Posudek oponenta diplomové práce Marie Dostálové
"Twistorový operátor v symplektické geometrii"

Martin Doubek

Nektere symplekticke variety pripousteji tzv. metaplektickou strukturu, ktera je rozsirenim strukturni grupy frame bundlu ze symplekticke na metaplektickou grupu. Metaplekticka grupa ma velmi netrivialni nekonecne rozmernou reprezentaci, tzv. Segal-Shale-Weilovu. Bundle asociovany touto reprezentaci k frame bundlu nasi variety se nazyva symplekticky spinorovy bundle. Zrejmym rozsirenim dostavame bundle symplektickych spinorovych forem. Na jeho rezech pusobi tzv. symplekticky twistorovy operator. Cilem prace je popsat cast jeho jadra.

V prvni casti prace (Kapitoly 1–4 a zacatek Kapitoly 5) se smeruje celkem rychle k zavedeni symplektickych spinoru. Zde ma prace kompilacni charakter. Jsou uvedeny nezbytne definice a tvrzeni s odkazy na dukazy v literature. I kdyz je celkove vyklad vydareny a v hrubych rysech dobre pochopitelny i s minimalnimi predchozimi znalostmi, pri detailnejsim pohledu je nevyvazeny. Snadne a zname veci jsou vylozeny podrobne, zatimco u obtiznych veci je vyklad casto nejasny. Zejmena mi pripada, ze nebyly uspokojive objasneny problemy s prostory nekonecnych dimenzi: spojitost operatoru se neoveruje, nekde nejsou prislusne topologie vubec zavedeny, definice hladkosti je nevyhovujici, vyznam spojistosti a hladkosti pro dalsi vypocty neni vysvetlen. Podrobneji viz konkretni vyhrady nize.

V druhe casti prace se provadi explicitni vypocty jadra twistoroveho operatoru v nejjednodussim pripade $\mathbb{R}^2$. Jedna se o nove vysledky, podrobnejsi hodnoceni puvodnosti ale nechavam na skoliteli. Teoreticke problemy z predchozich kapitol se tu, zda se, neprojevuji. Vyklad je jasny, mam prakticky jedinou pochybnost, a to v dukazu (zajimave) Vety 5.3.4.

Celkove se jedna o solidni praci. Prestoze obtizne obecne problemy s nekonecnymi dimenzemi nejsou podle mne do detailu zvladnuty a i pedagogicky by se prvni cast jiste dala vylepsit, je prace docela dobrym srozumitelnym uvodem k symplektickym spinorum. Druha cast prace s novymi vysledky je pak prakticky bez problemu. Navrhuji hodnoceni "2".

Pri obhajove bych si predstavoval, ze se autorka s prihlednutim k casovym moznostem vyjadri zejmena k pripominkam (2),(4),(26),(35) a (47) nize.

Konkretni pripominky

(1) s. 7, Tvrzeni 1.1.6 - v "...lze rozsirit v bazi..." chybi "symplektickou".
(2) s. 14, Definice 2.1.4 - Je tezko prijatelna, protoze libovolna nekonstantni funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nabyvajici jen hodnot ± 1 by byla podle teto definice hladka, prestoze neni ani spojita. Tato definice je vsak potreba v kapitole 4 o vektorovych bundlech s fibry Frechetovymi prostory a nasledne pak pro konstrukci symplektickych spinoru (pres asociovane bundly). Pritom nejaky pojem hladkosti je jiste potreba k obecnym uvaham o tecnych zobrazenich, konexich apod. Bez vhodne definice hladkosti jsou zrejme kapitoly 4 a 5 zcela na vode. Existuje nejaky standardni pristup v literature? Napr. [8] definuje pouze hladke rezy asociovanych bundlu (i kdyz ne zcela jasne). Dale na s. 22 se vyskytuje jina definice hladkosti pro zobrazeni $G \to W$ pomoci dualu W^*, kde G je Lieova grupa a W topologicky vektorovy prostor. Ta ale predpoklada zdroj konecne dimenzionalni (neni to ovsem explicitne uvedeno). Neda se bez hladkosti obejit od konce kapitoly 5, kde zacinaji explicitni vypocty? Hraje tam nekde hladkost roli?
(3) s.14, Poznamka za Definici 2.2.1 - Ackoli se Schwarzuv prostor casto zminuje, nikde neni definovana prislusna metrika. Je to tedy stejna metrika jako na $\mathbb{A}$? Navic by tato poznamka mela logicky nasledovat az za definici topologie na $\mathbb{A}$.
(4) s. 15, Veta 2.2.3 a 2.2.4 - dukaz Vety 2.2.3 obsahuje NEpravdive tvrzeni (ktere je ovsem vyuzito az ve vete 2.2.4), ze stejnomerna limita (realne) analytickych funkci je analyticka (napr. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1/n + x^2} = |x|$ na $\mathbb{R}$, na kompaktech mame Weierstrasseovu vetu o aproximaci polynomy). Tim okamzite vyvstava otazka, jestli je $\mathbb{A}$ vubec uplny. Vyskytuje se $\mathbb{A}$ nekde v literature?
(5) s. 16, Veta 2.2.6 - Dukaz je napsan pochybne. Zamena sumy a integralu souvisi se stejnomernou konvergenci Taylorovy rady a nikoli s konvergenci v prostoru $\mathbb{A}$.
(6) s. 17 - Byly Hermiteovy polynomy nekde v praci vyuzity?
(7) s. 18, 3. display shora - Preklep, ma byt $(-1)^n$.
(8) s. 21, Poznámka - Násobení na maticové grupě NEní $A \cdot B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ (toto je komutativní!), ale prostě standardní maticové násobení. Vzniklá grupa je pak isomorfní s tou z Definice 3.1.1 isomorfismem

$$\begin{pmatrix} 1 & v & x \\ 0 & I & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (v, w, x - \frac{1}{2}\langle v, w\rangle).$$

(9) s. 22, Poznamka - Zobrazeni ι a φ v kratke exaktni posloupnosti nejsou nikde definovana. Zobrazeni ψ NEni morfismus grup. V "dukazu" se objevuje spatna operace na $H(V)$, meli bychom totiz uvazovat operaci z definice 3.1.1 a nikoli scitani. Nejedna se tedy o stepeni.
(10) s. 22, Definice 3.1.2 - Prestoze se mluvi o spojitosti, neni na $\mathrm{Aut}(W)$ zavedena topologie. O jakou se jedna? Taky nebyla zavedena transpozice pro operatory. Jde o sdruzeny operator?
(11) s. 22, text pred Definici 3.1.3 - Zde se definuje *hladke* zobrazeni $G \to W$ z (konecne rozmerne?) Lieovy grupy do topologickeho vektoroveho prostoru W. Je prekvapive, ze na W nemusi byt ani metrika. Objevuje se to nekde v literature? Je tato definice

potreba v praci nekde jinde nez k dukazu ireducibility Schrodingerovy reprezentace? Nejde nejak podobne nahradit definici 2.1.4?

(12) s. 22, Definice 3.1.4 - Operatorova definice Schrodingerovy reprezentace neni poradne definovana (co je exponenciala operatoru?), navic se dale nepouziva.
(13) s. 23, 1. display - Preklep - chybi oznaceni skalarnich soucinu.
(14) s. 23, Tvrzeni 3.1.2 - Dukaz je napsan nejasne. Chybi casova slozka $e^{2\pi it}$ a prvni faktor na poslednim radku ve velkem displayi neni vubec interpretovan. Preklep - na konci dukazu ma byt $L^2(\mathbb{R}^n)$ a za dukazem ma cil zobrazeni V byt $L^2(\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}')$.
(15) s. 25, Veta 3.2.1 - Mela by byt uvedena hodnota $e^{2\pi it}$ (tj. bez minusu) nebo obecneji $e^{2\pi ita}$ pro libovolne $a \in \mathbb{R}$. Tak, jak je napsana, by se veta nedala aplikovat.
(16) s. 26, 1. display - Ma byt $e^{2\pi is}$, tj. bez minusu. Viz 2. display na s. 23.
(17) s. 26, Tvrzeni 3.2.2 - V dukazu jsem nepochopil, odkud se bere 2. rovnost v 1. displayi.
(18) s. 27, Lemma 3.3.1 - Aby daval nasledny vyklad smysl, je potreba do Lemmatu dodat jeste nejaka fakta o tridach isomorfismu nakryti.
(19) s. 27 - Stalo by za to zminit, jak je definovana grupova operace na nakryti. Bylo by treba upresnit, co znamena "zdvihnout" reprezentaci, aby dulezita poznamka o restrikci SSW reprezentace na dalsi strane davala smysl.
(20) s. 28, Definice 3.3.2 - Proc je vnoreni spojite? Uvazuje se na $L^2(\mathbb{L})$ standardni norma?
(21) s. 29, Priklad 8 - Melo by se zduraznit, ze ω je *globalne* definovana.
(22) s. 30, definice Liouvilleovy formy - Preklep? Ma byt $\theta^M : TT^*M \to \mathbb{R}$?
(23) s. 33, Definice 4.2.8 - Melo by se zduraznit, ze Λ je soucasti morfismu.
(24) s. 33, vyklad za Definici 4.2.9 - Melo by se rozlisovat mezi ruznymi σ.
(25) s. 34, Tvrzeni 4.2.1 - Preklep - v definici $\mathcal{C}^\infty(P, V)^G$ ma byt $\lambda(g^{-1})$, tj. chybi inverze.
(26) s. 36, Definice 4.3.7 - Hladke vektory Lieovy algebry v $\mathrm{End}(V)$ nebyly zavedeny. Pritomnost topologie na $\mathrm{End}(V)$ je navic v rozporu s Definici 3.1.7. Uvedena formule vyuziva pres tecna zobrazeni a pullbacky hladkost, ktera je nejasna. Zobecnuje formule konecne rozmerny pripad? Odkazy na literaturu?
(27) s. 37, 3. radek odspoda - Preklep - ma byt $TM = Q \times_\lambda \mathbb{R}^{2n}$.
(28) s. 38, Definice 4.4.4 - Je potreba upresnit, co je "zdvih" konexe.
(29) s. 38, za Definici 4.4.4 - Preklep - ma byt $\mathcal{A} = Q \times_{\mathfrak{m}} \mathbb{A}$.
(30) s. 38, Veta 4.4.1 - Dost dlouho mi trvalo pochopit, co znamena $X(\phi_s)$. Nejaky vyklad k tomu by se hodil. Misto baze by se radeji melo rikat reper. Reper urcite nemuze byt globalni (leda by byl tecny bandl trivialni), ma byt napsano "lokalni". Preklep - ve formuli ma byt e_{i+n} misto e_{i+l} .
(31) s. 38, Poznamka za Vetou 4.4.1 - K snadnejsimu pochopeni by pomohlo zminit, ze parcialni derivace se mini v promennych odpovidajicich souradnicim na M.
(32) s. 38, Veta 4.4.2 - Preklep - U prostredni ∇ nema byt horni index S.
(33) s. 39, definice reprezentace ρ - Melo by byt $\alpha \in \bigwedge^r$.
(34) s. 39, dole - Jak se definuje topologie na tenzoreovem soucinu? Odkaz by byl vitan.
(35) s. 40, Tvrzeni 5.0.2 - Z clanku [14] jsem nebyl schopen pochopit, jestli rozklada na ireducibilni moduly stejnou reprezentaci. Je ve [14] zminovana "minimalni globalizace" (...) tou reprezentaci $Mp(2n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{A}$, ktera se uvazuje v teto praci ($\mathbb{A}$ se v [14] nikde explicitne neobjevuje)? V Tvrzeni je potreba jeste uvest rozklad konkretnich mocniny $\bigwedge^i$, aby odtud plynulo tvrzeni o nasobnostech.

(36) s. 42, nahore - Preklep - ma byt $\mathcal{A} = Q \times_{\mathfrak{m}} \mathbb{A}$.
(37) s. 42, Definice 5.1.2 - Spodni indexy $\pm$ se bez komentare ztratily.
(38) s. 42, Definice 5.1.3 - Definice mi neni prilis jasna, protoze se nikde neuvadi, kde lezi α a kde s. Vyuziva se nejake identifikace (nekonecne rozmernych) bundlu? V dalsim ani d^{∇^S} neni potreba a vystaci se s ∇^S.
(39) s. 43, 3. radka - Maji tam byt obycejna E-cka.
(40) s. 43, display s rovnici $2\sum_{j,k=1}^{2n} \cdots$ - Nepochopil jsem, kde se tato rovnice vezme. Tvrzeni (5.2) ale stejne plati.
(41) s. 44, Tvrzeni 5.2.1 - Preklep - ma byt T_0.
(42) s. 48, Tvrzeni 5.2.6 - Zde $\rho(g)$ znaci akci na sekcich, coz by zaslouzilo zduraznit, jelikoz ρ ma i jiny vyznam. Znaceni je ovsem nekonzistentni a nekde v dukazu se pouziva i s vlnovkou. V dukazu na 3. radku ma byt $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{A})$. Ve vypoctu L na s. 48 by v 1. radku bylo presnejsi psat misto promenne x napr. $-$ a x dat az za hranatou/slozenou zavorku. Podobne 1. radek vypoctu P na s. 49 by mel presneji koncit $\cdots = \mathfrak{m}(g)[(T_0 f)(\lambda(g^{-1})-)](x)$.
(43) s. 51, horni display - Tecky jsou matouci, protoze jsou rezervovany pro spinorove nasobeni.
(44) s. 51, predposledni display - Preklep - v 2. radku chybi uprostred φ.
(45) s. 51, 52, Priklad 16 - Bylo by ho potreba zcela prepsat. Predne je vypocet spatne, jak je videt uz z toho, ze jsou nespravne uvedena znamenka hodnot $\lambda(K)^*\epsilon_1$ a $\lambda(K)^*\epsilon_2$ na s. 52, a presto se dukaz zdari! Dalsi chyby jsou totiz v parcialnim derivovani hned na zacatku (je potreba si dobre rozmyslet, podle ceho derivovat). Zapis je matouci (stridani promennych , "tecky", preklepy). A pouziva se jina normalizace Fourieorovy transformace, nez byla definovana.
(46) s. 53, pred Lemmatem 5.3.3 - Spojitost operatoru H a E by bylo potreba podrobneji oduvodnit. Je ale vubec pozdeji potreba?
(47) s. 54, Veta 5.3.4 - V dukazu jsem rovnici (5.10) nepochopil. Z invariance twistoroveho operatoru mi vychazi neco jineho (nebo nerozumim napr. $\varphi_{x'}$). Souctu (5.9) a (5.10) nerozumim. Bez (5.11) nevim, jak dukaz dokoncit. Plati tedy vubec Tvrzeni? Jedna se o puvodni vysledek nebo je jiz znam z literatury?
(48) s. 56, uprostred - spojitost T_0 na $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{A})$ by bylo treba podrobneji overit. Je ale uzavrenost jeho jadra nekde dal potreba?
(49) s. 57, rovnice (6.1) - Plati jen pro $n \geq 2$. Pripady $n = 0, 1$ by se mely zminit. Ovsem v dalsim je s nimi spravne nalozeno.
(50) s. 63, predposledni display - Preklep - u posledniho scitance chybi faktor n.

Martin Doubek
Praha, 6.9.2011