úhrnu výplat v čase  $t$ :  $E[B_t^{(II)}]$ , počáteční velikost portfolia  $n_0 = 1000$

Čas $t$	$Var[B_t^{(II)}]$	$\frac{E_\rho[Var[B_t^{(II)} \tilde{A}(\tau)]]}{Var[B_t^{(II)}]}$	$\frac{Var_\rho[E[B_t^{(II)} \tilde{A}(\tau)]]}{Var[B_t^{(II)}]}$
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 100$			
5	11,855	84,996%	15,004%
10	25,283	75,320%	24,680%
15	36,221	67,532%	32,468%
20	37,864	60,638%	39,362%
25	25,243	56,263%	43,737%
30	8,010	58,639%	41,361%
35	0,826	73,669%	26,331%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 1000$			
5	278,638	36,163%	63,837%
10	814,412	23,382%	76,618%
15	1420,630	17,218%	82,782%
20	1720,030	13,349%	86,651%
25	1246,060	11,398%	88,602%
30	378,249	12,417%	87,583%
35	27,840	21,862%	78,138%
Počáteční velikost portfolia: $n_0 = 10000$			
5	18795,014	5,361%	94,639%
10	64302,631	2,961%	97,039%
15	120048,404	2,038%	97,962%
20	151339,441	1,517%	98,483%
25	111823,761	1,270%	98,730%
30	33597,865	1,398%	98,602%
35	2236,216	2,722%	97,278%

Tabulka 3.15: Nepodmíněný rozptyl ročního úhrnu výplat v čase  $t$  a jeho komponenty

V poslední tabulce této kapitoly, v tabulce 3.16, uvádíme nepodmíněný koeficient variace ročních úhrnů důchodových výplat. Dostáváme vyšší hodnoty než v podmíněném případě pro předpoklad  $A_3(\tau)$ , jak můžeme vidět porovnáním s tabulkou 3.8.



Čas $t$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
5	3,886%	1,884%	1,547%
10	6,769%	3,842%	3,842%
15	10,653%	6,672%	6,133%
20	16,975%	11,441%	10,732%
25	29,028%	20,394%	19,320%
30	56,857%	39,072%	36,825%
35	147,895%	85,853%	76,944%

Tabulka 3.16: Nepodmíněný koeficient variace ročního úhrnu výplat:  $CV[B_t^{(\Pi)}]$

# Kapitola 4

## Solventnost II

V této kapitole bude pojednáno o solventnostním kapitálovém požadavku podle Solventnosti II. Speciálně bude pozornost soustředěna na riziko dlouhověkosti. Postup výpočtu je zde uveden podle Technických specifikací pro 5. kvantitativní dopadovou studii (QIS5 Technical Specifications), která proběhla v období od srpna do listopadu 2010 a jejíž výsledky byly zveřejněny v březnu 2011 s cílem poskytnout kvantitativní vstup pro dokončení návrhu Evropské komise na úrovni 2 prováděcích opatření Solventnosti II.

Režim dohledu by měl stanovit požadavek citlivý na rizika, který je založen na prospektivním výpočtu, s cílem zajistit řádný a včasný zásah orgánů dohledu (solventnostní kapitálový požadavek) a minimální úroveň zabezpečení, pod kterou by neměla hodnota finančních zdrojů klesnout (minimální kapitálový požadavek).

### 4.1 Solventnostní kapitálový požadavek

Členské státy požadují, aby pojišťovny a zajišťovny měly v držení použitelný kapitál na krytí solventnostního kapitálového požadavku.

Solventnostní kapitálový požadavek by měl zohledňovat úroveň použitelného kapitálu, která pojišťovnám a zajišťovnám umožňuje absorbovat významné ztráty a poskytuje pojistníkům a oprávněným osobám přiměřenou záruku, že platby budou provedeny v okamžiku své splatnosti.

Standardní vzorec solventnostního kapitálového požadavku by měl zohledňovat rizikový profil většiny pojištěven a zajištěven. Mohou se však vyskytnout i případy, v nichž standardizovaný přístup přiměřeně nezohledňuje velmi specifický rizikový profil pojišťovny nebo zajišťovny.

Solventnost II poskytuje metody pro výpočet solventnostního kapitálového požadavku SCR, což umožňuje pojišťovnám zvolit přiměřenou metodu z hlediska povahy, rozsahu a složitosti rizika, které je měřeno:

- úplný interní model,
- standardní vzorec a částečný interní model,
- standardní vzorec s parametry specifickými pro danou pojišťovnu,
- standardní vzorec,
- zjednodušení standardního vzorce.

Solventnostní kapitálový požadavek se kalibruje tak, aby se zajistilo, že bude přihlédnuto ke všem kvantifikovatelným rizikům, jimž je pojišťovna nebo zajišťovna vystavena. Vztahuje se na stávající smlouvy a na nové smlouvy, které budou podle očekávání sepsány v následujících dvanácti měsících. U stávajících smluv kryje tento požadavek pouze neočekávané ztráty.

Solventnostní kapitálový požadavek odpovídá hodnotě v riziku primárního kapitálu pojišťovny nebo zajišťovny na hladině spolehlivosti 99,5 % v časovém horizontu jednoho roku.

Solventnostní kapitálový požadavek kryje alespoň tato rizika:

- (a) neživotní upisovací riziko,
- (b) životní upisovací riziko,
- (c) zdravotní upisovací riziko,
- (d) tržní riziko,
- (e) úvěrové riziko,
- (f) operační riziko.

*Upisovacím rizikem* se rozumí riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků v důsledku nepřiměřených předpokladů ohledně stanovení cen a rezerv.

*Tržním rizikem* se rozumí riziko ztráty nebo nepříznivé změny ve finanční situaci vyplývající přímo nebo nepřímo z kolísání úrovně a volatility tržních cen aktiv, závazků a finančních nástrojů.

*Úvěrovým rizikem* se rozumí riziko ztráty nebo nepříznivé změny ve finanční situaci vyplývající z kolísání úvěrového ratingu emitentů cenných papírů, protistran a jakýchkoli dlužníků, jimž jsou pojišťovny a zajišťovny vystaveny, v podobě selhání protistrany nebo rizika kreditního rozpětí nebo koncentrace tržních rizik.

*Operačním rizikem* se rozumí riziko ztráty vyplývající z nedostatečnosti nebo selhání vnitřních procesů, pracovníků a systémů nebo z vnějších událostí.

## 4.2 Standardní vzorec

Solventnostní kapitálový požadavek vypočtený podle standardního vzorce je součtem těchto položek:

- (a) základního solventnostního kapitálového požadavku (BSCR),
- (b) kapitálového požadavku k operačnímu riziku,
- (c) úpravy o schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty.

Základní solventnostní kapitálový požadavek zahrnuje jednotlivé rizikové moduly. Tento požadavek musí sestávat alespoň z těchto rizikových modulů:

- (a) neživotního upisovacího rizika,

- (b) životního upisovacího rizika,
- (c) zdravotního upisovacího rizika,
- (d) tržního rizika,
- (e) rizika selhání protistrany.

Celkový solventnostní kapitálový požadavek se stanoví na základě korelačního koeficientu pro agregaci jednotlivých rizikových modulů, jakož i na základě kalibrace kapitálových požadavků ke každému rizikovému modulu. Každý rizikový modul se kalibruje prostřednictvím hodnoty v riziku na hladině spolehlivosti 99,5% v časovém horizontu jednoho roku.

Při výpočtu modulů životních, neživotních a zdravotních upisovacích rizik mohou pojišťovny a zajišťovny, po schválení orgány dohledu, nahradit v konstrukci standardního vzorce podskupinu parametrů tohoto vzorce parametry specifickými pro danou pojišťovnu nebo zajišťovnu.

Základní solventnostní kapitálový požadavek je tvaru

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j},$$

kde  $SCR_i$  označuje rizikový modul  $i$  a  $SCR_j$  označuje rizikový modul  $j$  a kde „ $i, j$ “ znamená, že součet různých členů by měl pokrývat všechny možné kombinace  $i$  a  $j$ . Ve výpočtu jsou  $SCR_i$  a  $SCR_j$  nahrazeny:

- $SCR_{neživotní}$ , který označuje modul neživotního upisovacího rizika,
- $SCR_{životní}$ , který označuje modul životního upisovacího rizika,
- $SCR_{zdravotní}$ , který označuje modul zdravotního upisovacího rizika,
- $SCR_{tržní}$ , který označuje modul tržního rizika,
- $SCR_{selhání}$ , který označuje modul rizika selhání protistrany.

Koeficient  $Corr_{i,j}$  označuje položku stanovenou v řádce  $i$  a v sloupci  $j$  této korelační matice:

$i$	$j$	Tržní	Selhání	Životní	Zdravotní	Neživotní
Tržní		1	0,25	0,25	0,25	0,25
Selhání		0,25	1	0,25	0,25	0,5
Životní		0,25	0,25	1	0,25	0
Zdravotní		0,25	0,25	0,25	1	0
Neživotní		0,25	0,5	0	0	1

Kapitálový požadavek k operačnímu riziku zohledňuje operační rizika, nejsou-li již zohledněna ve výše uvedených rizikových modulech.

Úprava o schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty odráží případnou náhradu za neočekávané ztráty prostřednictvím

současného snížení technických rezerv či odložené daňové povinnosti nebo kombinací obou těchto postupů.

Pojišťovny a zajišťovny mohou pro určitý podmodul nebo rizikový modul použít zjednodušený výpočet, pokud to odůvodňuje povaha, rozsah a komplexnost rizik, kterým jsou tyto pojišťovny nebo zajišťovny vystaveny, a pokud by bylo neúměrné požadovat po všech pojišťovnách a zajišťovnách provedení standardizovaného výpočtu.

### 4.3 Modul životního upisovacího rizika

Modul životního upisovacího rizika zohlední riziko vyplývající ze závazků týkajících se životního pojištění v souvislosti s krytými riziky a postupy používanými při výkonu činnosti. Modul se vypočte jako kombinace kapitálových požadavků alespoň k těmto podmodulům:

- (a) rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajících ze změn úrovně, vývoje nebo volatility měr úmrtnosti, kdy zvýšení míry úmrtnosti vede ke zvýšení hodnoty pojistných závazků (riziko úmrtnosti),
- (b) rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajících ze změn úrovně, vývoje nebo volatility měr úmrtnosti, kdy snížení míry úmrtnosti vede ke zvýšení hodnoty pojistných závazků (riziko dlouhověkosti),
- (c) rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajících ze změn úrovně, vývoje nebo volatility míry invalidity, míry chorobnosti a míry nemocnosti (riziko invalidity nebo pracovní neschopnosti a nemocnosti),
- (d) rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajících ze změn úrovně, vývoje nebo volatility nákladů vzniklých při správě pojistných a zajištěných smluv (riziko nákladů v životním pojištění),
- (e) rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajících z kolísání úrovně, vývoje nebo volatility revizních sazeb uplatňovaných na důchody, které jsou dány změnami v právním prostředí nebo zdravotním stavu pojištěných osob (riziko revize),
- (f) rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajících ze změn úrovně nebo volatility míry storna, míry ukončení, míry obnovení a míry odbytného u pojistných smluv (riziko storen),
- (g) rizika ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývajících ze značné neurčitosti předpokladů při tvorbě cen a stanovení rezerv v souvislosti s mimořádnými nebo zvláštními událostmi (životní katastrofické riziko).

Modul životního upisovacího rizika má tvar

$$SCR_{\text{životní}} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j},$$

kde  $SCR_i$  označuje podmodul  $i$  a  $SCR_j$  označuje podmodul  $j$  a kde „ $i, j$ “ znamená, že součet různých členů by měl pokrývat všechny možné kombinace  $i$  a  $j$ . Ve výpočtu jsou  $SCR_i$  a  $SCR_j$  nahrazeny:

- $SCR_{úmrtnost}$ , který označuje podmodul rizika úmrtnosti,
- $SCR_{dlouhověkost}$ , který označuje podmodul rizika dlouhověkosti,
- $SCR_{invalidita}$ , který označuje podmodul rizika invalidity a nemocnosti,
- $SCR_{náklady\ v\ životním}$ , který označuje podmodul rizika nákladů v životním pojištění,
- $SCR_{revizní}$ , který označuje podmodul rizika revize,
- $SCR_{storna}$ , který označuje podmodul rizika storen,
- $SCR_{životní\ katastrofické}$ , který označuje podmodul životního katastrofického rizika.

## 4.4 Podmodul rizika dlouhověkosti

Riziko dlouhověkosti patří mezi životní upisovací rizika.

Riziko dlouhověkosti je spojeno s pojistnými závazky (jako jsou životní důchody), kdy pojišťovna nebo zajišťovna garantuje, že bude vyplácet opakující se série plateb, dokud bude pojištěný naživu. Dále je riziko dlouhověkosti také spojeno s pojistnými závazky (jako je pojištění pro případ dožití), kdy pojišťovna nebo zajišťovna garantuje vyplatit jednorázové pojistné plnění v případě, že se pojištěný dožije požadované doby trvání pojistné smlouvy.

Výpočet kapitálového požadavku podle standardního vzorce pro životní upisovací rizika se provádí na základě scénářů, jako dopad specifického scénáře na čistou hodnotu aktiv. Čistá hodnota aktiv je definována jako rozdíl mezi aktivy a závazky.

Scénáře se skládají z okamžitého stresu (představovaného změnou v parametrech), který nastane v den výpočtu. Kapitálové požadavky jsou tvořeny okamžitými ztrátami primárního kapitálu vyplývajícími z daného stresu. Scénáře neberou v úvahu změny aktiv a závazků v průběhu následujících 12 měsíců po stresu. Proto tyto kapitálové požadavky neuvažují očekávané zisky a ztráty z pojistných smluv, které budou uzavřeny v následujících 12 měsících.

Kapitálový požadavek pro podmodul rizika dlouhověkosti se vypočítá jako změna v čisté hodnotě aktiv dané pojišťovny při trvalém snížení úmrtnosti.

Solventnostní kapitálový požadavek pro riziko dlouhověkosti je definován jako výsledek scénáře dlouhověkosti

$$SCR_{dlouhověkost} = (\Delta NAV | longevityshock),$$

kde  $\Delta NAV$  označuje změnu v čisté hodnotě aktiv a *longevityshock* představuje šok dlouhověkosti znamenající trvalé snížení úmrtnosti o 20 % pro každý věk a každou pojistnou smlouvu, kde vyplácení pojistného plnění (jednorázového nebo v podobě důchodu) závisí na riziku dlouhověkosti.

Je možné použít zjednodušující postup za předpokladu, že jsou splněny následující podmínky:

- zjednodušení je přiměřené povaze, rozsahu a komplexnosti rizik, kterým je daná pojišťovna vystavena,
- standardní výpočet podmodulu rizika dlouhověkosti je neúměrná zátěž pro danou pojišťovnu.

## 4.5 Úplné a částečné interní modely

Členské státy zajistí, aby pojišťovny nebo zajišťovny mohly vypočítat solventnostní kapitálový požadavek podle úplného nebo částečného interního modelu, který schválily orgány dohledu.

Pojišťovny a zajišťovny mohou použít částečné interní modely pro výpočet:

- (a) jednoho nebo více rizikových modulů nebo podmodulů základního solventnostního kapitálového požadavku,
- (b) kapitálového požadavku k operačnímu riziku,
- (c) úpravy o schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty.

Konstrukci částečného interního modelu lze navíc uplatnit na celou činnost pojišťoven a zajišťoven nebo pouze na jednu nebo více větších oblastí jejich obchodní činnosti.

Orgány dohledu vyhoví žádosti o schválení interního modelu pouze pokud jsou přesvědčeny, že systémy dotyčné pojišťovny nebo zajišťovny pro určování, měření, sledování, řízení a oznamování rizik jsou přiměřené. Orgány dohledu schválí částečný interní model, pouze pokud splňuje následující dodatečné podmínky:

- (a) omezená oblast působnosti modelu je pojišťovnou nebo zajišťovnou řádně odůvodněna,
- (b) výsledný solventnostní kapitálový požadavek vhodněji zohledňuje rizikový profil pojišťovny nebo zajišťovny,
- (c) jeho konstrukce umožňuje úplnou integraci částečného interního modelu do standardního vzorce solventnostního kapitálového požadavku.

Byla-li žádost schválena, pojišťovny a zajišťovny se k výpočtu celého nebo jakékoli části solventnostního kapitálového požadavku podle standardního vzorce vrátí jen za řádně zdůvodněných okolností a se souhlasem orgánů dohledu.

Pojišťovny a zajišťovny musí být schopny odůvodnit orgánům dohledu předpoklady, které jsou základem pro jejich interní model. Údaje používané pro interní model musí být přesné, úplné a vhodné.

Pokud není vhodné vypočítat solventnostní kapitálový požadavek podle standardního vzorce z toho důvodu, že se rizikový profil dotyčné pojišťovny nebo zajišťovny podstatně odchyluje od podkladových předpokladů k výpočtu podle standardního vzorce, mohou orgány dohledu prostřednictvím odůvodněného rozhodnutí na dotyčné pojišťovně nebo zajišťovně požadovat, aby k výpočtu solventnostního kapitálového požadavku nebo jeho rizikových modulů použily interní model.

## 4.6 Minimální kapitálový požadavek

Členské státy požadují, aby pojišťovny a zajišťovny měly v držení použitelný primární kapitál na krytí minimálního kapitálového požadavku.

Minimální kapitálový požadavek se vypočítá jako lineární funkce skupiny nebo podskupiny těchto proměnných: technické rezervy pojišťovny nebo zajišťovny, předepsané pojistné nebo zajistné, kapitál v riziku, odložená daňová povinnost a administrativní náklady. Proměnné se ocení očištěné o zajištění.

Minimální kapitálový požadavek nesmí být nižší než 25 % ani vyšší než 45 % solventnostního kapitálového požadavku pojišťovny nebo zajišťovny včetně veškerého navýšení kapitálového požadavku.

Minimální kapitálový požadavek se vypočítá v souladu s těmito zásadami:

- (a) vypočítá se jasným a jednoduchým způsobem, který umožní revizi výpočtu,
- (b) minimální kapitálový požadavek odpovídá výši použitelného primárního kapitálu, pod níž by pojistníci a oprávněné osoby byly vystaveny nepřijatelné úrovni rizika, pokud by pojišťovnám a zajišťovnám bylo povoleno pokračovat v jejich operacích,
- (c) lineární funkce pro výpočet minimálního kapitálového požadavku se kalibruje na hodnotu v riziku primárního kapitálu pojišťovny nebo zajišťovny na hladině spolehlivosti 85 % v časovém horizontu jednoho roku.

Pojišťovny a zajišťovny vypočítají minimální kapitálový požadavek alespoň jednou za čtvrt roku a oznámí výsledek výpočtu orgánům dohledu.



# Kapitola 5

## Solventnostní kapitálový požadavek

### 5.1 Příklady interních modelů

V této kapitole budeme vyšetřovat dva interní modely pro výpočet solventnostního kapitálového požadavku pro riziko dlouhověkosti navržené v [1]. Výsledky porovnáme se solventnostním kapitálovým požadavkem podle Solventnosti II pro riziko dlouhověkosti, o kterém bylo pojednáno v kapitole 4. Budeme pracovat s okamžitými životními důchody, neuvažujeme podíly na zisku. Pro jednoduchost dále předpokládáme, že nedochází k žádnému přenosu rizika (např. zajištění). Budeme používat značení zavedené v předchozích kapitolách.

V souladu s běžnou praxí považujeme solventnost za schopnost pojistitele vyrovnat (se stanovenou vysokou pravděpodobností) závazky náhodné výše popsané realistickou pravděpodobnostní strukturou. Je nutné stanovit, ze kterého pohledu se solventnost zjišťuje. Pojistníci, investoři a orgány dohledu reprezentují možná hlediska v oblasti pojištění. Perspektivy pojistníků (aktuálních nebo potenciálních) a investorů zahrnují požadavky na ziskovost pravděpodobně vyšší než jaké vyplývají z potřeby jen vyrovnat současné závazky. Proto se omezíme na solventnost z pohledu orgánu dohledu.

Orgán dohledu se zaměřuje hlavně na ochranu zájmů současných pojištěných. Nebudeme uvažovat budoucí pojištění, rozdělení zisku v rámci solventnostního časového horizontu  $T$  ani žádné zpoždění pro alokaci kapitálu.

Nechť  $W_t$  je výše aktiv v portfoliu v čase  $t$  a  $V_t^{(\text{II})}$  je rezerva portfolia v čase  $t$ . Nechť  $z$  je čas výpočtu ( $z = 0, 1, \dots$ ). Výši aktiv portfolia můžeme rekurentně zapsat jako

$$W_t = W_{t-1}(1 + i_t) - B_t^{(\text{II})}; \quad t = z + 1, z + 2, \dots \quad (5.1)$$

kde  $i_t$  je investiční výnos v roce  $(t - 1, t)$  a  $W_z$  je dané (zahrnuje rezervu i kapitál ve výši vyžadované podle zvoleného solventnostního pravidla).

Rezerva portfolia se počítá jako očekávaná současná hodnota budoucích důchodových výplat, zvýšená o vhodně definovanou rizikovou přírážku. Pokud je riziková přírážka funkcí očekávané současné hodnoty budoucích výplat, potom matematická rezerva může být vypočtena agregováním jednotlivých individuálních rezerv. V tomto případě je rezerva v čase  $t$  náhodná, protože se jedná o součet náhodného počtu individuálních rezerv. Nechť  $V_t^{(j)}$  značí individuální rezervu

v čase  $t$ , potom pro rezervu portfolia máme

$$V_t^{(\Pi)} = \sum_{j:j \in \Pi_t} V_t^{(j)}.$$

S tímto předpokladem budeme nadále pracovat.

Veličina

$$M_t = W_t - V_t^{(\Pi)}$$

představuje dostupná aktiva ke krytí zbývajících rizika, které není kryto rezervou portfolia. Máme tedy celková aktiva portfolia  $W_t$  a kapitálová aktiva portfolia  $M_t$ ,  $W_t - M_t$  představuje aktiva tvořící rezervu portfolia.

Nechť  $z$  je čas, ve kterém zjišťujeme solventnost ( $z = 0, 1, \dots$ ). Kapitál požadovaný v čase  $z$  může být stanoven podle jednoho z následujících (alternativních) modelů

$$\mathbb{P} \left[ \bigwedge_{t=z+1}^{z+T} M_t \geq 0 \right] = 1 - \epsilon_1 \quad (5.2)$$

$$\mathbb{P} \left[ \bigwedge_{t=z+1}^{z+T} W_t - Y_t^{(\Pi)} \geq 0 \right] = 1 - \epsilon_2 \quad (5.3)$$

kde  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ) je přijatá pravděpodobnost selhání pro zvolený kapitálový požadavek,  $T$  je solventnostní časový horizont a  $Y_t^{(\Pi)}$  označuje současnou hodnotu budoucích důchodových výplat pro celé portfolio v čase  $t$  definovanou jako (3.2). V obou výše uvedených modelech (tj. (5.2) a (5.3)) jsou příslušné pravděpodobnosti podmíněné znalostí aktuální informace v čase  $z$ .

Požadavek (5.3) lze upravit na jednodušší tvar, jak nyní ukážeme. Rekurzi (5.1) můžeme přepsat jako

$$W_t = W_z \frac{1}{v(z, t)} - \sum_{h=z+1}^t B_h^{(\Pi)} \frac{1}{v(h, t)}$$

kde

$$\frac{1}{v(h, k)} = (1 + i_{h+1})(1 + i_{h+2}) \cdots (1 + i_k)$$

je akumulací faktor založený na investičních výnosech z času  $h$  do času  $k$ . Když vezmeme převrácenou hodnotu akumulacího faktoru, dostaneme diskontní faktor založený na ročních investičních výnosech z času  $k$  do času  $h$

$$v(h, k) = ((1 + i_{h+1})(1 + i_{h+2}) \cdots (1 + i_k))^{-1}.$$

Pokud uvažujeme jen jednu kohortu, můžeme veličinu  $Y_t^{(\Pi)}$  přepsat také jako

$$Y_t^{(\Pi)} = \sum_{h=t+1}^{\omega-x_0} B_h^{(\Pi)} v(t, h).$$

Požadavek (5.3) může být přepsán do tvaru

$$\mathbb{P} \left[ \bigwedge_{t=z+1}^{z+T} W_z \frac{1}{v(z, t)} - \sum_{h=z+1}^t B_h^{(\Pi)} \frac{1}{v(h, t)} - \sum_{h=t+1}^{\omega-x_0} B_h^{(\Pi)} v(t, h) \geq 0 \right] = 1 - \epsilon_2. \quad (5.4)$$

Dále budeme předpokládat, že roční investiční výnos je konstantní, tj.  $i_h = i$  pro všechna  $h$ . Potom můžeme (5.4) psát jako

$$\mathbb{P} \left[ \bigwedge_{t=z+1}^{z+T} W_z (1+i)^{t-z} - \sum_{h=z+1}^{\omega-x_0} B_h^{(\Pi)} (1+i)^{t-h} \geq 0 \right] = 1 - \epsilon_2 \quad (5.5)$$

nebo také jako

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \bigwedge_{t=z+1}^{z+T} (1+i)^{t-(\omega+1-x_0)} (W_z (1+i)^{\omega+1-x_0-z} \right. \\ \left. - \sum_{h=z+1}^{\omega-x_0} B_h^{(\Pi)} (1+i)^{\omega+1-x_0-h}) \geq 0 \right] = 1 - \epsilon_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Také si všimneme, že

$$W_z (1+i)^{\omega+1-x_0-z} - \sum_{h=z+1}^{\omega-x_0} B_h^{(\Pi)} (1+i)^{\omega+1-x_0-h} = W_{\omega+1-x_0} \quad (5.7)$$

představuje aktiva portfolia dostupná v okamžiku, kdy je kohorta vyčerpána. Můžeme odvodit následující vztah

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \bigwedge_{t=z+1}^{z+T} (1+i)^{t-(\omega+1-x_0)} W_{\omega+1-x_0} \geq 0 \right] &= \mathbb{P} \left[ \bigwedge_{t=z+1}^{z+T} W_{\omega+1-x_0} \geq 0 \right] \\ &= \mathbb{P} [W_{\omega+1-x_0} \geq 0] \\ &= 1 - \epsilon_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Tudíž požadavek (5.3) lze nahradit vyjádřením

$$\mathbb{P} [W_{\omega+1-x_0} \geq 0] = 1 - \epsilon_2. \quad (5.9)$$

Rozdíl mezi požadavky (5.2) a (5.3) spočívá ve způsobu, jak jsou definovány závazky. V požadavku (5.3) jsou závazky určeny pomocí náhodné současné hodnoty budoucích výplat, kdežto v (5.2) jsou stanoveny jako očekávaná hodnota této veličiny.

Pokud uijeme požadavek (5.3) ve tvaru (5.9), je vždy uvažován jen maximální možný solventnostní časový horizont. Naopak požadavek (5.2) může být použit i pro kratší časové horizonty, např.  $T = 1$  nebo  $T = 3$ , jak dále předvedeme.

Kvůli rozdílnostem mezi jednotlivými požadavky může být vhodné je implementovat s různými úrovněmi přípustné pravděpodobnosti selhání.

Řešením (5.2) stochastickou simulací dostaneme kapitálová aktiva portfolia požadovaná v čase  $z$ , která budeme označovat jako  $M_z^{[R1]}(T)$ . Potom  $W_z^{[R1]}(T) = V_z^{(\Pi)} + M_z^{[R1]}(T)$  představuje celková aktiva portfolia požadovaná v čase  $z$ .

Stochastickou simulací řešíme i (5.9). Takto získáme celková aktiva portfolia požadovaná v čase  $z$ , jež označíme jako  $W_z^{[R2]}$ . Požadovaná kapitálová aktiva portfolia v čase  $z$  jsou potom  $M_z^{[R2]} = W_z^{[R2]} - V_z^{(\Pi)}$ .

## 5.2 Výpočet solventnostního kapitálového požadavku

Uvedeme numerické ilustrace pro výpočet solventnostního kapitálového požadavku podle interních modelů uvedených v první části této kapitoly.

Stále předpokládáme, že máme homogenní portfolio pojištěných. Zanedbáme finanční riziko, takže stanovíme  $i_t = i = 0,025$ . Pro snadnější porovnání výsledků získaných podle různých požadavků definujeme individuální rezervu jako očekávanou současnou hodnotu budoucích důchodových výplat za předpokladu  $A_3(\tau)$ , který považujeme za nejlepší odhad úmrtnosti kohorty, tedy

$$V_t^{(j)} = E[Y_t^{(j)} | A_3(\tau)].$$

Stejná pravděpodobnost selhání je nastavena pro oba uvažované solventnostní kapitálové požadavky, takže máme  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,005$ . Taková úroveň je konzistentní se Solventností II. Podle Solventnosti II je individuální rezerva ještě navýšena o rizikovou přírážku, kterou v našem případě neuvažujeme.

V tabulce 5.1 je uvedena individuální rezerva. Rezerva portfolia v čase  $z$  je potom jednoduše  $V_z^{(II)} = n_z V_z^{(1)}$ , kde  $V_z^{(1)}$  je individuální rezerva v čase  $z$  pro jednoho pojištěného.

Čas $z$	Rezerva $V_z^{(1)}$
0	12,345
5	10,221
10	8,111
15	6,122
20	4,358
25	2,897
30	1,775
35	0,979

Tabulka 5.1: Individuální rezerva

Čas $z$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
0	17,918%	12,384%	10,538%
5	23,879%	17,412%	15,320%
10	34,839%	25,298%	22,687%
15	51,057%	38,551%	34,716%
20	78,269%	61,403%	56,412%
25	150,172%	110,316%	99,187%
30	336,701%	231,708%	201,963%
35	1324,543%	719,329%	539,802%

Tabulka 5.2: Kapitálový požadavek na základě (5.2) kryjící riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti:  $\frac{M_z^{[R1]}(\omega+1-x_0-z)}{V_z^{(II)}}$

Čas $z$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
0	17,762%	12,380%	10,538%
5	23,790%	17,408%	15,320%
10	34,607%	25,296%	22,685%
15	50,622%	38,529%	34,194%
20	77,681%	61,308%	56,409%
25	147,319%	110,255%	99,185%
30	325,839%	230,139%	201,815%
35	1243,033%	703,027%	539,191%

Tabulka 5.3: Kapitálový požadavek na základě (5.3) kryjící riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti:  $\frac{M_z^{[R2]}}{V_z^{(\Pi)}}$

Čas $z$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
0	2,139%	1,214%	0,724%
5	5,843%	3,982%	3,283%
10	11,414%	8,300%	7,496%
15	20,266%	16,628%	15,386%
20	38,018%	32,666%	30,594%
25	81,301%	67,404%	62,903%
30	205,158%	156,282%	142,187%
35	652,083%	491,100%	405,310%

Tabulka 5.4: Kapitálový požadavek na základě (5.2) kryjící riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti,  $T = 1$ :  $\frac{M_z^{[R1](1)}}{V_z^{(\Pi)}}$

Ve všech tabulkách s výsledky kapitálových požadavků vypočtených podle (5.2) nebo podle (5.3) je uvedena požadovaná výše kapitálu v procentech na jednotku rezervy portfolia.

Tabulky 5.2 a 5.3 uvádějí požadovaný kapitál na základě požadavků (5.2) a (5.3) kryjící riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti. V tabulce 5.2 je uveden požadovaný kapitál vypočtený podle požadavku (5.2) pro tři různé počáteční velikosti portfolia, přičemž je zvolen maximální možný časový horizont. Podobně tabulka 5.3 zachycuje požadovaný kapitál vypočtený tentokrát podle požadavku (5.3). Vidíme, že oba dva požadavky vedou k podobným výsledkům. Jestliže se zvětšuje počáteční velikost portfolia, hodnoty požadovaného kapitálu na jednotku rezervy portfolia se zmenšují. Pro danou počáteční velikost portfolia se podíly požadovaného kapitálu na jednotku rezervy portfolia s rostoucím časem zvětšují.

Dále si můžeme všimnout podobných velikostí podílů  $M_z^{[R2]}/V_z^{(\Pi)}$  z tabulky 5.3 a nepodmíněných percentilů současné hodnoty budoucích důchodových výplat na jednotku očekávané hodnoty  $y_{z,\epsilon}[n_z]/E[Y_z^{(\Pi)}|n_z]$  z tabulky 3.13, pokud uvažovaná

Čas $z$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
0	5,533%	2,559%	1,757%
5	9,852%	5,719%	4,565%
10	15,866%	11,314%	9,840%
15	28,268%	21,527%	19,398%
20	51,031%	41,431%	38,170%
25	106,975%	84,479%	77,494%
30	273,946%	195,866%	174,698%
35	998,502%	641,894%	499,047%

Tabulka 5.5: Kapitálový požadavek na základě (5.2) kryjící riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti,  $T = 3$ :  $\frac{M_z^{[R1]}(3)}{V_z^{(\Pi)}}$

Čas $z$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
0	12,126%	3,947%	1,267%
5	14,921%	4,702%	1,504%
10	17,960%	5,800%	1,759%
15	22,934%	7,509%	2,413%
20	34,000%	10,525%	3,377%
25	59,702%	17,870%	5,654%
30	154,472%	42,721%	13,022%
35	1100,390%	177,285%	50,129%

Tabulka 5.6: Kapitálový požadavek na základě (5.2) kryjící jen náhodné odchylky v úmrtnosti, úmrtnostní předpoklad  $A_3(\tau)$ :  $\frac{M_z^{[R1]}(\omega+1-x_0-z)}{V_z^{(\Pi)}}$

pravděpodobnost  $\epsilon$  pro výpočet percentilů je velmi blízko nebo nejlépe rovna pravděpodobnosti, že nedojde k selhání  $1 - \epsilon_2$ , zvolené pro výpočet  $M_z^{[R2]}$ . Můžeme porovnat podíl  $M_z^{[R2]}/V_z^{(\Pi)}$  v tabulce 5.3 (kde  $1 - \epsilon_2 = 0,995$ ) s podílem  $y_{z,0,99}[n_z]/E[Y_z^{(\Pi)}|n_z]$  v tabulce 3.13 (kde  $\epsilon = 0,99$ ). Tyto podíly mají podobné velikosti v každém sledovaném čase  $z$ . Rezerva portfolia  $V_z^{(\Pi)}$  (daná jako  $n_z E[Y_z^{(1)}|A_3(\tau)] = E[Y_z^{(\Pi)}|A_3(\tau), n_z]$ ) a  $E[Y_z^{(\Pi)}|n_z]$  nabývají téměř shodných hodnot, jak lze porovnat z tabulek 3.2 a 3.10. Takže vzhledem k podobným hodnotám podílů  $M_z^{[R2]}/V_z^{(\Pi)}$  a  $y_{z,\epsilon}[n_z]/E[Y_z^{(\Pi)}|n_z]$  je pravděpodobné, že veličiny  $M_z^{[R2]}$  a  $y_{z,\epsilon}[n_z]$  budou také nabývat podobných hodnot.

V tabulkách 5.4 a 5.5 máme požadovaný kapitál založený na (5.2) pro kratší časové horizonty, v tabulce 5.4 je solventnostní časový horizont  $T = 1$ , v tabulce 5.5 je potom  $T = 3$ . Všimněme si, že ve všech tabulkách 5.2 až 5.5 se v každém sledovaném čase a pro oba kapitálové požadavky velikost požadovaného kapitálu snižuje, pokud se zvětšuje velikost portfolia. To je způsobeno tím, že jsme při výpočtu uvažovali i náhodné odchylky v úmrtnosti.

Čas $z$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
0	11,341%	3,697%	1,190%
5	13,983%	4,466%	1,427%
10	17,345%	5,363%	1,666%
15	21,542%	7,022%	2,289%
20	32,341%	9,887%	3,225%
25	56,238%	16,505%	5,394%
30	144,817%	40,670%	12,177%
35	1039,257%	167,096%	48,091%

Tabulka 5.7: Kapitálový požadavek na základě (5.3) kryjící jen náhodné odchylky v úmrtnosti, úmrtnostní předpoklad  $A_3(\tau)$ :  $\frac{M_z^{[R2]}}{V_z^{(\Pi)}}$

Čas $z$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
0	2,139%	1,112%	0,356%
5	3,523%	1,423%	0,457%
10	4,353%	1,954%	0,656%
15	6,900%	2,693%	0,955%
20	12,949%	4,752%	1,521%
25	23,229%	8,701%	2,902%
30	53,100%	25,102%	7,675%
35	285,286%	85,586%	32,808%

Tabulka 5.8: Kapitálový požadavek na základě (5.2) kryjící jen náhodné odchylky v úmrtnosti, úmrtnostní předpoklad  $A_3(\tau)$ ,  $T = 1$ :  $\frac{M_z^{[R1](1)}}{V_z^{(\Pi)}}$

Tabulky 5.6 až 5.9 uvádějí požadovaný kapitál vypočtený podle (5.2) a (5.3) pro různé počáteční velikosti portfolia, tentokrát jsme uvažovali jen náhodné odchylky v úmrtnosti. Požadovaný kapitál byl počítán jen za předpokladu  $A_3(\tau)$ . Se zvětšující se počáteční velikostí portfolia se riziko náhodných odchylek v úmrtnosti snižuje.

V tabulce 5.10 je naopak požadovaný kapitál počítán jen pro riziko dlouhověkosti, kdy jsme předpokládali, že ať je skutečná úmrtnost kohorty jakákoli, aktuální počet úmrtí v každém roce se shoduje s očekávaným počtem úmrtí za daného předpokladu. V tomto případě množství požadovaného kapitálu na jednotku rezervy portfolia nezávisí na počáteční velikosti portfolia (neboť riziko dlouhověkosti je systematické). Pro maximální solventnostní časový horizont dávají požadavky (5.2) a (5.3) stejné výsledky. Je to tím, že pokud neuvažujeme náhodné odchylky v úmrtnosti, veličina  $Y_t^{(\Pi)}$  v požadavku (5.3) nabývá pokaždé své očekávané hodnoty, takže se požadavky (5.2) a (5.3) shodují.

Je třeba zdůraznit, že implementování interního modelu kryjícího jen jednotlivé komponenty rizika úmrtnosti představuje nesprávné použití tohoto modelu. Za důvěryhodné považujeme výsledky pouze v případě, kdy je uvažováno zároveň

Čas $z$	Počáteční velikost portfolia		
	$n_0 = 100$	$n_0 = 1000$	$n_0 = 10000$
0	5,452%	1,923%	0,614%
5	7,589%	2,492%	0,776%
10	9,553%	3,258%	1,059%
15	12,989%	4,584%	1,566%
20	22,390%	7,559%	2,416%
25	43,401%	13,815%	4,369%
30	118,268%	35,118%	11,139%
35	611,328%	150,794%	47,480%

Tabulka 5.9: Kapitálový požadavek na základě (5.2) kryjící jen náhodné odchylky v úmrtnosti, úmrtnostní předpoklad  $A_3(\tau)$ ,  $T = 3$ :  $\frac{M_z^{[R1]}(3)}{V_z^{(\Pi)}}$

Čas $z$	Požadovaný kapitál			
	$\frac{M_z^{[R1]}(\omega+1-x_0-z)}{V_z^{(\Pi)}}$	$\frac{M_z^{[R2]}}{V_z^{(\Pi)}}$	$\frac{M_z^{[R1]}(1)}{V_z^{(\Pi)}}$	$\frac{M_z^{[R1]}(3)}{V_z^{(\Pi)}}$
0	9,758%	9,758%	0,502%	1,391%
5	11,873%	11,873%	0,591%	1,790%
10	14,554%	14,554%	0,996%	2,971%
15	17,919%	17,919%	1,727%	5,016%
20	22,117%	22,117%	3,056%	8,490%
25	27,390%	27,390%	5,489%	14,219%
30	34,274%	34,274%	10,005%	23,279%
35	44,219%	44,219%	18,747%	37,087%

Tabulka 5.10: Kapitálový požadavek kryjící jen riziko dlouhověkosti

Čas $z$	$\frac{M_z^{[Solv2]}}{V_z^{(\Pi)}}$
0	9,045%
5	10,477%
10	12,338%
15	14,752%
20	17,932%
25	22,327%
30	29,045%
35	41,187%

Tabulka 5.11: Kapitálový požadavek podle Solventnosti II

riziko dlouhověkosti i riziko náhodných odchylek v úmrtnosti. Pokud zohledňujeme jen náhodné odchylky v úmrtnosti nebo jen systematické odchylky (riziko dlouhověkosti), některé aspekty bývají opomenuty a můžeme dostat nesprávnou výši požadovaného kapitálu.



Předpoklad	Váhy (1)	Váhy (2)	Váhy (3)	Váhy (4)	Váhy (5)	Váhy (6)
$A_1(\tau)$	0	0,1	0,15	0,2	0,10	0,10
$A_2(\tau)$	0	0,1	0,15	0,2	0,10	0,15
$A_3(\tau)$	1	0,6	0,40	0,2	0,30	0,20
$A_4(\tau)$	0	0,1	0,15	0,2	0,25	0,25
$A_5(\tau)$	0	0,1	0,15	0,2	0,25	0,30

Tabulka 5.12: Různá pravděpodobnostní rozdělení na množině  $\mathcal{A}(\tau)$

Nakonec ještě porovnáme výsledky popsané v předchozích tabulkách se zákonnými požadavky podle Solventnosti II, která explicitně uvažuje riziko dlouhověkosti. Požadovaný kapitál pro krytí tohoto rizika tvoří změna očekávaná v čisté hodnotě aktiv při trvalém snížení současných a všech budoucích měr úmrtnosti o 20 %. Při našich předpokladech (uvažujeme jednu kohortu, neuvažujeme podíly na zisku, zanedbáváme jiná rizika kromě těch, která plynou z úmrtnosti) se požadavek redukuje na rozdíl mezi rezervou založenou na nejlepších odhadech a rezervou stanovenou podle takových úmrtnostních tabulek, kde je pravděpodobnost úmrtí nižší o 20 % než podle nejlepšího odhadu úmrtnosti kohorty. Odpovídající výsledky jsou uvedeny v tabulce 5.11, kde požadovaný kapitál v čase  $z$  je označen  $M_z^{[Solv2]}$ . V relativním vyjádření je takové množství nezávislé na velikosti portfolia.

Může nás napadnout, jak se změní výše požadovaného kapitálu v závislosti na volbě vah přiřazených jednotlivým předpokladům o úmrtnosti kohorty. Nyní budeme vyšetřovat solventnostní kapitálové požadavky pro různé systémy vah přiřazené množině předpokladů  $\mathcal{A}(\tau)$ . Příslušné váhy jsou uvedeny v tabulce 5.12, přičemž máme následující případy:

- Váhy (1) znamenají případ, kdy uvažujeme jen předpoklad  $A_3(\tau)$ , tj. požadavek kryje jen náhodné odchylky v úmrtnosti, nikoli riziko dlouhověkosti
- Váhy (2) představují pravděpodobnostní rozdělení na množině předpokladů  $\mathcal{A}(\tau)$  zavedené v kapitole 3 a používané v předchozích výpočtech solventnostních kapitálových požadavků
- Váhy (3) prisuzují předpokladu  $A_3(\tau)$ , který považujeme za nejlepší odhad úmrtnosti kohorty, nižší váhu než v případě vah (2), ostatním předpokladům jsou rovnoměrně rozděleny zbývající váhy tak, aby celkový součet vah byl roven jedné
- Váhy (4) představují případ, kdy považujeme všechny předpoklady o úmrtnosti kohorty za stejně pravděpodobné, tj. každý z pěti uvažovaných předpokladů má stejnou váhu 0,2
- Váhy (5) stanovují, že předpoklady  $A_4(\tau)$  a  $A_5(\tau)$ , které znamenají větší očekávanou zbývající dobu života oproti předpokladu  $A_3(\tau)$ , jsou více pravděpodobné než předpoklady  $A_1(\tau)$  a  $A_2(\tau)$  znamenající nižší očekávanou zbývající dobu života než je podle předpokladu  $A_3(\tau)$

Čas $z$	Váhy (1)	Váhy (2)	Váhy (3)	Váhy (4)	Váhy (5)	Váhy (6)
0	3,697%	12,380%	12,508%	12,928%	12,802%	12,930%
5	4,466%	17,408%	17,919%	18,080%	18,125%	18,466%
10	5,363%	25,296%	25,630%	25,859%	26,200%	26,702%
15	7,022%	38,529%	38,891%	39,381%	39,390%	39,973%
20	9,887%	61,308%	62,666%	63,553%	63,968%	64,599%
25	16,505%	110,255%	110,866%	112,700%	114,065%	114,065%
30	40,670%	230,139%	236,656%	236,294%	241,362%	243,293%
35	167,096%	703,027%	747,858%	762,122%	770,273%	780,462%

Tabulka 5.13: Kapitálový požadavek na základě (5.3) kryjící riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti pro různé váhy,  $n_0 = 1000$ :  $\frac{M_z^{[R2]}}{V_z^{(\Pi)}}$

Čas $z$	Váhy (1)	Váhy (2)	Váhy (3)	Váhy (4)	Váhy (5)	Váhy (6)
0	1,112%	1,214%	1,214%	1,316%	1,316%	1,316%
5	1,423%	3,982%	3,982%	3,501%	4,215%	4,098%
10	1,954%	8,300%	8,441%	8,441%	8,583%	8,583%
15	2,693%	16,628%	16,819%	16,819%	17,010%	17,010%
20	4,752%	32,666%	33,291%	33,291%	33,291%	33,610%
25	8,701%	67,404%	68,138%	68,851%	68,851%	68,851%
30	25,102%	156,282%	159,299%	162,316%	162,316%	162,316%
35	85,586%	491,100%	527,780%	527,780%	527,780%	527,780%

Tabulka 5.14: Kapitálový požadavek na základě (5.2) kryjící riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti pro různé váhy,  $n_0 = 1000$ ,  $T = 1$ :  $\frac{M_z^{[R1](1)}}{V_z^{(\Pi)}}$

- Váhy (6) reprezentují takový systém vah, kdy předpoklad s nižší očekávanou zbývajícím dobou života má nižší váhu než předpoklad s vyšší očekávanou zbývajícím dobou života.

I nadále předpokládáme, že rezervu portfolia dostaneme pomocí individuální rezervy počítané pro předpoklad  $A_3(\tau)$  jako

$$V_z^{(\Pi)} = n_z V_z^{(1)} = n_z \mathbb{E}[Y_t^{(1)} | A_3(\tau)].$$

Nejprve uvedeme kapitálové požadavky pro riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti. Uvažujeme jen počáteční velikost portfolia  $n_0 = 1000$ .

V tabulce 5.13 je uveden požadovaný kapitál pro maximální solventnostní časový horizont podle požadavku (5.3). Systém vah (1) bere v úvahu pouze náhodné odchylky v úmrtnosti a nikoli riziko dlouhověkosti, neboť je s pravděpodobností rovnou jedné realizován vždy předpoklad  $A_3(\tau)$ , takže není zohledněno riziko nejistoty, který z předpokladů nastane. Zbývajícím systémy vah (2) až (6) uvažují i riziko dlouhověkosti. Vidíme, že dostáváme podobné výsledky výrazně se lišící od výsledků pro systém vah (1).

Podobné závěry můžeme odvodit i z tabulek 5.14 a 5.15 uvádějících požadovaný kapitál podle (5.2) pro solventnostní časové horizonty  $T = 1$  a  $T = 3$ . Opět máme odlišné výsledky pro váhy (1) než pro ostatní váhy.

Čas $z$	Váhy (1)	Váhy (2)	Váhy (3)	Váhy (4)	Váhy (5)	Váhy (6)
0	1,923%	2,559%	2,676%	2,727%	2,850%	2,803%
5	2,492%	5,719%	5,906%	5,939%	5,976%	6,110%
10	3,258%	11,314%	11,266%	11,435%	11,585%	11,721%
15	4,584%	21,527%	21,733%	21,962%	22,003%	22,197%
20	7,559%	41,431%	42,152%	42,407%	43,077%	43,102%
25	13,815%	84,479%	86,089%	86,497%	86,843%	87,678%
30	35,118%	195,866%	202,020%	202,865%	206,606%	208,175%
35	150,794%	641,894%	668,385%	688,763%	692,838%	711,178%

Tabulka 5.15: Kapitálový požadavek na základě (5.2) kryjící riziko dlouhověkosti a náhodné odchylky v úmrtnosti pro různé váhy,  $n_0 = 1000$ ,  $T = 3$ :  $\frac{M_z^{[R1]}(3)}{V_z^{(\Pi)}}$

Čas $z$	Váhy (1)	Váhy (2)	Váhy (3)	Váhy (4)	Váhy (5)	Váhy (6)
0	0%	9,758%	9,758%	9,758%	9,758%	9,758%
5	0%	11,873%	11,873%	11,873%	11,873%	11,873%
10	0%	14,554%	14,554%	14,554%	14,554%	14,554%
15	0%	17,919%	17,919%	17,919%	17,919%	17,919%
20	0%	22,117%	22,117%	22,117%	22,117%	22,117%
25	0%	27,390%	27,390%	27,390%	27,390%	27,390%
30	0%	34,274%	34,274%	34,274%	34,274%	34,274%
35	0%	44,219%	44,219%	44,219%	44,219%	44,219%

Tabulka 5.16: Kapitálový požadavek na základě (5.3) kryjící jen riziko dlouhověkosti pro různé váhy:  $\frac{M_z^{[R2]}}{V_z^{(\Pi)}}$

Dále se budeme věnovat kapitálovým požadavkům jen pro riziko dlouhověkosti. Tabulka 5.16 uvádí požadovaný kapitál pro krytí rizika dlouhověkosti pro maximální časový horizont podle požadavku (5.3). Pokud neuvažujeme náhodné odchylky v úmrtnosti, nejistota spočívá jen v tom, který z pěti alternativních předpokladů o úmrtnosti kohorty je skutečně realizován. Pravděpodobnosti jednotlivých předpokladů jsou určeny vahami podle tabulky 5.12. Pro váhy (1) nastane pokaždé předpoklad  $A_3(\tau)$ , proto se neobjevuje žádné riziko dlouhověkosti. V ostatních případech (pro váhy (2) až (6)) dostáváme naprosto stejné výsledky. Ke stejným závěrům dospějeme i užitím (5.2) pro kratší solventnostní časové horizonty  $T = 1$  a  $T = 3$ , odpovídající tabulky zde již neuvádíme.

Při výpočtu požadovaného kapitálu kryjícího jen riziko dlouhověkosti předpokládáme, že ať už je skutečná úmrtnost kohorty jakákoli, aktuální počet úmrtí v každém roce se shoduje s očekávaným počtem úmrtí za daného předpokladu. Počet žijících pojištěných v portfoliu odpovídá očekávané hodnotě příslušného binomického rozdělení.

Výpočet probíhá tak, že se nejprve náhodně zvolí předpoklad o úmrtnosti, přičemž pravděpodobnosti zvolení jednotlivých předpokladů pro různé systémy vah jsou dány v tabulce 5.12. Pro zvolený předpoklad se vypočte požadovaný kapitál. Celkem tedy pro pět alternativních předpokladů máme maximálně pět různých výší požadovaného kapitálu v každém uvažovaném čase.

Podle (5.9) požadujeme nezápornost  $W_{\omega+1-x_0}$  s pravděpodobností 99,5 %. Pro váhy (2) až (6) má předpoklad  $A_5(\tau)$ , který představuje nejméně příznivý předpoklad o úmrtnosti kohorty s nejvyšší očekávanou zbývajícím dobou života vyžadující největší množství kapitálu, váhu alespoň 0,1, takže ve všech těchto případech požadovanou výši kapitálu ovlivňuje jen právě tento předpoklad a proto dostáváme stejnou výši solventnostního kapitálového požadavku pro krytí rizika dlouhověkosti.

Můžeme konstatovat, že při použití (5.2) nebo (5.3) výše požadovaného kapitálu pro krytí rizika dlouhověkosti nezávisí na pravděpodobnostním rozdělení na množině předpokladů  $\mathcal{A}(\tau)$ , pokud jsou váhy pro jednotlivé předpoklady dostatečně velké.

Nakonec se budeme zabývat otázkou, co kdybychom kapitálový požadavek pro riziko dlouhověkosti zjednodušili jen na rozdíl rezerv počítaných podle různých předpokladů o úmrtnosti kohorty. Výpočet požadovaného kapitálu by mohl být založen na porovnání aktuální rezervy a rezervy vypočtené za předpokladu méně příznivé úmrtnosti kohorty.

Nechť  $V_z^{(\Pi)[B]}$  značí rezervu vypočtenou podle stejných principů jako  $V_z^{(\Pi)}$  (v našem případě je to princip ekvivalence), ale založenou na méně příznivém předpokladu o úmrtnosti, takže

$$V_z^{(\Pi)} \leq V_z^{(\Pi)[B]}.$$

Požadovaný kapitál by v tomto případě byl

$$M_z^{[R3]} = V_z^{(\Pi)[B]} - V_z^{(\Pi)}. \quad (5.10)$$

Všimněme si, že požadavek (5.10) by kryl jen riziko dlouhověkosti. Není explicitně zmíněna pravděpodobnost selhání, nicméně předpoklad o úmrtnosti kohorty přijatý pro výpočet  $V_z^{(\Pi)[B]}$  v sobě zahrnuje určitou pravděpodobnost selhání. Jako časový horizont je implicitně uvažována maximální zbývajícím doba trvání portfolia, pokud je to časový horizont, pro který vypočítáváme rezervu. Pokud je při výpočtu rezerv v (5.10) použit princip ekvivalence, požadovaný kapitál  $M_z^{[R3]}$  je lineární funkcí velikosti portfolia  $n_z$ .

Provedeme porovnání požadavků (5.2) a (5.3) s požadavkem (5.10) převzaté z [1]. Definujeme následující podíly:

$$QM_z^{[R1]}(T; n_z) = \frac{M_z^{[R1]}(T)}{V_z^{(\Pi)}} \quad (5.11)$$

$$QM_z^{[R2]}(n_z) = \frac{M_z^{[R2]}}{V_z^{(\Pi)}} \quad (5.12)$$

$$QV_z = \frac{M_z^{[R3]}}{V_z^{(\Pi)}}. \quad (5.13)$$

Uvažujeme-li i riziko náhodných odchylek v úmrtnosti, podíly  $QM_z^{[R1]}(T; n_z)$  a  $QM_z^{[R2]}(n_z)$  závisí na velikosti portfolia. Naopak podíl  $QV_z$ , který bere v úvahu jen riziko dlouhověkosti, nezávisí na velikosti portfolia. Požadavky (5.2) a (5.3) mohou být implementovány jen pro riziko náhodných odchylek v úmrtnosti nebo jen pro riziko dlouhověkosti, jak bylo ilustrováno v tabulkách 5.6 až 5.9 a 5.10. Pokud uvažujeme jen riziko dlouhověkosti, tak podíly  $QM_z^{[R1]}(T; n_z)$  a  $QM_z^{[R2]}(n_z)$  jsou nezávislé na velikosti portfolia.

Velikost portfolia $n_0$	případ (1)	případ (2)	případ (3)	případ (4)
1000	12,380%	9,758%	3,697%	13,455%
2000	11,428%	9,758%	2,681%	12,439%
3000	11,188%	9,758%	2,161%	11,919%
4000	10,963%	9,758%	1,910%	11,668%
5000	10,904%	9,758%	1,633%	11,391%
6000	10,855%	9,758%	1,506%	11,264%
7000	10,633%	9,758%	1,385%	11,143%
8000	10,614%	9,758%	1,307%	11,065%
9000	10,588%	9,758%	1,246%	11,004%
10000	10,538%	9,758%	1,190%	10,948%

Tabulka 5.17: Podíly  $QM_0^{[R2]}(n_0)$  a  $QV_0$ : (1)  $QM_0^{[R2]}(n_0)$ ; (2)  $QV_0$ , pro rezervu  $V_0^{(\Pi)[A_5(\tau)]}$ ; (3)  $QM_0^{[R2]}(n_0)$ , s  $M_0^{[R2]}$  kryjícím jen náhodné odchylky v úmrtnosti; (4)  $QV_0 + QM_0^{[R2]}(n_0)$ , s  $M_0^{[R2]}$  kryjícím jen náhodné odchylky v úmrtnosti

Další rozdíl mezi  $QM_z^{[R1]}(T; n_z)$  a  $QV_z$  spočívá v možnosti nastavit preferovaný časový horizont. Časový horizont jiný než maximální může být zvolen jen v požadavku (5.2).

V následující numerické ilustraci se budeme zabývat výpočtem podílů (5.12) a (5.13). Výpočty jsou prováděny v čase 0 pro různé počáteční velikosti portfolia  $n_0$ . Máme následující situace:

- případ (1) ukazuje podíl  $QM_0^{[R2]}(n_z)$
- případ (2) ukazuje podíl  $QV_0$  získaný volbou úmrtnostního předpokladu  $A_5(\tau)$  jako méně příznivého předpokladu o úmrtnosti kohorty než je nejlepší odhad
- případ (3) ukazuje podíl  $QM_0^{[R2]}(n_z)$ , kde tentokrát (na rozdíl od případu (1)) uvažujeme požadovaný kapitál  $M_0^{[R2]}$  jen pro krytí náhodných odchylek v úmrtnosti (pro popis úmrtnosti je zvolen předpoklad  $A_3(\tau)$ , který považujeme za nejlepší odhad úmrtnosti kohorty)
- případ (4) ukazuje požadovaný kapitál získaný sečtením výsledků v případech (2) (pro krytí rizika dlouhověkosti) a (3) (pro krytí náhodných odchylek).

Výsledky jsou zachyceny v tabulce 5.17. Uvažujeme velikosti portfolia  $n_0 = 1000, 2000, \dots, 10000$ .

Můžeme si všimnout, že výsledky v případě (2) jsou shodné s výsledky při aplikaci požadavku (5.2) při volbě časového horizontu  $T = \omega + 1 - x_0$  stejně jako požadavku (5.3). Podíl  $QV_0$  (s rezervou  $V_0^{(\Pi)[A_5(\tau)]}$ ) činí 9,758 % pro každou velikost portfolia. Tuto hodnotu můžeme porovnat s podíly  $QM_0^{[R1]}(\omega + 1 - x_0; n_0) = M_0^{[R1]}(\omega + 1 - x_0)/V_0^{(\Pi)}$  a  $QM_0^{[R2]}(n_0) = M_0^{[R2]}/V_0^{(\Pi)}$  v tabulce 5.10 a vidíme, že se shodují. Je to díky silnému vlivu nejhoršího scénáře, v našem případě předpokladu  $A_5(\tau)$ , když jsou stanoveny nízké pravděpodobnosti selhání.

Čas $z$	$\frac{M_z^{[R3]}}{V_z^{(II)}}$
0	9,758%
5	11,873%
10	14,554%
15	17,919%
20	22,117%
25	27,389%
30	34,267%
35	44,079%

Tabulka 5.18: Kapitálový požadavek kryjící jen riziko dlouhověkosti podle (5.10)

Dále budeme zkoumat, jestli se hodnoty požadovaného kapitálu pro riziko dlouhověkosti podle (5.2) a (5.3) shodují s hodnotami požadovaného kapitálu podle (5.10) i v jiných časech než jen v čase 0.

V tabulce 5.18 je uveden požadovaný kapitál pro krytí rizika dlouhověkosti podle požadavku (5.10) (tj. podíl (5.13)) v různých časech  $z$ . Vidíme, že výsledky se shodují s odpovídajícími hodnotami v tabulce 5.10. Opět je to způsobeno nejhorším scénářem představovaným předpokladem  $A_5(\tau)$ , který má rozhodující vliv na výši požadovaného kapitálu.

Tudíž lze říci, že pokud uvažujeme jen riziko dlouhověkosti, požadavek (5.2) realizovaný s maximálním časovým horizontem a požadavek (5.3) se redukuje na požadavek (5.10). Uvedené výsledky mohou vést k myšlence rozdělit proces alokace kapitálu do dvou kroků:

- jeden pro riziko dlouhověkosti, založený na porovnání rezerv počítaných podle různých předpokladů o úmrtnosti (tj. výpočet dle požadavku (5.10))
- jeden pro náhodné odchylky v úmrtnosti, např. pomocí interního modelu nebo nějakého jiného standardního vzorce.

Výše uvedený případ (4) má představovat příklad takového postupu. Lze si všimnout, že důsledkem tohoto postupu může být nadbytečná alokace kapitálu. Jak jsme již dříve uvedli, aplikace (5.2) a (5.3) jen na jednotlivé komponenty rizika úmrtnosti představuje nevhodné použití těchto modelů a může vést k nepřesné alokaci kapitálu.

Výhodou požadavku (5.10) je nepochybně jeho jednoduchost. Pokud jsou pro riziko náhodných odchylek v úmrtnosti dostupné nebo požadované jiné výpočetní prostředky než interní model, potom požadavek (5.10) je schopen řádně zachytit vlastnosti rizika dlouhověkosti.

# Závěr

Práce Riziko dlouhověkosti v životním pojištění je složena ze dvou hlavních částí doplněných podrobnými numerickými ilustracemi.

Nejprve byly zkoumány charakteristiky pravděpodobnostního rozdělení současné hodnoty budoucích důchodových výplat a ročního úhrnu důchodových výplat pro předem zvolený předpoklad o úmrtnosti kohorty. Pro kvantifikaci rizika nejistoty vývoje úmrtnosti byla zavedena pravděpodobnostní struktura do množiny všech možných předpokladů o úmrtnosti. Nejistota spočívala v tom, který z pěti možných předpokladů bude skutečně realizovaný.

V druhé části práce byl počítán solventnostní kapitálový požadavek pro krytí rizika dlouhověkosti a náhodných odchylek v úmrtnosti. Solventnostní kapitálový požadavek pro riziko dlouhověkosti může mít velmi jednoduchý tvar (jak je také navrhováno v Solventnosti II), který se v našem případě redukoval na rozdíl mezi rezervou založenou na nejlepších odhadech a rezervou stanovenou pro sníženou pravděpodobnost úmrtí.

Riziko dlouhověkosti je systematické, nelze ho eliminovat zvětšujícím se rozsahem portfolia.

# Seznam použité literatury

- [1] PITACCO, E., DENUIT, M., HABERMAN, S., et al. *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford: Oxford University Press, 2009.
- [2] CIPRA, T. *Pojistná matematika: teorie a praxe*. Praha: Ekopress, 1999.
- [3] MANDL, P., MAZUROVÁ, L., JUSTOVÁ, I. *Matematika a řízení rizik 2009/10*. Praha: Matfyzpress, 2010.
- [4] Český statistický úřad. *Úmrtnostní tabulky - Metodika* [online]. [cit. 2011-02-15]. Dostupné z WWW: <[http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni\\_tabulky\\_metodika](http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni_tabulky_metodika)>.
- [5] *Směrnice Evropského parlamentu a rady o přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu (Solventnost II) (přepracované znění)* [online]. [cit. 2010-10-28]. Dostupné z WWW: <<http://register.consilium.europa.eu/pdf/cs/09/st03/st03643-re06.cs09.pdf>>.
- [6] *QIS5 Technical Specifications* [online]. [cit. 2010-10-28]. Dostupné z WWW: <[http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical\\_specifications\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf)>.