Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Marie Dostálová

Twistorový operátor v symplektické spinorové geometrii

Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematické struktury

Praha 2011

Děkuji svému vedoucímu RNDr. Svatopluku Krýslovi, Ph.D. za aktivní obětavou a vytrvalou pomoc během vypracovávání diplomové práce. Také děkuji dalším dvěma členům Matematického ústavu UK za rady a podmětné připomínky.

Dále chci touto cestou poděkovat svým rodičům za jejich podporu během studia a svým přátelům za zájem a povzbudivá slova během psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Twistorový operátor v symplektické spinorové geometrii

Autor: Marie Dostálová

Katedra: Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Matematický ústav UK, Praha

Abstrakt: Tématem práce je symplektická spinorová geometrie, jejíž výzkum započali D. Shale, B. Kostant a K. Habermannová v tomto výzkumu pokračovala. V práci se zabýváme především jedním z takzvaných symplektických twistorových operátorů, které zavedl S. Krýsl. Zkoumáme jeho působení na reálném prostoru, chápaném jako symplektická varieta. U tohoto operátoru se zabýváme jeho invariancí, regularitou a popisujeme část jeho jádra na $\mathbb{R}^2$, které tvoří reprezentaci metaplektické grupy, která je dvoulistým nakrytím symplektické grupy.

Klíčová slova: symplektická spinorová geometrie, symplektické twistorové operátory, teorie reprezentací, Segal-Shale-Weilova reprezentace

Title: Twistor operator in symplectic spin geometry

Author: Marie Dostálová

Department: Mathematical Institute of Charles University, Prague

Supervisor: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University, Prague

Abstract: The topic of the diploma thesis is symplectic spinor geometry. Its research was started by D. Shale, B. Kostant and K. Habermann. We focus our attention to one of the so called symplectic twistor operators introduced by S. Krýsl. We investigate the action of this operator on real even dimensional vector spaces considered as symplectic manifold, its invariance properties and regularity. We describe a part of the kernel of the symplectic twistor operator when acting on symplectic spinors on $\mathbb{R}^2$. The kernel forms a representation of the so called metaplectic group (double cover of the symplectic group).

Keywords: symplectic spinor geometry, symlectic twistor operators, representation theory, Segal-Shale-Weil representation

Obsah

Úvod

Ve fyzice existují dva základní přístupy k mechanice. Lagrangeův přístup klasicky vede k Riemannově geometrii, zatímco symplektickou geometrii používáme v Hamiltonově přístupu. Symplektická spinorová geometrie může být tedy chápana jako jistá analogie Riemannovy spinorové geometrie. V obou diferenciálních geometriích přináší výzkum diferenciálních operátorů podnětné výsledky. Zkoumáme-li například operátor vhodně spojený s geometrickou strukturou, lze z jeho analytických vlastností někdy získat cenné informace o vlastnostech podkladové variety. Právě takovéto zajímavé výsledky očekáváme při studiu diferenciálních operátorů v symplektickém případě.

Pro tuto práci jsme zvolili analýzu symplektického twistorového operátoru, který zavedl S. Krýsl a L. Kadlčáková. Zkoumali jsme jeho vlastnosti a zaměřili jsme se na jeho jádro. Jako motivaci, proč se jádrem zabývat, uveďme příklad Bochner-Laplaceova operátoru na kompaktních Riemannových varietách. Tento operátor působí na prostoru vnějších diferenciálních forem této variety a na funkcích na plochých Eukleidových vektorových prostorech splývá s Laplaceovým operátorem. Je známo, že pokud je příslušná varieta kompaktní, jádro tohoto Bochner-Laplaceova operátoru je nejen konečněrozměrné, ale dokonce i to, že dimenze jádra tohoto operátoru zúženého na k-formy je rovna k-tému Bettiho číslu variety nebo, jinak řečeno, dimenzi např. simpliciální homologie studované variety. Pro jádro symplektického twistorového operátoru nebo od něj odvozených operátorů lze očekávat podobné výsledky.

Naznačme stručně, jak se vlastně k twistovým operátorům dostaneme. V kvantové mechanice vyvstala potřeba nalézt pohybovou rovnici, která bude nejen popisovat kvantově mechanický stav částice, ale bude splňovat i formalismus Einsteinovy speciální relativity. Takto se objevila otázka, jak nalézt diferenciální operátor prvního řádu působící na funkcích definovaných na $\mathbb{R}^4$, které mají hodnoty v čtyřrozměrném komplexním vektorovém prostoru - prostoru spinorů, jehož druhá mocnina bude Laplaceův operátor. Odpovědí bylo zavedení Diracova operátoru P. A. M. Diracem.

Díky této motivaci se zajímavou otázkou pro symplektickou geometrii stalo hledání diferenciálního operátoru prvního řádu, který působí na „funkcích“ definovaných na symplektickém vektorovém prostoru, jehož druhá mocnina je „Laplaceův operátor“ přirozeně definovaný pomocí symplektických struktur. Tuto otázku vyřešila K. Habermannová [8], která zavedla takzvaný symplektický Diracův operátor. Poznamenejme, že v Riemannově geometrii je nutné brát více komponentové funkce - spinorová pole. Vzniká tedy další otázka, co jsou spinory pro symplektickou grupu. Ukazuje se, že za spinorovou reprezentaci v případě symplektické grupy je vhodné vzít tzv. Segal-Shale-Weilovu reprezentaci souvislého dvoulistého nakrytí symplektické grupy, tzv. metaplektické grupy.

Twistorový operátor v Riemannově geometrii nalézáme pomocí rozkladu vnějších diferenciálních forem s hodnotami ve spinorech. Tento rozklad je zajímavý díky tomu, že se v něm přirozeně objevuje Diracův operátor jako složení vnější kovariantní derivace a projekce na vhodný ireducibilní podbandl.

Podobně lze i v symplektickém případě uvažovat prostor vnějších diferenciálních forem s hodnotami ve spinorech a snažit se jej rozložit. Tento rozklad je známý díky práci S. Krýsla [14]. V komplexu podmodulů tohoto rozkladu jsou tedy přirozeně definovány symplektické twistorové operátory.

Na cestě za sympletickým twistorovým operátorem seznámíme čtenáře v první kapitole se symplektickým vektorovým prostorem a symplektickou grupou. Druhá kapitola představí analytickou stránku věci. Symplektický twistorový operátor působí na vnějších formách, které mají hodnoty v symplektických spinorech. Právě funkce z prostoru zavedeného v druhé kapitole budou hrát roli symplektických spinorů. Třetí kapitola představí metaplektickou grupu a její Segal-Shale-Weilovu reprezentaci na prostoru symplektických spinorů. Ve čtvrté kapitole zopakujeme základní geometrické struktury potřebné ke konstrukci symplektického spinorového bandlu.

Konečně v páté kapitole budou definovány symplektické twistorové operátory. Pro twistorový operátor T_0 najdeme jeho vyjádření. Ukážeme, že je invariantní vůči působení metaplektické grupy a je tedy opravdu vhodným operátorem na této struktuře. Dále ukážeme, že T_0 je regulární a najdeme rovnici popisující jeho jádro. V poslední kapitole popíšeme část jádra symplektického twistorového operátoru, které tvoří reprezentaci metaplektické grupy, to jest budeme hledat řešení jisté parciální diferenciální rovnice, která popisuje jádro T_0. Právě výsledky obsažené v páté a šesté kapitole jsou hlavním přínosem této práce a jsou z naprosté většiny nové.

1. Symplektická lineární algebra

První kapitola seznamuje s pojmy symplektické lineární algebry a se symplektickou grupou a jejími vlastnostmi. V práci budeme uvažovat pouze vektorové prostory nad tělesem reálných nebo komplexních čísel.

1.1 Symplektický vektorový prostor

V kapitole se seznámíme s pojmy symplektický vektorový prostor, izotropní, symplektický a lagrangeovský podprostor symplektického prostotu. Na konci zavedeme značení pro počítání v souřadnicích, které budeme využívat v různých částech této práce.

Definice 1.1.1. *Symplektický vektorový prostor* je dvojice (V, Ω), kde V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ a $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ je bilineární forma, která je antisymetrická a nedegenerovaná.

Antisymetrie formy Ω je vyjádřena rovností $\Omega(v, w) = -\Omega(w, v)$ pro všechna $v, w \in V$. Nedegenerovanost Ω lze vyjádřit dvěma způsoby. Je-li $\Omega(v, u) = 0$ pro všechna $v \in V$, pak je $u = 0$, je první způsob definice. Nebo se definuje zobrazení $\Omega_v : V \to V^*$ předpisem $\Omega_v(w) = \Omega(v, w)$. Pokud je Ω nedegenerovaná, je Ω_v izomorfismus vektorových prostorů.

Věta 1.1.1. Nechť Ω je antisymetrická bilineární forma (ne nutně nedegenerovaná) na vektorovém prostoru V, který má konečnou dimenzi, pak existuje báze $u_1, \ldots, u_k, e_1 \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ vektorového prostoru V, která splňuje:

$$\begin{aligned}
\Omega(u_i, v) &= 0 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, k \text{ a pro všechna } v \in V,\\
\Omega(e_i, e_j) &= 0 \text{ pro všechna } i, j = 1, \ldots, n,\\
\Omega(f_i, f_j) &= 0 \text{ pro všechna } i, j = 1, \ldots, n,\\
\Omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij} \text{ pro všechna } i, j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Poznámka. Poznamenejme, že v maticovém zápisu Věta 1.1.1 říká, že existuje báze, ve které má forma Ω tvar

$$\Omega(v, u) = \begin{pmatrix} -v- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}.$$

Symbol I označuje jednotkovou matici řádu n a 0 značí nulovou matici příslušné velikosti.

Důkaz. Použijeme upravený Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.

Položme $U := \{u \in V; \Omega(u, v) = 0 \text{ pro všechna } v \in V\}$. Vyberme bázi $u_1, \ldots, u_k$ podprostoru $U \subset V$ a označme W doplňkový podprostor U ve V, $V = U \oplus W$.

Vyberme nenulový prvek $e_1 \in W$. Díky nedegenerovanosti Ω na W existuje prvek $f \in W$ takový, že $\Omega(e_1, f) = \alpha \neq 0$. Položme $f_1 := \frac{1}{\alpha} f$. Protože Ω je bilineární zobrazení, dostáváme $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Označme W_1 lineární obal vektorů e_1, f_1 a položme $W_1^\Omega = \{w \in W; \Omega(w, v) = 0 \text{ pro všechna } v \in W_1\}$.

Ukážeme, že W lze rozložit na W_1 a W_1^Ω. Zaprvé ověříme, že $W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$. Prvek z průniku má tvar $u = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\Omega$. Platí

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega(u, e_1) = -b, \\ 0 &= \Omega(u, f_1) = a. \end{aligned}$$

Koeficienty a, b jsou tedy nulové, tj. $u = 0$. Dále ukážeme, že $W = W_1 + W_1^\Omega$. Vezměme libovolný prvek $v \in W$. Označme $c := \Omega(v, e_1)$ a $d := \Omega(v, f_1)$. Prvek v můžeme zapsat ve tvaru

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1),$$

kde $(-cf_1 + de_1) \in W_1$ a $(v + cf_1 - de_1) \in W_1^\Omega$, neboť $\Omega(v + cf_1 - de_1, e_1) = 0$ a $\Omega(v + cf_1 - de_1, f_1) = 0$.

Pokračujme v hledání báze, pokud je $W_1^\Omega \neq 0$. Vyberme nenulový prvek $e_2 \in W_1^\Omega$. Potom díky nedegenerovanosti Ω na W_1^Ω existuje $f \in W_1^\Omega$, že $\Omega(e_2, f) = \beta \neq 0$. Položíme-li $f_2 := \frac{1}{\beta} f$, dostáváme $\Omega(e_2, f_2) = 1$. Označme W_2 lineární obal vektorů e_2, f_2. Takto pokračujme dále indukcí. Neboť V má konečnou dimenzi, proces se v nějakém kroku zastaví, a tak dostáváme rozklad $V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$. □

Poznámka.

1. Pokud je Ω nedegenerovaná, je $U = \{0\}$, protože jen pro $u = 0$ platí $\Omega(u, v) = 0$ pro všechna $v \in V$.

2. Symplektický vektorový prostor (V, Ω) má sudou dimenzi, protože $\dim U = 0$ a $\dim W = 2n$, kde W viz v důkazu Věty 1.1.1.

3. V textu budeme dále místo označení báze $\{e_1 \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ používat označení $\{e_1 \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\}$.

Definice 1.1.2. Báze $\{e_1 \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\}$ symplektického vektorového prostoru (V, Ω) se nazývá *symplektická báze* (V, Ω), pokud platí $\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(e_{n+i}, e_{n+j})$ a $\Omega(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Vůči symplektické bázi má symplektická forma Ω maticové vyjádření

$$\Omega(v, u) = \begin{pmatrix} - v - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že symplektická báze je na rozdíl od ortogonální báze uspořádanou množinou. Dále poznamenejme, že dle Věty 1.1.1 symplektická báze existuje.

Příklad 1. Vektorový prostor $\mathbb{R}^{2n}$ s bází

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), & \ldots, \quad e_n &= (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{n}, 0, \ldots, 0), \\ e_{n+1} &= (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n+1}, 0, \ldots, 0), & \ldots, \quad e_{2n} &= (0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

spolu s formou Ω_0, která má vůči této bázi matici $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$, tvoří symplektický vektorový prostor. Tuto formu Ω_0 nazýváme *kanonickou symplektickou formou* na $\mathbb{R}^{2n}$ a symplektický vektorový prostor $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ nazýváme *kanonickým symplektickým vektorovým prostorem.*

Příklad 2. Pro libovolný konečněrozměrný vektorový prostor E lze na $V = E \oplus E^*$ definovat symplektickou strukturu předpisem

$$\Omega((u, \alpha), (v, \beta)) = \beta(u) - \alpha(v),$$

kde $u, v \in E$ a $\alpha, \beta \in E^*$. Buď nyní $e_1, \ldots, e_n$ báze E a $\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n$ duální báze prostoru E^*, zřejmě $(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, \epsilon_1), \ldots, (0, \epsilon_n)$ je symplektická báze prostoru (V, Ω).

Definice 1.1.3. Podprostor W symplektickeho vektorového prostoru (V, Ω) se nazývá *symplektický*, pokud $\Omega|_W$ je nedegenerovaná.

Podprostor Y symplektickeho vektorového prostoru (V, Ω) se nazývá *izotropní*, pokud $\Omega|_Y \equiv 0$.

Příklad 3. Příkladem symplektického podprostoru může být podprostor generovaný vektory e_1, e_{n+1} z Příkladu 1. Příkladem izotropního podprostoru je podprostor generovaný vektory e_1, e_2.

Tvrzení 1.1.2. Buď Y podprostor symplektického vektorového prostoru (V, Ω) konečné dimenze a $Y^\Omega = \{v \in V; \Omega(v, u) = 0 \text{ pro všechna } u \in Y\}$ jeho symplektický ortogonální doplněk. Potom platí

$$\dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V. \tag{1.1}$$

Důkaz. Definujme lineární zobrazení

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow Y^* := \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{R}) \\ v &\mapsto \Omega_v|_Y. \end{aligned}$$

Pro lineární zobrazení mezi konečnědimenzionálními vektorovými prostory $f : V_n \to V_m$ platí $\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim V_n$.

Jádro zobrazení φ je $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V; \Omega_v(u) = 0 \text{ pro všechna } u \in Y\} = Y^\Omega$.

Ukažme, že $\mathrm{Im}(\varphi) = Y^*$. Protože každé $\Omega_v|_Y : Y \to \mathbb{R}$ je lineární, je $\Omega_v \in Y^*$, a tedy $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq Y^*$. Ukažme, že $\mathrm{Im}(\varphi) \supseteq Y^*$. Zvolme libovolné $\alpha \in Y^*$. Prostor Y je podprostor lineárního vektorového prostoru konečné dimenze, a proto existuje báze $\{y_i\}_{i=1}^{\dim Y}$ prostoru Y. Označme $a_i := \alpha(y_i)$. Protože Ω je nedegenerovaná bilineární forma na V, existuje pro každé $i = 1, \ldots, \dim Y$ prvek $w_i \in V$, že $\Omega(w_i, y_i) \neq 0$ a $\Omega(w_i, y_j) = 0$ pro $j \neq i$. Vynásobme w_i vhodnou konstantou, abychom dostali $\Omega(K_i w_i, y_i) = a_i$. Položme $v := \sum_{j=1}^{\dim Y} K_i w_i$. Snadno se přesvědčíme, že $\Omega_v|_Y = \alpha$. Tedy je $\mathrm{Im}(\varphi) = Y^*$. Pro lineární vektorové prostory konečné dimenze platí $\dim Y = \dim Y^*$. $\square$

Tvrzení 1.1.3. Pro podprostor Y symplektického vektorového prostoru (V, Ω) konečné dimenze je ekvivalentní:

1. Y je symplektický podprostor,

2. $Y \cap Y^\Omega = \{0\}$,

3. $Y \oplus Y^\Omega = V$.

Důkaz. 1. $\Rightarrow$ 2. Nechť $v \in Y \cap Y^\Omega$. Tedy $v \in Y^\Omega$, tj. $\Omega(v,w) = 0$ pro všechna $w \in Y$ dle definice Y^Ω, odkud z nedegenerovanosti $\Omega|_Y$ (Y je symplektický) plyne, že $v = 0$, tedy $Y \cap Y^\Omega = \{0\}$.

2. $\Rightarrow$ 3. Rovnost $Y \oplus Y^\Omega = V$ plyne z toho, že $\dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$, $Y \cap Y^\Omega = \{0\}$ a $Y \subseteq V$, $Y^\Omega \subseteq V$.

3. $\Rightarrow$ 1. Pokud prostor $V = Y \oplus Y^\Omega$, pak je $\Omega|_Y$ nedegenerovaná, protože jediný prvek $u \in Y$, pro který platí $\Omega(y,u) = 0$ pro všechna $y \in Y$, je 0. □

Tvrzení 1.1.4. Pro podprostor Y symplektického vektorového prostoru (V,Ω) platí následující výroky:

1. Y je izotropní podprostor právě tehdy, když $Y \subseteq Y^\Omega$.

2. Y je izotropní podprostor, potom je $\dim Y \leq \frac{1}{2} \dim V$.

Důkaz. 1. Jestliže je podprostor Y izotropní, je $\Omega|_Y \equiv 0$. $Y^\Omega = \{v \in V; \Omega(v,u) = 0$ pro všechna $u \in Y\}$. Podle definice Y^Ω je $Y \subseteq Y^\Omega$ ekvivalentní tomu, že pro všechna $y \in Y$ platí $\Omega(y,u) = 0$ pro všechna $u \in Y$, což je $\Omega|_Y \equiv 0$.

2. Platí $Y \subseteq Y^\Omega$, tedy $\dim Y \leq \dim Y^\Omega$, a protože platí $\dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$, dostáváme $\dim Y \leq \frac{1}{2} \dim V$. □

Příklad 4. Podprostor symplektického vektorového prostoru nemusí být ani symplektický, ani izotropní. Příkladem může být podprostor Y symplektického vektorového prostoru $(\mathbb{R}^6, \Omega_0)$ generovaný vektory e_1, e_{3+1}, e_2. Jeho symplektický ortogonální doplněk Y^Ω je generovaný e_2, e_3, e_{3+3}.

Existují i podprostory, pro které platí $Y^\Omega \subseteq Y$, které se někdy označují jako *koizotropní* podprostory. Jsou jimi například všechny podprostory kodimenze 1.

Definice 1.1.4. *Lagrangeovský podprostor* Y symplektického vektorového prostoru je podprostor splňující $Y = Y^\Omega$. Je tedy izotropní i koizotropní.

Tvrzení 1.1.5. Lagrangeovský podprostor je právě takový izotropní podprostor, pro nějž platí $\dim Y = \frac{1}{2} \dim V$.

Důkaz. Nechť je Y lagrangeovský podprostor, tj. $Y = Y^\Omega$. Podle Věty 1.1.4 je izotropní. Protože $\dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$, máme $\dim Y = \frac{1}{2} \dim V$.
Nechť Y je izotropní a platí $\dim Y = \frac{1}{2} \dim V$. Pro izotropní podprostory platí $Y \subseteq Y^\Omega$. Pro podprostor symplektického vektorového prostoru podle Tvrzení 1.1.2 platí $\dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$, a proto platí $Y = Y^\Omega$. □

Příklad 5. Generátory lagrangeovského podprostoru symplektického vektorového prostoru $(\mathbb{R}^6, \Omega_0)$ mohou být například vektory e_1, e_2, e_3 nebo e_{3+1}, e_2, e_{3+3}.

Pro úplnost dokažme následující tvrzení, byť je nebudeme v dalším přímo potřebovat.

Tvrzení 1.1.6. Každá báze $e_1, \ldots, e_n$ lagrangeovského symplektického podprostoru Y symplektického vektorového prostoru (V,Ω) lze rozšířit v bázi $e_1, \ldots, e_n$, $e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ celého V.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle n.

Pro $n = 1$ je $\dim V = 2$. Forma Ω je nedegenerovaná na V. Pro prvek $e_1 \neq 0$ z báze lagrangeovského podprostoru Y platí $\Omega(e_1, v) = 0$ pro všechna $v \in Y$, a protože $e_1 \neq 0$, existuje prvek $f \in V \setminus Y$, pro který je $\Omega(e_1, f) = a \neq 0$. Definujeme $e_{1+1} = \frac{1}{a} f$. Lineární obal e_1, e_{1+1} je symplektický prostor V a jeho báze je e_1, e_2.

Pro $n > 1$ je $\dim V = 2n$. Forma Ω je nedegenerovaná na V. Protože prvek e_n z báze lagrangeovského podprostoru Y je nenulový, existuje prvek $f \in V \setminus Y$, pro který je $\Omega(e_n, f) = a \neq 0$. Definujeme $e_{n+n} = \frac{1}{a} f$. Lineární obal e_n, e_{n+n} označíme W_n. Forma Ω je na W_n nedegenerovaná, což znamená, že W_n je symplektický podprostor V, $\dim W_n = 2$ a platí pro něj $W_n \oplus W_n^\Omega = V$. Prostor W_n^Ω je symplektický a $W_n^\Omega \supset \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$. Lineární obal $\langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$ je lagrangeovský podprostor symplektického prostoru W_n^Ω. Proto můžeme použít indukční předpoklad, $\dim W_n^\Omega = 2(n-1)$ a $e_1, \ldots, e_{n-1}$ je báze jeho lagrangeovského podprostoru. Takto získaná množina $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ je symplektická báze V. □

Poznámka. V práci budeme často používat kanonický symplektický vektorový prostor $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$. Zvolme symplektickou bázi $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ prostoru $\mathbb{R}^{2n}$ a lagrangeovské podprostory $\mathbb{L}$ a $\mathbb{L}'$ takové, že $\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}' = \mathbb{R}^{2n}$ a $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ je báze $\mathbb{L}$ a $\{e_i\}_{i=n+1}^{2n}$ je báze $\mathbb{L}'$. Dimenze $\mathbb{L}$ i $\mathbb{L}'$ je n. Označme $\omega_{ij} := \Omega_0(e_i, e_j)$. Pro symplektickou bázi platí $\omega_{ij} = 1$, pokud $j = n + i$, a $\omega_{ij} = -1$, pokud $j = i - n$, jinak je $\omega_{ij} = 0$.

Označme $\{\epsilon^i\}_{i=1}^{2n}$ bázi $\mathbb{R}^{2n*}$ duální k $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$. Pro $i, j = 1, \ldots, 2n$ definujme ω^{ij} pomocí $\sum_{k=1}^{2n} \omega_{ik} \omega^{jk} = \delta_i^j$. Povšimněme si, že úžíme přes druhý index. Tuto konvenci využíváme, aby stejně jako pro ω_{ij} i pro ω^{ij} platilo $\omega^{ij} = 1$, pokud $j = n + i$, a $\omega^{ij} = -1$, pokud $j = i - n$, a jinak $\omega^{ij} = 0$.

V symplektickém případě podobně jako v Riemannově geometrii budeme někdy potřebovat zdvihat a snižovat indexy. Symplektická forma Ω_0 je antisymetrická, proto je potřeba dbát na pořadí. Mějme tenzor nad vektorovým prostorem $\mathbb{R}^{2n}$ zapsaný v souřadnicích $K_{a \ldots b \ldots c}{}^{d \ldots e \ldots f}$. Označme $K_{a \ldots \ldots c}{}^{i}{}^{d \ldots e \ldots f} := \omega^{ib} K_{a \ldots b \ldots c}{}^{d \ldots e \ldots f}$ a dále $K_{a \ldots b \ldots c}{}^{d \ldots \ldots f}{}_{i} := K_{a \ldots b \ldots c}{}^{d \ldots e \ldots f} \omega_{ei}$. Tyto konvence budeme hojně užívat v kapitole 5.

1.2 Symplektická grupa

Symplektická grupa $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ je Lieova grupa. Je možné setkat se ještě s jedním typem symplektické grupy, která se obvykle značí $\mathrm{Sp}(n)$ a skládá se z invertibilních lineárních zobrazení prostoru kvaternionů $\mathbb{H}^n$. Touto grupou, kterou lze reprezentovat pomocí komplexních matic řádu $2n$, se ale zabývat nebudeme. Naši pozornost zaměříme na grupu $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ a v této kapitole shrneme její vlastnosti, které budeme potřebovat v dalším. Na konci kapitoly se zmíníme o symplektické Lieově algebře, která je neodmyslitelně se symplektickou grupou spojená.

Definice 1.2.1. *Symplektická grupa* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ je grupa všech automorfismů $\mathbb{R}^{2n}$ zachovávajících kanonickou symplektickou formu Ω_0

$$\Omega_0 : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+i} - \sum_{i=1}^{n} x_{n+i} y_i,$$

pro $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$.

To jest $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ je grupa takových $A \in GL(2n,\mathbb{R})$, které splňují

$$\Omega_0(Av, Aw) = \Omega_0(v, w)$$

pro všechny $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$.

Poznámka. Označme nyní matici kanonické symplektické formy vůči nějaké symlektické bázi symbolem J_0 a připomeňme, že její tvar je

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

kde I označuje jednotkovou matici řádu n. Zřejmě platí $\Omega_0(v,w) = \langle v, J_0 w\rangle$, kde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ označuje kanonický eukleidovský skalární součin na $\mathbb{R}^{2n}$.

Prvky $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ jsou právě matice X, které splňují $X^T J_0 X = J_0$ nebo ekvivalentně $X J_0 X^T = J_0$. Zřejmě $J_0 \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ a platí pro ni $-J_0 = J_0^{-1} = J_0^T$. Matice J_0 je tedy i ortogonální.

Pro čtvercové matice A, B, C a D řádu n zapišme matici $X \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ ve tvaru $X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$. Vyjádřením rovností $X^T J_0 X = J_0$ a $X J_0 X^T = J_0$ dostáváme pro matice A, B, C a D následující rovnosti

$$A^T C = C^T A,\ B^T D = D^T B \text{ a } A^T D - C^T B = I, \tag{1.2}$$

$$AB^T = BA^T,\ CD^T = DC^T \text{ a } AD^T - BC^T = I. \tag{1.3}$$

Následující tvrzení popisuje polární rozklad pro symplektickou grupu.

Tvrzení 1.2.1. Každou matici $X \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ lze napsat jednoznačně ve tvaru $X = UP$, kde $P \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ je symetrická pozitivně definitní matice a $U \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$, kde $\mathrm{O}(2n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}); AA^T = A^T A = I\}$ je grupa ortogonálních reálných matic.

Důkaz. Každá matice $X \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ má jednoznačný polární rozklad $X = UP$, kde U je ortogonální matice a P je symetrická pozitivně definitní. Stačí tedy ukázat, že $U, P \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Pro každou symplektickou matici platí ${X^{-1}}^T = J_0 X J_0^{-1}$, a tedy i

$${U^{-1}}^T {P^{-1}}^T = {X^{-1}}^T = J_0 X J_0^{-1} = (J_0 U J_0^{-1})(J_0 P J_0^{-1}).$$

Protože J_0 je ortogonální, je $J_0 U J_0^{-1} \in \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$. Navíc je $J_0 P J_0^{-1}$ pozitivně definitní. Díky jednoznačnosti polárního rozkladu platí ${U^{-1}}^T = J_0 U J_0^{-1}$ a ${P^{-1}}^T = J_0 P J_0^{-1}$, což však znamená, že $U, P \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. □

Tvrzení 1.2.2. Maximální kompaktní podgrupa grupy $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ je $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$.

Důkaz. Nechť K je podgrupa $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ obsahující $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$. Zvolme $A \in K$. Matici A lze podle Tvrzení 1.2.1 (jednoznačně) zapsat ve tvaru $A = UP$, kde $U \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$ a $P \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ je symetrická pozitivně definitní matice. Matice $P = U^{-1}A \in K$, protože K je podgrupa obsahující $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$. Pro pozitivně definitní matici P platí $P^T J_0 P = J_0$, a proto je buď $P = I$, nebo existuje vlastní číslo P vetší než 1, protože jak je známo, součin vlastních čísel je roven determinantu. V druhém případě $P \in K \setminus (\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n,\mathbb{R}))$ a $P^j \in K$ pro všechny $j \in \mathbb{N}_0$, neboť K je podgrupa. Pak by ale K nemohla být kompaktní, protože by nebyla omezená, neboť eukleidovská norma takovéto pozitivně definitní matice P splňuje $\|P^j\| \to \infty$. Tedy $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$ je maximální kompaktní podgrupa $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. □

Poznámka. Eukleidovskou normou matice A řádu m míníme číslo

$$\|A\| := max\{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|; i = 1, \dots, m\}.$$

Identifikujeme-li $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{C}^n$ pomocí $(x, y) \mapsto x + iy$, potom platí

$$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}(n),$$

kde unitární grupa $\mathrm{U}(n)$ je $\mathrm{U}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}); \overline{A^T}A = I\}$ a $M_n(\mathbb{C})$ značí čtvercové komplexní matice řádu n. Tvrzení 1.2.2 tedy říká, že maximální kompaktní podgrupa $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ je unitární grupa $\mathrm{U}(n)$.

Tvrzení 1.2.3. Grupa $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ je obloukově souvislá a její fundamentální grupa je $\mathbb{Z}$.

Důkaz. Pro důkaz souvislosti a faktu o fundamentální grupě viz G. Folland [6, Propositon 4.8]. Jen stručně řekněme, že se druhá část tvrzení opírá o fakt, že Lieova grupa a její maximální kompaktní podgrupa mají stejnou fundamentální grupu. K důkazu obloukové souvislosti $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ se využije polární rozklad symplektických matic 1.2.1. □

V dalším najdeme generátory symplektické grupy. Definujme množiny:

$$\mathcal{D} := \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & (D^{-1})^T \end{pmatrix}; D \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \right\},$$

$$\mathcal{N} := \left\{ \begin{pmatrix} I & N \\ 0 & I \end{pmatrix}; N \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), N = N^T \right\},$$

$$\overline{\mathcal{N}} := \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ N & I \end{pmatrix}; N \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), N = N^T \right\},$$

které jsou podgrupami $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, jak lze ukázat přímým výpočtem.

Tvrzení 1.2.4. Platí

$$\overline{\mathcal{N}}\mathcal{D}\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}); \det A \neq 0 \right\}.$$

Důkaz. Nechť $\left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & (E^{-1})^T \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{D}$, $\left(\begin{smallmatrix} I & F \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{N}$ a $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ G & I \end{smallmatrix}\right) \in \overline{\mathcal{N}}$. Pak

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ G & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & (E^{-1})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & EF \\ GE & GEF + (E^{-1})^T \end{pmatrix}.$$

Položme $A = E$, $\det E \neq 0$, $F = A^{-1}B$, $G = CA^{-1}$ a $D = GEF + (E^{-1})^T$. Podle (1.2) a (1.3) jsou $F = A^{-1}B = B^T {A^{-1}}^T = F^T$ a $G = CA^{-1}$ symetrické a $D = {A^{-1}}^T C^T B + (A^{-1})^T = CA^{-1}B + (A^{-1})^T$, což se rovná $GEF + (E^{-1})^T$. □

Tvrzení 1.2.5. Grupa $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ je generovaná $\mathcal{D}\cup\mathcal{N}\cup\{J_0\}$ nebo také $\mathcal{D}\cup\overline{\mathcal{N}}\cup\{J_0\}$.

Důkaz. Pro důkaz viz G. Folland [6, Proposition 4.10]. Uveďme jen, že se důkaz opírá o Tvrzení 1.2.4 a Tvrzení 1.2.3. □

Definice 1.2.2. *Symplektická Lieova algebra* je

$$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}); A^T J_0 + J_0 A = 0\}.$$

Poznámka. Lze ukázat, že symplektická Lieova algebra je skutečně Lieova algebra symplektické Lieovy grupy $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$.

Poznámka. Prvky symplektické Lieovy algebry jsou právě endomorfismy A prostoru $\mathbb{R}^{2n}$ splňující pro všechny $v,w \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\Omega_0(Av,w) + \Omega_0(v,Aw) = 0.$$

2. Prostor A a jeho báze

Tato kapitola pojednává o analytické stránce symplektické spinorové geometrie.

2.1 Fréchetovy vektorové prostory

Než budeme definovat prostor **A**, seznamme se s topologickou strukturou Fréchetových vektorových prostorů, jejichž příkladem bude i prostor **A**, definovaný v druhé podkapitole.

Pokud hovoříme o *topologickém vektorovém prostoru*, míníme tím v této práci vektorový prostor vybavený topologií, vůči níž jsou operace sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem spojité, a navíc požadujeme, aby prostor byl Hausdorffův.

Pomocí systému seminorem na vektorovém prostoru lze definovat topologii na tomto vektorovém prostoru.

Definice 2.1.1. Buď X vektorový prostor a $\mathcal{P} := \{p_i; i \in I\}$ systém seminorem na vektorovém prostoru X. *Otevřená koule vůči systému seminorem* $\mathcal{P}$ *o poloměru* $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ *se středem v bodě* $x_0 \in X$ je množina bodů $x \in X$, které splňují $\varepsilon_i > p_i(x - x_0), \varepsilon_i > 0$, pro konečně mnoho indexů $i \in I$. *Topologií určenou systémem seminorem* $\mathcal{P}$ míníme takovou, jež je generovaná systémem všech otevřených koulí vůči systému seminorem $\mathcal{P}$. Tuto topologii budeme značit $\tau_{\mathcal{P}}$.

Tvrzení 2.1.1. Právě definovaný systém otevřených koulí vůči systému seminorem tvoří bázi topologie na X.

Důkaz. Podmnožiny X, které jsou sjednoceními a konečnými průniky výše definovaných koulí se středy ve všech bodech prostoru X, splňují axiomy topologie. Systém všech koulí tvoří bázi této topologie, protože sjednocení těchto koulí jistě pokrývá X. A také platí, že pro každé $x \in B_1 \cap B_2$, kde B_1, B_2 jsou dvě otevřené koule, existuje B otevřená koule, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$, jak plyne z definice systému seminorem. $\square$

Poznámka. Pokud definujeme topologii jen jednou seminormou p, která však není normou, jistě existuje $0 \neq x \in X$, že $p(x) = 0$. Každé okolí počátku pak tento bod obsahuje a topologie definovaná seminormou p zřejmě nesplňuje oddělovací axiom Hausdorffova prostoru. Na druhou stranu lze dokázat, že pokud je systém seminorem takový, že pro každé $0 \neq x \in X$ existuje seminorma p ze systému seminorem, že $p(x) \neq 0$, pak tento systém seminorem definuje topologii Hausdorffova prostoru.Viz Y. Choquet-Bruhat [5, str. 424].

Tvrzení 2.1.2. Buď $\mathcal{Q} = \{q_i; i \in I\}$ spočetný systém seminorem na vektorovém prostoru X takový, že pro každé $0 \neq x \in X$ existuje $i \in I$, že $q_i(x) \neq 0$. Pak topologie definovaná systémem seminorem $\mathcal{Q}$ je metrizovatelná. To znamená, že existuje metrika ρ na X, pro niž jsou otevřené právě takové množiny $Y \subset X$, jež jsou otevřené v topologii $\tau_{\mathcal{Q}}$.

Důkaz. Ukažme, že topologie $\tau_{\mathcal{Q}}$ definovaná systémem seminorem $\mathcal{Q}$ je totožná s topologií τ_ρ definovanou translačně invariantní metrikou

$$\rho(x,y) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{q_i(x-y)}{1+q_i(x-y)}.$$

Nejdříve ukažme, že ρ je dobře definovaná, to jest že suma konverguje. To plyne z faktu, že $0 \leq \frac{a}{1+a} < 1$ pro $a \geq 0$ a z toho, že $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ konverguje. Dále ověříme, že ρ je translačně invariantní metrika. Pro zobrazení ρ a pro všechna $x, y \in X$ zřejmě platí $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ a $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Trojúhelníková nerovnost pro $x, y, z \in X$ plyne z nerovnosti

$$\frac{q_i(x-z)}{1+q_i(x-z)} \leq \frac{q_i(x-y)+q_i(y-z)}{1+q_i(x-y)+q_i(y-z)} \leq \frac{q_i(x-y)}{1+q_i(x-y)} + \frac{q_i(y-z)}{1+q_i(y-z)},$$

kde první nerovnost platí díky tomu, že q_i je seminorma a druhá nerovnost platí pro všechna kladná reálná čísla. Zobrazení je translačně invariantní, neboť platí $\rho(x+h, y+h) = \rho(x,y)$ pro každé $h \in X$, jak plyne z rovnosti $q_i(x-y) = q_i\big(x-h-(y-h)\big)$, $i \in I$. Díky tomu, že ρ je translačně invariantní, stačí ukázat, že jsou topologie $\tau_{\mathcal{Q}}$ a τ_ρ totožné na okolích nuly. Jestliže $\rho(x,0) < \eta$, pak $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{q_i(x)}{1+q_i(x)} < \eta$ implikuje, že existují vhodná ε_i, že $q_i(x) < \varepsilon_i$ pro i z konečné indexové množiny I. Proto x leží v otevřené množině definované $q_i(x-0) < \varepsilon_i$ pro i z konečné indexové množiny I. Na druhou stranu zobrazení $x \mapsto \rho(0,x)$ je spojité v topologii $\tau_{\mathcal{Q}}$. Proto každé okolí nuly v topologii τ_ρ leží i v topologii $\tau_{\mathcal{Q}}$. $\square$

Definice 2.1.2. Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor, který má lokální bázi topologie tvořenou konvexními množinami. Potom prostor X nazýváme *lokálně konvexní.*

Následující tvrzení, které uvádí Y. Choquet-Bruhat [5, str. 424], dává do souvislosti topologii definovanou seminormami a lokální konvexnost. Obdobná vlastnost platí i pro topologie definované normou na vektorovém prostoru.

Tvrzení 2.1.3. Topologický vektorový prostor X, jehož topologii lze definovat spočetným systémem seminorem, je lokálně konvexní. Naopak platí, že pro topologii lokálně konvexního vektorového prostoru lze najít definující systém seminorem.

Definice 2.1.3. Topologický vektorový prostor X je *Fréchetův vektorový prostor*, jestliže je úplný a jeho topologii lze definovat spočetným systémem seminorem.

Poznámka. Fréchetův vektorový prostor lze definovat ekvivalentně jako topologický vektorový prostor, který je úplný, lokálně konvexní a jehož topologie lze definovat translačně invariantní metrikou.

Poznámka. Každý Banachův prostor je Fréchetův. Metrika určená $d(x,y) := \|x-y\|$, jež je translačně invariantní, indukuje lokálně konvexní topologii, vůči níž je prostor úplný.

Příklad 6. Prostor $\mathbb{R}^n$ s klasickou kartézskou metrikou je Fréchetův.

Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rychle klesajících funkcí je Fréchetův vektorový prostor.

Dalšími užívanými Fréchetovými vektorovými prostory jsou především různé prostory funkcí spolu s vhodným systémem seminorem, například $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ se systémem seminorem $\|f\|_{k,n} := \sup\{|D^{(k)}f(x)|; x \in [-n, n]\}$, pro všechny $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Definice 2.1.4. Nechť V a W jsou dva Fréchetovy vektorové prostory a $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ je systém seminorem definující strukturu Fréchetova vektorového prostoru W. Zobrazení $F : V \to W$ nazveme *hladké*, pokud $q_i \circ F : V \to \mathbb{C}$ je hladké pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

V následujícím uvedeme oproti běžné praxi mírně rozšířenou definici Schauderovy báze.

Definice 2.1.5. Buď X Fréchetův vektorový prostor. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je *Schauderovou bází* prostoru X, jestliže je možno každý prvek $x \in X$ zapsat jednoznačně ve tvaru

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, c_n \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Všimněme si, že definice mluví jen o případu, že Schauderovu bázi lze ve Fréchetově vektorovém prostoru zavést, což je však předpoklad, který není vždy splněn.

2.2 Prostor rychle klesajících analytických funkcí

V této podkapitole se seznámíme s prostorem $\mathbf{A}$ rychle klesajících analytických funkcí, pro který platí $\mathbf{A} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, kde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ označuje Schwartzův prostor rychle klesajících funkcí a $L^2(\mathbb{R}^n)$ prostor komplexně hodnotových funkcí na $\mathbb{R}^n$, které jsou lebesgueovsky integrovatelné v druhé mocnině. Prostor $\mathbf{A}$ využijeme v této práci pro konstrukci prostoru symplektických spinorových polí nad symplektickými varietami. Na konci kapitoly se seznámíme s Fourierovou transformací, která hraje důležitou roli v Segal-Shale-Weilově reprezentaci.

Definice 2.2.1. Označme $\mathbf{A}$ vektorový prostor všech analytických funkcí definovaných na $\mathbb{R}^n$ rychle klesajících v nekonečnu, tj.

$$\mathbf{A} := \{f \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^n); \lim_{\|x\|\to+\infty} x^\alpha D_\beta f(x) = 0 \text{ pro každé } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\},$$

kde $\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^n)$ značí analytické funkce na $\mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ a symbol D_β značí derivace příslušných proměnných a příslušných řádů, tj. $D_\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Poznamenejme, že $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ se nazývají multiindexy. Označme $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ pro každý $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ a $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

Poznámka. Prostor $\mathbf{A}$ je podprostor Schwartzova prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hladkých rychle klesajících funkcí, který je na druhou stranu hustý podprostor prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Zopakujme následující klasickou definici.

Definice 2.2.2. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $f_n, f : (P, \rho) \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost funkcí f_n *konverguje stejnoměrně k funkci* f (označení: $f_n \rightrightarrows f$), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $x \in P$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Tvrzení 2.2.1. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $f_n, f : (P, \rho) \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na P právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in P} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Důkaz. Požadovaná ekvivalence je jen jiné zapsání definice stejnoměrné konvergence. □

Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ a $N \in \mathbb{N}$ zaveďme následující systém funkcí na **A**

$$q_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D_\beta f(x)|,$$

$$\|f\|_N := \max_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n} \{q_{\alpha,\beta}(f); |\alpha|, |\beta| < N\}.$$

Tvrzení 2.2.2. Systém zobrazení $\|\cdot\|_N$ je systém seminorem na **A**.

Důkaz. Z definice **A** plyne, že $q_{\alpha,\beta}$ a $\|\cdot\|_N$ zobrazují do $\mathbb{R}$. Jak dále snadno nahlédneme, $q_{\alpha,\beta}$ jsou pozitivně homogenní, neboť pro $a \in \mathbb{C}$ a $f \in \mathbf{A}$ platí

$$q_{\alpha,\beta}(af) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D_\beta af(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha a D_\beta f(x)| = |a| q_{\alpha,\beta}(f).$$

Díky aditivitě derivace je $q_{\alpha,\beta}$ subaditivní, jak plyne z trojúhelníkové nerovnosti. □

Obecné poznatky z předchozí Kapitoly 2.1 využijme pro prostor **A**. Již jsme definovali spočetný systém seminorem $\|\cdot\|_N$, $N \in \mathbb{N}$, a z důkazu Věty 2.1.2 máme, že zobrazení ρ_A definované následujícím předpisem

$$\rho_A(f, g) := \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{\|f-g\|_N}{1 + \|f-g\|_N}$$

je translačně invariantní metrika na **A**.

Věta 2.2.3. Konvergence posloupnosti elementů z **A** implikuje stejnoměrnou konvergenci těchto elementů braných jako analytické funkce na $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Jako důsledek Moore-Osgoodovy věty o záměně limity stejnoměrně konvergentních funkcí v metrickém prostoru dostáváme, že analytické funkce stejnoměrně konvergují k analytické funkci. Stačí si uvědomit, že k tomuto tvrzení potřebujeme zaměnit limitu a sumu, na kterou můžeme pohlížet jako na limitu částečných součtů.

Konvergence v metrice ρ_A implikuje konvergenci v $q_{\alpha\beta}$ mimo jiné i pro $\alpha, \beta = 0$, která implikuje konvergenci příslušných suprém. Podle předchozího Tvrzení 2.2.1 je konvergence suprém ekvivalentní se stejnoměrnou konvergencí. □

Věta 2.2.4. Prostor **A** je Fréchetův vektorový prostor.

Důkaz. Jak jsme ukázali výše, topologii na prostoru **A** lze definovat jak pomocí systému seminorem, tak pomocí translačně invariantní metriky. Takto definovaná topologie je podle Tvrzení 2.1.3 lokálně konvexní. Prostor **A** je Hausdorffův podle Poznámky před Větou 2.1.2, protože pro každou $f \neq 0$ zřejmě existuje α, β, že $q_{\alpha,\beta}(f) \neq 0$, a tedy existuje N, pro něž je $\|f\|_N \neq 0$. Z Věty 2.2.3 plyne úplnost prostoru **A**, neboť konvergence $f_n \to f$ v prostoru **A** implikuje stejnoměrnou konvergenci, jak jsme dokázali výše. □

Definice 2.2.3. Pro komplexní integrovatelnou funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definujeme její *Fourierovu transformaci* $\mathcal{F}f$ předpisem

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)dx$$

a *opačnou Fourierovu transformaci* $\mathcal{F}_{-1}f$ předpisem

$$(\mathcal{F}_{-1}f)(x) := \check{f}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi\langle x,\xi\rangle} f(\xi)d\xi,$$

kde x, $\xi \in \mathbb{R}^n$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je kanonický skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka. Používají se i jiné konvence pro Fourierovy transformace, které lze jednotně charakterizovat pomocí tří parametrů $A, B, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := A^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\langle x,\xi\rangle} f(x)dx,\ (\mathcal{F}_{-1}f)(\xi) := B^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\langle x,\xi\rangle} f(x)dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Čísla A, B a k jsou navzájem vázána vztahem $AB = \frac{|k|}{2\pi}$. Viz například J. Kopáček [12, Definice 18.1a.].

Věta 2.2.5. Fourierova transformace $\mathcal{F}$ a opačná Fourierova transformace $\mathcal{F}_{-1}$ jsou vzájemně inverzní spojitá zobrazení $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Viz například J. Kopáček [12, Věta 18.7.]. □

Nyní dokážeme větu, kterou budeme potřebovat při definici analytické Segal-Shale-Weilovy reprezentace.

Věta 2.2.6. Fourierova transformace je bijekce na $\mathbf{A}$.

Důkaz. Prostor analytických funkcí rychle klesajících v nekonečnu je podprostor Schwartzova prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Fourierova transformace podle předchozí Věty 2.2.5 zachovává $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a proto stačí ukázat, že Fourierova transformace analytické funkce je analytická funkce. Zvolme funkci $f \in \mathbf{A}$. Tato je rovna své Taylorově řadě v nějakém okolí každého bodu $\mathbb{R}^n$. Zvolme tedy bod $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ a označme $K \subset \mathbb{R}^n$ okolí, ve kterém f je rovna své Taylorově řadě se středem v ξ_0, tj.

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\xi_0)\frac{(x-\xi_0)^\alpha}{\alpha!},$$

kde α je multiindex. Její Fourierova transformace má tvar

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{F}f(x)\big)(\xi) &= \left[\mathcal{F}\Big(\sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\xi_0)\frac{(x-\xi_0)^\alpha}{\alpha!}\Big)\right](\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\xi_0)\frac{(x-\xi_0)^\alpha}{\alpha!} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx.\end{aligned}$$

Taylorova řada konverguje absolutně pro všechna $x \in K$ a $|e^{-2\pi ix\xi}| \leq 1$, a proto i částečné součty $s_N^{\xi_0,\xi}(x) := \sum_{|\alpha|<N} \left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\xi_0)\frac{(x-\xi_0)^\alpha}{\alpha!}e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\right|$ konvergují a jejich

limita je z prostoru $\mathbf{A}$. Podle Věty 2.2.3 konvergence v prostoru $\mathbf{A}$ implikuje stejnoměrnou konvergenci funkcí z prostoru $\mathbf{A}$. Proto částečné součty $s_N^{\xi_0,\xi}(x)$ stejnoměrně konvergují, a tedy lze zaměnit sumu a integrál.

Víme tedy již, že platí $\mathcal{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Obdobně dokážeme, že platí $\mathcal{F}_{-1} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Stejně jako ve Schwartzově prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ platí $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_{-1} \circ \mathcal{F} = Id$. (Příslušné záměny integrálů lze provést ze stejných důvodů jako v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathbf{A}$.) □

2.2.1 Hermiteovy polynomy

Hermiteovy polynomy tvoří ortogonální bázi $L^2(\mathbb{R})$ uvažovaného s vahou e^{-x^2} a od nich odvozené Hermiteovy funkce tvoří ortogonální bázi přímo prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Úplnost systému Hermiteových funkcí v $L^2(\mathbb{R})$ nebudeme dokazovat. Pouze se seznámíme s jejich základními vlastnostmi. Pro více informací viz N. N. Lebedev [16].

Definice 2.2.4. Pro $n = \mathbb{N}_0$ definujme n-tý Hermiteův polynom předpisem

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Několik prvních Hermiteových polynomů je

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \end{aligned}$$

jak se lze snadno přesvědčit dosazením. Poznamenejme, že vzorec pro n-tý Hermiteův polynom lze psát ve tvaru

$$H_n(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k},$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí dolní celou část. Důkaz viz N. N. Lebedev [16]. Tento vzorec však nebudeme v dalším potřebovat.

Poznámka. Právě definované Hermiteovy polynomy se někdy označují jako „fyzikální“ Hermiteovy polynomy. V teorii pravděpodobnosti se můžeme setkat s (tzv. pravděpodobnostními) Hermiteovými polynomy $H_n^{prob} = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$, které s fyzikálními souvisejí následujícím vztahem $H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n^{prob}(\sqrt{2}x)$ a jsou normované tak, aby jejich vedoucí koeficient byl 1.

Definice 2.2.5. Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných nebo komplexních čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ má *generující funkci* $a(t)$, jestliže

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

konverguje alespoň pro nějaké $0 \neq t \in \mathbb{C}$.

Někdy se generující funkce nazývá *vytvořující funkce.*

Tvrzení 2.2.7. Posloupnost $\{\frac{1}{n!}H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $w(t,x) = e^{2xt-t^2}$. To jest

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \tag{2.1}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Funkce $w(x,t)$ je celá funkce (= holomorfní na $\mathbb{C}$) v proměnné t, tj. konverguje ke své Taylorově řadě na celém $\mathbb{C}$, a proto

$$w(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n w(x,t)}{\partial t^n}\right]_{t=0} t^n$$

pro $|t| < +\infty$. Dokazované plyne z rovností

$$\left[\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right]_{t=0} = e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} = (-1)^2 e^{x^2} \left[\frac{\partial^n e^{-u^2}}{\partial u^n}\right]_{u=x} = H_n(x).$$

□

Nyní se budeme snažit nalézt rekurentní vztah pro Hermiteovy polynomy. Generující funkce $w(x,t)$ jistě splňuje rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (2x - 2t)w = 0,$$

jak se lze přesvědčit přímým výpočtem. Do rovnice dosaďme rovnost (2.1) a využijme toho, že mocninnou řadu lze derivovat člen po členu na otevřeném kruhu konvergence. Dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0.$$

Mocninná řada je rovna nule pro všechna $|t| < \infty$, pokud je roven nule koeficient u každé mocniny t^n, a tak platí rovnost

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \tag{2.2}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tím jsme získali rekurentní vztah pro výpočet Hermiteových polynomů, položíme-li $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$.

Další vztah pro Hermiteovy polynomy získáme dosazením formule z Věty 2.1 do rovnice

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 2tw = 0,$$

kterou generující funkce $w(x,t)$ také jistě splňuje. Obdržíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0.$$

Derivovat podle proměnné x opravdu můžeme člen po členu díky tomu, že suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}$ konverguje stejnoměrně pro každé $|x| < a$, kde $0 < a$ je vhodné reálné číslo, derivace $\frac{H_n'(x)}{n!}$ jsou vlastní a suma derivací konverguje. Srovnáme-li k sobě členy u t^n, získáme vztah

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{2.3}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Další užitečný vztah pro Hermiteovy polynomy získáme dosazením (2.3) do (2.2)

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0. \tag{2.4}$$

Tvrzení 2.2.8. Hermiteovy polynomy jsou řešením takzvané Hermiteovy rovnice

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Důkaz. Derivováním vztahu (2.4) podle proměnné x a následnou úpravou podle vzorce (2.3) obdržíme

$$H_n''(x) - 2xH_n' + 2nH_n(x) = 0, \tag{2.5}$$

odkud je vidět, že Hermiteův polynom $H_n(x)$ řeší diferenciální rovnici pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Tvrzení 2.2.9. Hermiteovy polynomy jsou ortogonální s vahou e^{-x^2} na intervalu $(-\infty, \infty)$ vůči skalárnímu součinu na $L^2(\mathbb{R})$. To jest pro $m \neq n$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0.$$

Důkaz. Položme $u_n(x) := e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$. Funkce $u(x)$ řeší diferenciální rovnici

$$u_n'' + (2n + 1 - x^2)u_n = 0$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jak se můžeme přesvědčit jejich přímým dosazením a využitím vzorce (2.5). Tedy platí i rovnosti pro n, m

$$u_n''u_m + (2n + 1 - x^2)u_n u_m = 0$$
$$u_m''u_n + (2m + 1 - x^2)u_n u_m = 0.$$

Odečtením rovnic od sebe a využitím toho, že $\frac{d}{dx}(u_n'u_m - u_m'u_n) = u_n''u_m + u_m'u_n' - u_n'u_m' - u_m''u_n$, dostáváme

$$\frac{d}{dx}(u_n'u_m - u_m'u_n) + 2(n - m)u_n u_m = 0.$$

Integrujeme-li tuto rovnost, dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}(u_n'u_m - u_m'u_n) + 2(n - m)u_n u_m dx = 0$$

$$[u_n'u_m - u_m'u_n]_{-\infty}^{\infty} + 2(n - m) \int_{-\infty}^{\infty} u_n u_m dx = 0.$$

$\square$

Spočtěme hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx.$$

Vyjděme z rovnosti (2.2), kde zaměňme n za $n-1$. Tuto rovnost vynásobme $H_n(x)$. Dostaneme výraz

$$H_n^2(x) - 2xH_n(x)H_{n-1}(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) = 0,$$

od kterého odečtěme nulu v podobě výrazu (2.2) vynásobeného $H_{n-1}(x)$. Pro $n = 2, 3, \ldots$ dostaneme

$$H_n^2(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2nH_{n-1}^2(x) = 0.$$

Tuto rovnost vynásobme e^{-x^2} a zintegrujme. Dostáváme tak následující rekurentní rovnost pro $n = 2, 3, \ldots$, kde dva zbývající integrály jsou nulové díky ortogonalitě:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx.$$

Jejím opakovaným použitím získáme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^{n-1} n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2x^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

pro $n = 2, 3, \ldots$. Přímým výpočtem zjistíme, že formule platí i pro $n = 0, 1$. Celkově pro $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Předešlý výpočet dává „smysl“ následující definici.

Definice 2.2.6. Hermiteovy funkce pro $n \in \mathbb{N}_0$ jsou

$$\psi_n(x) := (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

Tvrzení 2.2.10. Hermiteovy funkce tvoří ortonormální systém v $L^2(\mathbb{R})$.

Důkaz. Tvrzení plyne z předešlého výpočtu, definice Hermiteových funkcí a z ortogonality Hermiteových polynomů v $L^2(\mathbb{R})$ vůči integrálnímu skalárnímu součinu. $\square$

Poznámka. Dále by bylo vhodné dokázat, že Hermiteovy funkce jsou dokonce úplným ortonormálním systémem. Odtud by snadno plynulo, že tvoří Schauderovu bázi **A**. V tomto přístupu nakonec pokračovat nebudeme. Dáváme však čtenáři možnost uvědomit si tento fakt.

3. Segal-Shale-Weilova reprezentace

V této kapitole se seznámíme s aparátem potřebným k zavedení Segal-Shale-Weilovy reprezentace. Budeme definovat Heisenbergovu grupu a její Schrödingerovu reprezentaci, od níž se dostaneme k Segal-Shale-Weilově reprezentaci metaplektické grupy na $L^2(\mathbb{L})$. Metaplektická grupa hraje v symplektické geometrii podobnou roli jako spin grupa v Riemannově případě.

Připomeňme, že podle Poznámky na konci Kapitoly 1.1 značíme $\mathbb{L}, \mathbb{L}'$ lagrangeovské podprostory kanonického symplektického vektorového prostoru $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ takové, že $\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}' = \mathbb{R}^{2n}$. Připomeňme, že prostory $\mathbb{L}$ a $\mathbb{L}'$ jsou izomorfní $\mathbb{R}^n$.

3.1 Heisenbergova grupa a její Schrödingerova reprezentace

Pojmem Heisenbergova grupa se většinou míní grupa horních trojúhelníkových 3×3 matic, které mají na diagonále jednotky. My však využijeme více abstraktní definici Heisenbergovy grupy. Poznamenejme, že v případě matic 3×3 se tato grupa může využít k popisu jednodimenzionálního kvantového systému.

Definice 3.1.1. Buď (V, ω) symplektický vektorový prostor. *Heisenbergova grupa* $\mathrm{H}(V)$ je grupa s nosnou množinou $V \times \mathbb{R}$ a s grupovou operací

$$(v,x)\cdot(w,y) = \Big(v+w, x+y+\frac{1}{2}\omega(v,w)\Big),$$

kde (v,x), $(w,y) \in V \times \mathbb{R}$. Označme $\mathrm{H}(n)$ Heisenbergovu grupu $\mathrm{H}(\mathbb{R}^{2n})$ pro kanonický symplektický vektorový prostor $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$.

Poznámka. Heisenbergovu grupu $\mathrm{H}(n)$ lze reprezentovat následujícím způsobem. V souladu s Poznámkou na konci Kapitoly 1.1 volíme jako báze lagrangeovských podprostorů $\mathbb{L}, \mathbb{L}'$ prvních n a druhých n prvků kanonické symplektické báze $\mathbb{R}^{2n}$. Buď $v \in \mathbb{L}$, $w \in \mathbb{L}'$ a $x \in \mathbb{R}$, pak prvek (v,w,x) grupy $\mathrm{H}(n)$ můžeme reprezentovat maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & v & x \\ 0 & I & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde I značí jednotkovou matici řádu n, v je řádkový a w je sloupcový n složkový vektor. Násobení na těchto prvcích je dáno $A \cdot B = \frac{1}{2}(AB + BA)$. Lehce se ověří, že takto definované násobení odpovídá násobení v $\mathrm{H}(n)$.

Lemma 3.1.1. Centrum Heisenbergovy grupy je $Z(\mathrm{H}) = \{(v,x); v = 0\} \cong \mathbb{R}$.

Důkaz. Centrum grupy tvoří prvky, které komutují s libovolným prvkem grupy. Pro prvek centra (v,x) a libovolný prvek $(w,y) \in \mathrm{H}(V)$ tedy platí

$$(v,x)\cdot(w,y) = \Big(v+w, x+y+\frac{1}{2}\omega(v,w)\Big) = \Big(w+v, y+x+\frac{1}{2}\omega(w,v)\Big) = (w,y)\cdot(v,x).$$

Sčítání ve V a $\mathbb{R}$ je komutativní. Hledáme tedy jen prvky (v,x), pro které platí $\omega(w,v) = \omega(v,w)$ pro každé $w \in V$. Toto však z nedegenerovanosti ω platí jen pro $v = 0$. $\square$

Poznámka. Heisenbergova grupa je prostřední člen krátké exaktní posloupnosti

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{H}(V) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} V \longrightarrow 0,$$

jak plyne z definice krátké exaktní posloupnosti a Heisenbergovy grupy. Platí totiž $\varphi \circ \iota = 0$ a $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq \operatorname{Im} \iota$. Zobrazení $\psi : v \mapsto (v, 0)$ je zřejmě grupový homomorfismus, protože platí $\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v)$ pro všechna $u, v \in V$. Poznamenejme navíc, že posloupnost je štěpitelná, neboť pro všechna $w \in V$ platí $(\varphi \circ \psi)(w) = w$, a tedy $\varphi \circ \psi = Id|_V$.

Definice 3.1.2. Nechť G je Lieova grupa, nechť W je topologický vektorový prostor a nechť $\mathrm{Aut}(W)$ značí všechna spojitá lineární zobrazení z W na W, která mají spojitou inverzi. Homomorfismus grup $\mathfrak{r} : G \to \mathrm{Aut}(W)$ nazveme *reprezentací* grupy G, pokud $\tilde{\mathfrak{r}} : G \times W \to W$ definované vztahem $\tilde{\mathfrak{r}}(g, v) := \mathfrak{r}(g)v$ je spojité. Prostor W se nazývá *G-modul* nebo též *reprezentační prostor*.

Reprezentace se nazývá *unitární*, pokud je W Hilbetův prostor a $\mathrm{Im}(\mathfrak{r}) \subseteq \mathrm{U}(W)$, kde $\mathrm{U}(W)$ značíme grupu unitárních operátorů na W, tj. takových operátorů A, které splňují $\overline{A^T} A = I$, kde I značí identický operátor.

Poznamenejme, že $G \times W$ uvažujeme s klasickou součinovou topologií. Složení dvou zobrazení, která mají spojitou inverzi, je opět spojité zobrazení se spojitou inverzí, a proto je $\mathrm{Aut}(W)$ grupa. Jednotka je zřejmě identické zobrazení.

Připomeňme, že zobrazení $\psi : M \to N$ mezi dvěma varietami dimenzí m, n s atlasy $\{U_\alpha^M, \varphi_\alpha^M\}_\alpha, \{U_\beta^N, \varphi_\beta^N\}_\beta$ se nazývá hladké, pokud je hladké ($\mathcal{C}^\infty$) zobrazení $\varphi_\beta^N \circ \psi \circ (\varphi_\alpha^M)^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pro všechna α, β z indexových množin I, J map atlasů M a N.

Zobrazení $\psi : G \to W$, kde G je Lieova grupa a W je komplexní topologický vektorový prostor, je hladké, pokud pro každé $v^* \in W^*$ je zobrazení $g \mapsto v^*\big(\psi(g)\big) \in \mathbb{C}$ hladké jako zobrazení z variety do komplexních čísel. (Symbolem W^* značíme klasicky prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na W.)

Definice 3.1.3. Buď $\mathfrak{r}$ je reprezentace grupy G na topologickém vektorovém W.

1) Podprostor $W' \subset W$ se nazývá *G-invariantní*, pokud $\mathfrak{r}(a)W' \subset W'$ pro všechna $a \in G$.

2) Reprezentace $\mathfrak{r}$ se nazývá *ireducibilní*, pokud jediné G-invariantní uzavřené podprostory W jsou $\{0\}$ a celé W.

Na prostoru $L^2(\mathbb{L})$ označme operátor identity symbolem I. Dále buď operátor $X = \sum_{j=1}^n X^j$ dán násobením $X^j f := x^j f$ a operátor $D = \sum_{j=1}^n D_j$ buď tvaru $D_j f := \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$ pro $f \in L^2(\mathbb{L})$. Operátor D je zřejmě neomezený na $L^2(\mathbb{L})$.

Definice 3.1.4. *Schrödingerova reprezentace* $\mathrm{H}(\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}')$ na Hilbertově prostoru $L^2(\mathbb{L})$ je homomorfismus $\mathfrak{r}_S : \mathrm{H}(\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}') \to \mathrm{Aut}\big(L^2(\mathbb{L})\big)$ definovaný předpisem

$$\mathfrak{r}_S(p, q, t) = e^{2\pi i(tI + pD + qX)},$$

kde $(p, q, t) \in \mathrm{H}(\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}')$.

Platí $e^{tI}f(x) = e^t f(x)$ a $e^{2\pi i(pD+qX)}f(x) = e^{2\pi iqx+\pi ipq}f(x+p)$, jak je ukázáno v G. Folland [6, str. 22, 23]. Schrödingerova reprezentace je tedy dána předpisem

$$\big(\mathfrak{r}_S(p,q,t)f\big)(x) = e^{2\pi i(t+qx+\frac{1}{2}pq)}f(x+p),$$

kde $(p,q,t) \in \mathrm{H}(\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}')$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Z tohoto vyjádření plyne i její spojitost ve smyslu Definice 3.1.2.

Povšimněme si, jak reprezentace působí na prvcích centra Heisenbergovy grupy. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $f \in L^2(\mathbb{L})$ je

$$\mathfrak{r}_S(0,0,t)f = e^{2\pi it}f,$$

to jest působení prvků centra je násobení skalárem.

Tvrzení 3.1.2. Schrödingerova reprezentace je unitární.

Důkaz. Pro $(r,s),(p,q) \in \mathrm{H}(V)$ platí

$$\begin{aligned}
e^{2\pi i(rD+sX)}e^{2\pi i(pD+qX)}f(x) &= e^{2\pi isx+\pi irs}e^{2\pi iq(x+r)+\pi ipq}f(x+p+r)\\
&= e^{2\pi ix(s+q)+\pi i(rs+pq)+2\pi irq}f(x+p+r)\\
&= e^{2\pi ix(s+q)+\pi i(r+p)(s+q)+\pi i(rq-sp)}f(x+p+r)\\
&= e^{\pi i(rq-sp)}e^{2\pi i((r+p)D+(s+q)X)}f(x).
\end{aligned}$$

Operátor A je unitární, pokud splňuje $A\overline{A^T} = \overline{A^T}A = I$. Unitárně sdružený operátor k $\mathfrak{r}_S$ je zřejmě

$$\overline{(e^{2\pi i(tI+pD+qX)})^T} = e^{2\pi i(-tI-pD-qX)},$$

odtud vidíme s využitím předchozí rovnosti, že Schrödingerova reprezentace zobrazuje do prostoru unitárních operátorů $\mathfrak{r}_S : \mathrm{H}(V) \to \mathrm{U}\big(L^2(\mathbb{R})\big)$. Jedná se tedy o unitární reprezentaci. □

V dalším ukážeme, že Schrödingerova reprezentace je ireducibilní. Využijeme k tomu několik poznatků z teorie reprezentací v nekonečné dimenzi, které uvedeme níže.

Nejdříve však zaveďme zobrazení $V : L^2(\mathbb{L}) \times L^2(\mathbb{L}) \to L^2(\mathbb{L})$ někdy nazývanou *Fourier-Wignerovou transformací*, která je dána vzorcem

$$[V(f,g)](p,q) := \langle \mathfrak{r}_S(p,q,0)f, g\rangle,$$

kde $f,g \in L^2(\mathbb{L})$, $(p,q) \in \mathbb{R}^{2n}$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je Hilbertův skalární součin na $L^2(\mathbb{L})$, tj. $\langle f,g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx$.

Tvrzení 3.1.3. Pro f_1, f_2, g_1 a $g_2 \in L^2(\mathbb{L})$ platí

$$\langle V(f_1,g_1), V(f_2,g_2)\rangle = \langle f_1, f_2\rangle\overline{\langle g_1, g_2\rangle}. \tag{3.1}$$

Důkaz. Pro důkaz viz G. Folland [6, Proposition 1.42]. □

Definice 3.1.5. Dvě reprezentace $\mathfrak{r}_1 : G \to \mathrm{Aut}(W_1)$ a $\mathfrak{r}_2 : G \to \mathrm{Aut}(W_2)$ nazveme *ekvivalentní*, pokud existuje spojitý lineární izomorfismus $T : W_1 \to W_2$ se spojitou inverzí splňující

$$T \circ \mathfrak{r}_1(a) = \mathfrak{r}_2(a) \circ T$$

pro všechna $a \in G$. Zobrazení T nazýváme *splétající* (někdy *ekvivariantní*) *operátor*. Pokud jsou W_1 a W_2 Hilbertovy prostory a $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ unitární reprezentace, pak reprezentace $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ nazveme *unitárně ekvivalentní*, pokud existuje splétající zobrazení, jež je unitárním izomorfismem.

Následující věta, kterou využijeme při konstrukci Segal-Shale-Weilovy reprezentace, je varianta Schurova lemmatu pro nekonečnou dimenzi.

Věta 3.1.4. (Schur) Nechť $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ jsou dvě unitární ireducibilní reprezentace Lieovy grupy G na komplexních Hilbertových prostorech W_1 a W_2. Pokud $\mathfrak{r}_1$ není ekvivalentní s $\mathfrak{r}_2$, je $\mathrm{Hom}_G(W_1, W_2) = 0$. Pokud jsou $\mathfrak{r}_1$ a $\mathfrak{r}_2$ ekvivalentní, je $\mathrm{Hom}_G(W_1, W_2) \simeq \mathbb{C}$. Navíc lze každý prvek z $\mathrm{Hom}_G(W_1, W_2)$ normovat násobením skalárem, aby byl izometrií.

Důkaz. Viz A. W. Knapp [10]. □

Definice 3.1.6. Nechť G je Lieova grupa a $\mathfrak{r}$ je reprezentace grupy G na Fréchetově vektorovém prostoru W. *Hladký vektor* $w \in W$ pro reprezentaci $\mathfrak{r}$ je takový vektor, pro nějž $g \mapsto \mathfrak{r}(g)w \in W$ je hladké zobrazení z G do W. Vektorový prostor hladkých vektorů označme W^0.

Poznámka. Množina hladkých vektorů tvoří vektorový prostor díky linearitě derivace.

Uveďme bez důkazu tři tvrzení o hladkých vektorech reprezentace, jejichž důkaz viz v A. W. Knapp [10].

Tvrzení 3.1.5. (Gårding) Nechť $W^0 \subseteq W$ je vektorový podprostor hladkých vektorů reprezentačního prostoru unitární reprezentace $\mathfrak{r}$, pak W^0 je hustý podprostor ve W.

Definice 3.1.7. Nechť $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ jsou dvě Lieovy algebry. Lineární zobrazení $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ nazveme *homomorfismus Lieových algeber*, pokud platí

$$\varphi\big([X,Y]\big) = [\varphi(X), \varphi(Y)],$$

kde $X, Y \in \mathfrak{g}$. Homomorfismus Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$ se nazývá *reprezentace Lieovy algebry* $\mathfrak{g}$. Zde $\mathrm{End}(V)$ značí prostor všech endomorfismů vektorového prostoru V, který je uvažován bez topologie.

V definici reprezentace Lieovy algebry nehraje topologie žádnou roli.

Tvrzení 3.1.6. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra Lieovy grupy G. Nechť W^0 je prostor hladkých vektorů reprezentace $\mathfrak{r}$ grupy G. Zobrazení $d\mathfrak{r} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(W^0)$ dané předpisem

$$d\mathfrak{r}(X)w := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[\mathfrak{r}(e^{tX})w],$$

kde $X \in \mathfrak{g}$ a $w \in W^0$, je reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.

Poznámka. Reprezentaci Lieovy algebry lze obecně zadat jen na hladkých vektorech reprezentace. Obecně platí $W_0 \subsetneq W$, jak lze ukázat na příkladech.

Tvrzení 3.1.7. Vektorový podprostor $W^0 \subseteq W$ hladkých vektorů reprezentace $\mathfrak{r}$ je uzavřený na působení reprezentace $\mathfrak{r}$.

Předchozí tvrzení říká, že W^0 je uzavřen nejen na působení Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, ale i na působení grupy G.

Nyní se už můžeme vrátit ke Schrödingerově reprezentaci.

Tvrzení 3.1.8. Schrödingerova reprezentace $\mathfrak{r}_S$ je ireducibilní.

Důkaz. Nechť $0 \neq \mathcal{M} \subseteq L^2(\mathbb{L})$ je uzavřený invariantní podprostor pro $\mathfrak{r}_S$ na $L^2(\mathbb{L})$. Buď $0 \neq f \in \mathcal{M}^0$, kde $\mathcal{M}^0 \subseteq \mathcal{M}$ je podprostor hladkých vektorů. Buď $g \perp \mathcal{M}$. Díky volbě f je $g \perp f$. Protože $\mathcal{M}^0$ je uzavřený nejen na působení $d\mathfrak{r}_S$ (viz Tvrzení 3.1.6), ale i na $\mathfrak{r}_S$ (dle Tvrzení 3.1.7), je $g \perp e^{2\pi i(pD+qX)}f$ pro všechna $(p,q) \in \mathbb{R}^{2n}$. (Skalární násobek $e^{2\pi it}$ v předpisu reprezentace na kolmosti nic neovlivní.) To znamená, že $V(f,g) = 0$. Podle rovnosti (3.1) máme $0 = \|V(f,g)\|^2 = \|f\|^2\|g\|^2$. Protože předpokládáme $f \neq 0$, dostáváme, že $g = 0$, a proto je $\mathcal{M} = L^2(\mathbb{L})$ z uzavřenosti $\mathcal{M}$. $\square$

3.2 Stone-von Neumannova věta

Stone-von Neumannova věta dává důležitý nástroj ke konstrukci Segal-Shale-Weilovy reprezentace, jak uvidíme v této podkapitole.

Věta 3.2.1. (Stone-von Neumann) Nechť $\mathfrak{r}$ je nějaká ireducibilní unitární reprezentace Heisenbergovy grupy $\mathrm{H}(n)$ na separabilním Hilbertově prostoru W taková, že

$$\mathfrak{r}(0,t)w = e^{-2\pi it}w$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $w \in W$. Potom je $\mathfrak{r}$ unitárně ekvivalentní Schrödingerově reprezentaci $\mathfrak{r}_S$.

Důkaz. Viz G. Folland [6, Theorem 1.50]. $\square$

Definujme reprezentaci Heisenbergovy grupy $\mathfrak{r}_S^g : \mathrm{H}(n) \to \mathrm{Aut}\big(L^2(\mathbb{L})\big)$ předpisem

$$\mathfrak{r}_S^g := \mathfrak{r}_S \circ a^g,$$

kde $\mathfrak{r}_S$ je Schrödingerova reprezentace a zobrazení $a^g : \mathrm{H}(n) \to \mathrm{H}(n)$ je definováno vzorcem $a^g(v,t) := \big(g(v),t\big)$ pro každé $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, kde $v = p + q$ pro $p \in \mathbb{L}$ a $q \in \mathbb{L}'$. (Viz Poznámku na konci Kapitoly 1.1.) Zobrazení a^g je grupový homomorfismus, protože platí

$$\begin{aligned}a^g\big[(v,t)\cdot(w,s)\big] &= a^g\Big(v+w, t+s+\frac{1}{2}\omega(v,w)\Big) = \Big(g(v+w), t+s+\frac{1}{2}\omega(v,w)\Big)\\ &= \Big(gv+gw, t+s+\frac{1}{2}\omega(gv,gw)\Big) = (gv,t)\cdot(gw,s) = a^g(v,t)\cdot a^g(w,s).\end{aligned}$$

pro všechna (v,t),$(w,s) \in \mathrm{H}(n)$.

Výše definované $\mathfrak{r}_S^g$ je reprezentace, protože jde o složení dvou homomorfismů. Zřejmě pro ni platí

$$\mathfrak{r}_S^g(0,s)f = \mathfrak{r}_S(0,s)f = e^{-2\pi i s}f$$

pro všechna $s \in \mathbb{R}$ a $f \in L^2(\mathbb{L})$. Díky tomu, že a^g je automorfismus grupy $\mathrm{H}(n)$ a že Schrödingerova reprezentace je unitární a ireducibilní, je i reprezentace $\mathfrak{r}_S^g$ unitární a ireducibilní. Spojitost ve smyslu Definice 3.1.2 je zřejmá.

Podle Stone-von Neumannovy věty (Věta 3.2.1) platí, že všechny ireducibilní unitární reprezentace Heisenbergovy grupy s až na skalární násobek stejnou akcí centrálního prvku $\mathrm{H}(n)$ jsou unitárně ekvivalentní. To znamená, že existuje splétající operátor $U(g)$ takový, že

$$U(g) \circ \mathfrak{r}_S(v,s) = \mathfrak{r}_S^g(v,s) \circ U(g) \tag{3.2}$$

pro všechna $(v,s) \in \mathrm{H}(n)$ a $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$.

Tvrzení 3.2.2. Zobrazení $g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \mapsto U(g)$ indukuje projektivní unitární reprezentaci U grupy $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ na $L^2(\mathbb{L})$, to jest platí

$$U(ab) = c(a,b)U(a)U(b)$$

pro libovolná $a,b \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ a vhodné $c : \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \times \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \to S^1$.

Důkaz. Nechť jsou $a,b \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ a $(v,s) \in \mathrm{H}(n)$, pak platí

$$U(a)\Big(U(b)\mathfrak{r}_S(v,s)U(b)^{-1}\Big)U(a)^{-1} = U(a)\mathfrak{r}_S^b(v,s)U(a)^{-1} = \mathfrak{r}_S^{ab}(v,s),$$

$$U(ab)\mathfrak{r}_S(v,s)U(ab)^{-1} = \mathfrak{r}_S^{ab}(v,s),$$

kde jsme použili (3.2). Operátory $U(a)U(b)$ a $U(ab)$ tedy splétají tytéž reprezentace. Podle Schurova lemmatu (Lemma 3.1.4) lze oba tyto operátory normovat na izometrii, z čehož vyplývá, že se $U(a)U(b)$ a $U(ab)$ liší o násobek komplexní jednotkou, označenou $c(a,b)$. $\square$

Grupa $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ je generovaná maticí J_0 spolu s maticemi typu $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & (D^{-1})^T \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} I & N \\ 0 & I \end{pmatrix}$, kde $D \in GL(n,\mathbb{R})$ a N je symetrická čtvercová matice řádu n, jak víme z Tvrzení 1.2.5. Proto stačí určit reprezentaci U na těchto generátorech. Podle K. Habermannové [8, Lemma 1.3.2-4] platí, že zobrazení:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{F} : L^2(\mathbb{L}) \to L^2(\mathbb{L}) \tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & (D^{-1})^T \end{pmatrix} \mapsto \big(f(x) \mapsto (\det D)^{\frac{1}{2}} f(D^T x)\big) \tag{3.4}$$

$$\begin{pmatrix} I & N \\ 0 & I \end{pmatrix} \mapsto \big(f(x) \mapsto e^{-i\frac{1}{2}\langle Nx,x\rangle} f(x)\big) \tag{3.5}$$

definuje jednu z možných projektivních reprezentací grupy $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Zde $\mathcal{F}$ označuje Fourierovu transformaci a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ značí klasický skalární součin.

3.3 Metaplektická grupa a její reprezentace

Metaplektická grupa je Lieova grupa, která není maticová, neboť nemá věrnou konečnědimenzionální reprezentaci. Jedná se o dvoulisté nakrytí $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Definice 3.3.1. Nechť X je topologický prostor. *Nakrytí* prostoru X je prostor C společně se spojitým surjektivním zobrazením $p : C \to X$, pro které platí, že pro každý $x \in X$ existuje otevřené okolí U bodu x tak, že $p^{-1}(U)$ je disjunktní sjednocení otevřených množin v C, z nichž každá je homeomorfní U.

Nechť X je souvislý prostor. Nakrytí $p : C \to X$ prostoru X se nazývá *n-listé nakrytí* prostoru X, pokud pro každé $x \in U$ je $p^{-1}(U)$ disjunktní sjednocení $n \in \mathbb{N}$ otevřených množin homeomorfních U.

Lemma 3.3.1. Nechť X, C jsou obloukově souvislé prostory a nechť $p : C \to X$ je nakrytí X. Pak platí, že indukované zobrazení $\pi_1 p : \pi_1(C) \to \pi_1(X)$ mezi fundamentálními grupami $\pi_1(C)$ a $\pi_1(X)$ prostorů C a X je injektivní. Navíc počet listů nakrytí $p : C \to X$ odpovídá indexu grupy $\pi_1 p\big(\pi_1(C)\big)$ v grupě $\pi_1(X)$.

Důkaz. Viz A. Hatcher [9] □

Jak víme podle Tvrzení 1.2.3, grupa $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ je obloukově souvislá a má fundamentální grupu $\pi_1\big(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})\big) = \mathbb{Z}$. Protože grupa $\mathbb{Z}$ má jen jednu podgrupu indexu 2, existuje podle Lemmatu 3.3.1 až na izomorfismus jediné souvislé dvoulisté nakrytí grupy $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Označme toto dvoulisté nakrytí

$$\lambda : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}).$$

Grupa $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$ se nazývá *metaplektická grupa.*

A. Weil [17] dokázal, že projektivní unitární reprezentaci U grupy $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, která je popsána na konci Kapitoly 3.2, lze „zdvihnout“ na „skutečnou“ unitární reprezentaci metaplektické grupy.

Tvrzení 3.3.2. Existuje jediná unitární reprezentace

$$\mathfrak{M} : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{L})),$$

která splňuje

$$\mathfrak{M}(q) \circ \mathfrak{r}_S(v, s) = \mathfrak{r}_S\big(\lambda(q)v, s\big) \circ \mathfrak{M}(q)$$

pro všechna $q \in \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$ a $(v, s) \in \mathrm{H}(n)$.

Důkaz. Viz A. Weil [17] a K. Habermannová [8, Proposition 1.3.5]. □

Unitární reprezentace $\mathfrak{M}$ se nazývá *Segal-Shale-Weilova reprezentace.*

Tvrzení 3.3.3. Segal-Shale-Weilova reprezentace $\mathfrak{M}$ metaplektické grupy je věrná, tj. $\mathfrak{M} : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{L}))$ je injektivní. Reprezentace $\mathfrak{M}$ se rozkládá na dvě ireducibilní unitární reprezentace, které jsou restrikcemi $\mathfrak{M}$ na podprostory sudých respektive lichých funkcí v $L^2(\mathbb{L})$.

Důkaz. Viz G. Folland [6]. □

Definice 3.3.2. Definujme *analytickou Segal-Shale-Weilovu reprezentaci*

$$\mathfrak{m} : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$$

restrikcí danou (spojitým) vnořením $Id : \mathbf{A} \hookrightarrow L^2(\mathbb{L})$.

Poznámka. Poznamenejme, že definice analytické Segal-Shale-Weilovy reprezentace je korektní díky vztahům (3.3), (3.4), (3.5) a Větě 2.2.6. (Dokazujeme, že restrikce jsou vůbec možné)

Lze ukázat, viz A. Borel [3], že každá reprezentace Segal-Shale-Weilova typu je rozšířením analytické Segal-Shale-Weilovy reprezentace ve smyslu, že prostor $\mathbf{A}$ je vždy podprostorem reprezentačního prostoru. Pokud bychom definovali reprezentaci $\mathfrak{m}_{\mathcal{S}} : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}\big(\mathcal{S}(\mathbb{L})\big)$, pro reprezentační prostor platí $\mathcal{S}(\mathbb{L}) \supset \mathbf{A}$.

V práci budeme dále používat analytickou Segal-Shale-Weilovu reprezentaci $\mathfrak{m}$. Prvky prostoru $\mathbf{A}$ budeme nazývat *symplektické spinory*.

Definujme nyní Cliffordovo násobení, které umožňuje násobit vektory a symplektické spinory, tak jako je to možno v Riemannově případě.

Definice 3.3.3. *Symplektické Cliffordovo násobení* $\cdot : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ je definované pomocí prvků báze $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ symplektického vektorového prostoru $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ pro $f \in \mathbf{A}$, $x = (x^1, \ldots, x^j) \in \mathbb{L}$ a $j = 1, \ldots, n$ předpisem

$$(e_j \cdot f)(x) := i x^j f(x),$$

$$(e_{n+j} \cdot f)(x) := \frac{\partial f}{\partial x^j}(x).$$

Na ostatní prvky z $\mathbb{R}^{2n}$ symplektické Cliffordovo násobení rozšíříme lineárně.

Poznámka. Symplektické Cliffordovo násobení je neomezený operátor na $L^2(\mathbb{L})$. Pro detaily viz K. Habermannová [8]. Poznamenejme ještě, že symplektické Cliffordovo násobení odpovídá tak zvanému Heisenbergově kanonickému kvantování Hamiltonovy mechaniky.

Poznámka. Pro zjednodušení zápisu budeme zapisovat $v \cdot w \cdot s$ místo $v \cdot (w \cdot s)$ pro $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ a $s \in \mathbf{A}$ a analogicky pro symplektická vektorová pole.

Lemma 3.3.4. Pro $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ a $s \in \mathbf{A}$ platí

$$v \cdot w \cdot s - w \cdot v \cdot s = -i\Omega_0(v, w)s.$$

Důkaz. Viz K. Habermannová [8, Lemma 1.4.1]. □

Lemma 3.3.5. Cliffordovo násobení je $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-ekvivariantní. To znamená, že pro každé $g \in \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^{2n}$ a $s \in \mathbf{A}$ platí

$$\big(\lambda(g)v\big) \cdot \mathfrak{m}(g)s = \mathfrak{m}(g)(v \cdot s).$$

Důkaz. Viz K. Habermannová [8, Lemma 1.4.4]. □

4. Fíbrované bandly, konexe a symplektický spinorový bandl

Zatímco v předchozích kapitolách jsme budovali algebraický aparát a mírně jsme se dotkli nezbytných s ním souvisejících topologicko-analytických pojmů, v této kapitole se seznámíme s geometrickými strukturami. Symplektické variety budou hrát roli podkladového prostoru, nad kterým vybudujeme strukturu hlavního $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-bandlu, hlavního $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-bandlu a k němu asociovaného symplektického spinorového bandlu. Abychom mohli pracovat s diferenciálními rovnicemi pro sekce asociovaného bandlu, potřebujeme pojem konexe na jednotlivých bandlech.

Nakonec se seznámíme se symplektickou spinorovou konexí, která nám umožní pracovat se symplektickými spinorovými poli a diferenciálními formami s hodnotami v symplektických spinorových polích.

4.1 Symplektické variety

S pojmy symplektické lineární algebry jsme se seznámili v první kapitole. Dalším krokem bude seznámit se se symplektickými varietami. Každá n-dimenzionální varieta je z definice lokálně difeomorfní $\mathbb{R}^n$. Podle Darbouxovy věty je každá symplektická varieta dimenze $2n$ lokálně symplektomorfní kanonické symplektické varietě označené $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Symplektickou varietou je například fázový prostor požívaný v Hamiltonově mechanice.

Definice 4.1.1. *Symplektická varieta* (M, ω) je hladká varieta sudé dimenze $2n$ spolu s antisymetrickou diferenciální 2-formou ω, která je uzavřená, tj. $d\omega = 0$, a nedegenerovaná, tj. pro každé $m \in M$ neexistuje nenulový prvek $v \in T_mM$, pro který platí $\omega_m(u, v) = 0$ pro každé $u \in T_mM$.

Příklad 7. Jednoduchým příkladem symplektické variety je reálný vektorový prostor $\mathbb{R}^{2n}$ se standardními souřadnicemi označenými $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$. Forma

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$$

je symplektická forma. Symplektická báze tečného prostoru $\big(T_m\mathbb{R}^{2n}, (\omega_0)_m\big)$ je pro každé $m \in M$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_m, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_m, \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_m, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_m \right\}.$$

Tuto symplektickou varietu označme $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Příklad 8. Sféra S^2 s formou objemu je symplektická varieta. Například pokud je sféra zadána jako podvarieta třírozměrného reálného prostoru parametrizací otevřené husté podmnožiny $(\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta)$, kde $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \varphi \in (0, 2\pi)$, je symplektická forma $\omega := d\phi \wedge d\vartheta$. Forma ω je antisymetrická, nedegenerovaná a uzavřená, protože je to forma objemu.

Definice 4.1.2. *Symplektomorfismus* mezi dvěma symplektickými varietami (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) je difeomorfismus $F : M_1 \to M_2$ splňující $F^*\omega_2 = \omega_1$, kde F^* je kotečné zobrazení k zobrazením F.

V dalším ukažme, že na kotečném bandlu T^*M n-dimenzionální variety M lze zavést kanonickou symplektickou formu ω_M.

Nejdříve zaveďme na T^*M tak zvanou *Liouvilleovu* 1-formu $\theta^M : TT^*M \to \mathcal{C}^\infty(T^*M, \mathbb{R})$. Zaveďme lokální souřadnice na T^*M. Nechť $(x^1, \dots, x^n)$ jsou souřadnice na otevřené podmnožině U množiny M. Souřadnice formy $\alpha \in T_x^*M$, kde $x = (x^1, \dots, x^n)$ a $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i$, jsou $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Liouvilleova forma má v těchto lokálních souřadnicích tvar

$$\theta^M = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i.$$

Ověřme, že tato definice nezávisí na volbě lokálních souřadnic na M. Nechť $(x^1, \dots, x^n)$ a $(x'^1, \dots, x'^n)$ jsou dva systémy lokálních souřadnic na M. Pak je $dx'^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k$ a $\xi'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \xi_j$, a tedy dostaneme

$$\theta'^M = \sum_{i=1}^n \xi'_i dx'^i = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \xi_j dx^k = \sum_{j,k=1}^n \delta_k^j \xi_j dx^k = \sum_{j=1}^n \xi_j dx^j = \theta^M.$$

Kanonickou symplektickou formu na kotečném bandlu variety M definujme předpisem $\omega_M := -d\theta^M$. Kanonická forma ω_M je antisymetrická, nedegenerovaná a uzavřená, protože $dd\theta^M = 0$. Ve výše zavedených lokálních souřadnicích má tvar

$$\omega_M = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge d\xi_i.$$

Bezsouřadnicový zápis θ^M, respektive ω_M, získáme následovně. Definujme formu θ^M v bodě $\beta \in T^*M$ předpisem $\theta_\beta^M := \beta \circ \pi_{*\beta}$, kde $\pi : T^*M \to M$ je projekce, $\pi_{*\beta} : T_\beta T^*M \to T_{\pi(\beta)}M$. To jest $\theta_\beta^M(v) = \beta\big(\pi_{*\beta}(v)\big) \in \mathbb{R}$ pro $v \in TT^*M$ a $\beta \in T^*M$.

Pokud máme lokální souřadnice $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ na kotečném bandlu T^*M, shoduje se tato definice s dřívější, protože $\pi_*\big(\frac{\partial}{\partial x^i}\big) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ a $\pi_*\big(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\big) = 0$, a tak má forma θ^M opravdu tvar $\theta^M = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i$.

Následující věta je důležitou informací o symplektických varietách.

Věta 4.1.1. (Darboux) Každá symplektická varieta je lokálně symplektomorfní $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Důkaz. Viz A. Cannas da Silva [1, Theorem 8.1]. □

4.2 Fíbrované bandly

V této kapitole se seznámíme s pojmy fíbrovaný bandl, hlavní bandl a asociovaný bandl. Na těchto bandlech zavedeme sekce a uvedeme příklady definovaných bandlů. Více detailů viz I. Kolář v [11].

Pro naše účely budeme pracovat s fíbrovanými bandly, jejichž totální prostory budou mít strukturu Fréchetovy variety. Proto definice budeme uvádět již v této obecnosti. Pro definici Fréchetova vektorového prostoru a hladkého zobrazení mezi Fréchetovými vektorovými prostory viz Kapitolu 2.1, Definici 2.1.3 a 2.1.4.

Nyní zaveďme Fréchetovy variety, které jsou nekonečněrozměrným zobecněním klasických n-rozměrných diferencovatelných variet.

Definice 4.2.1. Nechť M je Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bází otevřených množin. *Mapa* na M je dvojice (U, φ), kde $U \subset M$ je otevřená a $\varphi : U \to V$ je homeomorfismus na otevřenou podmnožinu V nějakého pevně zvoleného Fréchetova vektorového prostoru F. *Fréchetův atlas* na M je množina map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ taková, že $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ a každé dvě mapy jsou kompatibilní, tj. přechodové funkce $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ jsou difeomorfismy otevřených podmnožin Fréchetova vektorového prostoru F.

Poznámka. Atlas definuje na M topologii takto: $A \subset M$ je otevřená, pokud pro každou mapu (U, φ) z daného atlasu platí, že $\varphi(A \cap U)$ je otevřená podmnožina Fréchetova vektorového prostoru F.

Definice 4.2.2. *Fréchetova varieta* M je Hausdorffův topologický prostor, který má spočetnou bázi otevřených množin a na kterém je dán Fréchetův atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. *Diferencovatelná struktura* na Fréchetově varietě je maximální Fréchetův atlas.

Příklad 9. Příkladem Fréchetovy variety je $S^1 \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Viz Příklad 6.

Řekneme-li v dalším „varieta“ bez dodání Fréchetova, myslíme tím vždy varietu konečné dimenze.

Definice 4.2.3. Nechť E, F jsou Fréchetovy variety a B je varieta. *Fíbrovaný bandl se standardním fíbrem* F je prostor E spolu s hladkým surjektivním zobrazením $\pi : E \to B$, pokud pro všechna $m \in B$ existuje otevřené okolí $m \in U_\alpha \subset B$ a existuje difeomorfismus $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$, který zachovává fíbry, tj. komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} E \supset \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & U_\alpha \times F \arrow[d, "p"] \\ & U_\alpha, \end{tikzcd}$$

kde p je projekce na první složku kartézského součinu. Prostor B se nazývá *bázový prostor fíbrovaného bandlu*, E se nazývá *totální prostor* a F je *standardní fíbr*. Dvojice (U_α, ψ_α) se nazývá *mapa fíbrovaného bandlu* nebo *lokální trivializace* E.

Dvě mapy fíbrovaného bandlu (U_α, ψ_α) a (U_β, ψ_β) jsou *kompatibilní*, pokud $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ je difeomorfismus. To jest pokud platí $(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, s) = \big(x, \bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, s)\big)$, kde $\bar{\psi}_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to F$ je hladké a $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, \cdot)$ je difeomorfismus F pro všechny $x \in U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$. Zobrazení $\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{Diff}(F)$ s hodnotami v grupě $\mathrm{Diff}(F)$ všech difeomorfismů F se nazývá *přechodová funkce fíbrovaného bandlu.*

Přechodové funkce splňují kocyklickou podmínku, tj. platí $\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x)$ pro všechna $x \in U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ a $\psi_{\alpha\alpha} = Id|_B$ pro všechna $x \in U_\alpha$, jak lze snadno ověřit.

Množina map fíbrovaného bandlu $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ taková, že $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je otevřené pokrytí B a každé dvě mapy jsou kompatibilní, se nazývá *atlas fíbrovaného bandlu*. Dva atlasy fíbrovaného bandlu se nazývají *ekvivalentní*, pokud jejich sjednocení je opět atlas fíbrovaného bandlu.

Příklad 10. Jednoduchým příkladem fíbrovaného bandlu je kartézský součin dvou variet X, Y spolu s projekcí na jednu z nich, $\pi : X \times Y \to X$.

Příklad 11. Zajímavějším příkladem fíbrovaného bandlu je Möbiův proužek. Mějme S^1 popsanou v $\mathbb{R}^3$ parametrizací $\varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ a pokrytou dvěma otevřenými množinami U_1 pro $\varphi \in (-\pi, \pi)$ a U_2 pro $\varphi \in (0, 2\pi)$. Möbiův proužek $\pi_M : M \to S^1$ pak bude popsán parametrizací $(\varphi, t) \mapsto (\cos\varphi(1 + t\cos\frac{\varphi}{2}), \sin\varphi(1+t\cos\frac{\varphi}{2}), t\sin\frac{\varphi}{2})$, kde $t \in (-1, 1)$. Projekce π_M na bázový prostor S^1 pokládá parametr $t = 0$. Označme U otevřenou vlastní podmnožinu bázového prostoru. Platí $\pi_M^{-1}(U) \cong U \times (-1, 1)$. Möbiův proužek je lokálně izomorfní části válce $S^1 \times (-1, 1)$, ale o kartézský součin $S^1 \times (-1, 1)$ se nejedná, jak lze ukázat.

Definice 4.2.4. Fíbrovaný bandl $\pi : E \to B$ se standardním fíbrem F, kde F je Fréchetův vektorový prostor, se nazývá *vektorový bandl*, pokud pro každé $x \in B$ je $\pi^{-1}(x)$ izomorfní F jako topologickému vektorovému prostoru a pro všechny otevřené $U_\alpha \subset B$ je zobrazení ψ_α (z Definice 4.2.3 fíbrovaného bandlu) lineární.

Pokud je V konečné dimenze n, mluvíme o vektorovém bandlu *ranku* n.

Příklad 12. Známým příkladem vektorového bandlu je tečný bandl TM variety M dimenze n

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_m M$$

spolu s projekcí $\pi : TM \to M$, která vektoru $v \in T_m M$ přiřadí bod $m \in M$. Jedná se o vektorový bandl ranku n.

Definice 4.2.5. *Sekce* fíbrovaného bandlu $\pi : E \to B$ je hladké zobrazení $\sigma : B \to E$ takové, že $\pi \circ \sigma = Id|_B$. *Lokální sekce* je hladké zobrazení $\sigma : U \subset B \to E$ takové, že $\pi \circ \sigma = Id|_U$, kde U je otevřená podmnožina B. Množinu sekcí fíbrovaného bandlu $\pi : E \to B$ označujeme $\Gamma(B, E)$.

Definice 4.2.6. Nechť G je Lieova grupa a F je Fréchetova varieta, *G-bandlovou strukturou* nazýváme následující data:

1) Fíbrovaný bandl $\pi : P \to B$ se standardním fíbrem F.

2) Levá akce $l : G \times F \to F$ Lieovy grupy na standardním fíbru F.

3) Atlas fíbrovaného bandlu $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, jehož přechodové funkce $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ působí na F pomocí akcí grupy G. To jest jedná se o rodinu hladkých přechodových funkcí $\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$, které splňují kocyklickou podmínku $\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x)$ pro všechna $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ a $\psi_{\alpha\alpha}(x)$ je jednotka grupy G pro všechna $x \in U_\alpha$. Navíc platí $l(\psi_{\alpha\beta}(x), s) = \psi_{\alpha\beta}(x)s$, kde $s \in F$.

Poznámka. Grupu G nazýváme *strukturní grupa.*

Definice 4.2.7. *Hlavním G-bandlem* rozumíme G-bandlovou strukturu s typickým fíbrem F rovnajícím se grupě G. Levá akce grupy G na grupě G je levá translace.

Každý hlavní bandl má jednoznačně určenou pravou akci (pravou translaci) $r : P \times G \to P$, která je zadána $\varphi_\alpha\big(r(\varphi_\alpha^{-1}(x,a),g)\big) = (x, ag)$ a zachovává fíbry, tj. $\pi\big(r(m,g)\big) = \pi(m)$ pro všechna $m \in P$ a $g \in G$. Levá a pravá translace komutují, proto je akce dobře definovaná. Tato pravá akce je volná, to jest pokud platí pro nějaké $g \in G$, že $r(u,g) = u$ pro nějaké $u \in P$, pak g je jednotka grupy G.

Příklad 13. *Bandl repérů* vektorového bandlu $\pi : E \to M$ s fíbrem V, kde V má dimenzi n, je příkladem hlavního bandlu. Fíbr bandlu repérů v bodě $m \in M$ je množina všech uspořádaných bází vektorového prostoru $E_m := \pi^{-1}(m)$ umístěného v bodě m. Tato množina je izomorfní s $\mathrm{GL}(n)$ a díky tomu lze na E zavést diferencovatelná struktura. Strukturní grupou bandlu repérů je $\mathrm{GL}(n)$, která působí obvyklým způsobem na bázích vektorového prostoru V.

Pokud v minulém příkladu za bázový prostor zvolíme hladkou varietu M dimenze n a za vektorový bandl TM tečný bandl variety M, získáme $\mathrm{GL}(n)-$bandlovou strukturu nad varietou M. Tečný bandl TM však není hlavním $\mathrm{GL}(n)$-bandlem nad M.

Příklad 14. Dalším podobným příkladem je ortonormální repérový bandl nad Riemannovou varietou M dimenze n s metrikou g. V tomto případě jsou fíbry tvořeny ortonormálními bázemi tečného prostoru T_mM v každém bodě $m \in M$. Strukturní grupa je ortogonální grupa $\mathrm{O}(n)$. (viz Definice 5.2.2.)

Definice 4.2.8. Nechť $\pi_1 : P_1 \to M_1$ je hlavní G_1-bandl a $\pi_2 : P_2 \to M_2$ je hlavní G_2-bandl. Nechť $f : M_1 \to M_2$ je hladké zobrazení variet. Zobrazení $F : P_1 \to P_2$ nazveme *bandlový homomorfismus pokrývající* f, pokud komutuje následující diagram

$$\begin{tikzcd}
P_1 \times G_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "F\times\Lambda"] & P_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "F"] & M_1 \arrow[d, "f"] \\
P_2 \times G_2 \arrow[r, "r_2"] & P_2 \arrow[r, "\pi_2"] & M_2,
\end{tikzcd}$$

kde r_1 a r_2 jsou příslušné akce grup na totálních prostorech a $\Lambda : G_1 \to G_2$ je homomorfismus grup.

Definice 4.2.9. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní bandl se strukturní grupou G, nechť V je Fréchetův vektorový prostor a $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(V)$ je reprezentace grupy G. Na součinu $P \times V$ zaveďme ekvivalenci předpisem $(u,s) \sim \big(u \cdot g, \lambda(g^{-1})(s)\big)$ a definujme takzvaný *asociovaný bandl $P \times_\lambda V$ k P prostřednictvím reprezentace λ* jako prostor tříd této ekvivalence.

Na $\mathcal{V} := P \times_\lambda V$ je indukovaná struktura bandlu nad M se standardním fíbrem V. Tuto strukturu nejčastěji zadáváme pomocí lokálních sekcí $\sigma : M \to P$, protože pro každé $s \in V$ zobrazení $\sigma : M \to P$ zadává sekci $\sigma : M \to P \times_\lambda V$, která je dána tak, že $x \mapsto [\sigma(x), s]$, $x \in M$.

Množinu hladkých sekcí asociovaného bandlu $\mathcal{V} = P \times_\lambda V$ nad varietou M označme $\Gamma(M, \mathcal{V})$.

Příklad 15. Za V v Definici 4.2.9 zvolme vektorový prostor dimenze n a za hlavní bandl P zvolme prostor všech bází vektorového prostoru V nad jednobodovým bázovým prostorem, tedy hlavní $\mathrm{GL}(n)$-bandl nad jedním bodem (tj. P odpovídá

GL(n)). Na reprezentanta (u,s) třídy $v := [u,s]$ v $P \times_\lambda V$ lze nahlížet jako na souřadnice s bodu v v bázi u. Změna báze $u \mapsto ug$ odpovídá změně souřadnic na $s \mapsto \lambda(g^{-1})(s)$.

Tvrzení 4.2.1. Množina hladkých sekcí $\Gamma(M, \mathcal{V})$ asociovaného bandlu $\mathcal{V} = P \times_\lambda V$ je izomorfní s množinou $\mathcal{C}^\infty(P,V)^G$ všech G-ekvivariantních zobrazení s hodnotami ve V. Přičemž definujme $\mathcal{C}^\infty(P,V)^G := \{f : P \to V; f(pg) = \lambda(g)f(p)$ pro všechny $g \in G$ a všechny $p \in P\}$.

Důkaz. Zkonstruujme zmíněný izomorfismus. Nechť s je sekce $P \times_\lambda V$ asociovaného bandlu k hlavnímu bandlu $\pi : P \to M$ pomocí reprezentace λ grupy G na vektorovém prostoru V, tj. $s(x) = [p, v_p] \in P \times V/_\sim$, kde $\sim$ je relace ekvivalence definující asociovaný bandl, $\pi : p \mapsto x$, kde $x \in M$. Definujme $\sigma : P \to V$ tak, že $\sigma(p) = v_p$ pro $p \in P$. Takto definované zobrazení σ je G-ekvivariantní, jak se lze jednoduše přesvědčit.

Naopak nechť σ je G-ekvivariantní V hodnotová funkce. Definujme $s(m) = [p, \sigma(p)]$, kde p je libovolný bod z P takový, že $\pi(p) = m$. Ověřme, že $s(m)$ je dobře definováno. Buď p' jiný bod z P takový, že $\pi(p') = m$. Dle definice hlavního bandlu existuje jediné $g \in G$, že $p' = pg$. Tedy $s(m) = [p', \sigma(p')] = [pg, \sigma(pg)]$, což je podle G-ekvivariance rovno $[pg, \sigma(pg)] = [pg, \lambda(g^{-1})\sigma(p)] = [p, \sigma(p)]$, kde poslední rovnost platí díky definici asociovaného bandlu. Tedy $s(m)$ nezávisí na výběru bodu $p \in P$.

Na závěr snadno nahlédneme, že zobrazení jsou navzájem inverzí, protože pro libovolnou sekci τ hlavního bandlu $\pi : P \to M$ máme $s(m) = \big[\tau(m), \sigma\big(\tau(m)\big)\big]$ pro $m \in M$. Též zřejmě platí, že sekce s je hladká právě tehdy, když je funkce σ hladká. $\square$

4.3 Hlavní konexe, asociovaná konexe a kovariantní derivace

Zavedeme konexi na hlavním bandlu a na asociovaném bandlu. Nejdříve však připomeňme pojem afinní konexe na varietě.

Definice 4.3.1. *Afinní konexe* na hladké varietě M je zobrazení ∇, které uspořádané dvojici vektorových polí X, Y přiřazuje hladké vektorové pole $\nabla_X Y$, přičemž jsou splněny následující axiomy.

1) Zobrazení ∇ je $\mathbb{R}$-lineární v obou složkách.
2) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ pro každou hladkou funkci f na M.
3) $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f(\nabla_X Y)$ pro každou hladkou funkci f na M (Leibnizovo pravidlo).

Buďte na otevřené podmnožině $U \subset M$ dány lokální souřadnice $(x^1, \dots, x^n)$ a nechť je ∇ daná afinní konexe na varietě M. Dále uvažme na U hladká souřadnicová pole $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. *Christoffelovy symboly* neboli *složky afinní konexe* ∇ *v lokálních souřadnicích* jsou funkce ${\Gamma_{ij}}^k$ definované pro $i, j = 1, \dots, n$ pomocí vzorce

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n {\Gamma_{ij}}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Definice 4.3.2. *Symplektickou konexí* ∇ nazveme takovou konexi na symplektické varietě (M, ω), která splňuje $\nabla\omega = 0$, tj. platí

$$X(\omega(Y, Z)) = \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z),$$

a má nulovou torzi, tj. platí

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

pro všechna vektorová pole $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Výběr takovéto beztorzní symplektické konexe na symplektické varietě není jednoznačný na rozdíl od jednoznačnosti Levi-Civitovy konexe na Riemannově varietě viz I. Gelfand [7]. Symplektické beztorzní konexe se někdy nazývají *Fedosovovy konexe.*

Nyní uveďme tři ekvivalentní definice konexe na hlavním bandlu. Pro podrobnější studium jejich ekvivalence viz Y. Choquet-Bruhat [5, kap. Vbis.].

Definice 4.3.3. *Konexe na hlavním bandlu* $\pi : P \to M$ se strukturní grupou G a akcí grupy na fíbrech $r(g) : P \to P$, $g \in G$, je systém hladkých lineárních zobrazení $\sigma_p : T_x M \to T_p P$, kde $\pi(p) = x$, takových, že $\pi_* \circ \sigma_p$ je identita na $T_x M$ a že platí $\sigma_{r(g)(p)} = r(g)_* \circ \sigma_p$.

Nechť $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ je křivka v M procházející bodem $x_0 = \gamma(0)$ a buď p_0 bod v $\pi^{-1}(x_0)$. *Paralelní přenos* p_0 podél křivky γ je zadán křivkou $\tilde{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to P$ a je definovaný

$$\left.\frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \sigma_p \left.\frac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=t_0},$$

pro všechny $t_0 \in I$, kde $\tilde{\gamma}(0) = p_0$ a $\tilde{\gamma}(t) = p$.

Vektor $v \in T_p P$ nazveme *horizontální*, pokud existuje $w \in T_{\pi(p)} M$, že platí $v = \sigma_p(w)$. Označme $T_p^h P := \sigma_p(T_{\pi(p)} M)$ prostor horizontálních vektorů v bodě $p \in P$. Podle definice je $\pi_* \circ \sigma_p$ identita na $T_{\pi(p)} M$, platí tedy $\pi_* T_p^h P = T_{\pi(p)} M$, a proto $T_p^h P$ je izomorfní $T_{\pi(p)} M$.

Definice 4.3.4. *Konexe na hlavním bandlu* $\pi : P \to M$ se strukturní grupou G a akcí grupy na fíbrech $r(g) : P \to P$, $g \in G$, je rodina vektorových podprostorů (distribuce) $T_p^h P \subset T_p P$ hladce závislých na p takových, že $\pi_* : T_p^h P \to T_{\pi(p)} M$ je izomorfismus a platí $T^h_{r(g)(p)} P = r(g)_* T_p^h$.

Vektory z $T_p P$, pro něž je zobrazení $\pi_* : T_p P \to T_{\pi(p)} M$ nulové, se nazývají *vertikální vektory.* Jejich prostor označme $T_p^v P$. Prostor vertikálních vektorů není závislý na volbě konexe a je jednoznačně určen projekcí fíbrovaního bandlu. Platí $T_p P = T_p^v P \oplus T_p^h P$, a proto každý vektor $v \in T_p P$ lze psát jednoznačně jako $v = v_v + v_h$, kde $v_v \in T_p^v P$ a $v_h \in T_p^h P$. Tento rozklad již závisí na volbě $T_p^h P$.

Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra strukturní Lieovy grupy G hlavního bandlu $\pi : P \to M$. *Fundamentální vektorové* pole působení grupy G na P je pole

$$\tilde{X}(p) := \frac{d}{dt}\big(p \exp(tX)\big)\big|_{t=0},$$

kde $X \in \mathfrak{g}$. Přiřazení

$$\Phi : \mathfrak{g} \ni X \mapsto \tilde{X}(p) \in T_p^v P$$

je lineární izomorfismus. Vektor X se nazývá *generátor* vektorového pole $\tilde{X}$.

Projekce na vertikální složku složená s izomorfismem Φ je jistě 1-forma na P s hodnotami v $\mathfrak{g}$, budeme ji značit $\mathcal{Z}_p$. To jest

$$\mathcal{Z}_p : T_p^v P \oplus T_p^h P \to \mathfrak{g},$$
$$\mathcal{Z}_p : \tilde{X}(p) \oplus Y \mapsto X.$$

Definice 4.3.5. *Konexe na hlavním bandlu* $\pi : P \to M$ se strukturní grupou G a akcí grupy na fíbrech $r(g) : P \to P$, $g \in G$, je 1-forma $\mathcal{Z}$ na P s hodnotami ve vektorovém prostoru $\mathfrak{g}$ taková, že platí následující: $\mathcal{Z}(\tilde{X}) = X$, kde $\tilde{X}$ je fundamentální vektorové pole působení G na P, $X \in \mathfrak{g}$ je jeho generátor. Forma $\mathcal{Z}_p$ hladce závisí na p a platí

$$\mathcal{Z}_{r(g)(p)}\big(r(g)_* v\big) = Ad(g^{-1})\mathcal{Z}_p(v),$$

kde Ad je adjungované zobrazení $Ad : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Definice 4.3.6. Nechť $\pi : P \to M$ je hlavní bandl se strukturní grupou G. Označme $\mathfrak{g}$ Lieovu algebru grupy G. Buď V vektorový prostor a ρ reprezentace $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ grupy G. Protože $\mathfrak{g}$ je tečný prostor variety G v jednotce e grupy G a $\mathfrak{gl}(V)$ je tečný prostor ke $\mathrm{GL}(V)$ v $\rho(e) = I$, je diferenciál ρ_* lineární transformace $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Nechť $P \times_\rho V$ je asociovaný bandl k hlavnímu bandlu $\pi : P \to M$ pomocí reprezentace $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ a nechť $\mathcal{Z}$ je konexe na hlavním bandlu $\pi : P \to M$. Zaveďme *asociovanou konexi* $\mathcal{Y} := \rho_* \circ \mathcal{Z}$ na asociovaném bandlu, která je definována následovně. Buď $X \in TM$ tečný vektor k M, pak $\mathcal{Y}(X) \in \mathfrak{g}$ a tak $\rho_*\big(\mathcal{Z}(X)\big) \in \rho_*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(V)$. Tedy definujme

$$\big(\rho_* \mathcal{Z}\big)(X) := \rho_*\big(\mathcal{Z}(X)\big).$$

Pro symplektickou varietu (M, ω) označme P bandl symplektických repérů $\pi_P : P \to M$, jehož fíbr nad každým bodem m variety M je množina symplektických bází $T_m M$ (viz Příklad 13). To jest P je hlavní $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-bandl nad varietou M. Lokální sekce P nazveme *lokální symplektické repéry.*

Poznámka. Symplektické konexe na symplektické varietě (M, ω) jednoznačně odpovídají 1-formám konexe na hlavním $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-bandlu nad varietou (M, ω). Každá symplektická varieta je tedy vybavena symplektickou konexí, její jednoznačný výběr však neexistuje.

Definice 4.3.7. Buď $\pi : P \to M$ hlavní bandl se strukturní grupou G a $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra. Nechť $\mathcal{Z} : TP \to \mathfrak{g}$ je hlavní konexe. Dále buď $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ reprezentace G na Fréchetově vektorovém prostoru V a nechť $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)^\infty$ je k ní tečné zobrazení, kde $\mathrm{End}(V)^\infty$ značí hladké vektory z $\mathrm{End}(V)$. Nechť $\mathcal{V} = P \times_\rho V$ je asociovaný bandl k hlavnímu bandlu P. Sekci asociovaného bandlu $\phi \in \Gamma(M, \mathcal{V})$ zapišme ve tvaru $\phi(m) = [p(m), v(m)]$ pro $m \in M$, $p : U \subset M \to P$ a $v : U \subset M \to V$. *Kovariantní derivace asociovaná k hlavní konexi* $\mathcal{Z}$ je dána

$$\nabla_X[p, v] = \big[p, X(v) + \rho_*\big(p^* \mathcal{Z}(X)\big)v\big],$$

kde $X \in \Gamma(M, TM)$.

Poznamenejme, že zobrazení v z definice je $v = \nu \circ p$, kde ν je G-ekvivariantní V-hodnotová funkce odpovídající sekci ϕ podle Tvrzení 4.2.1.

4.4 Symplektický spinorový bandl

Popíšeme nyní detailněji symplektický spinorový bandl, který je symplektickou analogií spinorového bandlu v Riemannově geometrii.

Připomeňme, že $\pi_P : P \to M$ značí hlavní $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-bandl nad symplektickou varietou M a $\lambda : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ je dvoulisté nakrytí symplektické grupy, které je popsané v Kapitole 3.3.

Definice 4.4.1. Nechť $\pi_Q : Q \to M$ je hlavní $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-bandl nad symplektickou varietou. *Metaplektická struktura* na symplektické varitě (M, ω) je zmíněný hlavní $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-bandl $\pi_Q : Q \to M$ spolu se zobrazením $\Lambda : Q \to P$, které je surjektivní bandlový homomorfismus pokrývající identitu na M, tj. komutuje následující diagram

$$\begin{tikzcd}
Q \times \mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[dd, "\Lambda\times\lambda"] & Q \arrow[dd, "\Lambda"] \arrow[dr, "\pi_Q"] & \\
& & M, \\
P \times \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \arrow[r] & P \arrow[ur, "\pi_P"'] &
\end{tikzcd}$$

kde horizontální šipky značí akce příslušných grup na hlavních bandlech.

Připomeňme volbu lagrangeovských podprostorů z Poznámky na konci Kapitoly 1.1. Buďte $\mathbb{L}$ a $\mathbb{L}'$ lagrangeovské podprostory symplektického vektorového prostoru $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ takové, že $\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}' = \mathbb{R}^{2n}$. Symplektickou bázi $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ symplektického vektorového prostoru $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ volíme takovou, že $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{L}$ a $\{e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\} \subset \mathbb{L}'$. Lokální symplektické repéry $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ určené lokálními sekcemi na otevřené $U \subset M$ volíme tak, aby první n-tice vektorů odpovídala $\mathbb{L}$ a druhá n-tice $\mathbb{L}'$.

Dále připomeňme prostor $\mathbf{A} \subset L^2(\mathbb{L})$ rychle klesajících analytických funkcí zavedený v Definici 2.2.1. Jeho prvky nazýváme symplektické spinory. Prostor $\mathbf{A}$ se rozkládá na prostory lichých a sudých rychle klesajících analytických funkcí v $L^2(\mathbb{L})$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ \oplus \mathbf{A}_-$. Připomeňme také reprezentaci $\mathfrak{m}$ metaplektické grupy $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$ na tomto prostoru. (Viz Definice 3.3.2.)

Definice 4.4.2. *Symplektický spinorový bandl* je vektorový bandl asociovaný k $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-bandlu Q nad varietou M pomocí reprezentace $\mathfrak{m} : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$. Označme jej $\mathcal{A} := Q \times_{\mathfrak{m}} \mathbf{A}$. Sekce $\phi \in \Gamma(M, \mathcal{A})$ budeme nazývat *symplektická spinorová pole.*

Připomeňme, že podle Lemmatu 3.3.5 je symplektické Cliffordovo násobení $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-ekvivariantní, díky čemuž můžeme definovat „zdvih“ tohoto násobení na strukturu asociovaného vektorového bandlu

$$\cdot : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, \mathcal{A}) \to \Gamma(M, \mathcal{A}).$$

Nechť ϕ je symplektické spinorové pole, tj. $\phi(m) = [p(m), f(m)]$ pro $m \in M$. Nechť X je vektorové pole na M, $X(m) = [p(m), v(m)]$ pro $m \in M$, tj. je to prvek asociovaného bandlu $TM = P \times_\lambda \mathbb{R}^{2n}$, kde $\lambda : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{2n})$. Pro prvky $v(m) \in \mathbb{R}^{2n}$ a $f(m) \in \mathbf{A}$ máme již definované Cliffordovo násobení, pomocí něhož definujeme jeho „zdvih“ na symplektický spinorový bandl.

Definice 4.4.3. *Symplektické Cliffordovo násobení* na symplektickém spinorovém bandlu $\cdot : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, \mathcal{A}) \to \Gamma(M, \mathcal{A})$ je definováno

$$[p, v] \cdot [p, f] = [p, v \cdot f],$$

kde $[p, v] \in \mathfrak{X}(M)$ a $[p, f] \in \Gamma(M, \mathcal{A})$.

Definice 4.4.4. Buď $\mathcal{Z}$ konexe na hlavním $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$-bandlu $\pi_P : P \to M$ jednoznačně odpovídající symplektické konexi ∇ na varietě M podle Poznámky před Definicí 4.3.7. Nechť $\bar{\mathcal{Z}}$ je „zdvih" $\mathcal{Z}$ do hlavního $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-bandlu $\pi_Q : Q \to M$. *Symplektická spinorová kovariantní derivace* je kovariantní derivace ∇^S asociovaná k $\bar{\mathcal{Z}}$.

Symplektická spinorová derivace ∇^S tedy podle předchozí definice působí na symplektických spinorových polích.

Sekce ϕ asociovaného vektorového bandlu $\mathcal{A} = Q \times_{\varrho} \mathbf{A}$ může být podle Tvrzení 4.2.1 ekvivalentně chápaná jako $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-ekvivariantní $\mathbf{A}$-hodnotová funkce na Q. Označme tuto funkci $\hat{\phi}$, tj. $\hat{\phi} : Q \to \mathbf{A}$. Pro lokální symplektický repér $s : U \to P$ označme $\bar{s} : U \to Q$ jeden ze „zdvihů" s do Q. Nakonec položme $\phi_s := \hat{\phi} \circ \bar{s}$.

Pro $q \in Q$ a $\psi \in \mathbf{A}$ označme $[q, \psi]$ příslušný prvek v $\mathcal{A}$. Platí následující věta.

Věta 4.4.1. Nechť ∇^S je symplektická spinorová kovariantní derivace na M. Pak

$$\begin{aligned} \nabla^S_X \phi &= \big[\bar{s}, X(\phi_s)\big] - \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{n} e_{i+l} \cdot (\nabla_X e_i) \cdot \phi - e_i \cdot (\nabla_X e_{i+n}) \cdot \phi \\ &= \big[\bar{s}, X(\phi_s)\big] - \frac{i}{2} \sum_{i,k=1}^{2n} \omega^{ik} e_k \cdot (\nabla_X e_i) \cdot \phi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\phi \in \Gamma(M, \mathcal{A})$, $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ je globální symplektická báze M, ∇ je symplektická konexe na M a ω^{ik} značí složky formy ω. (Viz Poznámku na konci Kapitoly 1.1.)

Důkaz. Viz K. Habermannová [8, Proposition 3.2.6], uveďme jen, že důkaz vychází z Definice 4.3.7. □

Poznámka. Pokud zvolíme za podkladovou varietu reálnou symplektickou varietu $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ (viz Příklad 7), pak symplektická spinorová kovariantní derivace splývá s parciální derivací. Tento fakt lehce nahlédneme z (4.1), když si uvědomíme, že kovariantní derivace $\nabla_{e_i} e_j$ je nulová pro souřadnicová pole $e_i, e_j \in \{\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial y^b}\}_{a,b=1}^{n}$.

Věta 4.4.2. Pro každé $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ a $\phi \in \Gamma(M, \mathcal{A})$ platí

$$\nabla^S_X (Y \cdot \phi) = (\nabla^S_X Y) \cdot \phi + Y \cdot \nabla^S_X \phi.$$

Důkaz. Viz K. Habermannová [8, Proposition 3.2.7]. □

5. Symplektické spinorové formy

V této kapitole navážeme na výsledky S. Krýsla [15] a [13] o rozkladu prostorů vnějších symplektických spinorových forem. Zavedeme symplektické twistorové operátory, které podle [13] za jistých podmínek tvoří komplex a mohou tak tvořit určitou analogii k známému de Rhamově komplexu. Svoji pozornost nakonec zaměříme na twistorový operátor na $\mathbb{R}^2$.

Pro tuto kapitolu budeme užívat označení ϱ pro reprezentaci

$$\varrho : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}\Big(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{2n^*} \otimes \mathbf{A}\Big),$$
$$\varrho(g)(\alpha \otimes s) := \big(\lambda(g)^*\big)^{\wedge r} \alpha \otimes \mathfrak{m}(g)s,$$

kde $^{\wedge r}$ pro $r = 1, \dots, 2n$ značí vnější r-tou mocninu, $g \in \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$, $\alpha \in (\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{2n^*} \otimes \mathbf{A})$ a $s \in \mathbf{A}$. Připomeňme, že $\lambda : \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ je dvojité nakrytí symplektické grupy.

Pro konkrétní počítání s touto reprezentací bude užitečné následující technické lemma.

Lemma 5.0.1. Pro reprezentaci ϱ a každý prvek $g \in \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$ platí pro každé $k, j = 1, \dots, 2n$

$$\varrho(g)(\epsilon^k \otimes e_j \cdot s) = \sum_{h,l=1}^{2n} \big[\lambda(g)^{-1}\big]^k{}_l \, \epsilon^l \otimes e_h \big[\lambda(g)\big]^h{}_j \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big), \tag{5.1}$$

kde $s \in \mathbf{A}$, $\{e_j\}_{j=1}^{2n}$ je báze $\mathbb{R}^{2n}$ a $\{\epsilon^k\}_{k=1}^{2n}$ je k ní duální báze $\mathbb{R}^{2n^*}$.

Důkaz. Upravme výraz podle definice reprezentace ϱ a Lemmatu 3.3.5

$$\begin{aligned}\varrho(g)(\epsilon^k \otimes e_j \cdot s) &= \lambda(g)^* \epsilon^k \otimes \mathfrak{m}(g)(e_j \cdot s) \\ &= \lambda(g)^* \epsilon^k \otimes \big(\lambda(g)e_j\big) \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big).\end{aligned}$$

Prvek $\lambda(g)$ je matice z $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Označme její složky $\big[\lambda(g)\big]^a{}_b$. Pak $\lambda(g)e_j$ lze rozepsat jako $\sum_{h=1}^{2n} e_h \big[\lambda(g)\big]^h{}_j$. Z definice duální reprezentace platí

$$\begin{aligned}\big(\lambda(g)^* \epsilon^k\big)(e_j) = \epsilon^k\Big(\big(\lambda(g)^{-1}\big)e_j\Big) &= \epsilon^k\Big(\sum_{l=1}^{2n} e_l \big[\lambda(g)^{-1}\big]^l{}_j\Big) \\ &= \sum_{l=1}^{2n} \delta^k_l \big[\lambda(g)^{-1}\big]^l{}_j = \big[\lambda(g)^{-1}\big]^k{}_j.\end{aligned}$$

Jelikož j-tá souřadnice formy $\alpha \in \mathbb{R}^{2n^*}$ je $\alpha(e_j) = \alpha_j$, platí díky předešlé rovnosti $\lambda(g)^* \epsilon^k = \sum_{l=1}^{2n} \big[\lambda(g)^{-1}\big]^k{}_l \epsilon^l$, odkud plyne dokazované. $\square$

Prostor $\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{2n^*}$ je konečné dimenze, proto můžeme na $\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{2n^*} \otimes \mathbf{A}$ zavést topologii kanonickým způsobem.

V dalším budeme používat označení

$$I_n = \{(i,j); i=0, \dots, n, j=0, \dots, i\} \cup \{(i,j); i=n+1, \dots, 2n, j=0, \dots, 2n-i\}.$$

Následující tvrzení o rozkladu tenzorového součinu Segal-Shale-Weilovy reprezentace dokázal S. Krýsl v [14].

Tvrzení 5.0.2. Pro $n \geq 2$ se $\bigwedge^\bullet \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}$ rozkládá na ireducibilní $\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R})$ podmoduly dle předpisu

$$\bigwedge^\bullet \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}_\pm \simeq \bigoplus_{(i,j)\in I_n} E_\pm^{ij}.$$

Podmoduly $E_\pm^{ij}$ odpovídajícího tenzorového součinu jsou Fréchetovy prostory a jsou popsány v S. Krýsl [14].

Nám bude v práci stačit jen následující zmínka o vlastnostech podmodulů $E_\pm^{ij}$.

Poznámka. Podle článku S. Krýsl [13] pro všechny $(i,j),(i,k) \in I_n, j \neq k$ platí $E_\pm^{ij} \not\simeq E_\pm^{ik}$ (jako G-moduly) pro všechny kombinace $\pm$ na obou stranách. Využitím tohoto faktu máme, že pro $i = 0,\dots,2n$ jsou rozklady tenzorových součinů $\bigwedge^i \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}_\pm$ bez násobnosti, tj. tenzorové součiny $\bigwedge^i \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}_\pm$ se rozkládají na vzájemně neizomorfní ireducibilní podmoduly. Navíc pro $(i,j),(k,j) \in I_n$ platí $E_\pm^{ij} \simeq E_\mp^{kj}$, viz opět S. Krýsl [13].

5.1 Operátory X a Y

Zaveďme následující operátory, které využijeme k výpočtu symplektického twistorového operátoru v lokálních souřadnicích.

Definice 5.1.1. Nechť $\alpha \otimes s \in \bigwedge^r \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}$. Pro $r = 0,\dots,2n$ definujeme operátory

$$X : \bigwedge^r \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A} \to \bigwedge^{r+1} \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A},$$
$$Y : \bigwedge^r \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A} \to \bigwedge^{r-1} \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}$$

dané předpisem

$$X(\alpha \otimes s) = -\sum_{i=1}^{2n} \epsilon^i \wedge \alpha \otimes e_i \cdot s,$$
$$Y(\alpha \otimes s) = \sum_{i,j=1}^{2n} \omega^{ij} \iota_{e_i}\alpha \otimes e_j \cdot s,$$

kde $\iota_v\alpha$ označuje kontrakci vnější formy α vektorem $v \in \mathbb{R}^{2n}$.

Lze ověřit, že operátory jsou nezávislé na volbě symplektické báze $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$.

Poznámka. Jak ukázal S. Krýsl v článku [14], operátor Y zúžený na E^{ij} je izomorfismus pro $(i,j) \in I_n \setminus \{(i, 2n-i); i = n,\dots,2n\}$ a podobně operátor X zúžený na E^{ij} je izomorfismus pro $(i,j) \in I_n \setminus \{(i,i); i = 0,\dots,n\}$.

Lemma 5.1.1. Operátory X, Y jsou $\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R})$-ekvivariantní vůči reprezentaci ϱ grupy $\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R})$.

Důkaz. Nechť $g \in \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$ a $\alpha \otimes s \in \bigwedge^r \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}$ pro $r = 0, \dots, 2n$. S využitím Lemmatu 5.0.1 dostáváme

$$\begin{aligned}
\varrho(g)X(\alpha \otimes s) &= \varrho(g)\Big(-\sum_{i=1}^{2n} \epsilon^i \wedge \alpha \otimes e_i \cdot s\Big) \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} \lambda(g)^* \epsilon^i \wedge \lambda(g)^* \alpha \otimes \mathfrak{m}(g)(e_i \cdot s) \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{2n} \big[\lambda(g)^{-1}\big]^i{}_j \epsilon^j \wedge \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \big[\lambda(g)\big]^k{}_i \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{2n} \big[\lambda(g)\big]^k{}_i \big[\lambda(g)^{-1}\big]^i{}_j \epsilon^j \wedge \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) \\
&= -\sum_{j,k=1}^{2n} \delta^k_j \epsilon^j \wedge \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) \\
&= -\sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \wedge \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) \\
&= X\varrho(g)(\alpha \otimes s).
\end{aligned}$$

Pro operátor Y ověříme $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-ekvivarianci podobným způsobem. Povšimněme si, že platí následující rovnost: $\lambda(g)^*(\iota_v \alpha) = \iota_{\lambda(g)v} \lambda(g)^* \alpha$ pro $v \in \mathbb{R}^{2n}$.

$$\begin{aligned}
\varrho(g)Y(\alpha \otimes s) &= \varrho(g)\Big(\sum_{i,j=1}^{2n} \omega^{ij} \iota_{e_i} \alpha \otimes e_j \cdot s\Big) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{2n} \lambda(g)^*(\omega^{ij} \iota_{e_i} \alpha) \otimes e_k \big[\lambda(g)\big]^k{}_j \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{2n} \omega^{ij} \iota_{\lambda(g)e_i} \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \big[\lambda(g)\big]^k{}_j \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} \omega^{ij} \iota_{e_l [\lambda(g)]^l{}_i} \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \big[\lambda(g)\big]^k{}_j \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} \big[\lambda(g)\big]^l{}_i \omega^{ij} \big[\lambda(g)\big]^k{}_j \iota_{e_l} \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big)
\end{aligned}$$

Prvek $\lambda(g)$ je z $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, a proto platí

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2n} \big[\lambda(g)\big]^l{}_i \omega^{ij} \big[\lambda(g)\big]^k{}_j = \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} \big[\lambda(g)\big]^l{}_i \omega^{ij} \big[\lambda(g)^T\big]_j{}^k = \omega^{lk}.$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,l=1}^{2n} \big[\lambda(g)\big]^l{}_i \omega^{ij} \big[\lambda(g)\big]^k{}_j \iota_{e_l} \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) &= \sum_{k,l=1}^{2n} \omega^{lk} \iota_{e_l} \lambda(g)^* \alpha \otimes e_k \cdot \big(\mathfrak{m}(g)s\big) \\
&= Y\varrho(g)(\alpha \otimes s),
\end{aligned}$$

což je dokazované. $\square$

Operátory X, Y jsou $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-ekvivariantní, a proto můžeme definovat jejich „zdvihy“ na sekce odpovídajícího asociovaného vektorového bandlu. Pro tyto „zdvihy“ budeme používat stejné označení, jako tak činíme například v případě symplektického Cliffordova násobení.

Připomeňme, že symplektický spinorový bandl $\mathcal{A} = Q \times_\varrho \mathbf{A}$ vznikl asociací k $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-bandlu Q nad symplektickou varietou M pomocí reprezentace ϱ. (Viz Definici 4.4.2.)

Definice 5.1.2. Pro $(i, j) \in I_n$ definujeme asociovaný vektorový bandl

$$\mathcal{E}^{ij} := Q \times_\varrho E^{ij}.$$

Označme prostor vnějších diferenciálních forem s hodnotami v symplektických spinorech

$$\Omega^\bullet(M, \mathcal{A}) := \Gamma\Big(M, Q \times_\varrho \big(\bigwedge^\bullet \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}\big)\Big).$$

Definice 5.1.3. Nechť ∇^S je symplektická spinorová kovariantní derivace na symplektických spinorových polích. *Symplektická spinorová vnější derivace* d^{∇^S} působí na prvcích tvaru $\alpha \otimes s \in \Omega^\bullet(M, \mathcal{A})$ a je indukovaná symplektickou spinorovou kovariantní derivací ∇^S. Dána je následujícím předpisem

$$d^{\nabla^S}(\alpha \otimes s) := d\alpha \otimes s + (-1)^r \alpha \otimes \nabla^S s,$$

kde definujeme $\nabla^S s(X) := \nabla^S_X s$ pro vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ na podkladové symplektické varietě M a $\alpha \otimes s \in \Omega^\bullet(M, \mathcal{A})$.

Tvrzení 5.1.2. Buď (M, ω) symplektická varieta, na níž existuje metaplektická struktura, buď ∇ symplektická konexe na M a nechť ∇^S je k ní asociovaná symplektická spinorová kovariantní derivace. Pak pro vnější symplektickou spinorovou derivaci d^{∇^S} a $(i, j) \in I_n$ platí

$$d^{\nabla^S} : \Gamma(M, \mathcal{E}^{ij}) \to \Gamma(M, \mathcal{E}^{i+1,j-1} \oplus \mathcal{E}^{i+1,j} \oplus \mathcal{E}^{i+1,j+1}).$$

Důkaz. Viz S. Krýsl [15]. $\square$

Podle Poznámky za Tvrzením 5.0.2 je rozklad $\bigwedge^i \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}_\pm$ pro $i = 0, \ldots, 2n$ bez násobností, proto existují jednoznačně určené projekce

$$p^{ij} \colon \Omega^i(M, \mathcal{A}) \to \Gamma(M, \mathcal{E}^{ij})$$

pro $(i, j) \in I_n$. Lehce nahlédneme, že platí

$$p^{i0} + p^{i1} + \ldots + p^{ii} = Id|_{\Omega^i(M, \mathcal{A})}.$$

Tvrzení 5.1.3. Nechť (M^{2n}, ω) je symplektická varieta, na které existuje metaplektická struktura. Projekce $p^{1j} : \Omega^1(M, \mathcal{A}) \to \Gamma(M, \mathcal{E}^{1j})$ pro $j = 0, 1$ jsou tvaru

$$p^{10} = \frac{i}{n} XY$$

$$p^{11} = Id|_{\Omega^1(M, \mathcal{A})} - \frac{i}{n} XY.$$

Důkaz. Spočteme projekci p^{10}. Operátor Y je $\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R})$-ekvivariantní a $Y\psi \neq 0$, kde $\psi = \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes e_k \cdot s$ pro všechna $s \neq 0$. Podle Poznámky před Lemmatem 5.1.1 víme, že Y je izomorfismus $\mathcal{E}^{10} \to \mathcal{E}^{00} = \mathbf{A}$. Protože X je také $\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R})$-ekvivariantní a nenulový, zobrazuje $\mathbf{A}$ do $\mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}$. S využitím Dixmierovy verze Schurova lemmatu, viz J. Dixmier [4, Proposition 2.6.5 a Corollary 2.6.6] dostáváme, že p^{10} je až na násobek rovno XY. Zvolme $\psi = \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes e_k \cdot s \in \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}$, kde $s \in \mathbf{A}$, e_k je prvek báze $\mathbb{R}^{2n}$ a ϵ^k je prvek báze $\mathbb{R}^{2n*}$ duální k e_k. Požadujeme, aby platilo $p^{10}\psi = \psi$.

$$\begin{aligned} XY(\psi) = XY\Big(\sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes e_k \cdot s\Big) &= X\Big(\sum_{i,j,k=1}^{2n} \omega^{ij} \iota_{e_i}\epsilon^k \otimes e_j \cdot e_k \cdot s\Big) \\ &= X\Big(\sum_{i,j,k=1}^{2n} \omega^{ij} \delta_i^k \otimes e_j \cdot e_k \cdot s\Big) \\ &= X\Big(\sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj} e_j \cdot e_k \cdot s\Big) \end{aligned}$$

S využitím vztahu $(Y_1 \cdot Y_2 - Y_2 \cdot Y_1) \cdot s = -i\omega(Y_1, Y_2)s$ pro $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ a $s \in \mathbf{A}$ odvozeného z Lemmatu 3.3.4 dostáváme rovnosti

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj} e_j \cdot e_k \cdot s = ins = -\sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{jk} e_j \cdot e_k \cdot s, \tag{5.2}$$

protože platí

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj}(e_j \cdot e_k \cdot s - e_k \cdot e_j \cdot s) &= -i \sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj}\omega(e_j, e_k)s \\ \sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj} e_j \cdot e_k \cdot s + \sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{jk} e_k \cdot e_j \cdot s &= i \sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj}\omega_{kj} s \\ 2\sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj} e_j \cdot e_k \cdot s &= 2ins. \end{aligned}$$

Dosadíme (5.2), abychom získaly koeficient u XY

$$XY(\psi) = X\Big(\sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj} e_j \cdot e_k \cdot s\Big) = X(ins) = -in \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes e_k \cdot s = -in\psi.$$

Projekce p^{10} je tedy rovna $-\frac{1}{in}XY$ a p^{11} získáme z faktu, že platí $p^{10} + p^{11} = Id|_{\Omega^1(M,\mathcal{A})}$. □

Poznámka. Operátory X a Y souvisejí s takzvanou Howeovou dualitou. Lze ukázat, že

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R})}\Big(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}\Big) := \Big\{ &T : \bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A} \to \bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A}; \\ &T \text{ spojitý a } T\varrho(g) = \varrho(g)T \text{ pro všechna } g \in \mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R}) \Big\} \end{aligned}$$

tj. množina všech spojitých splétajících zobrazení, je jako asociativní algebra generována elementy X, Y a dvěma projekcemi $p_\pm : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_\pm$. Viz S. Krýsl [14].

Poznámka. Klasickou verzí Howeovy duality je tzv. Schurova dualita, což je následující souvislost. Nechť V je komplexní vektorový prostor konečné dimenze n. Nechť $k \in \mathbb{N}_0$ a $\rho_k : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes k})$ je tzv. tenzorová reprezentace $\mathrm{GL}(V)$. To jest $\rho_k(g)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) := gv_1 \otimes \ldots \otimes gv_k$ pro všechna $g \in \mathrm{GL}(V)$ a $v_i \in V$, $i = 1, ..., k$ na rozložitelných elementech a dále lineárně rozšířené. Nechť $\mathfrak{S}_k$ je permutační grupa na k prvcích a nechť $\sigma_k : \mathfrak{S}_k \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes k})$ je reprezentace daná permutací polohy vektorů, tj. $\sigma(g)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) := v_{g^{-1}1} \otimes \ldots \otimes v_{g^{-1}k}$.

Pak je

$$\mathrm{End}_{\mathrm{GL}(V)}(V^{\otimes k}) := \{T : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}; T\rho_k(g) = \rho_k(g)T\} \simeq \mathbb{C}[\sigma_k(\mathfrak{S}_k)],$$

kde $\mathbb{C}[A]$ pro množinu automorfizmů A značí všechny konečné $\mathbb{C}$-lineární kombinace elementů z A s komplexními koeficienty, tedy je to grupová algebra.

5.2 Symplektické twistorové operátory

V této sekci se seznámíme se symplektickými spinorovými operátory, které zavedl S. Krýsl v [13]. Podáme explicitní vyjádření nultého twistorového operátoru a popíšeme vzájemný vztah nultého twistorového operátoru na $\mathbb{R}^{2n}$ a reprezentace ϱ grupy $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$.

Definice 5.2.1. Zaveďme *symplektické twistorové operátory*

$$T_i : \Gamma(M, \mathcal{E}^{ii}) \to \Gamma(M, \mathcal{E}^{i+1,i+1}),$$

$$T_i := p^{i+1,i+1} d^{\nabla^S}|_{\Gamma(M,\mathcal{E}^{ii})}$$

pro $i = 0, \ldots, n$.

Poznámka. Operátor $\mathcal{D} := Y(\nabla^S - T_0)$ je (až na nenulový násobek) tak zvaný symplektický Diracův operátor, který zavedla K. Habermannová [8].

Buď $\phi \in \Gamma(M, \mathcal{A})$ symplektické spinorové pole, tj. sekce symplektického spinorového bandlu nad varietou M. Symplektická kovariantní derivace ∇^S lze vůči bázi $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ vyjádřit vztahem

$$\nabla^S \phi = \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} \phi. \tag{5.3}$$

Tvrzení 5.2.1. Twistorový operátor T_0 má v lokální bázi tvar

$$T(s) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s + \frac{i}{n} \sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} e_j \cdot e_l \cdot \nabla^S_{e_k} s,$$

kde $s \in \Gamma(M, \mathcal{A})$.

Důkaz. Vzorec ověříme přímým výpočtem s využitím vyjádření symplektické kovariantní derivace (5.3) a Tvrzení 5.1.3. Platí

$$
\begin{aligned}
T(s) &= p^{11}(\nabla^S s) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s - \frac{i}{n} XY\Big(\sum_{m=1}^{2n} \epsilon^m \otimes \nabla^S_{e_m} s\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s - \frac{i}{n} X\Big(\sum_{m,j,k=1}^{2n} \omega^{kj} \iota_{e_k} \epsilon^m \otimes e_j \cdot \nabla^S_{e_m} s\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s - \frac{i}{n} X\Big(\sum_{m,j,k=1}^{2n} \omega^{kj} \delta^m_k \otimes e_j \cdot \nabla^S_{e_m} s\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s - \frac{i}{n} X\Big(\sum_{j,k=1}^{2n} \omega^{kj} e_j \cdot \nabla^S_{e_k} s\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s + \frac{i}{n}\Big(\sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} e_l \cdot e_j \cdot \nabla^S_{e_k} s\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s + \frac{i}{n}\Big(\sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} (e_j \cdot e_l \cdot \nabla^S_{e_k} s - i\omega(e_l, e_j) \nabla^S_{e_k} s)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s + \frac{i}{n} \sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} e_j \cdot e_l \cdot \nabla^S_{e_k} s + \frac{1}{n} \sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} \omega_{lj} \nabla^S_{e_k} s \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s + \frac{i}{n} \sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} e_j \cdot e_l \cdot \nabla^S_{e_k} s + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s \\
&= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \nabla^S_{e_k} s + \frac{i}{n} \sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} e_j \cdot e_l \cdot \nabla^S_{e_k} s,
\end{aligned}
$$

což je dokazované. □

5.2.1 Invariance některých operátorů

Jako motivaci, byť se to této práce netýká, nejdříve ukážeme, že Laplaceův operátor Δ na $\mathbb{R}^n$ je invariantní vůči $\mathrm{O}(n)$ transformacím a že d'Alembertův operátor $\Box$ je invariantní vůči transformacím $\mathrm{O}(3,1)$. Pojem invariance vůči nějakým transformacím někdy dává nástroj k hledaní vlastností řešení příslušných parciálních diferenciálních rovnic.

Nejprve připomeneme ortogonální grupu, která je složena z rotací a zrcadlení eukleidovského prostoru společně s operací skládání.

Definice 5.2.2. Nechť V je reálný vektorový prostor s nedegenerovanou symetrickou bilineární formou g. *Ortogonální grupa* $\mathrm{O}(V,g)$ je množina všech lineárních zobrazení $A : V \to V$ splňujících $g(v,w) = g(Av, Aw)$ pro všechna $v, w \in V$.

Poznámka. Pro reálný vektorový prostor V dimenze $p+q$ s formou g signatury (p,q) značíme příslušnou ortogonální grupu $\mathrm{O}(p,q)$.

Poznámka. Nechť V je vektorový prostor dimenze n a uvažujme formu $g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, kde $x, y \in V$ mají vůči ortonormální bázi prostoru V souřadnice $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Pak je ortogonální grupa $\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ grupou ortogonálních matic, tj.

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n); AA^T = A^T A = I\}. \tag{5.4}$$

Poznámka. Grupa $\mathrm{O}(3,1)$ se nazývá *Lorentzova grupa*. Jde o grupu všech transformací Minkowského časoprostoru, které nemění složky Minkowského tenzoru η. První složka souřadnic ve čtyřdimenzionálním Minkowského prostoru je takzvaná časová souřadnice a tradičně se označuje x^0, další tři souřadnice označené x^1, x^2, x^3 jsou takzvané prostorové souřadnice.

Dále stručně připomeňme pojmy gradient a divergence potřebné k definici Laplaceova operátoru. Mohli bychom se pohybovat na Riemannově varietě, kde máme metriku potřebnou k zavedení těchto pojmů, ale pro naše účely se omezíme jen na eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$.

Definice 5.2.3. *Gradient* hladké funkce f na hladké varietě se skalárním součinem je jediné vektorové pole, které splňuje $\langle \mathrm{grad}(f), Y \rangle = (df)(Y) = Yf$ pro každé vektorové pole Y, kde df značí vnější derivaci funkce f. Pro $\mathbb{R}^n$ s kartézskými souřadnicemi $(x^1, \ldots, x^n)$ je gradient funkce f tvaru

$$\mathrm{grad}(f) := \Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\Big).$$

Definice 5.2.4. *Divergence vektorového pole* $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ s kartézskými souřadnicemi $(x^1, \ldots, x^n)$ je

$$\operatorname{div} X := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^i},$$

kde $X^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, n$.

Definice 5.2.5. *Laplaceův operátor* funkce f je definován předpisem

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Rozepsáním do kartézských souřadnic v $\mathbb{R}^n$ dostáváme

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}.$$

Následující tvrzení říká, že Laplaceův operátor je invariantní vůči $\mathrm{O}(n)$ transformacím.

Tvrzení 5.2.2. Pro každou funkci $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ a každé $A \in \mathrm{O}(n)$ platí

$$\Delta[r(A)f] = r(A)\Delta f,$$

kde $[r(A)f](x) := f\big(A^{-1}(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathrm{O}(n)$.

Důkaz. Složky matice A^{-1} označme $a^i{}_j$ a $f(y) := f(A^{-1}x)$ $\big(= [r(A)f](x)\big)$, kde $y^i := a^i{}_j x^j$. Podle řetízkového pravidla platí

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{i=1}^n a^i{}_j \frac{\partial}{\partial y^i},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (x^k)^2} = \sum_{i=1}^n a^i{}_k \frac{\partial}{\partial y^i}\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}\Big) = \sum_{i,j=1}^n a^i{}_k a^j{}_k \frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Matice A^{-1} je ortogonální, a proto pro její složky platí $\sum_{k=1}^n a^i{}_k a^j{}_k = \delta^{ij}$, jak plyne z (5.4). Celkově dostáváme

$$\begin{aligned}\Delta[r(A)f](x) = \Delta\big(f(A^{-1}x)\big) &= \sum_{i,j,k=1}^n a^i{}_k a^j{}_k \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}(y) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial (y^i)^2}(y) = \Delta f(y) = r(A)[\Delta f](x),\end{aligned}$$

což je kýžený výsledek. □

Analogickým operátorem k Laplaceově operátoru v Minkowského časoprostoru je *d'Alembertův operátor* $\Box$, někdy též nazývaný *vlnový operátor*. Je dán předpisem

$$\Box := -\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2}.$$

(Značení viz v poznámce o Lorenzově grupě.) Ukážeme, že $\Box$ je invariantní vůči transformacím $\mathrm{O}(3,1)$.

Tvrzení 5.2.3. Pro každou funkci $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4)$ a pro každé $B \in \mathrm{O}(3,1)$ platí

$$\Box[r(B)f] = r(B)\Box f.$$

Důkaz. Pro složky $b^i{}_k$ matice B^{-1} platí $\sum_{k=0}^3 b^i{}_k b^j{}_k = \eta^{ij}$. Podobně jako v důkazu předchozí věty díky rovnosti $\frac{\partial^2}{\partial^2 x^k} = \sum_{i,j=0}^3 b^i{}_k b^j{}_k \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}$ získáme

$$\begin{aligned}\Box[r(B)f(x)] = \sum_{i,j,k=0}^3 b^i{}_k b^j{}_k \frac{\partial f}{\partial y^i \partial y^j}(y) &= \sum_{i,j=0}^3 \eta^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^i \partial y^j}(y) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial (y^i)^2}(y) - \frac{\partial^2 f}{\partial (y^0)^2}(y) = \big(\Box f\big)(y) = r(B)[\Box f](x),\end{aligned}$$

což bylo třeba dokázat. □

Zaveďme nyní pojem harmonické funkce.

Definice 5.2.6. Funkce $f : U \to \mathbb{R}$, kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, splňující $\Delta f = 0$ se nazývá *harmonická funkce* na U.

Tvrzení 5.2.4. Každá harmonická funkce $f : D \to \mathbb{R}$, kde D je otevřený kruh v $\mathbb{C}$, je reálnou respektive imaginární částí nějaké holomorfní funkce Φ na D.

Důkaz. Mějme funkci $u : D \to \mathbb{R}$, která splňuje $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$ na D. Položme $f = (f_1, f_2) := \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, pak je $\operatorname{div} f = 0$. Díky tomu, podle I. Černého [2, str. 123], existuje funkce v na D, že $f = \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x}\right)$. Máme tedy $f_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ a $f_2 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, což jsou Cauchy-Riemannovy podmínky pro holomorfní funkce. Existuje tedy holomorfní funkce $\Phi := u+iv$, která je primitivní funkcí k funkci $F = f_1 + if_2$ v D. □

Věta 5.2.5. Nechť f je harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$, pak je f analytická funkce.

Důkaz. Funkce, jež řeší rovnici $\Delta f = 0$ na $\mathbb{R}^2$, je reálnou nebo imaginární částí holomorfní funkce na $\mathbb{C}$ podle Tvrzení 5.2.4. Funkce, které jsou holomorfní na celé komplexní rovině, jsou analytické. □

Poznámka. Tomuto výsledku se někdy říká regularita pro Laplaceův operátor.

5.2.2 Invariance twistorového operátoru T_0 na $\mathbb{R}^{2n}$

Zaměřme nyní naši pozornost na invarianci symplektického twistorového operátoru T_0 na $\mathbb{R}^{2n}$ vůči $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$-transformacím daným reprezentací ϱ grupy $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$.

Tvrzení 5.2.6. Pro symplektický twistorový operátor na $\mathbb{R}^{2n}$ platí

$$\big\{T_0[\varrho(g)f]\big\}(x) = \big[\varrho(g)(T_0 f)\big](x).$$

kde ϱ je reprezentace grupy $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$.

Důkaz. Podle Poznámky za Větou 4.4.1 symplektická kovariantní spinorová derivace na reálném prostoru splývá s parciální derivací, a tak podle Tvrzení 5.2.1 má symplektický twistorový operátor pro $(x^1, \ldots, x^{2n}) = x \in \mathbb{R}^{2n}$ a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ tvar

$$(T_0 f)(x) = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} f(x) + \frac{i}{n} \sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} e_j \cdot e_l \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} f(x).$$

Tvrzení ověříme přímým výpočtem. Buď $g \in \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$. Rozepišme nejprve levou stranu L dokazované rovnosti. Platí

$$\begin{aligned}
L = \big\{T_0[\tilde{\varrho}(g)f]\big\}(x) &= T_0[\varrho(g) f(\lambda(g)^{-1}x)] = T_0\big\{\mathfrak{m}(g)\big[f\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\big]\big\} \\
&= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \sum_{k=1}^{2n} \epsilon^k \otimes \mathfrak{m}(g) \frac{\partial}{\partial x^k} \big[f\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\big] \\
&\quad + \frac{i}{n} \sum_{j,k,l=1}^{2n} \epsilon^l \otimes \omega^{kj} e_j \cdot e_l \cdot \Big[\mathfrak{m}(g) \frac{\partial}{\partial x^k} \big[f\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\big]\Big].
\end{aligned}$$

Využijeme řetízkové pravidlo při derivaci složené funkce.

$$
\begin{aligned}
L = &\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\sum_{k,l=1}^{2n}\epsilon^k\otimes\mathfrak{m}(g)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^l}f\Big)\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\big[\lambda(g)^{-1}\big]^l{}_k\Big]\\
&+\frac{i}{n}\sum_{h,j,k,l=1}^{2n}\epsilon^l\otimes\omega^{kj}e_j\cdot e_l\cdot\mathfrak{m}(g)\Big[\frac{\partial}{\partial x^h}f\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\big[\lambda(g)^{-1}\big]^h{}_k\Big]\\
= &\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\sum_{k,l=1}^{2n}\epsilon^k\otimes\big[\lambda(g)^{-1}\big]^l{}_k\mathfrak{m}(g)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^l}f\Big)\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big]\\
&+\frac{i}{n}\sum_{h,j,k,l=1}^{2n}\epsilon^l\otimes\big[\lambda(g)^{-1}\big]^h{}_k\omega^{kj}e_j\cdot e_l\cdot\mathfrak{m}(g)\Big[\frac{\partial}{\partial x^h}f\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big]
\end{aligned}
$$

S využitím Lemmatu 5.0.1 upravme pravou stranu P dokazované rovnosti.

$$
\begin{aligned}
P &= \big[\tilde{\varrho}(g)(T_0f)\big](x) = \big[\varrho(g)(T_0f)\big]\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\\
&= \varrho(g)\Big[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\sum_{k=1}^{2n}\epsilon^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^k}f\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\\
&\quad+\frac{i}{n}\sum_{j,k,l=1}^{2n}\epsilon^l\otimes\omega^{kj}e_j\cdot e_l\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}f\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big]\\
&= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\sum_{k,m=1}^{2n}\big[\lambda(g)^{-1}\big]^k{}_m\epsilon^m\otimes\mathfrak{m}(g)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}f\Big)\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big]\\
&\quad+\frac{i}{n}\sum_{j,k,l,o,p,q=1}^{2n}\big[\lambda(g)^{-1}\big]^l{}_o\epsilon^o\otimes\omega^{kj}e_p\big[\lambda(g)\big]^p{}_j\cdot e_q\big[\lambda(g)\big]^q{}_l\cdot\mathfrak{m}(g)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}f\Big)\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big]\\
&= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\sum_{k,m=1}^{2n}\big[\lambda(g)^{-1}\big]^k{}_m\epsilon^m\otimes\mathfrak{m}(g)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}f\Big)\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big]\\
&\quad+\frac{i}{n}\sum_{j,k,o,p,q=1}^{2n}\delta^q_o\epsilon^o\otimes\omega^{kj}\big[\lambda(g)\big]^p{}_je_p\cdot e_q\cdot\mathfrak{m}(g)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}f\Big)\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big]
\end{aligned}
$$

Pro všechny $A\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ platí $J_0A^T = A^{-1}J_0$, a proto pro $\lambda(g)\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ platí

$$
\sum_{j=1}^{2n}\omega^{kj}\big[\lambda(g)\big]^p{}_j = \sum_{j=1}^{2n}\omega^{kj}\big[\lambda(g)^T\big]_j{}^p = \sum_{r=1}^{2n}\big[\lambda(g)^{-1}\big]^k{}_r\omega^{rp},
$$

pročež dostáváme

$$
\begin{aligned}
P = &\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\sum_{k,m=1}^{2n}\big[\lambda(g)^{-1}\big]^k{}_m\epsilon^m\otimes\mathfrak{m}(g)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}f\Big)\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big]\\
&+\frac{i}{n}\sum_{k,p,q,r=1}^{2n}\epsilon^q\otimes\big[\lambda(g)^{-1}\big]^k{}_r\omega^{rp}e_p\cdot e_q\cdot\mathfrak{m}(g)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}f\Big)\big(\lambda(g)^{-1}x\big)\Big].
\end{aligned}
$$

Očividně se rozepsaná pravá strana P rovná rozepsané levé straně L. $\square$

5.3 Symplektický twistorový operátor T_0 na $\mathbb{R}^2$

V této sekci naši pozornost zaměříme na operátor T_0 definovaný na varietě $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ se standardní metaplektickou strukturou. Poznamenejme, že metodami algebraické topologie lze dokázat, že jiná než triviální metaplektická struktura na $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ neexistuje. Podáme explicitní popis působení operátoru T_0 a nalezneme rovnici pro jeho jádro.

Pro zjednodušení označujme formu ω_0 dále jen ω. Souřadnice na $\mathbb{R}^2$ označme x, y. Proměnnou v symplektických spinorech $\mathbf{A}$ označme q. Prvky symplektické báze tečného prostoru k $\mathbb{R}^2$ označme e_1, e_2. (Platí $\mathbb{R}^2 \cong T_p\mathbb{R}^2$ pro každý bod $p \in \mathbb{R}^2$.) Prvky báze působí na symplektické spinory následovně:

$$e_1 \cdot \varphi = iq\varphi,$$

$$e_2 \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial q}.$$

Pokud se pohybujeme v plochém reálném prostoru, symplektické spinorové kovariantní derivace ve směrech e_1 a e_2 odpovídají podle Poznámky za Větou 4.4.1 parciálním derivacím podle příslušných proměnných, tj.

$$\nabla_{e_1}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\nabla_{e_2}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Poznámka. Zřejmě platí $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \supseteq \Gamma(\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$, což budeme v dalším využívat při identifikaci symplektických spinorů $s \in \Gamma(\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$ s některými elementy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. To jest budeme používat takové komplexní funkce tří reálných proměnných $\varphi(x, y, q) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, že $\varphi(x, y, \cdot)$ je pro pevná $x, y \in \mathbb{R}$ funkce z $\mathbf{A}$. Tedy funkci $\varphi(x, y, q)$ pro pevná x, y můžeme identifikovat s odpovídající funkcí $\psi(x, y) \in \mathbf{A}$ proměnné q, tj. $\varphi(x, y, q) = \big(\psi(x, y)\big)(q)$.

Věta 5.3.1. Symplektický twistorový operátor $T_0 : \Gamma(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}) \to \Gamma(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{2n*} \otimes \mathbf{A})$ má pro $\varphi(x, y, q) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ tvar

$$T_0\varphi = \epsilon^1 \otimes \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - q\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial x} + iq^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big) + \epsilon^2 \otimes \Big(2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial^3 \varphi}{\partial q^2 \partial x} + q\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial y}\Big). \quad (5.5)$$

Důkaz. Podle poznámky před touto větou definujme komplexní funkci tří reálných proměnných $\varphi(x, y, q)$, která je pro zafixované $x, y \in \mathbb{R}$ z prostoru $\mathbf{A}$ (v proměnné q). Rozepišme vyjádření symplektického twistorového operátoru z Tvrzení 5.2.1 pro $n = 1$:

$$\begin{aligned} T_0(\varphi) = 2\Big(\epsilon^1 \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \epsilon^2 \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big) \\ + i\Big(\epsilon^1 \otimes \big(\omega^{12} e_2 \cdot e_1 \cdot \nabla^S_{e_1}\varphi + \omega^{21} e_1 \cdot e_1 \cdot \nabla^S_{e_2}\varphi\big) \\ + \epsilon^2 \otimes \big(\omega^{12} e_2 \cdot e_2 \cdot \nabla^S_{e_1}\varphi + \omega^{21} e_1 \cdot e_2 \cdot \nabla^S_{e_2}\varphi\big)\Big). \end{aligned}$$

Dosaďme působení báze tečného prostoru pomocí symlektického Cliffordova násobení a příslušné parciální derivace místo kovariantních spinorových derivací do vyjádření symplektického twistorového operátoru. Připomeňme, že dle našich konvencí je $\omega^{12} = 1$ a $\omega^{21} = -1$.

$$\begin{aligned}
&2\epsilon^1 \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\epsilon^2 \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&\quad + i\Big(\epsilon^1 \otimes \Big(\frac{\partial}{\partial q}\cdot iq \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - iq\cdot iq\cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big) + \epsilon^2 \otimes \Big(\frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} - iq\cdot\frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)\Big) \\
&= 2\epsilon^1 \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\epsilon^2 \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&\quad + i\Big(\epsilon^1 \otimes \Big(i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + iq\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial x} + q^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big) + \epsilon^2 \otimes \Big(\frac{\partial^3\varphi}{\partial q^2\partial x} - iq\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial y}\Big)\Big) \\
&= \epsilon^1 \otimes \Big(2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} - q\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial x} + iq^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big) + \epsilon^2\otimes\Big(2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial^3\varphi}{\partial q^2\partial x} + q\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial y}\Big),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

z čehož plyne dokazované. □

Tvrzení 5.3.2. Jádro twistorového operátoru T_0 je popsáno rovnicí

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - q\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial x} + iq^2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \tag{5.7}$$

pro $\varphi(x,y,q) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$, pokud $\psi(x,y) = \varphi(x,y,\cdot) \in \mathbf{A}$ pro všechny $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Důkaz. V jádru symplektického twistorového operátoru jsou takové $\psi \in \Gamma(\mathbb{R}^2, \mathbf{A})$, které splňují rovnici $T_0\psi = 0$. Podle Poznámky před Větou 5.3.1 definujme komplexní funkci tří reálných proměnných $\varphi(x,y,q) := \big(\psi(x,y)\big)(q)$, která je v proměnné q z prostoru $\mathbf{A}$ pro zafixované $x, y \in \mathbb{R}$.

Vyjděme z vyjádření (5.5). Prvky ϵ^1 a ϵ^2 jsou na sobě nezávislé, a tak pokud položíme $T_0\varphi = 0$, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} - q\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial x} + iq^2\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 0, \\
2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial^3}{\partial^2 q\partial x} + q\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial y} &= 0.
\end{aligned}$$

První rovnice je pro ϵ^1 a druhá pro ϵ^2. Druhá rovnice je důsledkem první, protože se z první dostane zderivováním podle q a vynásobením $\frac{-i}{q}$, jak se lze snadno přesvědčit. □

Příklad 16. Pro operátor T_0 na $\mathbb{R}^2$ a prvek $K \in \mathrm{Mp}(2n,\mathbb{R})$ takový jeden ze dvou prvků, které λ zobrazuje na J_0 a zároveň $\mathfrak{m}(K)$ je Fourierova transformace, ukažme explicitně rovnost z tvrzení 5.2.6

$$\big\{T_0[\varrho(K)f]\big\}(x,y,q) = \big[\varrho(K)(T_0 f)\big](x,y,q).$$

Fourierova transformace $\mathcal{F}$ působí v proměnné q, kterou převádí na proměnou ξ. Reprezentace $\varrho(K)$ působí na proměnné takto $\big(\lambda(g)^{-1}(x,y,q)\big) = \big(J_0^{-1}(x,y),\xi\big) =$

$(-y, x, \xi)$. Označme $L := \big\{T_0[\varrho(K)f]\big\}(x, y, q)$ levou stranu rovnosti a $P := \big[\varrho(K)(T_0 f)\big](x, y, q)$ pravou stranu rovnosti. Platí

$$\begin{aligned}
L &= T_0\big[\varrho(K)f(-y, x, \xi)\big] = T_0\big[\mathcal{F}f(-y, x, \xi)\big] \\
&= \epsilon^1 \otimes \Big(\frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial - y} - \xi \frac{\partial^2 \mathcal{F}f}{\partial \xi \partial - y} + i\xi^2 \frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x}\Big)(-y, x, \xi) \\
&\quad + \epsilon^2 \otimes \Big(2\frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 \mathcal{F}f}{\partial \xi \partial x} + i \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial - y}\Big)(-y, x, \xi) \\
&= \epsilon^1 \otimes \Big(- \frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial y} + \xi \frac{\partial^2 \mathcal{F}f}{\partial \xi \partial y} + i\xi^2 \frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x}\Big)(-y, x, \xi) \\
&\quad + \epsilon^2 \otimes \Big(2\frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 \mathcal{F}f}{\partial \xi \partial x} - i \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial y}\Big)(-y, x, \xi).
\end{aligned}$$

Pro úpravu pravé strany použijeme vyjádření (5.6) operátoru T_0 z důkazu Věty 5.3.1.

$$\begin{aligned}
P &= \varrho(K)\big[(T_0 f)(x, y, q)\big] \\
&= \varrho(K)\Bigg[\epsilon^1 \otimes \bigg(2\frac{\partial f}{\partial x} + i\Big(\frac{\partial}{\partial q} \cdot iq \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - iq \cdot iq \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\bigg)(x, y, q) \\
&\quad + \epsilon^2 \otimes \bigg(2\frac{\partial f}{\partial y} + i\Big(\frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - iq \cdot \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\bigg)(x, y, q)\Bigg] \\
&= \lambda(K)^* \epsilon^1 \otimes \mathcal{F}\bigg(2\frac{\partial f}{\partial x} + i\Big(\frac{\partial}{\partial q} \cdot iq \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - iq \cdot iq \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\bigg)(-y, x, q) \\
&\quad + \lambda(K)^* \epsilon^2 \otimes \mathcal{F}\bigg(2\frac{\partial f}{\partial y} + i\Big(\frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - iq \cdot \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\bigg)(-y, x, q)
\end{aligned}$$

Fourierova transformace v proměnné q komutuje s parciálními derivacemi v proměnných x a y a platí pro ni $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial q}) = i\xi$, $\mathcal{F}(iq) = -\frac{\partial}{\partial \xi}$. Protože platí $\lambda(K)^* \epsilon^k = J_0^* \epsilon^k = \sum_{l=1}^{2} \big[J_0^{-1}\big]^k{}_l \epsilon^l$ viz 5.0.1 pro $k = 1, 2$, je $\lambda(K)^* \epsilon^1 = \epsilon^2$ a $\lambda(K)^* \epsilon^2 = -\epsilon^1$.

$$\begin{aligned}
P = \epsilon^2 &\otimes \bigg(2\frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x} + i\Big(i\xi \cdot \Big[-\frac{\partial}{\partial \xi}\Big] \cdot \frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x} - \Big[-\frac{\partial}{\partial \xi}\Big] \cdot \Big[-\frac{\partial}{\partial \xi}\Big] \cdot \frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial y}\Big)\bigg)(-y, x, xi) \\
&- \epsilon^1 \otimes \bigg(2\frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial y} + i\Big(i\xi \cdot i\xi \cdot \frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x} - \Big[-\frac{\partial}{\partial \xi}\Big] \cdot i\xi \cdot \frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial y}\Big)\bigg)(-y, x, xi) \\
&= \epsilon^2 \otimes \Big(2\frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 \mathcal{F}f}{\partial \xi \partial x} - i \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial y}\Big)(-y, x, \xi) \\
&\quad - \epsilon^1 \otimes \Big(\frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial y} - \xi \frac{\partial^2 \mathcal{F}f}{\partial \xi \partial y} - i\xi^2 \frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial x}\Big)(-y, x, \xi)
\end{aligned}$$

Jak se snadno přesvědčíme, levá strana se rovná pravé.

Definice 5.3.1. Pro každý $L, M \in \mathrm{End}(\mathbf{A})$ zaveďme *komutátor* dvou endomorfismů L, M

$$[L, M] := LM - ML,$$

a *antikomutátor* dvou endomorfismů L, M

$$\{L, M\} := LM + ML.$$

Definujme operátor

$$H := -\frac{1}{4\pi^2}\triangle_q + q^2,$$

kde $\triangle_q$ značí Laplaceův operátor v proměnné q a člen q^2 označuje operátor násobení funkcí q^2. Dále definujme *Eulerův operátor*

$$E := q\frac{\partial}{\partial q}.$$

Pokud budeme chtít zdůraznit proměnnou, v jaké je Eulerův operátor, použijeme dolní index, např. E_q.

Z definice lze snadno ověřit, že operátory H a E jsou spojitě definované na prostoru $\mathbf{A}$.

Lemma 5.3.3. V $\mathrm{End}(\mathbf{A})$ platí následující relace:

1) $\{\mathcal{F}, E\} = -\mathcal{F}$

2) $\{\mathcal{F}, q^2\} = H\mathcal{F}$

3) $[H, \mathcal{F}] = 0,$

kde $\mathcal{F}$ značí Fourierovu transformaci na prostoru $\mathbf{A}$.

Důkaz. Pro $f \in \mathbf{A}$ ověříme lemma přímým výpočtem.

1) K ověření vztahu

$$\mathcal{F}\big(E_q f(q)\big)(h) + E_h\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h) = -\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h)$$

stačí spočítat

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(E_q f(q)\big) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iqh} q\frac{\partial}{\partial q} f(q)dq \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iqh} f(q)dq + 2\pi ih\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iqh} qf(q)dq \\
&= -\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h) + 2\pi ih\frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial h}\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h) \\
&= -\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h) - E_h\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h).
\end{aligned}$$

2) Díky tomu, že je

$$\mathcal{F}\big(q^2 f(q)\big)(h) = \Big(\frac{i}{2\pi}\Big)^2\frac{\partial^2}{\partial h^2}\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h),$$

platí i dokazovaný vztah

$$\mathcal{F}\big(q^2 f(q)\big)(h) + h^2\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h) = \Big(-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial h^2} + h^2\Big)\mathcal{F}\big(f(q)\big)(h).$$

3) Spočtěme

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(Hf(g)\big)(h) &= \mathcal{F}\Big(-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2 f(q)}{\partial q^2} + q^2 f(q)\Big)(h)\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}(2\pi i h)^2 \mathcal{F}\big(f(q)\big)(h) + \Big(\frac{i}{2\pi}\Big)^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2}\mathcal{F}\big(f(g)\big)(h)\\
&= h^2\mathcal{F}\big(f(g)\big)(h) - \frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\mathcal{F}\big(f(g)\big)(h)\\
&= H\mathcal{F}\big(f(g)\big)(h),
\end{aligned}$$

což je kýžený výsledek.

□

Věta 5.3.4. Pro prvky φ z jádra twistorového symplektického operátoru T_0 na $\mathbb{R}^2$ platí následující rovnost

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Důkaz. Vycházíme z rovnice (5.7)

$$\varphi_x - E\varphi_x + iq^2\varphi_y = 0,$$

kde značíme parciální derivace podle x, y jen spodním indexem. Aplikací Fourierovy transformace na předchozí rovnici dostaneme:

$$\mathcal{F}(\varphi_x - E\varphi_x + iq^2\varphi_y) = 0. \tag{5.8}$$

Fourierova transformace je lineární, a proto rovnice (5.8) implikuje

$$\mathcal{F}\varphi_x - \mathcal{F}E\varphi_x + i\mathcal{F}q^2\varphi_y = 0. \tag{5.9}$$

Z invariance symplektického twistorového operátoru by mělo platit:

$$\mathcal{F}\varphi_{x'} - E\mathcal{F}\varphi_{x'} + iq^2\mathcal{F}\varphi_{y'} = 0, \tag{5.10}$$

kde $x' = -y$ a $y' = x$ (viz Příklad 16). Rovnice (5.9) a (5.10) sečteme a získáme

$$2\mathcal{F}\varphi_x - \mathcal{F}E\varphi_x - E\mathcal{F}\varphi_x + i\mathcal{F}q^2\varphi_y + iq^2\mathcal{F}\varphi_y = 0.$$

Jelikož $\{E, \mathcal{F}\} = -\mathcal{F}$, získáme

$$\begin{aligned}
3\mathcal{F}\varphi_x + i\mathcal{F}q^2\varphi_y + iq^2\mathcal{F}\varphi_y &= 0\\
3\mathcal{F}\varphi_x + iH\mathcal{F}\varphi_y &= 0.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Využijeme toho, že předchozí rovnice platí i pro zaměněné proměnné $x \to -y$ a $y \to x$. Tedy

$$3\mathcal{F}\varphi_{-y} + iH\mathcal{F}\varphi_x = 0. \tag{5.12}$$

Zderivujme rovnici (5.11) podle x a rovnici (5.12) podle $-y$ dostaneme:

$$\begin{aligned}
3\mathcal{F}\varphi_{xx} + iH\mathcal{F}\varphi_{xy} &= 0\\
3\mathcal{F}\varphi_{-y-y} + iH\mathcal{F}\varphi_{x-y} &= 0
\end{aligned}$$

Pro derivaci platí $\varphi_y = -\varphi_{-y}$, z čehož plyne rovnost

$$\mathcal{F}\varphi_{yy} + \mathcal{F}\varphi_{xx} = 0.$$

Jelikož je Fourierova transformace podle Věty 2.2.6 bijekce na **A**, je i

$$\varphi_{yy} + \varphi_{xx} = 0,$$

což bylo dokázat. □

Tvrzení 5.3.5. Nechť platí $T_0\varphi = 0$ pro $\varphi \in \Gamma(\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$, pak je φ analytická funkce v proměnných x, y.

Důkaz. Podle minulého Tvrzení 5.3.4 platí $\varphi_{yy} + \varphi_{xx} = 0$ pro řešení φ twistorové rovnice, což znamená, že φ je harmonická v x, y, tj. platí $\Delta\varphi = 0$. Podle Věty 5.2.5 je pak φ analytická v proměnných x a y. □

Poznámka. Předchozímu tvrzení říkáme regularita symplektického twistorového operátoru T_0. Navíc zřejmě stačí pro analytičnost φ v proměnných x, y předpoklad jeho $\mathcal{C}^2$-chování vůči těmto proměnným.

6. Některá řešení twistorové symplektické rovnice

V této kapitole se budeme snažit nalézt alespoň část jádra symplektického twistorového operátoru T_0 na $\mathbb{R}^{2n}$. To jest budeme hledat řešení rovnice (5.7) popisující jádro T_0.

Jádro symplektického twistorového operátoru T_0 na $\mathbb{R}^2$ tvoří reprezentaci metapletktické grupy $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{R})$.

Lemma 6.0.1. Nechť ρ je reprezentace grupy G na prostoru E. Nechť A je spojitý operátor invariantní vůči reprezentaci ρ grupy G na prostoru E. Pak $\operatorname{Ker} A \subset E$ je G-invariantní podprostor.

Důkaz. Jádro spojitého operátoru je uzavřený podprostor. Díky invarianci operátoru A vůči reprezentaci ρ grupy G platí $\rho(g) \circ A = A \circ \rho(g)$ pro všechna $g \in G$. Nechť $a \in \operatorname{Ker} A$, pak pro všechna $g \in G$ je $A\big(\rho(g)(a)\big) = \rho(g)[A(a)] = 0$. To jest $\rho(g)(a) \in \operatorname{Ker} A$, tedy $\operatorname{Ker} A$ je uzavřený na akci grupy G. □

Podobně jako v teorii diferenciálních operátorů na Schwartzově prostoru se ukáže, že i operátor T_0 je na $\mathbf{A}$ spojitý. Operátor T_0 je tedy spojitý na $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{A})$ a podle Tvrzení 5.2.6 je invariantní vůči reprezentaci ρ grupy $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{R})$ na $\mathbf{A}$. Proto je jeho jádro $\mathrm{Mp}(2,\mathbb{R})$-invariantní podprostor v $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{A})$.

Připomeňme, že podle Tvrzení 5.3.2 je jádro symplektického twistorového operátoru popsáno rovnicí (5.7):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - q\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial x} + iq^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Uveďme několik řešení této rovnice, která jsou nasnadě, jež jsou v proměnné q z prostoru $\mathbf{A}$.

Tvrzení 6.0.2. Funkce

$$\varphi(x,y,q) = e^{-q^{2j}} q\big(x + 2jiq^{2j-2}y\big)$$

pro $j \in \mathbb{N}$ řeší rovnici (5.7) pro jádro symplektického twistorového operátoru T_0, kde x, y a $q \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Ověříme přímým výpočtem, že

$$\begin{aligned} T_0(\varphi) &= e^{-q^{2j}} q - q\big(e^{-q^{2j}} - 2e^{-q^{2j}} jq^{2j}\big) - 2e^{-q^{2j}} jq^{1+2j} \\ &= e^{-q^{2j}}\big(q - q + 2jq^{1+2j} - 2jq^{1+2j}\big) = 0, \end{aligned}$$

což bylo dokázat. □

Tvrzení 6.0.3. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, funkce

$$\varphi(x,y,q) = e^{-\frac{q^2}{2}}\big(q^n(x+iy) - q^{n-2}(n-1)iy\big)$$

je řešením rovnice (5.7) pro jádro symplektického twistorového operátoru T_0.

Důkaz. Tvrzení plyne z přímého dosazení do rovnice (5.7).

$$\begin{aligned} T_0(\varphi) &= e^{-\frac{q^2}{2}} q^n - q e^{-\frac{q^2}{2}} (n q^{n-1} - q^{n+1}) + i q^2 e^{-\frac{q^2}{2}} \left(i q^n - i(n-1) q^{n-2} \right) \\ &= e^{-\frac{q^2}{2}} \left(q^n - n q^n + q^{n+2} - q^{n+2} + (n-1) q^n \right) = 0, \end{aligned}$$

což je kýžený výsledek. □

Podle Tvrzení 5.3.5 víme, že řešení symplektické twistorové rovnice (5.7) jsou analytické funkce v proměnných x, y, budeme proto dále hledat řešení rovnice ve tvaru

$$e^{-\frac{q^2}{2}} \sum_{k,j,n=0}^{\infty} a_{k,j,n} x^k y^j q^n.$$

Dosazení tohoto výrazu do rovnice (5.7) dostaneme

$$\begin{aligned} e^{-\frac{q^2}{2}} \Big(&\sum_{n,j=0,k=1}^{\infty} k a_{k,j,n} x^{k-1} y^j q^n - \sum_{j=0,k,n=1}^{\infty} k n a_{k,j,n} x^{k-1} y^j q^n \\ &+ \sum_{j,n=0,k=1}^{\infty} k a_{k,j,n} x^{k-1} y^j q^{n+2} + i \sum_{k,n=0,j=1}^{\infty} j a_{k,j,n} x^k y^{j-1} q^{n+2} \Big) = 0. \end{aligned}$$

Aby byla levá strana rovnice rovna nule, musí být nulový každý výraz u $x^k y^j q^n$ pro příslušná $k, j, n \in \mathbb{N}$, z čehož dostáváme pro $n > 2$ rovnice

$$(k+1)\big((1-n)a_{k+1,j,n} + a_{k+1,j,n-2}\big) + i(j+1)a_{k,j+1,n-2} = 0. \qquad (6.1)$$

Poznámka. Povšimněme si, že rovnice (5.7) je homogenní v x, y. Tím máme na mysli, že pokud rovnici řeší $\varphi(x, y, q)$, pak je řešením i $\varphi(\mu x, \mu y, q)$ pro všechna nenulová $\mu \in \mathbb{C}$. Tuto podmínku splňují homogenní polynomy $\sum_{j=0}^{k} a_j x^j y^{k-j}$. V dalším textu budeme hledat řešení ve tvaru homogenního polynomu v proměnným x a y a rozebereme řešení konstantní, lineární, kvadratické a vyšší homogenity v x, y. Rovnici (5.7) pak jistě řeší lineární kombinace takovýchto řešení.

Poznámka. Dále si povšimněme, že rovnice (5.7) zachovává paritu v q. Tento fakt souvisí s tím, že prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$ a potažmo i $\mathbf{A}$ se rozkládá na sudé a liché funkce. Takže se symplektický operátor rozkládá na dva operátory, jeden působící na lichých T_- a druhý T_+ působící na sudých funkcích v proměnné q. Kromě první a poslední podkapitoly se zaměříme v dalších úvahách jen na operátor T_-, budeme tedy hledat řešení v lichých funkcích v proměnné q

6.1 Konstantní řešení

Jak je snadno nahlédneme, rovnici (5.7) řeší každá funkce konstantní v x, y. Prostor řešení je tedy celé $\mathbf{A}$.

6.2 Lineární řešení

V této sekci hledáme řešení, které je tvaru

$$e^{-\frac{q^2}{2}} \Big[(A_1 q + A_3 q^3 + A_5 q^5 + \ldots) x + (B_1 q + B_3 q^3 + B_5 q^5 + \ldots) y \Big]. \qquad (6.2)$$

Lemma 6.2.1. Koeficienty A_n a B_n z (6.2) pro liché n splňují následující rovnici

$$(1-n)A_n + A_{n-2} + iB_{n-2} = 0$$

nebo upravenou

$$A_n = \frac{1}{n-1}\big(A_{n-2} + iB_{n-2}\big).$$

Důkaz. Pokud hledáme lineární řešení v x, y, musíme položit ve vztahu (6.1) $k = 0$ a $j = 0$. Dostaneme rovnici

$$(1-n)a_{1,0,n} + a_{1,0,n-2} + ia_{0,1,n-2} = 0.$$

Zřejmě $A_n = a_{1,0,n}$ je koeficient u xq^n a $B_n = a_{0,1,n}$ je koeficient u yq^n. $\square$

Povšimněme si, že koeficient A_n závisí jen na volbě $A_1, B_1, B_3, \ldots, B_{n-2}$.

Tvrzení 6.2.2. Koeficienty A_n a B_n z (6.2) splňují

$$A_n = \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} A_1 + i \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p+1} B_{n-2j}.$$

Důkaz. Vztah dokažme indukcí podle n s indukčním krokem délky 2. (Uvažujeme pouze liché funkce v proměnné q.) Hodnotu koeficientu A_1 volíme libovolně. Pro $n = 3$ je

$$A_3 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{i}{2}B_1 = \prod_{j=1}^{1} \frac{1}{3-2j+1} A_1 + i \sum_{j=1}^{1} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{3-2p+1} B_{3-2j}$$

Nechť vztah platí pro $n-2$, dokažme jej pro n.

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n-1}(A_{n-2} + iB_{n-2}) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n-2j-1} A_1 + i \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p-1} B_{n-2-2j}\right) + \frac{i}{n-1} B_{n-2} \\
&= \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} A_1 + i \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n-1} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p-1} B_{n-2-2j} + \frac{i}{n-1} B_{n-2} \\
&= \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} A_1 + i \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \prod_{p=1}^{j+1} \frac{1}{n-2p+1} B_{n-2-2j} + \frac{i}{n-1} B_{n-2} \\
&= \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} A_1 + i \sum_{j=2}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p+1} B_{n-2j} + \frac{i}{n-1} B_{n-2},
\end{aligned}$$

z čehož plyne dokazované. $\square$

Další tvrzení dává popis řešení, která jsou tvaru $e^{-\frac{q^2}{2}}$ krát polynom v q s nejvyšším exponentem m.

Tvrzení 6.2.3. Řešení tvaru

$$e^{-\frac{q^2}{2}}\Big[x\sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} A_{2j-1}q^{2j-1} + y\sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} B_{2j-1}q^{2j-1}\Big]$$

pro $m > 2$ je určeno volbou $\frac{m+1}{2}$ hodnot $A_1, B_1, B_3, \ldots, B_{m-2}$.

Důkaz. Pokud hledáme řešení tvaru $e^{-\frac{q^2}{2}}$ krát polynom v q s nejvyšším exponentem q^m, požadujeme, aby $A_{m+2}, A_{m+4}, \ldots$ a $B_{m+2}, B_{m+4}, \ldots$ byla nulová. Také požadujeme, aby platilo

$$0 = A_{m+2} = \frac{1}{m+1}\big(A_m + iB_m\big).$$

Tedy B_m se musí rovnat iA_m. Proto je řešení určeno volbou $\frac{m+1}{2}$ hodnot A_1, B_1, $B_3, \ldots, B_{m-2}$. □

Příklad 17. Řešení pro $A_1 = 1, B_1 = 3i$ je

$$e^{-\frac{q^2}{2}}\Big[\big(q - q^3\big)\,x + \big(3iq - iq^3\big)\,y\Big].$$

6.3 Kvadratické řešení

V této sekci hledáme řešení, která jsou tvaru

$$e^{-\frac{q^2}{2}}\Big[(A_1q + A_3q^3 + \ldots)x^2 + (B_1q + B_3q^3 + \ldots)xy + (C_1q + C_3q^3 + \ldots)y^2\Big]. \quad (6.3)$$

Lemma 6.3.1. Pro koeficienty A_n, B_n a C_n z (6.3) (pro n liché) platí

$$\begin{aligned} 2(1-n)A_n + 2A_{n-2} + iB_{n-2} &= 0,\\ (1-n)B_n + B_{n-2} + i2C_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Rekurentní vztahy pro A_n a B_n jsou

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2(n-1)}\big(2A_{n-2} + iB_{n-2}\big),\\ B_n &= \frac{1}{n-1}\big(B_{n-2} + 2iC_{n-2}\big). \end{aligned}$$

Důkaz. Vyjdeme opět ze vztahu (6.1), ze kterého získáme soustavu příslušných rovnic. Zřejmě $A_n = a_{2,0,n}$ je koeficient u x^2q^n, $B_n = a_{1,1,n}$ je koeficient u xyq^n a $C_n = a_{0,2,n}$ je koeficient u y^2q^n. □

Povšimněme si, že koeficienty A_n a B_n dopočítáme, pokud známe $A_1, B_1, C_1, C_3, \ldots, C_{n-2}$.

Tvrzení 6.3.2. Pro koeficienty A_n, B_n a C_n z (6.3) platí

$$
\begin{aligned}
B_n &= \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} B_1 + 2i \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p+1} C_{n-2j},\\
A_n &= \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} A_1 + \frac{i}{2}\frac{n-1}{2} \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} B_1\\
&\quad - \sum_{j=2}^{\frac{n-1}{2}} (j-1) \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p+1} C_{n-2j}.
\end{aligned}
$$

Důkaz. Vztahy ověříme indukcí podle n s krokem délky 2. Hodnota koeficientů B_1 a A_1 je pevně zvolená.
Pro $n = 3$ podle vzorce z Lemmatu 6.3.1 platí

$$
B_3 = \frac{1}{2} B_1 + iC_1 = \prod_{j=1}^{1} \frac{1}{3-2j+1} B_1 + 2i \sum_{j=1}^{1} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{3-2p+1} C_{3-2j},
$$

$$
A_3 = \frac{1}{2} A_1 + \frac{i}{4} B_1 = \prod_{j=1}^{1} \frac{1}{3-2j+1} A_1 + \frac{i}{2}\frac{3-1}{2} \prod_{j=1}^{1} \frac{1}{3-2j+1} B_1.
$$

Nechť vztah platí pro $n-2$. Dokažme jej pro n.

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{n-1}\big(B_{n-2} + 2iC_{n-2}\big)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n-2j-1} B_1 + 2i \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p-1} C_{n-2-2j} \right)\\
&\quad + \frac{2i}{n-1} C_{n-2}\\
&= \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} B_1 + 2i \sum_{j=2}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p+1} C_{n-2j} + \frac{2i}{n-1} C_{n-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2(n-1)}\big(2A_{n-2} + iB_{n-2}\big)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n-2j-1} A_1 + \frac{i}{2}\frac{n-3}{2} \prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n-2j-1} B_1 \right.\\
&\quad \left. - \sum_{j=2}^{\frac{n-3}{2}} (j-1) \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p-1} C_{n-2-2j} \right)\\
&\quad + \frac{i}{2(n-1)}\left(\prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n-2j-1} B_1 + 2i \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p-1} C_{n-2-2j} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_n = & \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} A_1 + \frac{i}{2}\frac{n-3}{2} \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} B_1 \\
& - \sum_{j=3}^{\frac{n-1}{2}} (j-2) \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p+1} C_{n-2j} \\
& + \frac{i}{2} \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} B_1 - \sum_{j=2}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p+1} C_{n-2j} \\
= & \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} A_1 + \frac{i}{2}\frac{n-1}{2} \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n-2j+1} B_1 \\
& - \left(\sum_{j=3}^{\frac{n-1}{2}} (j-1) \prod_{p=1}^{j} \frac{1}{n-2p+1} C_{n-2j} + \prod_{p=1}^{2} \frac{1}{n-2p+1} C_{n-4} \right),
\end{aligned}
$$

což dává dokazované tvrzení. □

Následuje tvrzení, které popisuje řešení ve tvaru $e^{-\frac{q^2}{2}}$ krát polynom v q s nejvyšším exponentem m.

Tvrzení 6.3.3. Řešení tvaru

$$
e^{-\frac{q^2}{2}} \left[x^2 \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} A_{2j-1} q^{2j-1} + xy \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} B_{2j-1} q^{2j-1} + y^2 \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} C_{2j-1} q^{2j-1} \right]
$$

je pro $m > 4$ určeno volbou $\frac{m+1}{2}$ hodnot $A_1, B_1, C_1, C_3, \ldots, C_{m-4}$.

Důkaz. Hledáme-li řešení tvaru $e^{-\frac{q^2}{2}}$ krát polynom v q s nejvyšším exponentem q^m chceme, aby $A_{m+2}, A_{m+4}, \ldots$, $B_{m+2}, B_{m+4}, \ldots$ a $C_{m+2}, C_{m+4}, \ldots$ byla nulová. To nastane, pokud zvolíme $C_{m+2}, C_{m+4}, \ldots$ nulová, $C_{m-2} = A_{m-2} + iB_{m-2}$ a $C_m = \frac{-1}{2(m-1)}(2A_{m-2} + iB_{m-2})$. To jest tak, aby platily rovnosti

$$
0 = B_{m+2} = k(B_m + 2iC_m),
$$

$$
0 = A_{m+2} = l(2A_m + iB_m),
$$

kde k a l jsou příslušné konstanty. Řešení je tedy určeno volbou $\frac{m+1}{2}$ hodnot $A_1, B_1, C_1, C_3, \ldots, C_{m-4}$. □

Příklad 18. Řešení pro $A_1 = i, B_1 = 4, C_1 = 2$ a $C_3 = i$ je

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{q^2}{2}} \Bigg[& \left(\left(-\tfrac{1}{12} + \tfrac{5i}{48} \right) q^7 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{5i}{8} \right) q^5 + \tfrac{3i}{2} q^3 + iq \right) x^2 \\
& + \left(\left(-\tfrac{5}{24} - \tfrac{i}{6} \right) q^7 + \tfrac{i}{2} q^5 + (2+2i) q^3 + 4q \right) xy \\
& + \left(\left(\tfrac{1}{12} - \tfrac{5i}{48} \right) q^7 - \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{5i}{8} \right) q^5 + iq^3 + 2q \right) y^2 \Bigg].
\end{aligned}
$$

6.4 Řešení řádu k

V této sekci hledáme řešení tvaru

$$e^{-\frac{q^2}{2}}\Big[(A_1^k q + A_3^k q^3 + \ldots)x^k + (A_1^{k-1} q + A_3^{k-1} q^3 + \ldots)x^{k-1}y \\ + \ldots + (A_1^0 q + A_3^0 q^3 + \ldots)y^k\Big]. \qquad (6.4)$$

Lemma 6.4.1. Pro koeficienty $A_n^k, \ldots, A_n^0$ (n liché) ze vztahu (6.4) platí

$$\begin{aligned} 0 &= k\left((1-n)\,A_n^k + A_{n-2}^k\right) + iA_{n-2}^{k-1}, \\ 0 &= (k-1)\left((1-n)\,A_n^{k-1} + A_{n-2}^{k-1}\right) + 2iA_{n-2}^{k-2}, \\ &\vdots \\ 0 &= \left((1-n)\,A_n^1 + A_{n-2}^1\right) + kiA_{n-2}^0 \end{aligned}$$

nebo zapsáno jako rekurentní vztahy

$$\begin{aligned} A_n^k &= \frac{1}{k(n-1)}\left(kA_{n-2}^k + iA_{n-2}^{k-1}\right), \\ A_n^{k-1} &= \frac{1}{(k-1)(n-1)}\left((k-1)A_{n-2}^{k-1} + 2iA_{n-2}^{k-2}\right), \\ &\vdots \\ A_n^1 &= \frac{1}{(n-1)}\left(A_{n-2}^1 + kiA_{n-2}^0\right). \end{aligned}$$

Důkaz. Pokud opět vyjdeme ze vztahu (6.1), dostaneme soustavu k rekurentních rovnic pro $k+1$ posloupností koeficientů.

Koeficient $A_n^k = a_{k,0,n}$ je u $x^k q^n$, $A_n^{k-1} = a_{k-1,1,n}$ je koeficient u $x^{k-1}yq^n$ atd. a $A_n^0 = a_{0,k,n}$ je koeficient u $y^k q^n$. □

Podobně jako v předchozích případech k vypočtu koeficientů $A_n^k, \ldots, A_n^0$ je potřeba zadat $A_1^k, \ldots, A_1^0, A_3^0, \ldots, A_{n-2}^0$.

Následující tvrzení podobně jako Tvrzení 6.2.3 a Tvrzení 6.3.3 dává popis řešení tvaru $e^{-\frac{q^2}{2}}$ krát polynom v proměnné q s nejvyšším exponentem m, kdy toto řešení je homogenní polynom homogenity k v proměnných x, y.

Tvrzení 6.4.2. Řešení tvaru

$$e^{-\frac{q^2}{2}}\left[x^k \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} A_{2j-1}^k q^{2j-1} + x^{k-1}y \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} A_{2j-1}^{k-1} q^{2j-1} + \ldots + y^k \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} A_{2j-1}^0 q^{2j-1}\right]$$

je pro $m > 2k$ určeno volbou $\frac{m+1}{2}$ hodnot $A_1^k, \ldots, A_1^0, A_3^0, \ldots, A_{m-2k}^0$.

Důkaz. Opět požadujeme, aby $A_{m+2}^j, A_{m+4}^j, \ldots$ byly nulové pro $j = 0, \ldots, k$. Dále si uvědomme, že koeficienty $A_m^0, A_{m-2}^0, \ldots, A_{m-2k}^0$ jsou jednoznačně určeny požadavkem

$$0 = A_{m+2}^j = {}^j l\left(jA_m^j + i(k-j)A_m^{j-1}\right)$$

pro $j = k, \ldots, 1$, kde ${}^j l$ jsou příslušné konstanty.

Pokud má platit $0 = (A_m^1 + ikA_m^0)$, je $A_m^0 = \frac{i}{k}A_m^1$.

Dále pokud chceme $0 = (2A_m^2 + i(k-1)A_m^1)$, musí být $A_m^1 = \frac{2i}{k-1}A_m^2$. Koeficient A_m^1 je spočten pomocí A_{m-2}^0, tedy A_{m-2}^0 má určenou hodnotu.

Dále pokud má být $0 = (3A_m^3 + i(k-2)A_m^2)$, musí být $A_m^2 = \frac{3i}{k-2}A_m^3$. Koeficient A_m^2 je spočten pomocí A_{m-2}^0 a A_{m-2}^2, ale koeficient A_{m-2}^0 je již jednoznačně určen z minulého kroku, proto musí mít A_{m-2}^2 určenou hodnotu. Koeficient A_{m-2}^2 je spočten pomocí A_{m-4}^0, tedy A_{m-4}^0 má jednoznačně danou hodnotu.

Podobnými úvahami se dostaneme až k tomu, že A_{m-2k+2}^0 musí mít konkrétní podobu, aby platila rovnost $0 = (kA_m^k + iA_m^{k-1})$.

Shrňme předchozí úvahy. Polynomiální řešení v q s nejvyšším exponentem q^m je určeno volbou $\frac{m+1}{2}$ hodnot $A_1^k, \ldots, A_1^0, A_3^0, \ldots, A_{m-2k}^0$ pro $m > 2k$. $\square$

Minulé úvahy předpokládaly, že $m > 2k$, uvažme nyní dohromady jak případ $m < 2k$, tak i $m > 2k$. (Připomeňme, že uvažujeme pouze lichá m, protože jsme se omezili jen na operátor T_- působící na podprostoru lichých funkcí v proměnné q.)

Řešení tvaru $e^{-\frac{q^2}{2}}$ krát polynom v proměnné q s nejvyšším exponentem m, které je vůči proměnným x, y polynom homogenity k, je určeno volbou $\frac{m+1}{2}$ koeficientů A_j^m, jak říká následující tvrzení.

Tvrzení 6.4.3. Řešení tvaru

$$e^{-\frac{q^2}{2}}\left[x^k \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} A_{2j-1}^k q^{2j-1} + x^{k-1}y \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} A_{2j-1}^{k-1} q^{2j-1} + \ldots + y^k \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} A_{2j-1}^0 q^{2j-1}\right]$$

je určeno volbou $\frac{m+1}{2}$ koeficientů.

Důkaz. Na problém hledání řešení v požadovaném tvaru můžeme nahlížet jako na řešení soustavy homogenních lineárních rovnic. Pokud hledáme řešení homogenity k v proměnných x, y, bude v soustavě k rovnic pro $k+1$ neznámých pro každý stupeň $n = 3, 5, 7, \ldots, m+2$ exponentu u q (ze vztahu (6.1)). Tedy dohromady je $k\frac{m+1}{2}$ rovnic pro $(k+1)\frac{m+1}{2}$ neznámých. Z rozepsání rovnic (6.1) nahlédneme, že rovnice jsou na sobě lineárně nezávislé. Proto hodnost matice popisující soustavu je $k\frac{m+1}{2}$ a dimenze prostoru řešení je $(k+1)\frac{m+1}{2} - k\frac{m+1}{2}$. $\square$

6.5 Holomorfní řešení

V minulých kapitolách jsme diskutovali řešení, která byla polynomiální vůči proměnných x a y a lichá v proměnné q. Pojďme naše úvahy rozšířit dál.

Uvažme nejdříve řešení tvaru $z^n f(q)$, kde $f \in \mathbf{A}$ a $z := x + iy$. Dosazením do rovnice (5.7) pro jádro twistorového operátoru dostaneme

$$nz^{n-1}f(q) - nz^{n-1}q\frac{\partial}{\partial q}f(q) + i^2 z^{n-1}q^2 f(q) = 0.$$

Hledáme-li funkci $f(q)$, která řeší rovnici pro každé x, y, dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici

$$(1-q^2)f(q) = q\frac{\partial}{\partial q}f(q). \tag{6.5}$$

Rovnice má řešení $f(q) = qe^{-\frac{q^2}{2}}$. Tato funkce patří do prostoru $\mathbf{A}$, a tedy funkce

$$z^n qe^{-\frac{q^2}{2}}$$

jsou v jádru symplektického twistorového operátoru pro $n \in \mathbb{N}$. Mimo jiné se snadno přesvědčíme (v souladu s Větou 5.3.4), že platí

$$\Delta_{xy} z^n qe^{-\frac{q^2}{2}} = 0,$$

kde Δ_{xy} označuje Laplaceův operátor v proměnných x, y.

Situace je analogická, pokud hledáme řešení tvaru $h(z)f(q)$ pro $h(z)$ holomorfní funkci na $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Protože holomorfní funkce mají spojitou první derivaci, je podle derivace složené funkce $\frac{\partial}{\partial x}h(z) = h'(z)$ a $\frac{\partial}{\partial y}h(z) = ih'(z)$. Po dosazení těchto derivací do rovnice pro jádro T_0 (5.7) a úpravě, opět dostáváme rovnici (6.5) a její řešení je tvaru $h(z)qe^{-\frac{q^2}{2}}$.

Věta 6.5.1. Pro každou funkci $h(z)$ holomorfní na celém $\mathbb{R}^2$, $z := x + iy$, je funkce

$$h(z)qe^{-\frac{q^2}{2}}$$

v jádru symplektického twistorového operátoru T_0.

Důkaz. Viz úvahy před větou. □

Seznam použité literatury

[1] Cannas da Silva, A. *Lectures on Symplectic Geometry.* Springer-Verlag, 2006. dostupné na www.springerlink.com.

[2] Černý, I. *Foundations of Analysis in Complex Domain.* Praha: Academia, 1992. ISBN 80-200-0197-2.

[3] Borel, A., Wallach, N. R. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups.* Second Edition USA: American Mathematical Society, 2000. ISBN 0-8218-0851-6.

[4] Dixmier, J. *Enveloping algebras.* Berlin: Akademie-Verlag Berlin, 1977. ISBN 9780821805602.

[5] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. *Analysis, Manifolds and Fhysics.* Revised Editional. Amsterodam: North-Holland, 1982. ISBN 0-444-86017-7.

[6] Folland, G. *Harmonic Analysis in Phase Space.* Princeton, Princeton University Press, 1989. ISBN 0-691-08527-7.

[7] Gelfand, I., Retakh, V., Shubin, M. *Fedosov manifolds.* Adv. Math. 136, No.1., 1998, pp. 104-140.

[8] Habermann, K., Habermann, L. *Introduction to Symplectic Dirac Operators, Lecture Notes in Math.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. ISSN 0075-8434.

[9] Hatcher, A. *Algebraic Topology.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-79540-0.

[10] Knapp, A. W. *Representation Theory of Semisimple Groups.* Princeton: Princeton University Press, 1986. ISBN 0-691-09089-0.

[11] Kolář, I., Michor, P. W., Slovák, J. *Natural Operations in Differential Geometry.* Electronic edition. Originally published by Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993, ISBN 3-540-56235-4, ISBN 0-387-56235-4.

[12] Kopáček, J. *Matematická analýza pro fyziky (IV).* Praha : Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-11-8.

[13] Krýsl, S. *Complex of twistor operators in spin symplectic geometry.* Monatshefte fuer Math., Vol. 161, No. 4, Springer-Verlag, Vienna, 2010.

[14] Krýsl, S. *Howe duality for metaplectic group acting on symplectic spinor valued forms.* submitted to Jour. Lie Theory.

[15] Krýsl, S. *Symplectic spinor valued forms and operators acting between them.* Archivum Math. Brno, Vol. 42, 2006 s. 279-290.

[16] Lebedev, N. N. *Special Functions and their Application.* New York: Dover, 1989. ISBN 0-486-60624-4.

[17] WEIL, A. *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires.* Acta Math, 111, 1964 s. 143-211.